

長期岩盤挙動評価のための微視的 観点による基礎的研究

(動力炉・核燃料開発事業団 委託研究成果報告書)

技 術 資 料		
開示区分	レポ ー ト No.	受 領 日
T	J1603 97-001	1997. 5.27.
この資料は技術管理室保存資料です 閲覧には技術資料閲覧票が必要です 動力炉・核燃料開発事業団 技術協力部技術管理室		

1997 年 3 月

名古屋大学

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせ下さい。

〒107 東京都港区赤坂 1-9-13

動力炉・核燃料開発事業団

技術協力部 技術管理課

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to:

Technical Evaluation and Patent Office

Technological Management Division

Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation

9-13, 1-chome, Akasaka, Minato-ku, Tokyo 107, Japan

© 動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation) 1997

長期岩盤挙動評価のための微視的観点による基礎的研究

市川 康明[※]

要 旨

岩盤の1万年以上にも渡る長期の挙動を予測するためには、岩石・岩盤のミクロ構造まで考慮に入れた精度の高い解析が要求される。本研究では、まず、日本全国に分布し、岩盤構造物に広く利用されている花崗岩を用いて既存マイクロクラックの分布状態を観察した。

岩盤の長期時間依存性挙動として、一定の荷重条件の下でひずみが増加していくクリープ現象と、一定の変位拘束条件の下で応力が緩和していく応力緩和現象が挙げられるが、ここでは、水浸条件下において応力緩和挙動に注目した室内実験を行った。実験供試体は上述の花崗岩である。この実験では供試体端面の変位を拘束した場合の時間経過に伴う応力変化を計測し、マイクロクラックの変化を観察した。

つぎに、岩石の構成粒子レベルの応力緩和挙動を把握するために、花崗岩供試体を多結晶体で粘弾性的物性を有する複合材料と仮定し、均質化法(Homogenization Method)を用いて数値解析を実施した。均質化法とは、微視的には非均質な構造が周期的かつ規則的に配列された物体に対し、その構造を反映した巨視的な材料定数を求め、それを用いた全体解析により得られる巨視的な挙動から微視レベルの「応力分布」を求めることができる数学的な解析手法である。ここでは、上述のマイクロクラック分布の観察データを基に、微視的レベルにおけるユニットセルや界面の形状を定め、界面の粘弾性係数の違いによって、巨視的な変形特性や応力状態、あるいは微視的な応力分布がどのように変化するかについて考察した。

さらに、岩質材料がその変形・破壊過程において著しい非線型性と時間依存性を示す場合を考慮すべく、均質化法による弾粘塑性解析の手法を開発した。この手法の妥当性をチェックするために、粘土を想定した弾粘塑性材料および地盤構造物の応力緩和について数値解析を実施した。

本報告書は、名古屋大学が動力炉・核燃料開発事業団の委託により実施した研究の成果である。

契約番号： 080D0119

事業団担当部課室および担当者：東濃地科学センター 地質環境研究室 坪田浩二

※：名古屋大学工学部地圏環境工学教室

Microscopic Study of Rock for Estimating Long-Term Behavior

Yasuaki Ichikawa[※]

Abstract

One must consider micro-structures of rock and rock mass in order to predict the long-term behavior for more than ten thousand years. First we observe the micro-crack distribution of granite which is commonly distributed in Japan, and is widely used for several structures.

The creep under constant load and the relaxation under constant displacement are typical time dependent phenomena, and we performed a series of relaxation tests under microscope observation in laboratory. The specimen that is preserved in water is granite as mentioned above. The aim of this experiment is to observe the sequential propagation of micro-cracks and its affect to the macroscopic response of the rock material under relaxation state.

Next, a viscoelastic homogenization method is applied for analyzing the behavior of granite that is composed of several kinds of minerals (i.e., a polycrystalline material). The homogenization method developed for analyzing mechanics of composite materials is a mathematical theory that can describe the macroscopic behavior accounting for the microscopic characteristics with periodic micro-structures. In this study, it is applied to a polycrystalline rock which involves a few minerals and micro-cracks.

Furthermore, it is required to apply the homogenization analysis for rock materials which show a nonlinear time dependent behavior, so we develop a new elasto-visco-plastic homogenization theory, and its validity is checked for some ground structures made by clay.

Work performed by Nagoya University under contract with Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation

PNC Liaison: Geological Environment Research Section, Tono Geoscience Center

Koji Tsubota

※: Department of Geotechnical and Environmental Engineering, Nagoya University

目 次

第 I 部： 花崗岩の応力緩和実験と結晶界面の時間依存性を考慮した

均質化線形粘弾性解析	1
1. 序論	2
2. マイクロクラック観察	3
2.1 薄片作製とマイクロクラックの観察方法	3
2.3 観察結果および考察	5
3. 応力緩和実験	8
3.1 実験装置	8
3.2 供試体	10
3.3 ロードセル	10
3.4 実験方法	11
3.5 実験結果および考察	13
3.5.1 一軸強度試験の結果	13
3.5.2 応力緩和実験結果と考察	13
4. 均質化法による粘弾性解析	19
4.1 均質化法概念	19
4.2 釣合問題の定式化とラプラス変換	20
4.3 ラプラス空間における均質化法	22
4.3.1 漸近展開の導入	22
4.3.2 $O(\varepsilon^{-2})$ 項について	23
4.3.3 $O(\varepsilon^{-1})$ 項について	23
4.3.4 $O(\varepsilon^0)$ 項について	24
4.3.5 ラプラス逆変換	25
4.3.6 実空間における応力等の算定	26
4.4 解析条件	28
4.4.1 ユニットセル形状の決定	28
4.4.2 材料物性値	29
4.4.3 せん断弾性係数の決定	31
4.5 解析結果および考察：長期応力緩和挙動の予測とマイクロ応力の変化	32
5. 結論	35
参考文献	36
付録 A.1 石英のクリープ実験	37
A.2 稲田花崗岩の顕微鏡写真	39
A.3 花崗岩の粘弾性解析におけるユニットセルの有限要素	40

第Ⅱ部： 均質化法を用いた弾粘塑性地盤の解析	43
1. 序論	44
2. Perzyna/Adach-Oka 理論による粘塑性体の構成則	45
2.1 Perzyna の超過応力粘塑性理論	45
2.2 足立・岡モデルによる粘性土の構成則	46
3. 弾粘塑性問題における均質化理論	48
3.1 弾粘塑性体について	48
3.1.1 非線型問題における静的釣合方程式	48
3.2.2 弾粘塑性体の構成則	49
3.2 弾粘塑性体における均質化理論	51
3.2.1 均質化 (Homogenization) 法の概要	51
3.2.2 弾粘塑性体への均質化法の適用	52
4. 数値解析手法と解析例	56
4.1 解析方法とフローチャート	56
4.2 解析モデルと解析条件	57
4.3 解析例	58
4.3.1 粘塑性成分の評価と計算ステップの考察 (解析 1)	58
4.3.2 初期圧密応力に関する考察 (解析 2)	59
4.3.3 地盤改良の解析 (解析 3)	60
4.3.4 ミクロ配置の全体解析への影響 (解析 4)	62
5. 結論	68
参考文献	68
全体のまとめと今後の方針	69

第I部：花崗岩の応力緩和実験と結晶界面の時間依存性を考慮した
均質化線形粘弾性解析

1. 序論

岩盤の1万年以上にも渡る長期の挙動を予測するためには、岩石・岩盤のマイクロ構造まで考慮に入れた精度の高い解析が要求される。本研究では、まず、日本全国に分布し、岩盤構造物に広く利用される花崗岩を用いて既存マイクロクラックの分布状態を顕微鏡観察する。

岩盤の長期時間依存性挙動の例として、一定の荷重条件の下でひずみが増加していくクリープ現象と、一定の変位条件の下で応力が緩和していく応力緩和現象が挙げられる。ここでは、水浸条件下において応力緩和挙動に注目した室内実験を行う。実験供試体は上述の花崗岩を用いた。この実験では供試体端面の変位を拘束した場合の時間経過に伴う応力変化を計測し、マイクロクラックの変化を観察する。

つぎに、岩石の構成粒子レベルにおける応力緩和挙動を把握するために、花崗岩供試体を多結晶体で粘弾性的物性を有する複合材料と仮定し、均質化法 (Homogenization Method) を用いて数値解析を実施する。

均質化法とは、微視的には非均質な構造が周期的かつ規則的に配列された物体に対し、その構造を反映した巨視的な材料定数を求め、それを用いた全体解析により得られる巨視的な挙動から微視レベルの「応力分布」を求めることができる数学的な解析手法である。ここでは、上述のマイクロクラック分布の観察データを基に、微視的レベルにおけるユニットセルや界面の形状を定め、界面の弾性係数の違いによって、巨視的な変形特性や応力状態、あるいは微視的な応力分布がどのように変化するかについて考察する。

2. マイクロクラック観察

2.1 薄片作製とマイクロクラックの観察方法

花崗岩には、外力を加えると割れやすいほぼ垂直に交わる3つの弱面が存在することが知られている。これを石目といい、割れやすい面からリフト面、グレイン面、ハードウェイ面という。今回は、花崗岩に存在するマイクロクラックを詳細に観察するために、粗粒と細粒の花崗岩を用い、鉱物観察用薄片(0.03mm)より約3~4倍厚い6枚の薄片を、図2.1のように3つの石目に沿って作成した。この薄片を偏光顕微鏡を使って1.5cm×1.0cmの範囲について40倍で、オープンニコルとクロスニコル下において縦横5分割し、2種類の連続写真を撮影し、連続写真群を1枚につなぎあわせた。写真2.1~2.2に、C-1のオープンニコルとクロスニコルの顕微鏡写真を示す。顕微鏡写真の上にトレーシングペーパーを載せ2種類の写真を比較しながら、マイクロクラックをトレースした(写真2.3)。その後図2.2(b)で示した方法で縦5本、横5本のスキャンラインを引いてその上に載ったクラックのみ角度、長さ、クラックの間隔を計測した。

今後、図2.1で示したように粗粒供試体薄片にはC-1、2、3、細粒供試体薄片にはF-1、2、3と名前をつけて区別する。

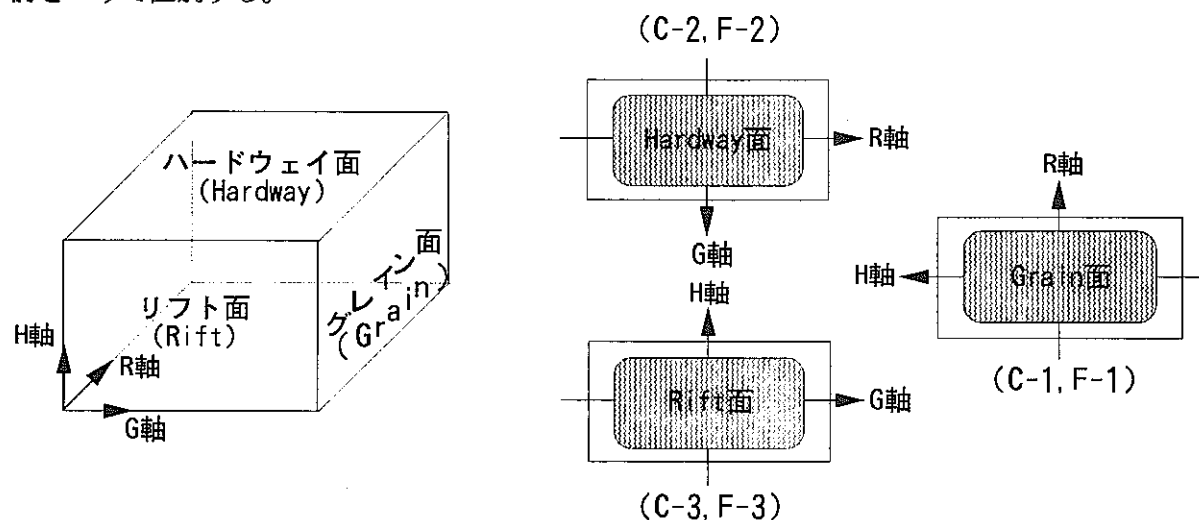


図2.1 薄片の作製方法

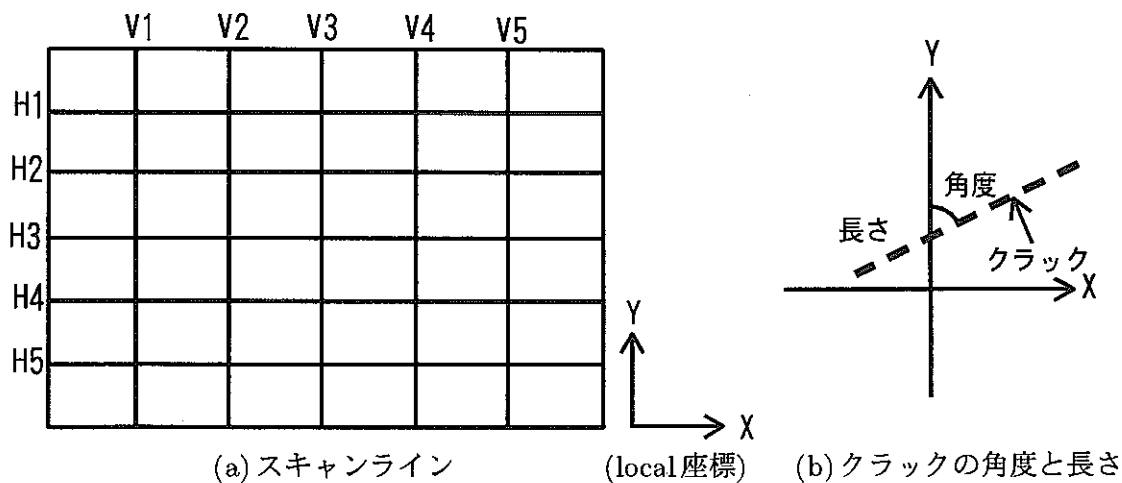


図2.2 クラックの測定方法



写真2.1 C-1顕微鏡写真(クロスニコル)

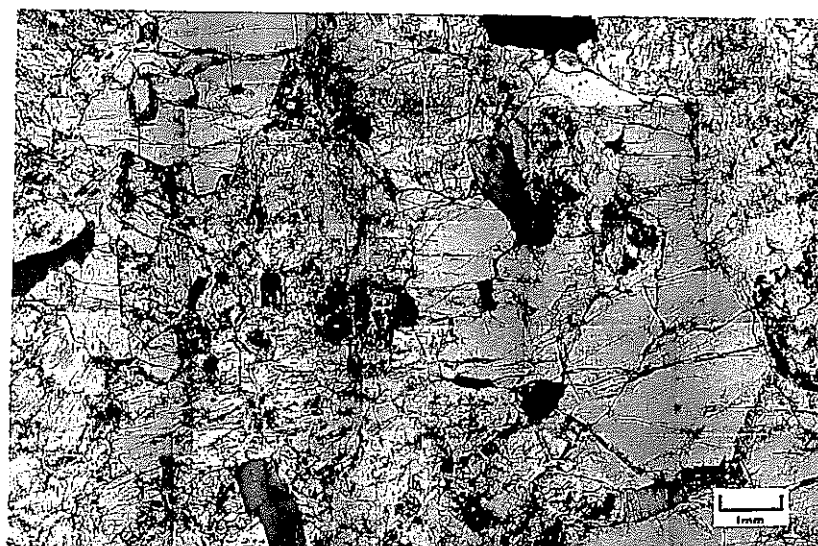


写真2.2 C-1顕微鏡写真(オープンニコル)

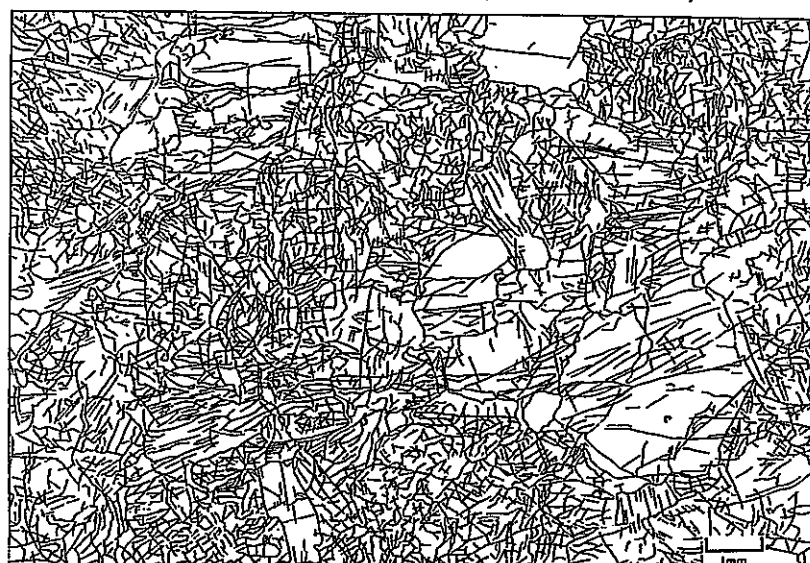


写真2.3 マイクロクラックのトレース

2.2 観察結果および考察

図2.3～図2.5に示したマイクロクラックの角度分布から分かるように、どの石目の面においてもマイクロクラックは 0° と 90° の方向に比較的多く分布している。すなわち、石目とマイクロクラックの多く分布している方向は一致している。更に詳しく見てみると、C-1、F-1は 90° 付近に多く、C-2、F-2は比較的均等に、C-3、F-3は 0° 付近に多く分布していることから判る。粗粒と細粒で比較してみると、細粒の花崗岩よりも粗粒の花崗岩の方が、角度分布の偏りが大きい。図2.6にマイクロクラックの間隔の分布を示す。すべての薄片においてほとんど同じ分布を示すことが分かる。つぎに、石目に関するマイクロクラックが角度 $0^\circ \pm 10^\circ$ と $90^\circ \pm 10^\circ$ にあると考え、図2.7にF-1とC-1の $0^\circ \pm 10^\circ$ と $90^\circ \pm 10^\circ$ のマイクロクラックの長さの分布を示す。細粒の花崗岩のほうが粗粒の花崗岩よりも長さが短い範囲に多く分布している。 $0^\circ \pm 10^\circ$ と $90^\circ \pm 10^\circ$ の分布にも違いが見られ、粗粒の花崗岩は $90^\circ \pm 10^\circ$ のマイクロクラックの方が長さが長い範囲に多く分布している。図2.8に全ての薄片の $0^\circ \pm 10^\circ$ と $90^\circ \pm 10^\circ$ のマイクロクラックの数と平均長を立体的かつ模式的に示したものを示す。図の中にあるN値は、スキャンラインの1cmあたりのマイクロクラックの本数で、L値はマイクロクラックの平均長である。図では線の数でN値を表し、線の長さがL値を表している。これから粗粒の花崗岩ではリフト面とグレイン面には、ほぼ同じ数のマイクロクラックが存在するが、ハードウェイ面にはその半分程度しか存在していないことが判る。また、マイクロクラックの長さについては、リフト面とグレイン面のクラックの方が、ハードウェイ面のそれよりも1.5倍程度長いことが分かる。細粒の花崗岩も粗粒の花崗岩と同じような傾向が見られるが、クラックの数、長さ共に各面の違いはそれほどなく、また、全ての方向に分布しているのが分かる。

マイクロクラック観察結果から得られた結論は以下のとおりである。

- 石目の方向とマイクロクラックが多数分布している方向は一致している。すなわち、クラックは石目に沿って分布していると言える。
- リフト面やグレイン面よりもハードウェイ面上に多くのクラックが分布し、しかも平均長が長い。
- 細粒の花崗岩よりも粗粒の花崗岩の方がクラックの平均長が長い。

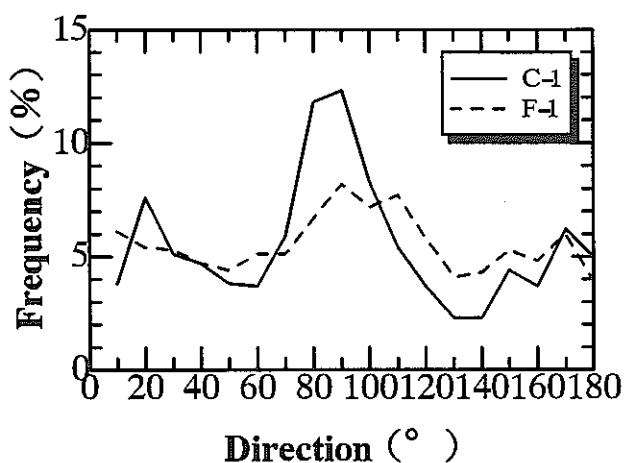


図2.3 C-1、F-1に含まれる
マイクロクラックの角度分布

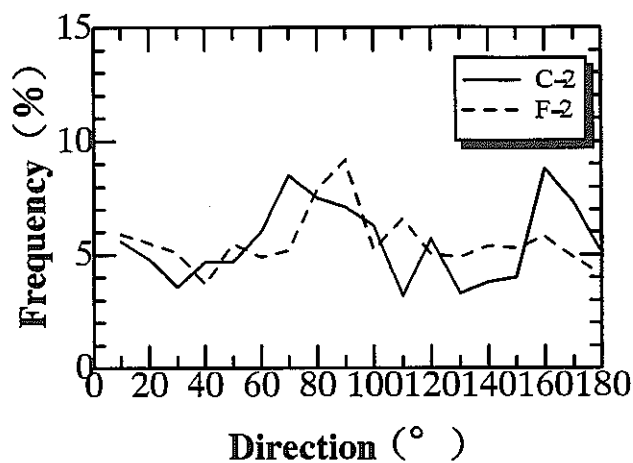


図2.4 C-2、F-2に含まれる
マイクロクラックの角度分布

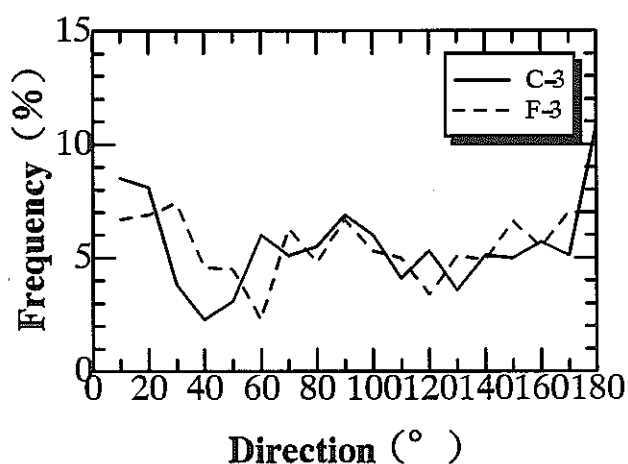


図2.5 C-3、F-3に含まれる
マイクロクラックの角度分布

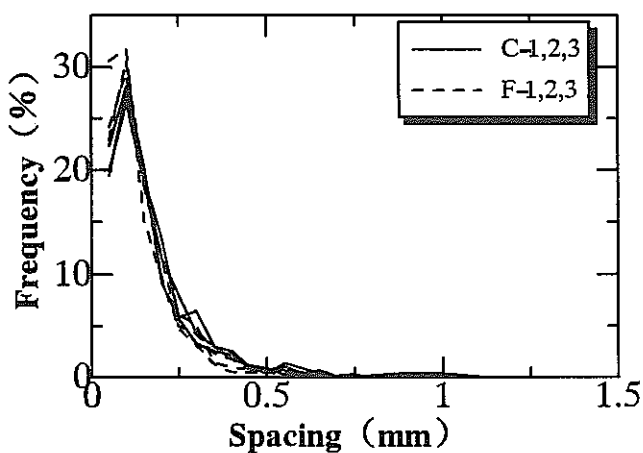


図2.6 マイクロクラックの間隔分布

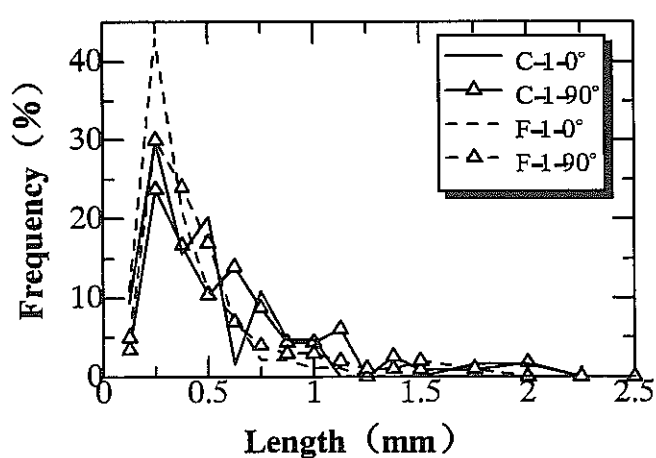


図2.7 マイクロクラックの長さ分布

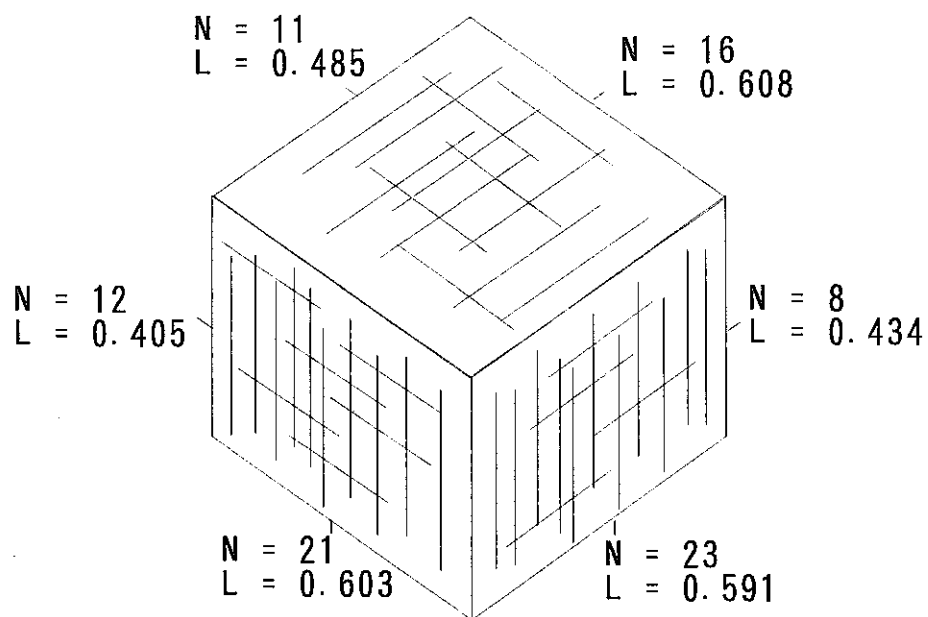


図2.7 粗粒の花崗岩のクラック分布

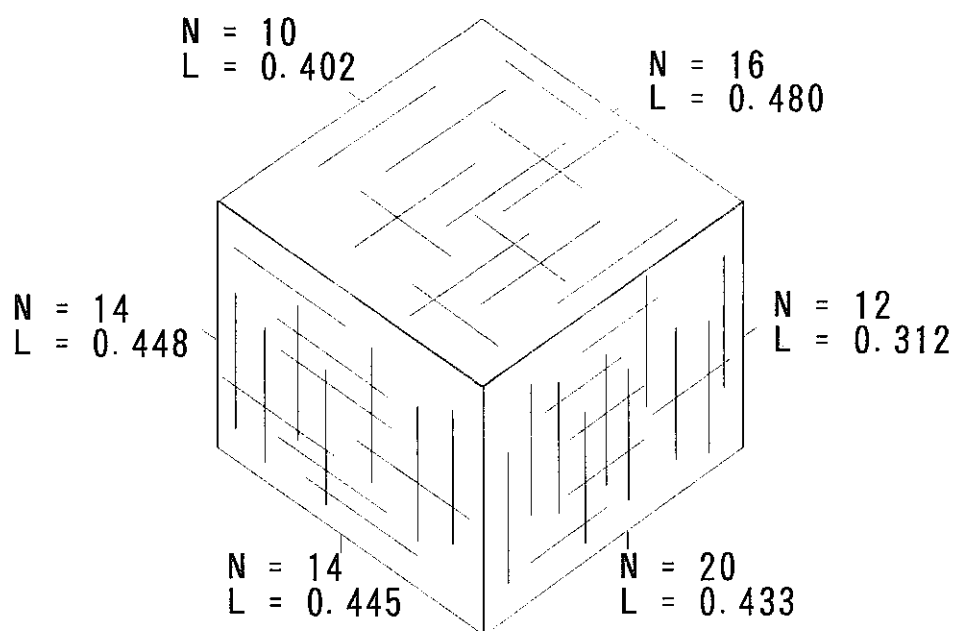


図2.8 細粒の花崗岩のクラック分布

3. 応力緩和実験

3.1 実験装置

実験システムは図3.1のように3つのサブシステムすなわち載荷装置、計測装置、観察装置で構成されている。

載荷装置は油圧式ポンプ、載荷試験機によって構成されている。載荷装置の詳細を図3.2に示す。油圧式ポンプによって加えられた圧力は、油圧シリンダーとピストンを通して金属載荷板に達し、花崗岩の一軸圧縮強度まで載荷することが可能となっており、また、変位固定用ネジによって載荷板を任意の位置に固定できる。岩石供試体を設置する場所は箱型になっており(圧力セル)、供試体が水で飽和した状態で実験することが可能である。

計測装置はデジタルひずみ測定器(TDS-301)、パーソナルコンピュータ(EPSON PC-286V)によって構成されている。供試体のひずみは、載荷装置に取り付けられた変位計(東京測器 CDP-10)により軸ひずみが計測される。また、軸応力はロードセル(東京測器 DM6820)により計測される。計測データはこれらのセンサーからデジタルひずみ計測器を介してパーソナルコンピュータに入力される。応力あるいは軸ひずみは、実験中リアルタイムで画面上に数値や応力-時間、応力-ひずみグラフとして表示される。同時に計測データはデジタルデータとしてハードディスク内に保存される。

観察装置は、実体顕微鏡、CCDビデオカメラ、モニター、ビデオ、ビデオプリンター、スチルカメラによって構成されている。顕微鏡では供試体の表面にライトをあて(同軸照射装置と補助照射装置を併用)10~40倍の画像が観察できる。マイクロクラックの進展を連続撮影する手段は2つある。1つはビデオに記録する方法で、実験を再現することが可能であり、実験終了後にビデオプリンターを通して任意の画像を取り出すことができる。もう一つは、スチルカメラを用いて一定時間ごとに記録する方法である。後者の方法ならより良い解像度で画像を得ることが可能である。

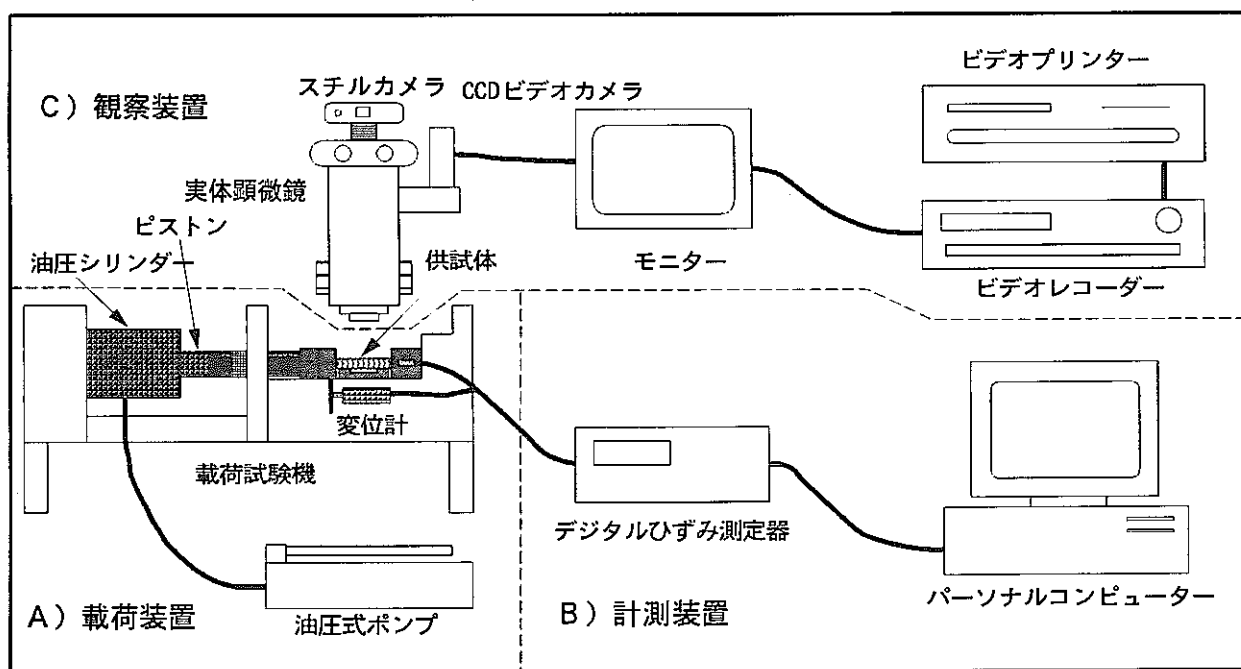


図3.1 実験システム

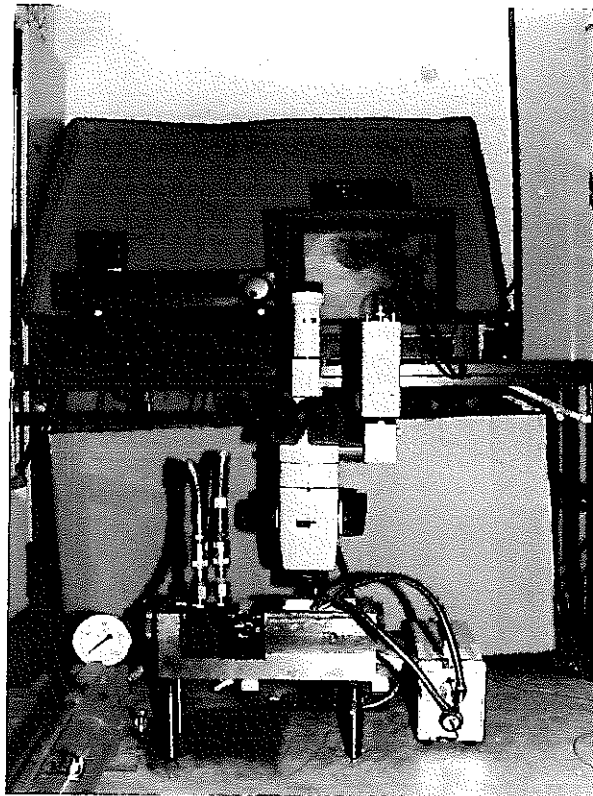


写真3.1 実験システム

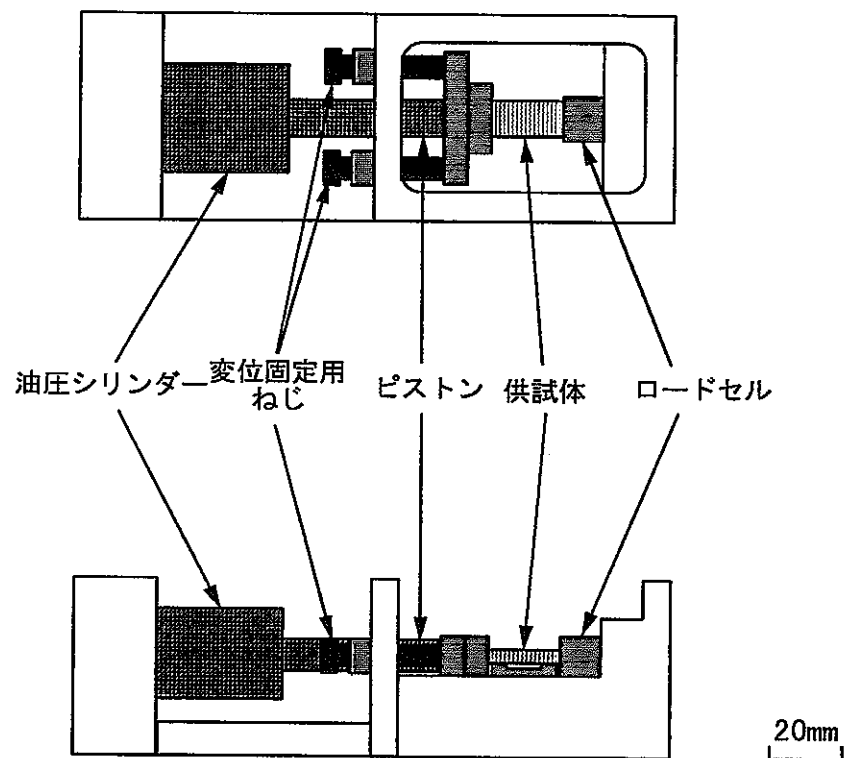


図3.2 载荷試験機

3.2 供試体

今回の実験では茨城県筑波地方で産する稲田花崗岩(粗粒と細粒)を供試体として用いた。この花崗岩を構成する主要鉱物は、石英・斜長石・アルカリ長石・黒雲母である。

供試体は図3.4のように3つの石目に沿って切り出した。供試体の寸法は、縦(载荷方向)40mm、横20mm、高さ5mmで、上部は観察しやすいように鏡面仕上げにし、それ以外は4/1000mm程度の精度で製作した(図3.3)。

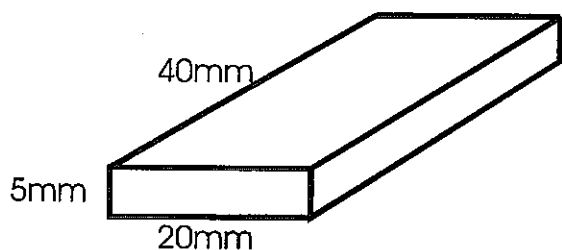


図3.3 供試体の形状

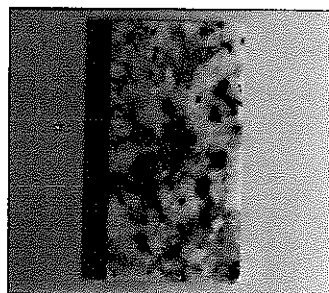


写真3.2 供試体

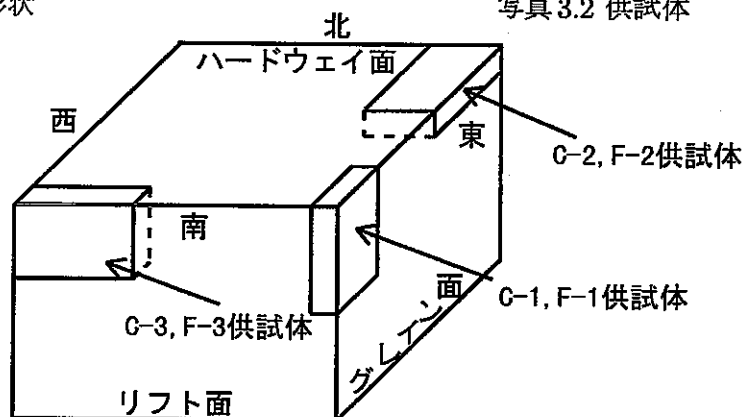


図3.4 供試体の作製方法

3.3 ロードセル

ロードセルは東京測器で設計、製作された。ロードセル本体の寸法は縦20mm、横20mm、高さ5mmで、供試体の载荷面と面一となるように作られている。セル上面には応力を測定するためのひずみゲージが貼付され、側面には左右のバランスを測定するためのひずみゲージが張ってある。また、今回水浸下で実験を行うため写真3.2のようにブチルゴム系コーティング剤、ポリサルファイド系コーティング剤を用いてゲージをコーティングした。

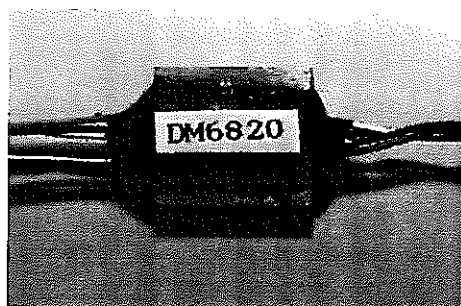


写真3.3 ロードセル

3.4 実験方法

今回の実験では、供試体を蒸留水で飽和させた状態で応力緩和実験を行った。事前に載荷試験機内に蒸留水を入れて予備実験を行った結果、2~3日後に試験機内が錆付き、また蒸留水も茶色く濁って錆が浮いてしまうことが分かった。このように錆びが発生すると供試体の性質に影響があることが考えられ、また、蒸留水が濁ると供試体の表面が汚れて、マイクロクラックの観察ができないことも判明した。そこで、試験機に換気扇用コーティング剤を塗付することにした。一方、局所的なひずみを計測するために、供試体にひずみゲージを貼って水中に浸したところ、ひずみゲージ自体は蒸留水の中であっても正常に働いたが、接着剤が、1週間程度経過した時点簡単にはがれてしまった。そこで、外部に設置した変位計を使って供試体全体の変位だけを計測することにした。

つぎに具体的な実験手順について述べる。

1) 供試体の準備

一軸圧縮強度試験と応力緩和実験を行うにあたり、花崗岩供試体を蒸留水で飽和させた。その方法はまず、真空ポンプを専用の容器につなぎ、容器の中には1~2cm程度の水深で蒸留水を入れておいて供試体を水浸させる。蒸留水はあらかじめ脱気させておく必要がある。つぎに容器を閉め、真空ポンプで約20~30分ほど脱気した後真空ポンプを止め、容器のコックを閉めて約1週間放置する。1週間後にコックをあけ実験を開始する。

2) 実験装置のコーティング

実験を始める前に、上述のように試験機がさびないようにコーティングを実施する。まず、試験機を清掃し、さらに、アセトンで湿らせた脱脂綿で汚れを落とす。その後、コーティング剤(商品名:換気扇リパック)を塗る。この時、金属載荷板やロードセルが接する面は精度が要求されるので、コーティング剤はなるべく薄く塗る。なお、コーティング剤は乾くまで約30分以上要する。

3) 供試体・ロードセル・変位計のセッティング

供試体を蒸留水の中から取り出して鏡面仕上げの面を上にし、ロードセル、供試体、金属載荷板の各中心線が一致するようにセットする。この時供試体とロードセルが接する面はずれないよう特に気をつける。つぎに、油圧ポンプにより金属載荷板が供試体に接してロードセルの計測値約10kgf/cm²になるまで応力を負荷する。供試体が固定されたのを確認した後供試体の表面が隠れるまで蒸留水を入れる。最後に、変位計を金属載荷板の中心線と平行に固定する。

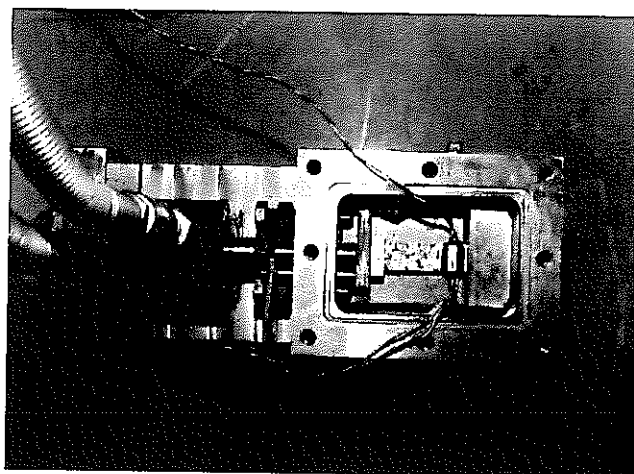


写真 3.4 供試体をセッティングした状態

4) 計測装置・観察装置の作動準備

GP-IB インターフェースを介してコンピュータとデジタルひずみ測定器をつなぎ、それぞれの電源を入れる。つぎに BASIC で作成した測定用のプログラムを起動させ、供試体の名前、寸法等のデータを打ち込む。

観察用のモニター、ビデオ、ビデオプリンター、照射装置の電源を入れる。顕微鏡の倍率を 10 倍に合わせ、モニターで供試体の表面を見ながら適当な場所を探し、照射装置の光量を調整して供試体の結晶の様子が観察できるよう焦点を合わせる。

5) 載荷

蒸留水を入れてから約 10 分そのまま放置した後、計測装置のイニシャルをとり計測を開始する。載荷速度を $2.0\text{kgf}/\text{cm}^2/\text{sec}$ とし、所定の応力レベルまで載荷する。所定の応力レベルまで達したら、変位固定用ねじを軽く締める。このとき、ねじを締め過ぎると金属載荷盤に応力が作用し、所定の応力レベルを越えてしまうので、注意を要する。つぎに、油圧ポンプの圧力を少しずつ抜いていく。同時に変位固定用ねじを強く締め、応力の変化が $\pm 10\text{kgf}/\text{cm}^2$ 以下になるようにする。油圧ポンプの圧力が完全に抜けたら変位固定用ねじのナットを締め、供試体の変位を固定する。

6) 計測開始

変位固定用ねじを締めた後、応力値が安定するまでコンピューターのモニターを見ながらしばらく待ち、安定を確認してから応力緩和実験の計測に入る。また、計測直前に供試体の状態をスチルカメラで写真に撮り、その後は、約 24 時間ごとに応力の値をノートに記録し、写真を撮った。なお、実験室の環境が恒温状態であり、湿度が低く蒸留水が常に蒸発するので、蒸留水の補充には充分に気をつけた。

3.5 実験結果および考察

3.5.1 一軸強度試験の結果

今回の応力緩和実験に先立ち、各サンプルについて一軸圧縮強度試験を行った。実験方法には応力緩和実験で使う同じ装置を用い、応力緩和実験と同様に水で飽和した状態で実験を行った。その結果を図3.5に示す。この図には粗粒の花崗岩では各5個、細粒の花崗岩では各3個の試験を行って得られた平均値と標準偏差が示してある。なお、応力緩和実験ではこの平均値（初期応力レベルと呼ぶ）を基準として、その70～75%、50～55%に対応するひずみを載荷した。

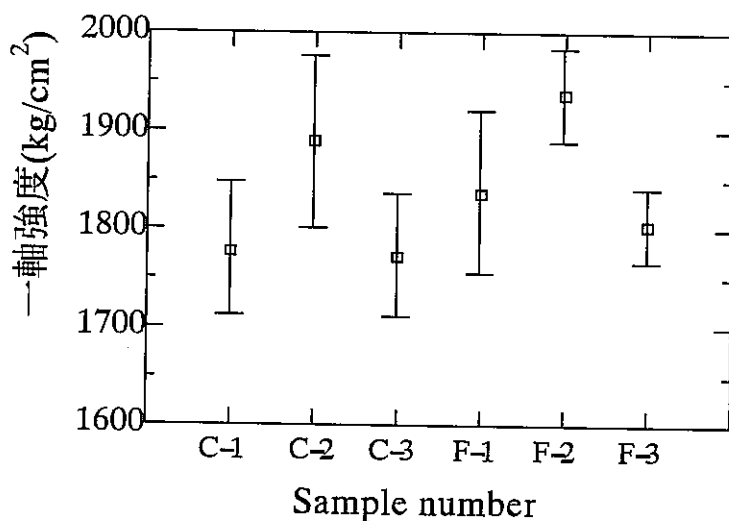


図3.5 一軸圧縮強度試験結果

3.5.2 応力緩和実験結果と考察

応力緩和実験は粗粒の花崗岩について初期応力レベル70～75%と、50～55%で行った。ここで、グラフ中に示すC-1-0というのは、C-1供試体の0番目に行った応力緩和実験ということである。グラフにはC-1供試体が1本、C-2供試体が3本、C-3供試体が4本の応力緩和曲線を示している。図3.6は初期応力レベルが50～55%の時の応力緩和曲線である150時間経過した時の応力レベルが安定状態にあるとすると、C-1-0、C-2-0、C-3-0はそれぞれ50kgf/cm²、90kgf/cm²、60kgf/cm²の応力緩和を示している。C-1-0、C-2-0、C-3-0の応力緩和曲線を詳しく見てみると、30時間くらいまでの応力の変化にかなり差があるが、それ以降はC-2-0、C-3-0は同様の応力緩和状態を示す。C-1-0は他の2つに比べて定常状態になるのが早い傾向がある。図3.7にC-2とC-3供試体の応力緩和曲線を示す。初期応力レベルが70～75%の時、C-3-1、C-3-2は80～90kgf/cm²、C-2-1は100kgf/cm²応力緩和を示している。C-2-1よりもC-3-1、C-3-2が応力緩和を示していないのは、初期応力レベル50～55%の時と同じである。C-3-3は異なる応力緩和を示している。これは初期応力レベルが高いために破壊に至った例である。

今回の応力緩和実験で得られた代表的な顕微鏡写真を写真3.5～3.12に示す。写真3.5～3.8はC-2-2の供試体で、初期応力レベルが60%の時に200kgf/cm²の応力緩和を示した時のものである。実験25時間後の写真でも分かるように長石中において、加圧方向に急激にマイクログラックが進展し、その後50時間や150時間後の写真では大きな進展が見られない。最初の20～30時間で急激に応力緩和

和を示していることから、応力緩和とマイクロクラックの進展は強い関連を有していると考えられる。。右の写真はC-3-2の供試体から、90kgf/cm²の応力緩和を示した場合であり、C-2-2に比べると急激な応力緩和を示しておらず、時間が経過するにつれ徐々にマイクロクラックが進展している。この様子は写真中央部の石英内や、雲母などの境界部分で見られる。2種類の写真にはともに、载荷軸方向にマイクロクラックの進展が多く見られる。このことからマイクロクラックの進展が、応力緩和に深く影響しているのが分かる。

つぎに、応力緩和速度と時間との関係を図3.8に示す。応力緩和速度は、 $\dot{\sigma} = \Delta\sigma / \Delta t$ で計算される。ただし、 Δt は数秒から10数時間まで様々である。これは、応力緩和が進むにつれて Δt を大きく取って観測したためである。図3.8から、全ての応力緩和実験についてほぼ同一であることが分かる。ただし、载荷直後から30時間程度は、供試体によってばらつきが大きい。なお、全ての実験で $\dot{\sigma} = 0$ の状態までは到達していないが、応力が減少し、一定値に収束していくことが分かる。

応力緩和は初期応力レベルに依存するといわれているが、今回の実験では、初期応力レベルにあまり関係ない応力緩和を示した。また、石目の方向と応力緩和現象の関係は、供試体の種類によって差は見られるもののサンプル数が少なく、良く分からなかった。

応力緩和実験から得られた結論を以下に述べる。

- マイクロクラックの進展が応力緩和に深く影響している。
- マイクロクラックは载荷方向に多く進展する。
- 時間経過に従って応力は減少し、一定値に収束していく。
- 実験開始から30~50時間までは各供試体の応力緩和速度に差はあるが、それ以降はばらつきは小さくなる。また、今回の実験の範囲内では、初期载荷ひずみの値は応力緩和速度に影響を及ぼさないと考えられる。

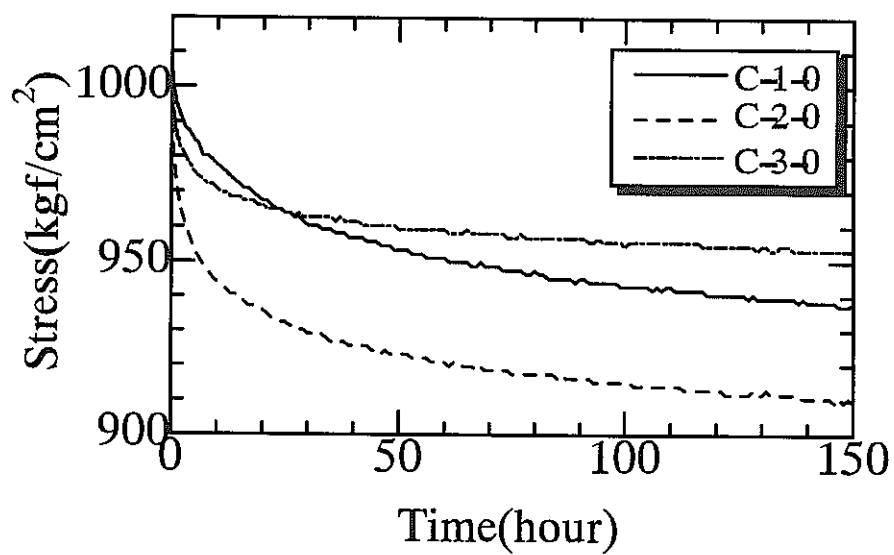


図3.6 初期応力が50～55%の時の応力緩和曲線

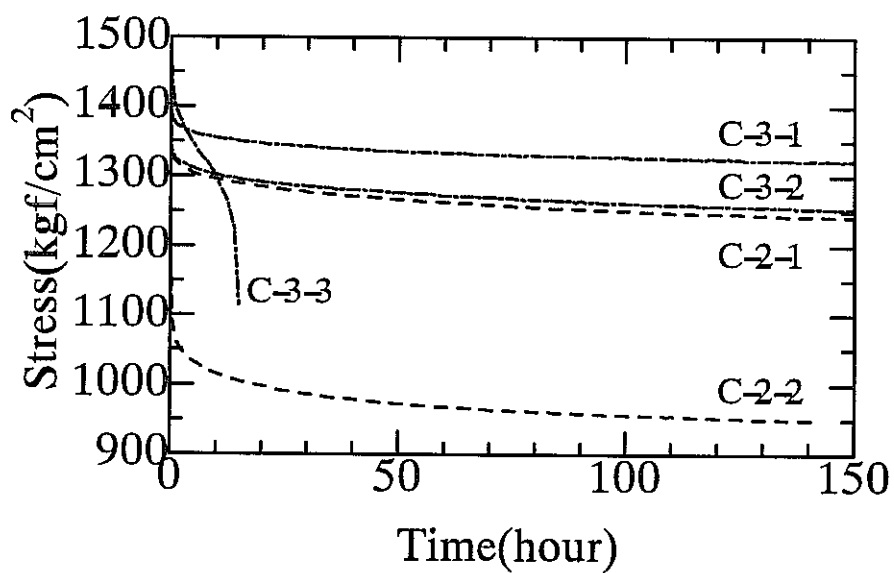


図3.7 C-2,C-3 供試体の応力緩和曲線

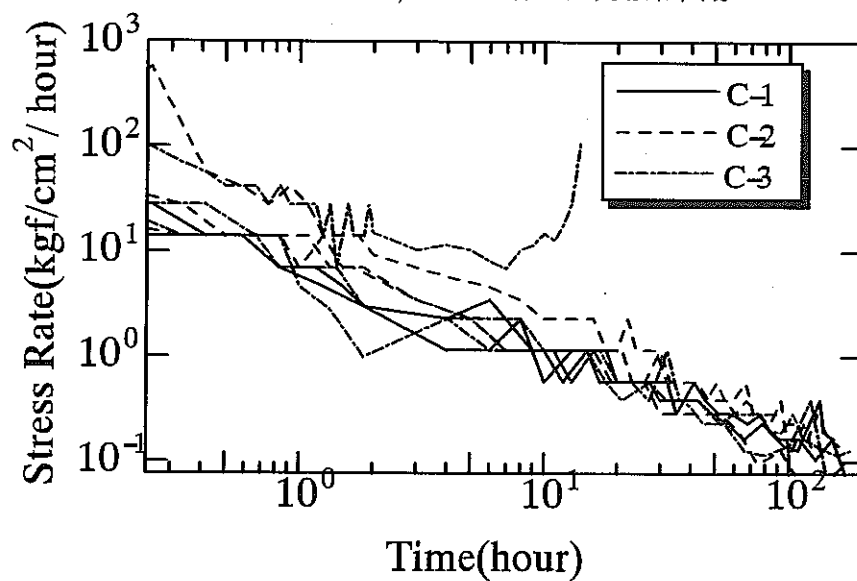


図3.8 応力緩和速度－時間関係

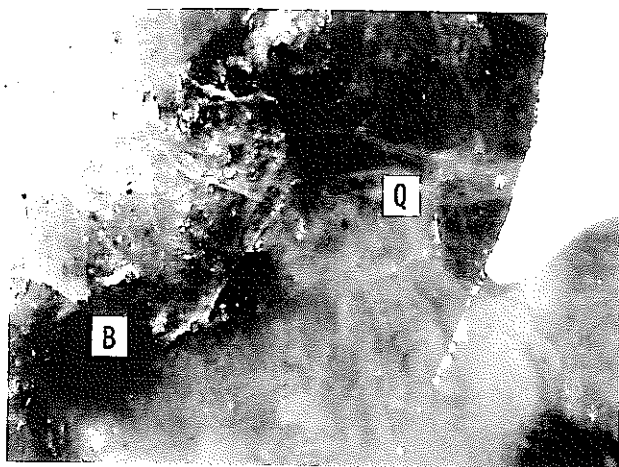


写真3.5 C-3-2 実験直後の結晶状態

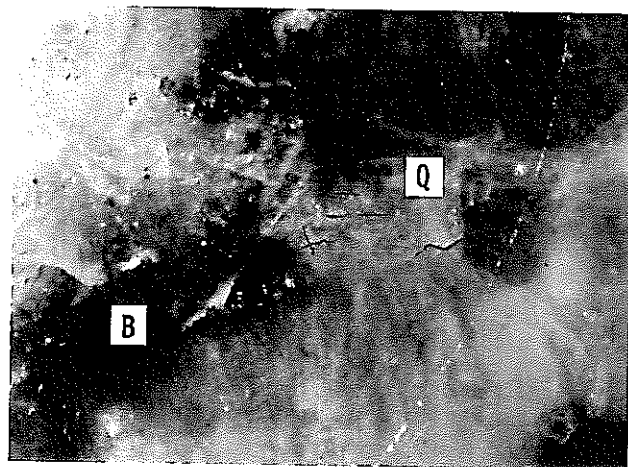


写真3.6 C-3-2 25時間後の結晶状態

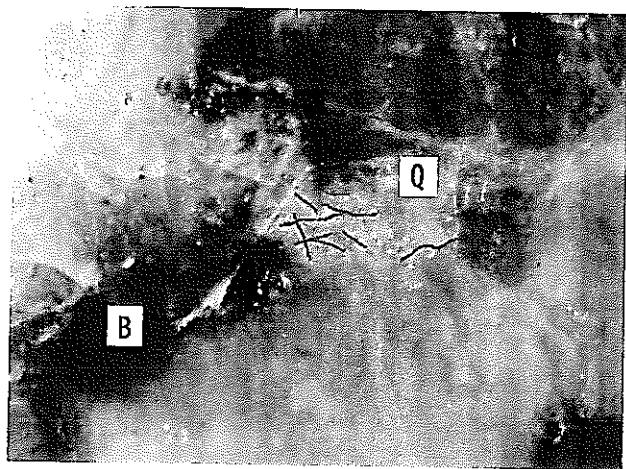


写真3.7 C-3-2 100時間後の結晶状態

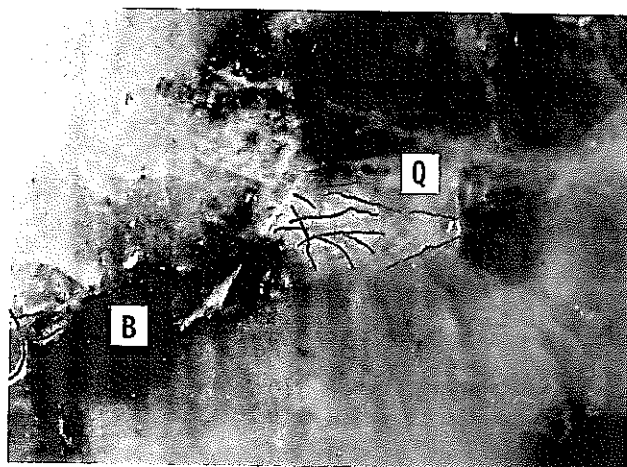


写真3.8 C-3-2 150時間後の結晶状態

F:長石 Q:石英 B:雲母
赤線:マイクロクラックの進展の様子

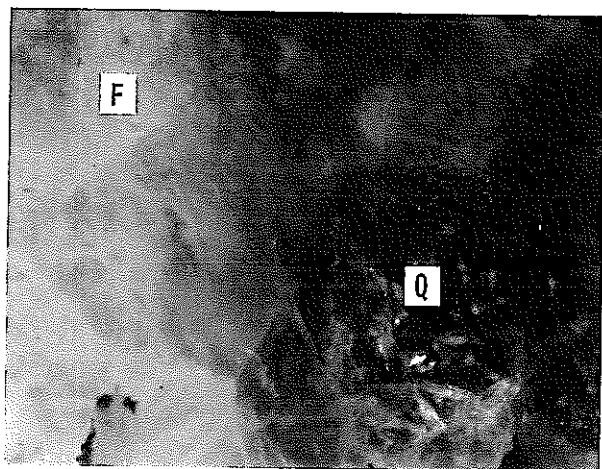


写真3.9 C-2-2 実験直後の結晶状態

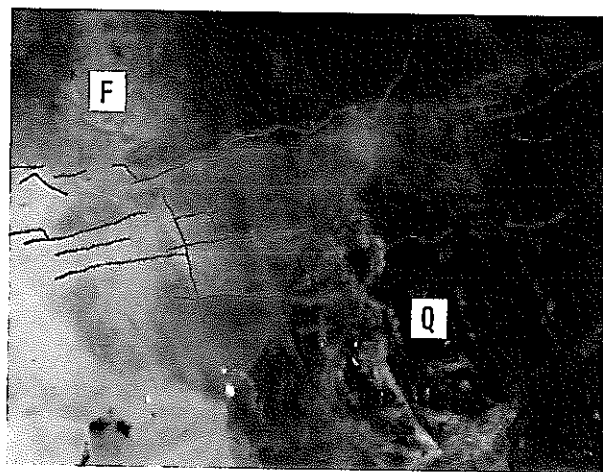


写真3.10 C-2-2 25時間後の結晶状態

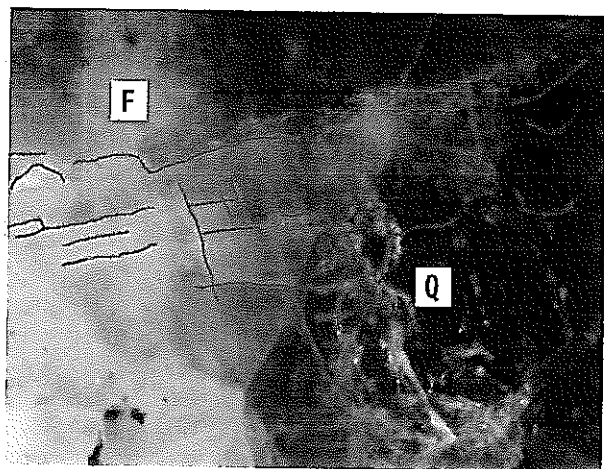


写真3.11 C-2-2 100時間後の結晶状態

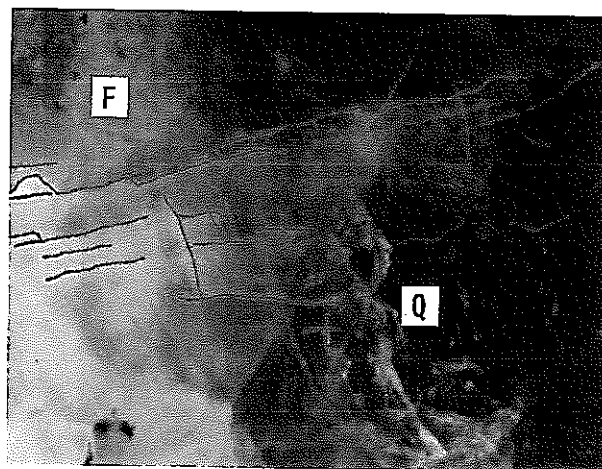


写真3.12 C-2-2 150時間後の結晶状態

F:長石 Q:石英 B:雲母
赤線:マイクロクラックの進展の様子

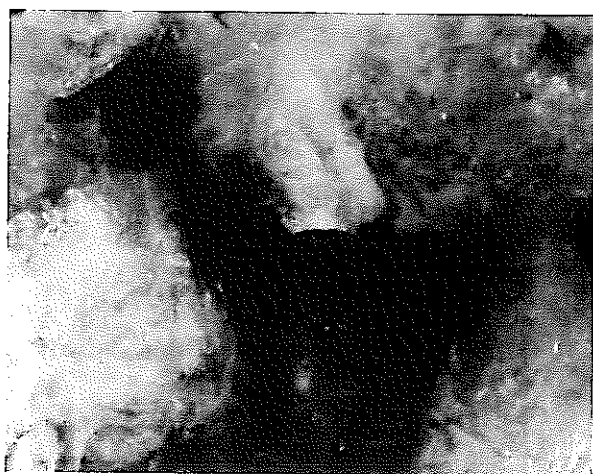


写真3.13 C-2-1 実験開始直後の結晶状態

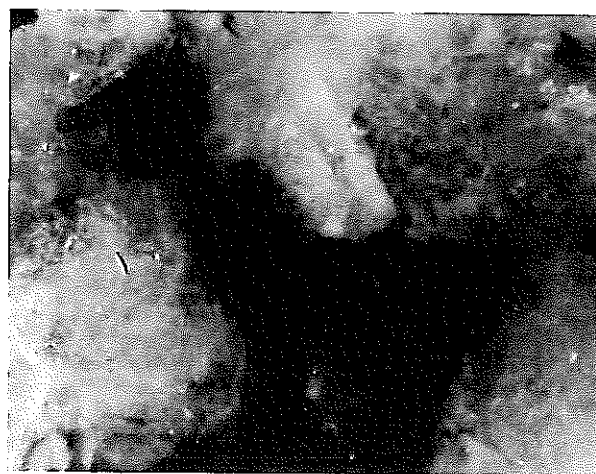


写真3.14 C-2-1 50時間後の結晶状態

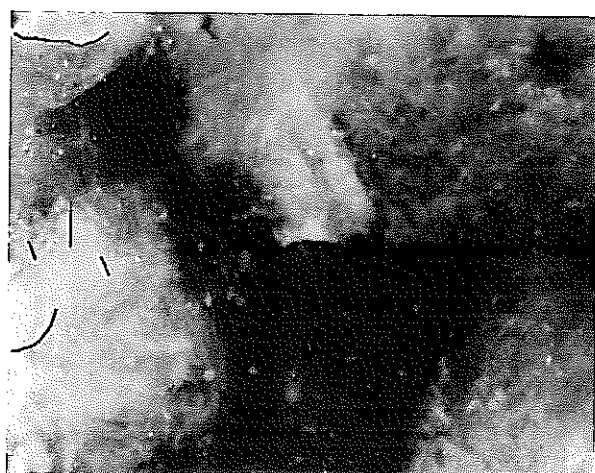


写真3.15 C-2-1 150時間後の結晶状態



写真3.16 C-3-3 実験開始直後の結晶状態

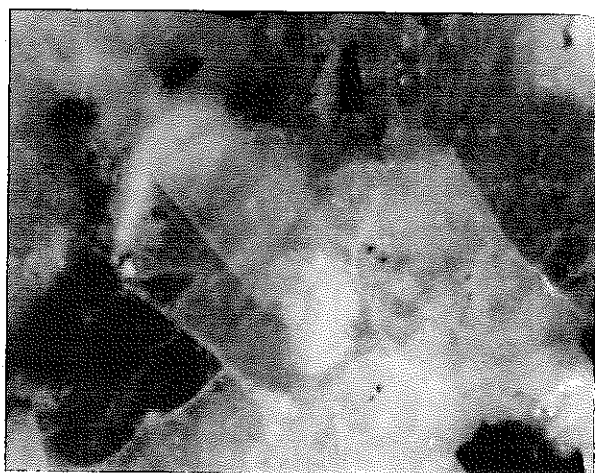


写真3.17 C-3-3 4時間後の結晶状態



写真3.18 C-3-3 破壊直後の結晶状態

赤線:マイクロクラックの進展の様子

4. 均質化法による粘弾性解析

4.1 均質化法の場合

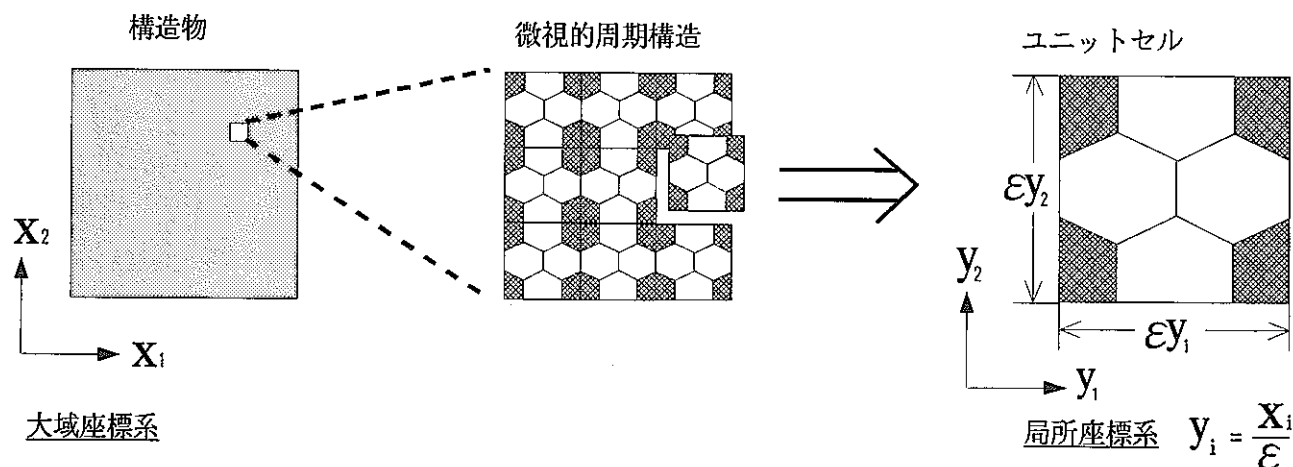


図 4.1 微視的周期構造を有する材料とユニットセル

図 4.1 に示すように、2 つの代表的スケールで表されるような微視的周期構造を有する材料を考える。ここで、材料全体の構造を記述するための座標を x とし、さらに微視的構造を記述するための座標として、 $y = x/\varepsilon$ を導入する。 y は微視的変数、 x は巨視的変数である。また、スケールが εY であるような基本構造をユニットセルと呼ぶ。均質化法では、対象構造物を十分小さい εY の周期構造と仮定して、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとれば、微視構造を考慮に入れた平均的な挙動が微視的な応力分布と併せて得られることになる。

巨視座標 x に加え、微視座標 y を導入した周期 Y の関数をつぎのように定義する。

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi(x, y) \quad (4.1)$$

$$\phi(x, y) = \phi(x, y + Y) \quad (4.2)$$

ϕ^ε を ε について漸近展開すると、つぎようになる。

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi^0(x, y) + \varepsilon \phi^1(x, y) + \varepsilon^2 \phi^2(x, y) + \dots \quad (4.3)$$

この漸近展開を支配方程式に代入することにより、巨視問題と微視問題が得られるわけだが、弾性問題については、既にさまざまな材料、構造物を用いて研究がなされている²⁾。

ここでは、線形粘弾性材料の物性をもつ複合材料構造物について均質化手法を導入する。

4.2 釣合問題の定式化とラプラス変換

弾性・粘弾性対応原理により、線形粘弾性問題の解は、この問題と同じ形状、境界条件を有する弾性問題における弾性定数をラプラス変換後の粘弾性定数で置換し、この解をラプラス逆変換することにより得られる。解析のフローチャートを図4.2に示す

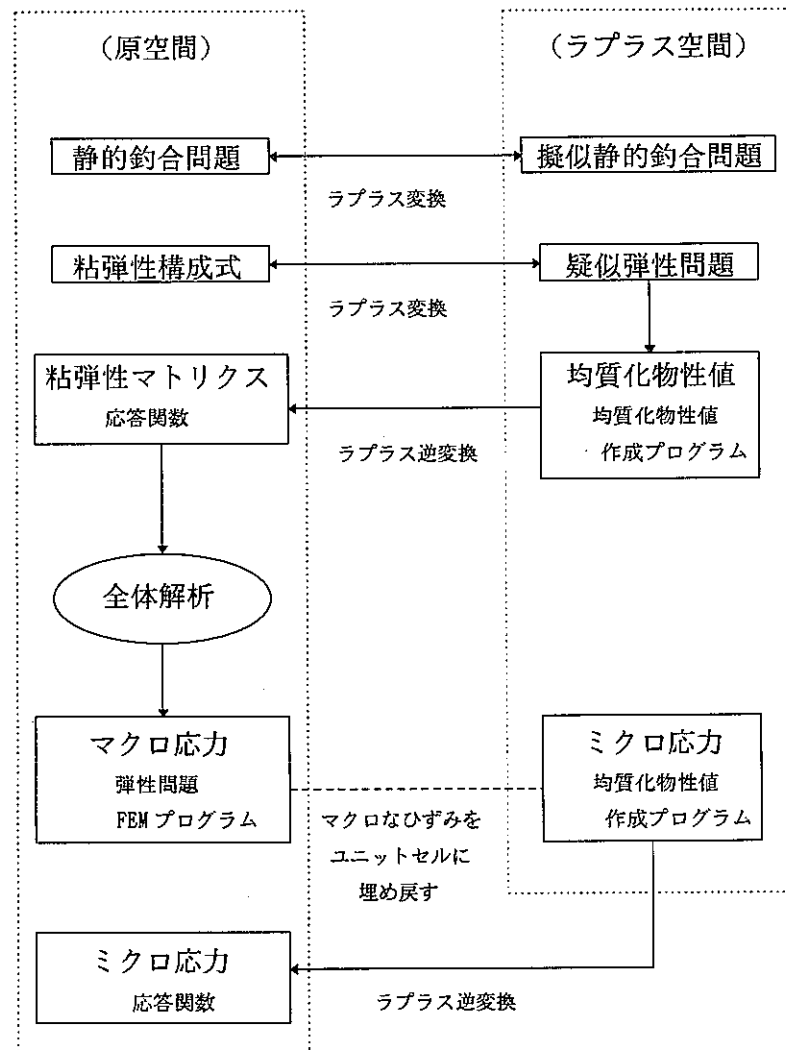


図4.2 解析フローチャート

いま、対象領域 Ω^e （境界 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_F$ 、 $\Gamma_u \cap \Gamma_F = \phi$ ）における境界値問題を時間 t についてラプラス変換する。なお、以下で関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ のラプラス変換を $\hat{\phi}(\mathbf{x}, p)$ と表す。 $(\hat{\phi}(\mathbf{x}, p) = \int_0^\infty \phi(\mathbf{x}, t) \exp(-pt) dt)$

(支配方程式)

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} + \hat{f}_i^\varepsilon = 0 \quad \text{in } \Omega^\varepsilon \quad (4.4)$$

f^ε : 物体力、 x : 巨視座標、 σ^ε : 応力

(境界条件)

$$\hat{u}_i^\varepsilon = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4.5)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon n_j = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_F \quad (4.6)$$

u^ε : 変位、 t : 荷重

(初期条件)

$$\hat{u}_i = \hat{u}_i^0(x) \quad (4.7)$$

(変位-ひずみ関係)

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(\hat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (4.8)$$

(構成式)

$$\hat{s}(p) = 2p\hat{G}(p)\hat{e}(p), \quad \hat{\sigma}(p) = 3p\hat{K}(p)\hat{e}(p) \quad (4.9)$$

ここで、 s は偏差応力($s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$), $\bar{\sigma}$ は体積応力($\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$), e は偏差ひずみ($e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$), $\bar{\varepsilon}$ は体積ひずみ($\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$)である。また、

$$\hat{G}(p) = \frac{G_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{p + (1/\tau_i)} \quad (4.10)$$

$$\hat{K}(p) = \frac{K_0}{p} + \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{p + (1/\tau_i)} \quad (4.11)$$

G : せん断弾性係数

K : 体積弾性係数

τ_i : 緩和時間

n : 材料のもつ離散的な遅延時間の個数

と表される。さらに、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}(p) &= p(2\hat{G}\hat{\varepsilon}_{ij} + \hat{\lambda}\hat{\varepsilon}_{rs}\delta_{rs}\delta_{ij}) = p[2\hat{G}\delta_{ri}\delta_{sj} + \hat{\lambda}\delta_{ij}\delta_{rs}]\hat{\varepsilon}_{rs} \\ &= p\hat{D}_{ijrs}\hat{\varepsilon}_{rs} = \hat{M}_{ijrs}\hat{\varepsilon}_{rs} \end{aligned} \quad (4.12)$$

とおく。

なお、

$$\hat{\lambda} = \hat{K} + \frac{1}{2}\hat{G}, \quad \hat{D}_{ijrs} = 2\hat{G}\delta_{ri}\delta_{sj} + \hat{\lambda}\delta_{ij}\delta_{rs}, \quad \hat{M}_{ijrs} = p\hat{D}_{ijrs} \quad (4.13)$$

である。

4.3 ラプラス空間における均質化法

4.3.1 漸近展開の導入

対象領域の最小構造単位をユニットセル³⁾とし、ラプラス空間上における境界値問題において、変位 $\hat{u}^\varepsilon$ を漸近展開する。

$$\hat{u}_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \hat{u}_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \varepsilon \hat{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \varepsilon^2 \hat{u}_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) + \cdots \quad (4.14)$$

$$\hat{u}_i^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \hat{u}_i^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{Y}, p) \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.15)$$

また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において微分演算は周期 $\mathbf{Y}$ のユニットセルにおける微視座標 $\mathbf{y}$ を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (4.16)$$

となる。この関係を変位一ひずみ関係(4.8)に代入して、

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{\varepsilon} \hat{\varepsilon}_{ij}^{0y} + (\hat{\varepsilon}_{ij}^{0x} + \hat{\varepsilon}_{ij}^{1y}) + \varepsilon(\hat{\varepsilon}_{ij}^{1x} + \hat{\varepsilon}_{ij}^{2y}) + \cdots \quad (4.17)$$

を得る。ここに、

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{0y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^0}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^0}{\partial y_i} \right) \quad (4.18)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{0x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^0}{\partial x_i} \right) \quad (4.19)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{1y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^1}{\partial y_i} \right) \quad (4.20)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{1x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^1}{\partial x_i} \right) \quad (4.21)$$

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^{2y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^2}{\partial y_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^2}{\partial y_i} \right) \quad (4.22)$$

である。

式(4.12)で定義された粘弾性テンソル $\hat{M}$ を用いると、 $\hat{\sigma}^\varepsilon$ はつぎのように書ける。

$$\hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \frac{1}{\varepsilon} \hat{\sigma}_{ij}^{0y} + \hat{\sigma}_{ij}^{1y} + \varepsilon \hat{\sigma}_{ij}^{2y} + \cdots \quad (4.23)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{0y} = \hat{M}_{ijkl} \hat{\varepsilon}_{kl}^{0y} \quad (4.24)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{1y} = \hat{M}_{ijkl} (\hat{\varepsilon}_{kl}^{0x} + \hat{\varepsilon}_{kl}^{1y}) \quad (4.25)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \hat{M}_{ijkl}(\hat{\varepsilon}_{kl}^{1x} + \hat{\varepsilon}_{kl}^{2y}) \quad (4.26)$$

これらをラプラス空間上の釣合方程式 (4.4) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} &\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^0}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^1}{\partial y_j} \right] + \left[\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^2}{\partial y_j} \right] + \dots \\ &= -\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) \end{aligned} \quad (4.27)$$

である。

上式の $\varepsilon^\alpha (\alpha = -2, -1, 0, 1, \dots)$ のそれぞれの項が $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において 0 となるように等式を立てる。

4.3.2 $O(\varepsilon^{-2})$ 項について

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^0}{\partial y_j} = 0 \quad (4.28)$$

これより、 $\hat{\sigma}_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \hat{\sigma}_{ij}^0(\mathbf{x}, p)$ とすることができる。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき ε^{-1} 項が有界であるためには $\hat{\sigma}_{ij}^0 = 0$ でなければならない。

以上より、 $\hat{u}_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \hat{u}_i^0(\mathbf{x}, p)$ とするのが合理的である。すなわち、 $\hat{u}_i^0$ は、巨視座標 $\mathbf{x}$ のみに依存しており、微視的には独立な項となる。この結果、変位は平均的巨視変位と摂動的微視変位の 2 つに分解することができる。ことがわかる。

ここで、式 (4.17) のひずみを以下のように近似する。

$$\hat{\varepsilon}_{ij}^\varepsilon \simeq \hat{\varepsilon}_{ij}^{0x} + \hat{\varepsilon}_{ij}^{1y} \quad (4.29)$$

4.3.3 $O(\varepsilon^{-1})$ 項について (ユニットセル問題)

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^1}{\partial y_j} = 0 \quad (4.30)$$

上述の如く、 $\hat{\sigma}_{ij}^0 = 0$ なので

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^1}{\partial y_j} = 0 \quad (4.31)$$

となる。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [\hat{M}_{ijkl}(\hat{\varepsilon}_{kl}^{0x} + \hat{\varepsilon}_{kl}^{1y})] = 0 \quad (4.32)$$

であるが、周期条件より

$$\hat{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = \hat{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{Y}, p) \quad (4.33)$$

であることに注意する。一方、ラプラス空間上の構成式を以下のように表す。

$$\hat{\sigma}_{ij}^1 = \hat{M}_{ijrs} \hat{\varepsilon}_{rs}^\varepsilon = p \hat{D}_{ijrs} [\hat{\varepsilon}_{rs}^{0x} + \hat{\varepsilon}_{rs}^{1y}]$$

$$= [D_{ijrs}^0 + p\hat{D}_{ijrs}^1(p)][\hat{\varepsilon}_{rs}^{0x} + \hat{\varepsilon}_{rs}^{1y}] \quad (4.34)$$

ここに、

$$D_{ijrs}^0 = 2G_0\delta_{ri}\delta_{sj} + \lambda_0\delta_{ij}\delta_{rs} \quad (4.35)$$

$$\hat{D}_{ijrs}^1(p) = 2\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\hat{G}_i(p)}{p+1/\tau_i}\right\}\delta_{ri}\delta_{sj} + \left\{\sum_{i=1}^n \frac{\hat{\lambda}_i(p)}{p+1/\tau_i}\right\}\delta_{ij}\delta_{rs} \quad (4.36)$$

よって、式(4.32) は以下ようになる。

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \{ [D_{ijrs}^0(\mathbf{y}) + p\hat{D}_{ijrs}^1(\mathbf{y}, p)] [\hat{\varepsilon}_{rs}^{0x}(\mathbf{x}; p) + \hat{\varepsilon}_{rs}^{1y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; p)] \} = 0 \quad (4.37)$$

ここで、特性変位関数 $\hat{\chi}_i^{kl}(\mathbf{y}, p)$ をつぎのように定義する。

$$\hat{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) = -\hat{\chi}_i^{kl}(\mathbf{y}, p) \frac{\partial \hat{u}_k^0}{\partial x_l} + C_i(\mathbf{x}) \quad (4.38)$$

式(4.38)を式(4.37)に代入し、 $\frac{\partial \hat{u}_k^0}{\partial x_l}$ は $\mathbf{x}$ のみの関数であることに注意して正規化すると、

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \{ [D_{ijrs}^0(\mathbf{y}) + p\hat{D}_{ijrs}^1(\mathbf{y}, p)] (\delta_{rk}\delta_{sl} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}) \} = 0 \quad (4.39)$$

となる。この式が、 $\hat{\chi}_i^{rs}$ を未知関数とするユニットセル問題を与える微分方程式である（境界条件は周期条件）。なお、式(4.39)を弱形式でつぎのように表すことができる。

$$\int_Y \hat{M}_{ijkl} \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = \int_Y \hat{M}_{ijrs} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad \forall v_i (v_i = 0, \Gamma_u \text{上}) \quad (4.40)$$

ここで、 v_i は任意の $\mathbf{y}$ の関数（仮想変位）であることに注意する。

4.3.4 $O(\varepsilon^0)$ 項について（巨視問題）

式(4.27)から

$$\frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^2}{\partial y_j} = -\hat{f}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, p) \quad (4.41)$$

である。ここで、関数 ϕ のユニットセル Y における平均化演算子をつぎのように定義する。

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi dy \quad (4.42)$$

式(4.41)の左辺第2項について平均化を行うと、 $\hat{\sigma}_{ij}^2$ の周期性から

$$\left\langle \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^2}{\partial y_j} \right\rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}^2}{\partial y_j} dy = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \hat{\sigma}_{ij}^2 n_j d\Gamma = 0 \quad (4.43)$$

である。こうして、式(4.41)全体を Y について平均化を行うと、

$$\frac{\partial \langle \hat{\sigma}_{ij}^1 \rangle}{\partial x_j} + \langle \hat{f}_i \rangle = 0 \quad (4.44)$$

となる。境界条件も同様に平均化を施す。

$$\langle \hat{u}_i^0 \rangle = \langle \hat{u}_i \rangle \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4.45)$$

また、平均化構成式も以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma}_{ij}^1 \rangle &= \langle [D_{ijkl}^0 + p\hat{D}_{ijkl}^1(p)][\varepsilon_{kl}^{0x}(p) + \varepsilon_{kl}^{1y}(p)] \rangle \\
&= \langle [D_{ijkl}^0 + p\hat{D}_{ijkl}^1(p)][\varepsilon_{kl}^{0x}(p) - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}(p)}{\partial y_l} \varepsilon_{kl}^{0x}(p)] \rangle \\
&= \langle D_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{0x}(p) + \langle p\hat{D}_{ijkl}^1(p) \rangle \varepsilon_{kl}^{0x}(p) - \langle D_{ijkl}^0 \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l} \rangle \varepsilon_{rs}^{0x}(p) - \langle p\hat{D}_{ijkl}^1 \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l} \rangle \varepsilon_{rs}^{0x}(p) \rangle \\
&= \langle D_{ijkl}^0 (\delta_{rk} \delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}) + p\hat{D}_{ijkl}^1 (\delta_{rk} \delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}) \rangle \varepsilon_{rs}^{0x}(p) \\
&= \hat{M}_{ijrs}^h \varepsilon_{rs}^{0x}(p)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{ijkl}^h &= \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijrs}^0 [\delta_{rk} \delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}] dy + \frac{1}{|Y|} \int_Y p\hat{D}_{ijrs}^1 [\delta_{rk} \delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}] dy \\
&= \frac{1}{|Y|} \int_Y (D_{ijrs}^0 + p\hat{D}_{ijrs}^1) [\delta_{rk} \delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}] dy = \frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{M}_{ijrs} [\delta_{rk} \delta_{ls} - \frac{\partial \hat{\chi}_k^{rs}}{\partial y_l}] dy
\end{aligned} \tag{4.47}$$

と置いた。なお、式(3.40) は

$$\int_Y \hat{M}_{qnp m} [\delta_{qi} \delta_{nj} - \frac{\partial \hat{\chi}_q^{ij}}{\partial y_n}] \frac{\partial v_p(\mathbf{y})}{\partial y_m} dy = 0 \tag{4.48}$$

と書けるので $v_p(\mathbf{y}) = \hat{\chi}_p^{kl}(\mathbf{y})$ と置くと、

$$\int_Y \hat{M}_{qnp m} (\delta_{qi} \delta_{nj} - \frac{\partial \hat{\chi}_q^{ij}}{\partial y_n}) \frac{\partial \hat{\chi}_p^{kl}(\mathbf{y})}{\partial y_m} dy = 0 \tag{4.49}$$

となる。式(4.49)に平均化演算を施し式(4.47)に加えると、 $\hat{M}^h$ が対称化された形として以下のように求まることが判る。

$$\hat{M}_{ijkl}^h = \frac{1}{|Y|} \int_Y \hat{M}_{qnp m}(\mathbf{y}) [\delta_{qi} \delta_{nj} - \frac{\partial \hat{\chi}_q^{ij}}{\partial y_n}] [\delta_{pk} \delta_{ml} - \frac{\partial \hat{\chi}_p^{kl}}{\partial y_m}] dy \tag{4.50}$$

4.3.5 ラプラス逆変換

Laplace空間上で得られたマクロな解とミクロな解を、Shaperyの近似法により Laplace逆変換を施して実空間上における解を求める。

粘弾性体に対する応力緩和試験やクリープ試験は、単調減少あるいは単調増加の現象である。よって、これらは指数型関数 ($\exp(-ax)$) を用いて表すことができる。このような形の関数を逆変換する手法として、Schaperyの選点法³⁾がある。

いま、応力や粘弾性マトリックスなど一般的な応答を $y(t)$ とおくと、時間に依存するつぎの解で表されるとした。

$$y(t) = a_1 + f(t) \tag{4.51}$$

a_1 : 初期条件より決定される定数

$f(t)$ は、分布関数 $F(\alpha)$ を用いて表される過渡応答成分であり、次式で表せる。

$$f(t) = \int_0^\infty F(\alpha) \exp(-t/\alpha) d\alpha \quad (4.52)$$

いま、 $F(\alpha)$ が Dirac の δ 関数の和で表せるのならば

$$F(\alpha) = \sum_k h_k \delta(\alpha - \alpha_k) \quad (4.53)$$

$$f(t) = \sum_k h_k \exp(-t/\alpha_k) \quad (4.54)$$

となる。このことは $f(t)$ が近似的に Dirichlet 級数

$$f_D(t) = \sum_{i=1}^n S_i \exp(-t/\tau_i) \quad (4.55)$$

で表されることを示している。なお $\tau_i > 0$ は予め指定した正の実数 S_i が決定されるべき未知のパラメータである。さらに Schapery は、このパラメータを決める方法として、指定された点 $P = 1/\tau_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で厳密式のラプラス変換と近似式のラプラス変換 $\hat{f}(P)$ と $\hat{f}_D(P)$ の値が一致すると、 $f(t)$ と $f_D(t)$ の二乗誤差が最小になることを見出した。すなわち二乗誤差を

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty [f(t) - f_D(t)]^2 dt \quad (4.56)$$

とし、式(4.55)の離散近似を代入して、 S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に関する誤差最小の条件を求めると、

$$\frac{\partial E}{\partial S_i} = - \int_0^\infty [f(t) - f_D(t)] \exp(-t/\tau_i) dt = 0 \quad (4.57)$$

となる。これは

$$\hat{f}\left(\frac{1}{\tau_i}\right) = \hat{f}_D\left(\frac{1}{\tau_i}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.58)$$

を意味する。式(4.58),(4.55)を式(4.57)に代入すると

$$\sum_{j=1}^n \int_0^\infty \exp(-t/\tau_j) \exp(-t/\tau_i) dt, \quad S_j = \hat{f}\left(\frac{1}{\tau_i}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.59)$$

となり、この連立方程式を解くことにより、係数 S_j ($j = 1, 2, \dots, n$) が求まり、 $f(t)$ の近似式が得られる。

4.3.6 実空間における応力等の算定

いま、式(4.46)に Laplace 逆変換を導入すると、均質化応力が

$$\langle \sigma_{ij}^1 \rangle = \langle \sigma_{ij}^{10} \rangle + \langle \sigma_{ij}^{11} \rangle \quad (4.60)$$

$$\langle \sigma_{ij}^{10} \rangle = \langle D_{ijkl}^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_l}) \rangle \varepsilon_{rs}^{0x}(t) \quad (4.61)$$

$$\langle \sigma_{ij}^{11} \rangle = \int_0^t \langle D_{ijkl}^1(t-s) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_l}) \rangle \frac{d\varepsilon_{rs}^{0x}}{ds} ds \quad (4.62)$$

と求まる。ここで $\langle \sigma_{ij}^{10} \rangle$ はマクロ瞬間弾性、 $\langle \sigma_{ij}^{11} \rangle$ はマクロな Maxwell 体を表す項である。一方、式 (4.34) より、ミクロレベルにおける応力も同様に、

$$\sigma_{ij}^1 = D_{ijkl}^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_l}) \varepsilon_{rs}^{0x}(t) + \int_0^t D_{ijkl}^1 (t-s) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_l}) \frac{d\varepsilon_{rs}^{0x}}{ds} ds \quad (4.63)$$

と求まる。ここで均質化法における応力緩和問題に対して、Schapery の近似法を用いることによって以下の諸量が計算される。

(均質化粘弾性係数)

$$M^n(t) = \langle D_0 \rangle + \sum_{i=1}^n \langle D_i \rangle \exp(-\tilde{\gamma}_i t) \quad (4.64)$$

$\langle D_i \rangle, \langle D_0 \rangle$: 未知係数

(均質化応力)

$$\sigma_D(t) = \langle \sigma_i(\infty) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle S_i \rangle \exp(-\tilde{\gamma}_i t) \quad (4.65)$$

$\langle S_i \rangle$: 未知係数

$\langle \sigma_i(\infty) \rangle$: $G(\infty)$ と $K(\infty)$ を用いて計算された $t = \infty$ における均質化応力

(ミクロ応力)

$$\sigma_D(t) = \sigma_1(\infty) \sum_{i=1}^n S_i \exp(-\gamma_i t) \quad (4.66)$$

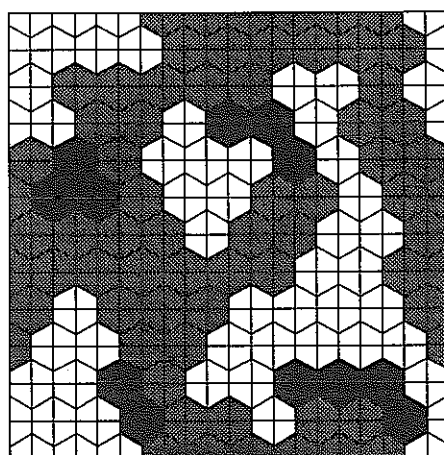
S_i : 未知係数

$\sigma_1(\infty)$: $G(\infty)$ と $K(\infty)$ を用いて計算された $t = \infty$ におけるミクロ応力

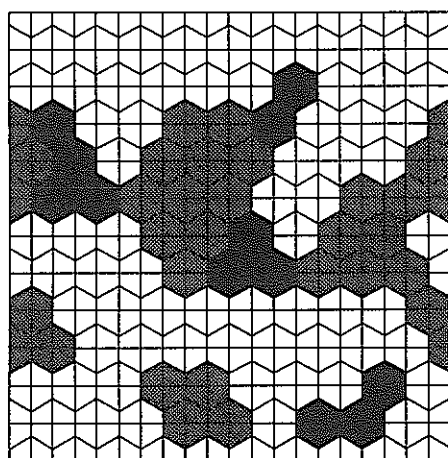
4.4 解析条件

4.4.1 ユニットセル形状の決定

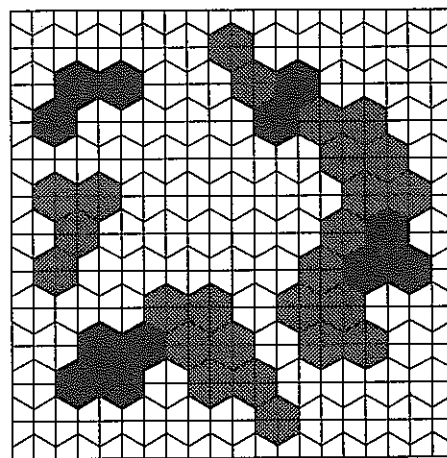
岩石材料への均質化法の導入について考える。岩石内の鉱物、亀裂は一見、無秩序ともいえる構造をもっている。均質化法を適用するためには、このような構造から何らかの周期的特徴を見つけ出して、ユニットセルを構成しなければならない。本解析では、実験で用いた供試体の偏光顕微鏡写真(付録)から、鉱物の幾何学的配置および形状を決定した。早川⁶⁾によると、今回実験に用いた花崗岩において、それぞれ切り出した3種類のサンプルにはマイクロクラックの方向に特徴があり、載荷方向とそれに垂直な方向のマイクロクラックの比は1番サンプルで 2:1、2番サンプルで 1:1、3番サンプルで 1:2 であった。解析ではこの比にしたがってジョイント要素を各サンプルに埋め込むことにした。ただし、ジョイント要素の総数は120とした。



Type 1



Type 2



Type 3

図4.3 ユニットセル形状

なお、偏光顕微鏡を用いた観察により求めた統計的平均量として鉱物の含有率は以下の値とし、整数比に換算して用いた。

表4.1 鉱物の含有率

	石英	長石	黒雲母
Type1-1 番サンプル	40	50	10
Type2-2 番サンプル	25	65	10
Type3-3 番サンプル	20	70	10

(単位：％)

4.4.2 材料物性値

これまでに、さまざまな鉱物の材料実験が行われている。鉱物が、単結晶である場合、今回の実験の応力範囲(0～1500kgf/cm²)内では、ほとんど粘性の性質を示さない⁴⁾。この事実を明確にするため、予備実験として、石英のクリープ実験を行った(付録)。実験結果より、今回の実験条件下では石英の単結晶はクリープ挙動を示さず、弾性的な挙動を示すといえる。よって、今回は以下の材料物性をもとに解析を行う⁵⁾。

表4.2 鉱物のヤング率およびポアソン比

	ヤング率(GPa)	ポアソン比
石英	95.60	0.079
長石	69.70	0.301
黒雲母	88.10	0.248

前述のようにマイクロクラックが、応力緩和現象に大きく関与していると考えられる。今回の解析では、これを粘弾性ジョイント要素を用いてモデル化する。このジョイント要素の物性は、石英、長石、黒雲母等の鉱物の種類によって違いがあると考えられる。これは鉱物を構成する成分およびそれに伴う化学的性質、構造の違いに起因している。特に長石は他の鉱物よりも一軸強度が小さく、水の介在によって化学的に変化をおこしやすいので、石英、黒雲母に存在するマイクロクラックとは異なる物性値を与えることにする。

いま、3要素マクスウェルモデルを考えると、ジョイント要素は

$$G(t) = G_0 + G_1 \exp(-t/\tau_1^s) + G_2 \exp(-t/\tau_2^s) : \text{せん断弾性係数} \quad (4.67)$$

$$K(t) = K_0 + K_1 \exp(-t/\tau_1^k) + K_2 \exp(-t/\tau_2^k) : \text{体積弾性係数} \quad (4.68)$$

τ_1^s, τ_2^s : せん断変形に関する緩和時間

τ_1^k, τ_2^k : 体積変形に関する緩和時間

の剛性をもつと考えられる。しかしながら、ジョイント要素としてのマイクロクラックの、せん断弾性係数を直接求めることは非常に困難である。そこで応力緩和挙動はマイクロクラックの挙動と有意な関係があると仮定して、花崗岩とマイクロクラックそれぞれの緩和時間は等しいとした。

緩和時間を決定するために、応力緩和実験(1 番方向サンプル)の結果を

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp(-t/\tau_1) + \sigma_2 \exp(-t/\tau_2) \quad (4.69)$$

で表わされる指数関数で近似し、

$$\sigma(t) = 930 + 35.5 \exp(-t/17.241) + 34.5 \exp(-t/90.910) \quad (4.70)$$

(kg/cm²)

を得た。同じ鉱物内のマイクロクラックは鉱物固有の物性をもつものと考えられる。今回はそれがヤング率に依存するとし、長石・石英・黒雲母のヤング率の比70:96:88を用いてジョイント要素にも70:96:88の割合で初期剛性を与え、解析を行う。すなわち、

$$G_F(t) = G_{F0} + G_{F1} \exp(-t/17.241) + G_{F2} \exp(-t/90.910) \quad (4.71)$$

$$G_Q(t) = G_{Q0} + G_{Q1} \exp(-t/17.241) + G_{Q2} \exp(-t/90.910) \quad (4.72)$$

$$G_B(t) = G_{B0} + G_{B1} \exp(-t/17.241) + G_{B2} \exp(-t/90.910) \quad (4.73)$$

(GPa)

$G_F(t)$: 長石のせん断弾性係数

$G_Q(t)$: 石英のせん断弾性係数

$G_B(t)$: 黒雲母のせん断弾性係数

において、 $t = 0$ ときの値

$$G_{F0} + G_{F1} + G_{F2} : G_{Q0} + G_{Q1} + G_{Q2} : G_{B0} + G_{B1} + G_{B2} = 70 : 96 : 88$$

とする。つぎに

$$G_{F1} : G_{F2} = G_{Q1} : G_{Q2} = G_{B1} : G_{B2} = 1 : 1$$

と仮定する。また、体積弾性係数は

$$K_F = 1400$$

$$K_Q = 1920$$

$$K_B = 1760$$

(GPa)

K_F : 長石の体積弾性係数

K_Q : 石英の体積弾性係数

K_B : 黒雲母の体積弾性係数

とする。つまり

$$K_{F0} : K_{Q0} : K_{B0} = 70 : 95 : 90$$

とし、せん断弾性係数の初期値の10倍の値とし、弾性体として扱うことにする。

4.4.3 せん断弾性係数の決定

せん断弾性係数を決定するために4.4.2節で決定した規則に従い、表4.3の1～3のパターンのせん断弾性係数について今回行った実験を想定した解析を行い、実験値と比較する。なお、各せん断弾性係数の値は、各体積弾性係数の10分の1とする。

表4.3 せん断弾性係数のパターン

	G_{F0}	G_{F1}	G_{F2}	G_{Q0}	G_{Q1}	G_{Q2}	G_{B0}	G_{B1}	G_{B2}
1	40.00	50.00	50.00	54.80	68.60	68.60	50.28	62.86	62.86
2	50.00	45.00	45.00	68.56	61.72	61.72	62.86	56.57	56.57
3	60.00	40.00	40.00	82.28	54.86	54.86	75.42	50.29	50.29

(GPa)

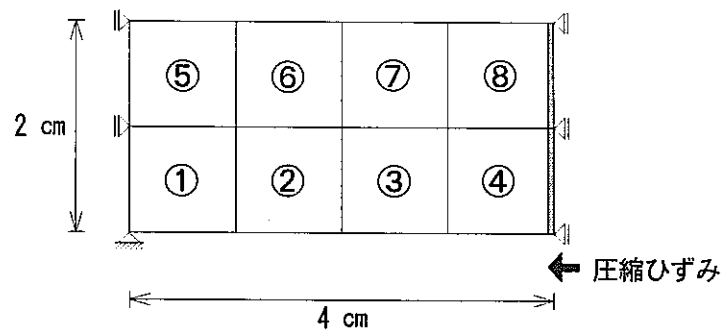


図4.4 実験を想定した全体解析

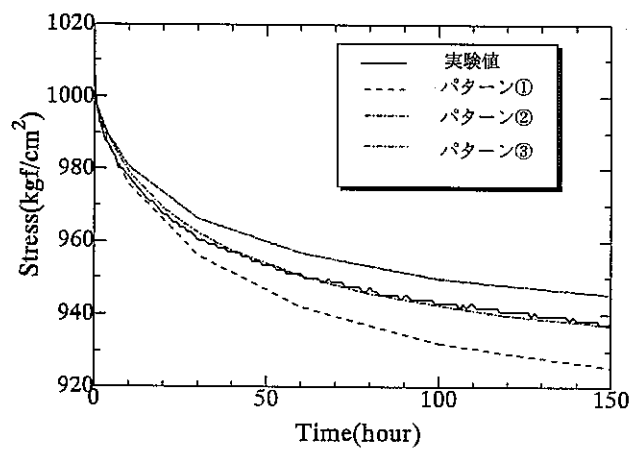


図4.5 実験値と解析値との比較

解析結果より、パターン2の値を用いて以下のように定める。

$$G_F(t) = 50 + 45 \exp(-t/17.241) + 45 \exp(-t/90.910) \quad (4.74)$$

$$G_Q(t) = 68.6 + 61.7 \exp(-t/17.241) + 61.7 \exp(-t/90.910) \quad (4.75)$$

$$G_B(t) = 62.86 + 56.57 \exp(-t/17.241) + 56.57 \exp(-t/90.910) \quad (4.76)$$

(GPa)

4.5 解析結果および考察：長期応力緩和挙動の予測とマイクロ応力の変化

今回の室内応力緩和実験は実験時間を150時間として行ったが、そのほとんどは、まだ応力が減少傾向にあり、供試体内部でマイクロクラックが進展している可能性がある。それゆえ、応力緩和実験を行う上でどの程度の実験期間が必要であるか、その応力が定常状態になるまで3つのサンプルの解析を行い、その長期挙動を予測する。

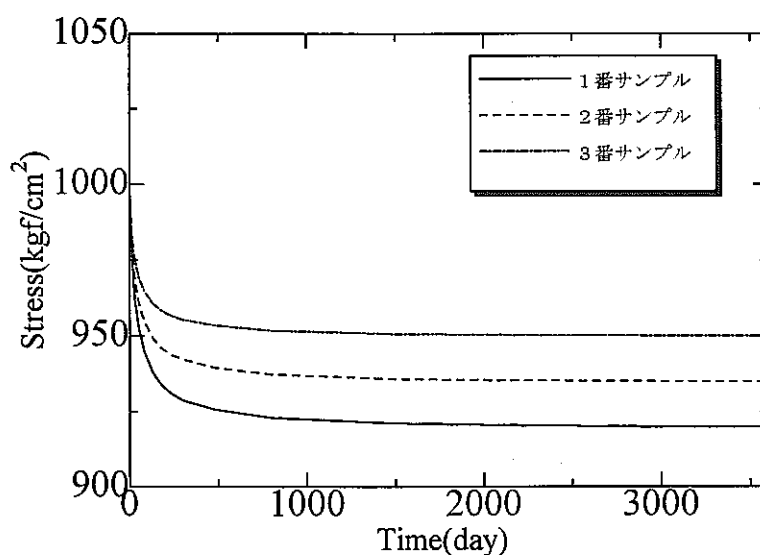


図 4.6 全体解析による応力緩和シュミレーション

今回の解析では各サンプルにおける応力緩和状態を比較するために初期設定応力を揃えた。各サンプルのグローバル解析を行った結果を応力-時間曲線として図 4.6 に示す。この図はもっとも緩和する応力が小さく、定常状態に至る時間が短いことを示している。逆に1番サンプルは緩和する応力をもっとも大きく定常状態になりにくい。これは解析に用いたユニットセルにおいてジョイント配置のルールより載荷方向と垂直にジョイント要素を多く配置し、1番サンプルは載荷方向にジョイント要素を多く配置したので、ジョイントのせん断方向に粘弾性挙動を表現するようにした結果がそのまま表れる結果となった。

つぎに、この結果を実験から得られた応力緩和曲線と比較する。第3章で述べたように、図 3.6 における C-3-0(3番サンプル)は他のサンプルの応力緩和挙動と比較すると、緩和応力が極端に大きく、かつ定常状態になりにくい傾向が見られる。一方図 3.7 においては C-2-2(2番サンプル)に同様の傾向が見られ、載荷方向のマイクロクラックの進展がはっきりと観察された。

これらの実験結果の再現を数値解析を通して試みた結果、マイクロクラックの分布がはっきりと表現できた1番サンプルは良く再現されている。これらから判断すると、C-3-0の供試体には載荷方向に1番と同様にクラックが多く存在すると思われる。実験値においての3番サンプルは比較的大きい初期応力でも緩和初期段階で大きく応力が緩和することはなく、数値解析の傾向と一致すると思われる。

つぎに、1番サンプルにおける全体構造物の1でのマイクロな応力分布を時間経過に伴い観察する。
 なお、計測時間は $t=0, 50, 80, 3000$ 時間である。

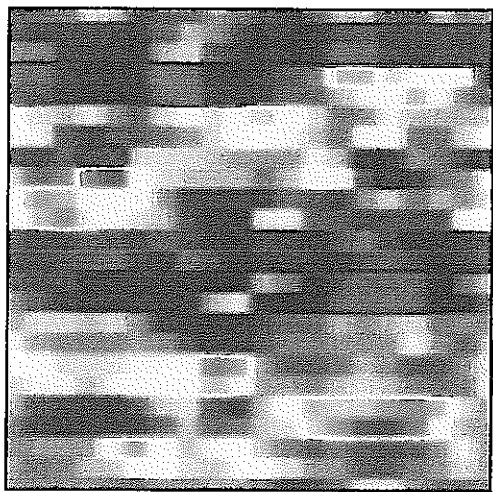


図 4.7 $t=0$ におけるマイクロ応力分布

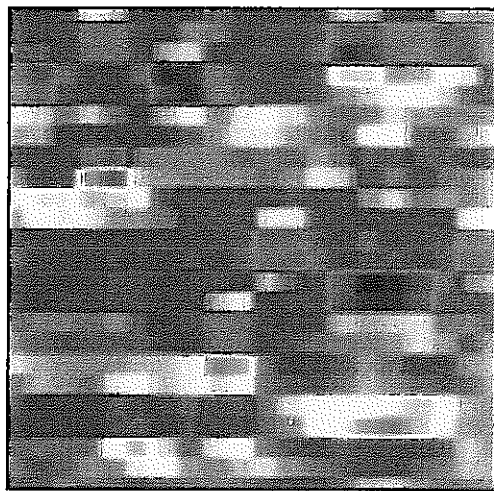


図 4.8 $t=50$ におけるマイクロ応力分布

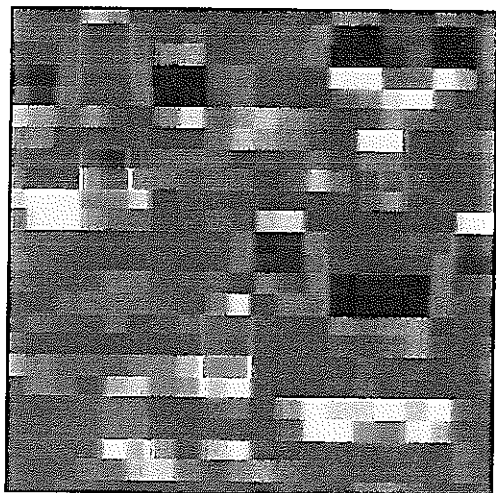


図 4.9 $t=80$ におけるマイクロ応力分布

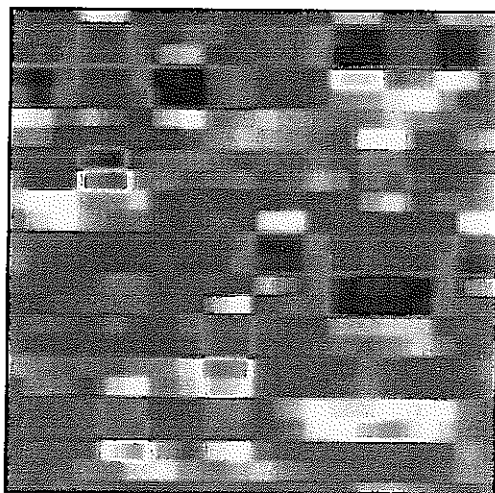
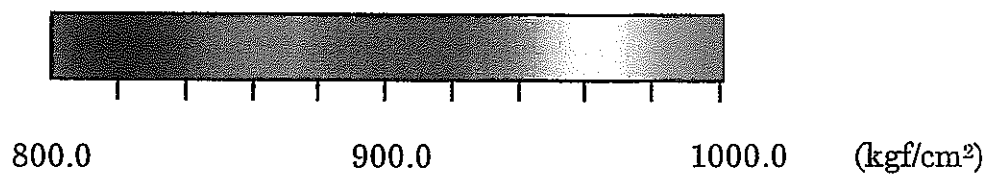


図 4.10 $t=3000$ におけるマイクロ応力分布



全体的に言えることは、 $t=0$ （時間）では応力値は場所的にあまり差はないが、時間が経過するにつれ局所的な応力値が変化することである。 $t=80$ （時間）以降は応力値の目立った変化は見られない。この経過は、微視的な応力緩和現象が応力の再配分を誘い、時間の経過に伴ってその変化も落ち着いてきていることを示す。

つぎに、実際の現象と解析とを比較する。実験の写真観察から各鉱物の境界にマイクロクラックが進展しやすいことが確認されている。図4.7を見てみると、ヤング率の小さな長石とそれよりもヤング率の大きな石英および黒雲母の境界に応力が集中している。したがって、このような場所にマイクロクラックが進展しやすいことが確認された。また、巨視的に見て応力が定常状態になっても、微視的な観点から見ると応力が集中している状態が続き、そのような場所に新たにマイクロクラックが進展する可能性があると考えられる。つぎに、応力が比較的大きく緩和していく場所に注目する。この位置には載荷方向と垂直なジョイントが位置している。解析モデルにおいて、ジョイントにはせん断方向にのみ時間依存を持たせた剛性を与えているため、時間経過にともない垂直方向にずれを生じ、その結果応力が緩和していくと考えられる。ゆえに、応力値のみを観測するのではなく、その応力に伴う供試体内部の微視的構造変化もあわせて観察することが非常に重要なことである。

得られた知見をまとめると、つぎのようである。

- 粘弾性挙動を表せるジョイント要素としてマイクロクラックを表現することによって、マイクロクラックの方向性を考慮に入れた応力緩和現象のシュミレーションが可能である。
- 実験を想定した全体解析を行った結果、応力が定常状態に至るまでには2ヶ月～3ヶ月を要する。
- 均質化法を用いることによって巨視的な応力緩和挙動だけではなく、微視的な応力緩和挙動についても解析することができた。

5. 結論

ここでは、先ず、花崗岩の造岩鉱物（石英、長石、黒雲母）中や鉱物粒界に普遍的に存在するマイクロクラックの分布状況を顕微鏡を用いて観察すると共に、応力緩和実験を顕微鏡観察下において実施した。更に、これらのマイクロクラックが粘弾性的性質を有すると仮定し、鉱物集合体である花崗岩のマイクロ／マクロ挙動を均質化理論によって導き、有限要素法を適用して数値解析を行った。

これらの結果得られた知見は以下のようである。

1) マイクロクラックの観察について

- マイクロクラックは石目に沿って分布している。
- リフト面やグレイン面よりもハードウェイ面上に多くのマイクロクラックが分布し、しかもその平均長は長い。
- マイクロクラックの平均長は細粒の花崗岩よりも粗粒の花崗岩の方が長い。

2) 応力緩和実験の結果について

- マイクロクラックの進展が応力緩和に深く影響しており、特に初期段階ではその関連性がはっきりと見られた。
- マイクロクラックは載荷方向に多く進展する。
- 時間経過に従って応力は減少し、一定値に収束していく。
- 変位が一定であるにもかかわらず、破壊に至る場合がある。
- 実験開始から 30~50 時間までは各供試体の応力緩和速度に差はあるが、それ以降はばらつきは小さくなる。また、今回の実験の範囲内では、初期載荷ひずみの値は応力緩和速度に影響を及ぼさないと考えられる。

3) 粘弾性解析の結果について

- 均質化解析において、粘弾性挙動を表せるジョイント要素としてマイクロクラックを表現すると、マイクロクラックの方向性を考慮に入れた応力緩和シュミレーションが可能である。
- 実験を想定した全体解析を行った結果、応力が定常状態になるまでには 2 ヶ月～3 ヶ月を要する。
- 均質化法を用いることによって巨視的な応力緩和挙動だけではなく、微視的な応力緩和挙動についても観察することができた。

参考文献

- 1) 工藤洋三, 橋本賢一, 佐野修, 中川浩二: 花崗岩の力学的異方性と岩石組織欠陥の分布, 土木学会論文集, 第370号/III-5, pp.189-198, 1986.
- 2) 辻浩一: 均質化手法による岩盤の粘弾性挙動解析, 名古屋大学修士論文, 1995.
- 3) Schapery, R.A.: Approximate method of transform inversion for viscoelastic stress analysis, Proc. 4th U.S. Nat. Cong. Applied Mech., pp.1075-1085, 1991.
- 4) Cordier, P., and Doukhan, J.C.: Water solubility in quartz and its influence on ductility, Eur. J. Mineral, 1, 221-237, 1989.
- 5) Vaughan, M.T., and Bass, J.D.: Single crystal elastic properties of protoenstatite: A comparison with orthoenstatite, Phys. Chem. Minerals, 10, 62-68, 1983.
- 6) 早川真: 花崗岩の応力緩和に関する実験的研究, 名古屋大学卒業論文, 1997
- 7) Haupt, M.: A constitutive law for rock salt based on creep and relaxation tests, Rock Mech. Rock Eng., 24, pp.179-206, 1991.
- 8) Peng, S.S.: Time-dependent aspects of rock behavior as measured by a servocontrolled hydraulic testing machine, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 10, pp.235-246, 1973.
- 9) W. フリュージェ著、堀幸夫訳: 粘弾性学, 1967, 培風館.
- 10) Jeong, G.-C.: Micromechanics of damage process in rocks: Experimental observations and its homogenization; D.Eng. thesis in Nagoya Univ., 1994.
- 11) Lee, E.H.: Stress analysis in viscoelastic bodies, Q. Applied Math., 13, 2, pp.183-190, 1955.

付録

A.1 石英のクリープ実験

A.1.1 実験装置

実験装置は载荷装置と計測装置から構成される（図 A.1）。载荷装置として MTS 製油圧サーボ試験機を使用した。計測装置はデジタルひずみ測定器 (TDS-301) とパーソナルコンピュータ (EPSON PC-286V) から構成され、ひずみゲージ型変位計で軸変位、ロードセルで軸応力が計測される。

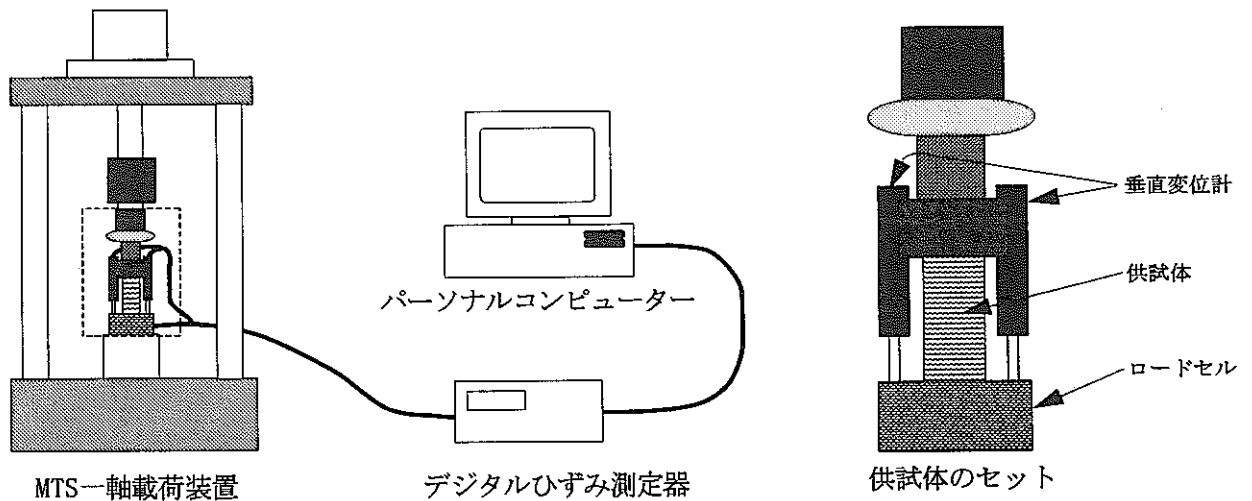


図 A.1 クリープ実験システム

A.1.2 供試体

石英の単結晶を高さ 20mm、直径 10mm の円柱型に整形して供試体とした（図 A.2）。なお、一軸圧縮強度は 95.60(GPa) であった。

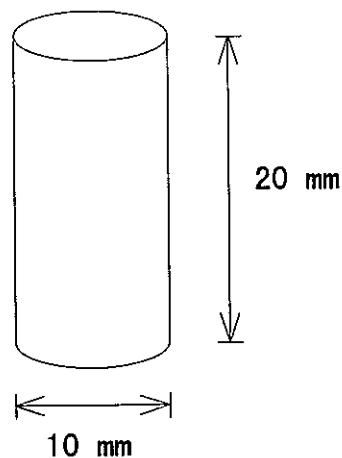


図 A.2 供試体

A.1.3 実験結果

クリープ実験の結果を以下に示す。

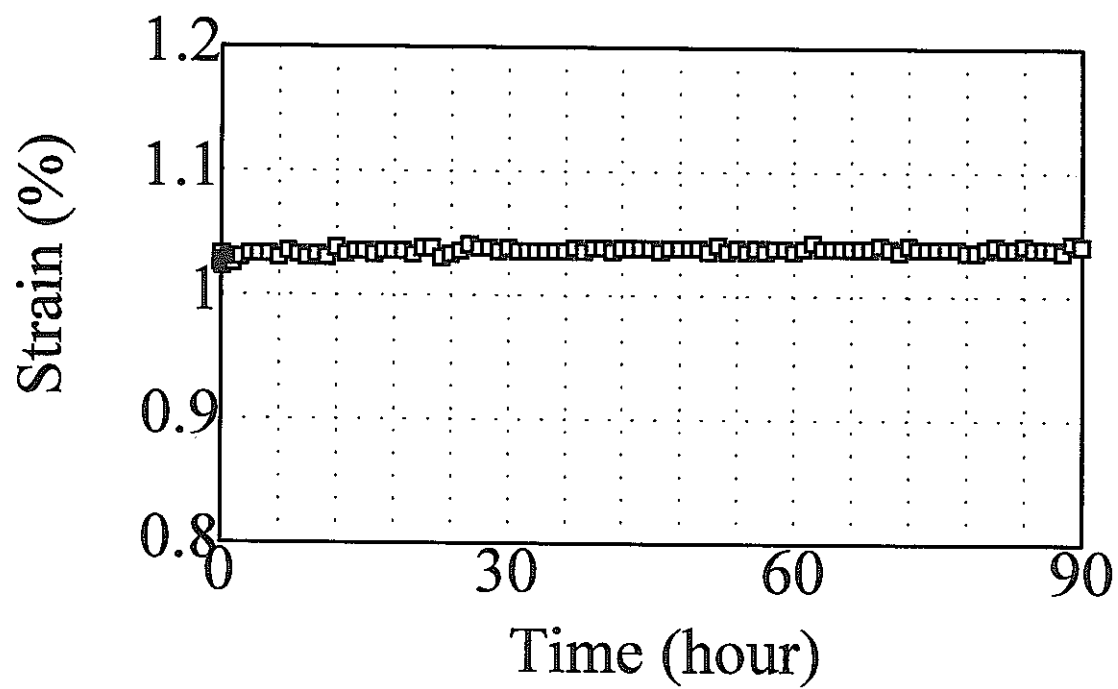
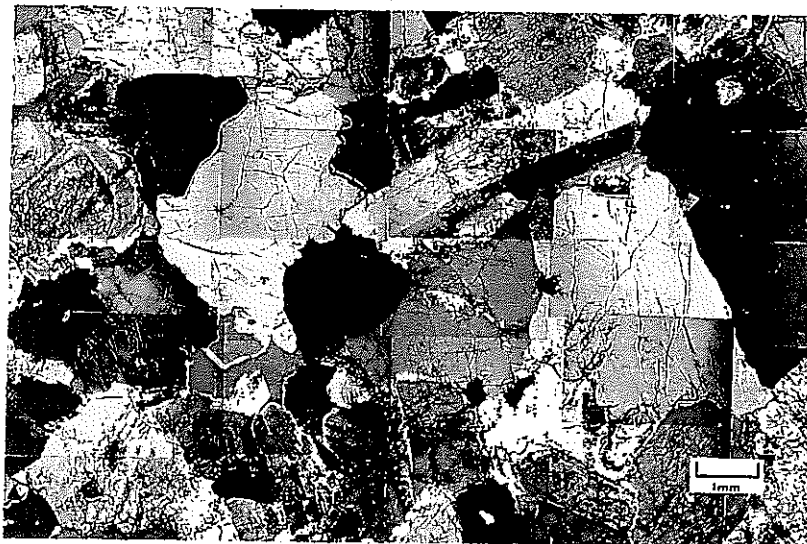


図 A.3 クリープ実験 ひずみー時間関係

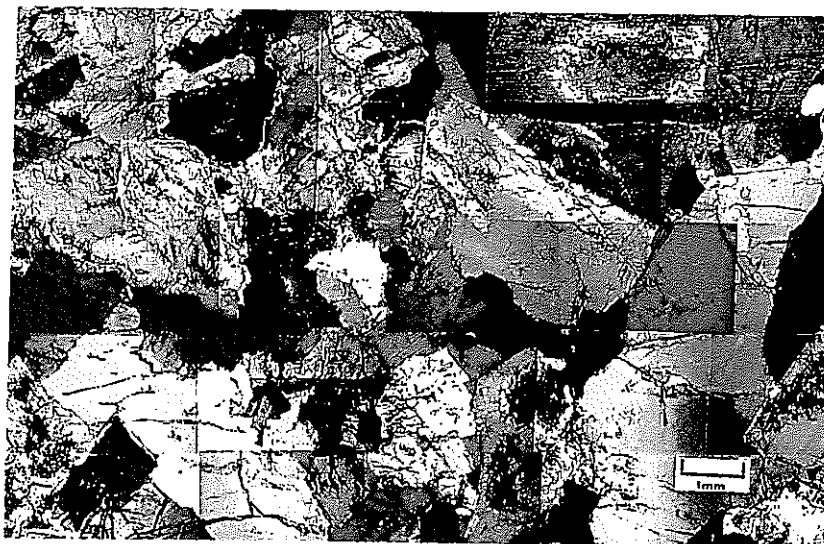
A.2 稲田花崗岩の顕微鏡写真



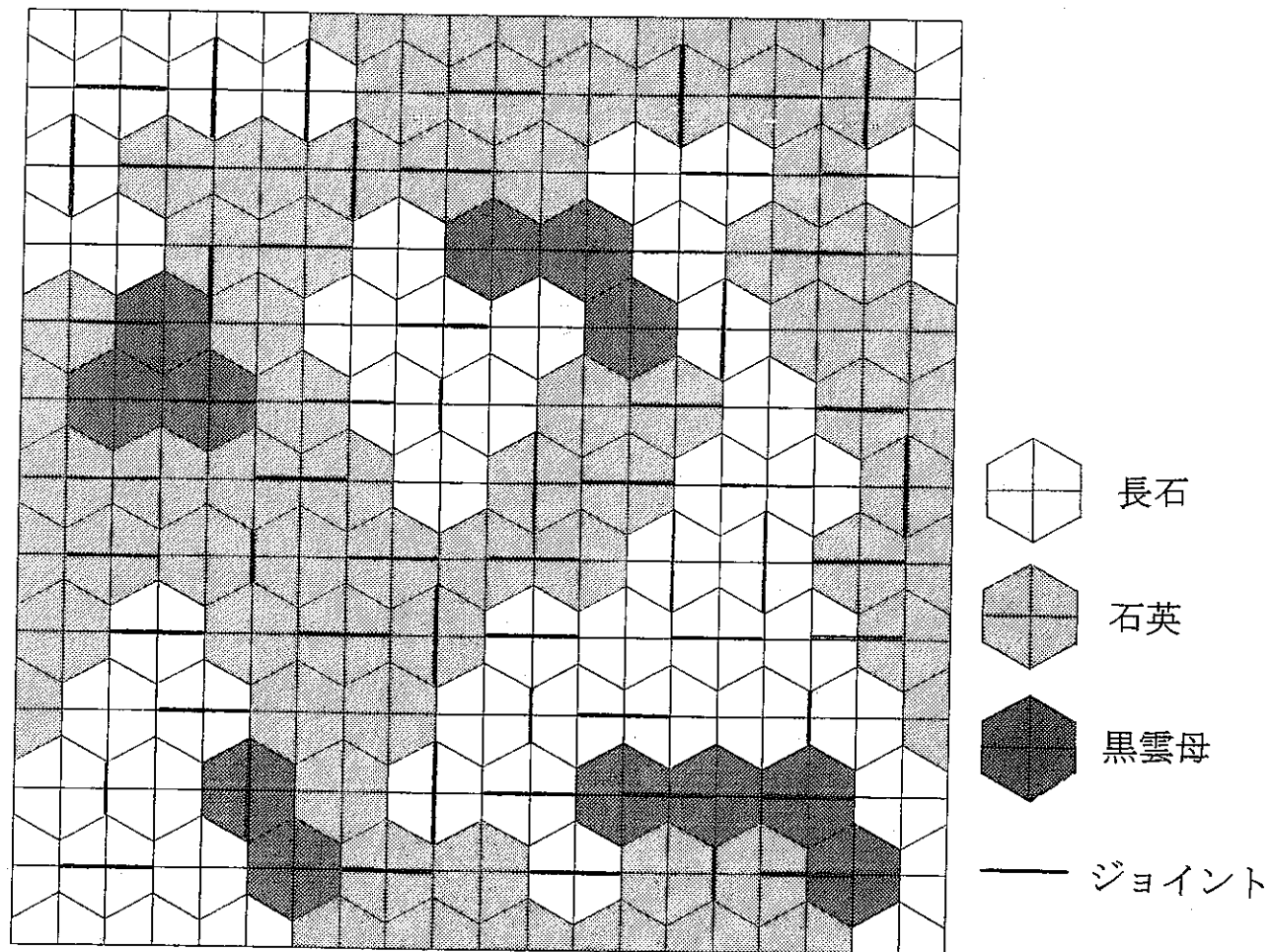
写真A.1 顕微鏡写真(1番サンプル)



写真A.2 顕微鏡写真(2番サンプル)

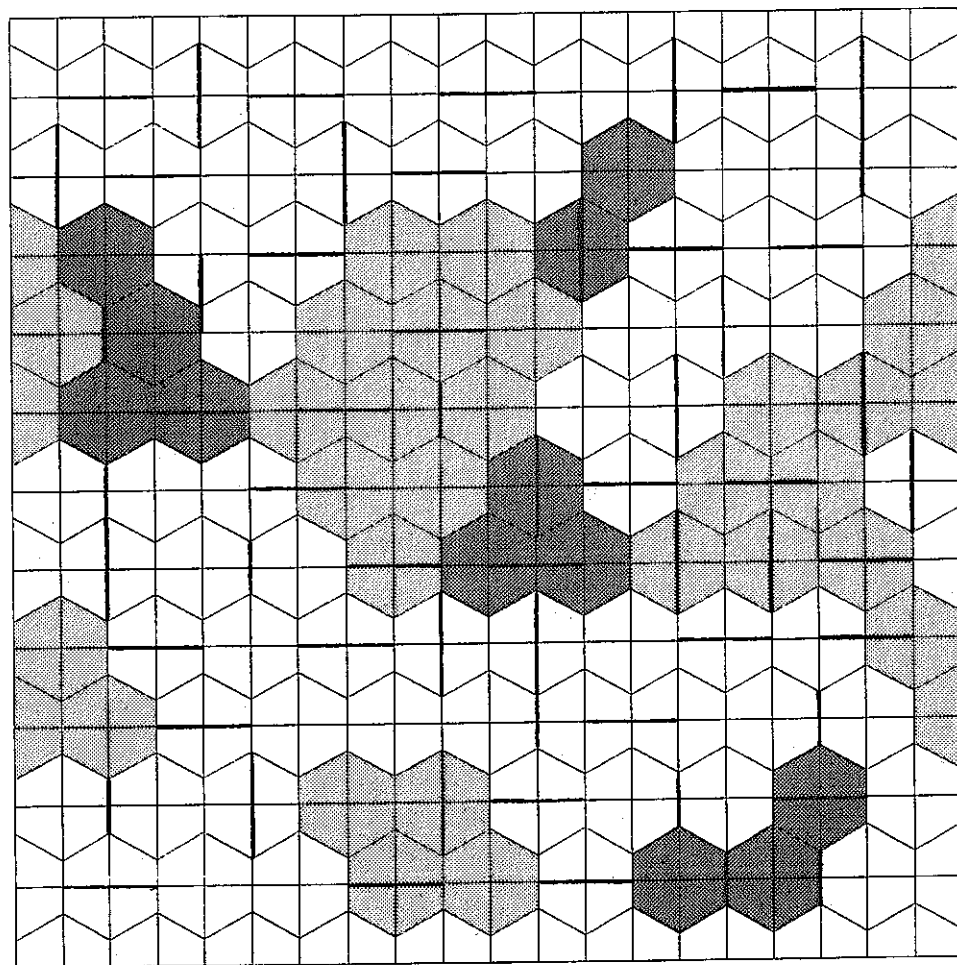


写真A.3 顕微鏡写真(3番サンプル)



FINITE ELEMENT MESH

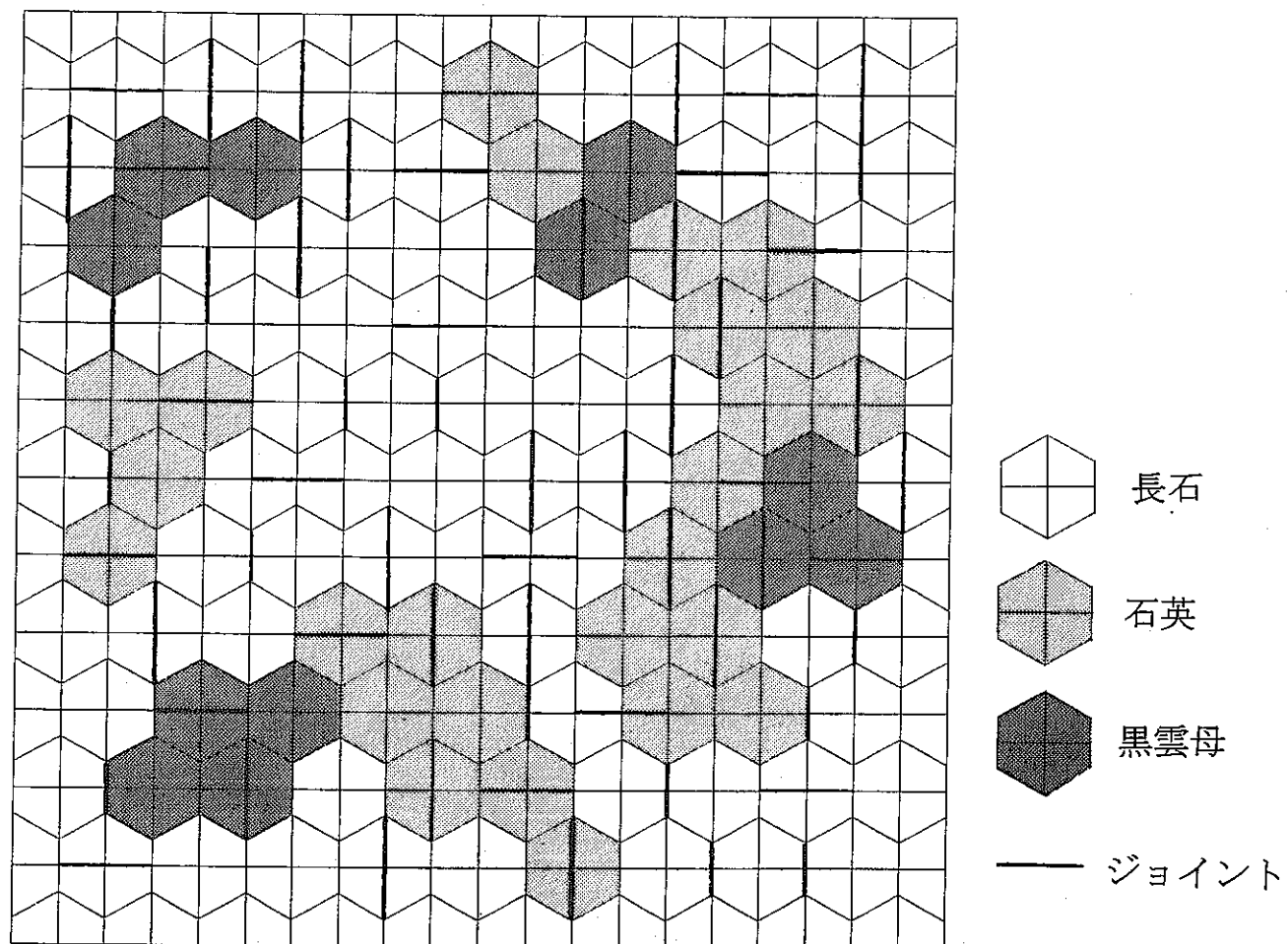
TYPE1- 1 番サンプル



- 長石
石英
黒雲母
ジョイント

FINITE ELEMENT MESH

TYPE2- 2 番サンプル



FINITE ELEMENT MESH

TYPE3- 3 番サンプル

第II部：均質化法による弾粘塑性解析

1. 序論

一般に地盤材料はその変形・破壊過程において著しい非線形性と時間依存性を有する多様で複雑な挙動を示す。クリープや応力緩和に代表される岩盤の変形挙動を従来のような巨視的な解析のみで説明するには限界があり、またそれを室内実験で求めようとしても地下深部の環境を室内に再現することは困難を極め、その結果に十分な信頼を置くことはできない。これまでのような巨視的なアプローチに加え、微視的なアプローチに基づく研究が望まれている所以である。

ここではPerzyna¹⁾の超過応力モデルに基づいた弾粘塑性体理論による地盤の粘塑性挙動に注目し、さらにその挙動を微적および巨視的観点から均質化法²⁾ (Homogenization Method) を用いて評価する。

均質化法とは微視的レベルで非均質な構造が巨視的な挙動を求める際に微視構造の特性の影響を考慮できる数学理論である。均質化理論を地盤材料に適用する際には不均質な地盤を微視的なユニットセルの周期構造とみなし、ユニットセルを無限小にすることによって微視的な構造を反映した均質化弾性係数を求める。均質化法はこれまでに線形弾性問題については理論が完成している。今回は増分形による非線形問題を対象に均質化法を適用し、時間と場所に依存する微視的な構造特性が全体構造物にどのような影響を及ぼすかを考慮して数値解析を試みる。

本解析では、弾粘塑性体と仮定した粘性土に礫成分を想定した弾性材料を混入した地盤材料を対象に、均質化法を用いて解析を行い、粘塑性挙動を示す地盤特性を考察する。

以下、第2章では粘性土の粘塑性挙動を記述できる構成則を与える。

第3章では、均質化理論の概要を述べた後、弾粘塑性問題への適用について述べる。

第4章では、解析プログラムのアウトラインについて述べ、粘性土地盤を対象にした数値解析を行う。

2. Perzyna/Adachi-Oka 理論による粘性土の構成則

2.1 Perzyna の理論

一般応力条件下における粘塑性モデルには、塑性モデルにおける降伏関数 f に時間の項を直接的に組み込んだ「流動曲面モデル」と静的応力から超過した応力の関数として扱う「超過応力モデル」があるが、以下に述べる Perzyna の構成モデルは後者に属する。

Perzyna はひずみ速度に依存する降伏面を考え、それを動的降伏面とし、つぎのように定義した。

$$f_d(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{vp}) = k_d \quad (2.1)$$

ここで、 ϵ_{ij}^{vp} は粘塑性ひずみ成分であり、 k_d はひずみ硬化-軟化特性を表すパラメータである。つぎに、平衡時における静的降伏面

$$f_s(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{vp}) = k_s \quad (2.2)$$

との差をあらわす関数として、超過応力関数 F を

$$F = \frac{f_d}{f_s} - 1 \quad (2.3)$$

と定義した。さらに、動的降伏面と粘塑性ひずみ速度ベクトルとの直交性 (normality rule) からつぎの構成則を得る (図 2.1 参照)。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.4)$$

ここに γ は粘性の逆数を表し、また $\langle \Phi(F) \rangle$ はつぎのように定義する。

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & (F \leq 0) \\ \Phi(F) & (F > 0) \end{cases} \quad (2.5)$$

このモデルでは、現在の応力状態が静的な基準から超過することではじめて、ひずみ速度の粘塑性成分がある値をもつことになる。

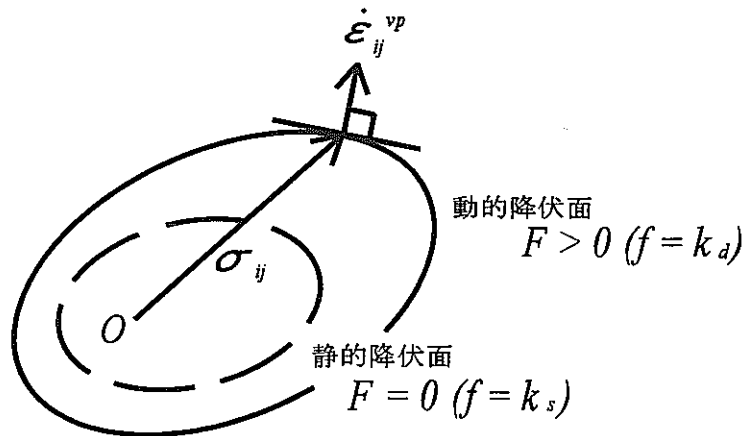


図 2.1 粘塑性理論の概念

いま、式(2.4)の両辺を2乗し、粘塑性ひずみ速度の第2不変量 $I_2^{vp} = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ を考慮すると次式を得る。

$$\sqrt{I_2^{vp}} = -\gamma \Phi(F) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

式(2.6)を解くことにより、つぎの関係が得られる。

$$F = \Phi^{-1} \left\{ -\frac{\sqrt{I_2^{vp}}}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1/2} \right\} \quad (2.7)$$

式(2.7)を式(2.3)に代入すると結局、動的降伏関数 f_d はつぎのような形で表される。

$$f_d = k_s \left[1 + \Phi^{-1} \left\{ -\frac{\sqrt{I_2^{vp}}}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1/2} \right\} \right] \quad (2.8)$$

式(2.8)は f_d が静的降伏値 k_s よりひずみ速度の Φ^{-1} 関数分だけ大きいことを示している。

2.2 足立・岡モデルによる粘性土の構成則

Perzyna の理論を本解析に適用するためには、式(2.4)において粘塑性ひずみ速度の大きさを表す Φ と方向を表す f_d の関数形を決定する必要がある。ここでは粘性土の挙動を対象にした構成則の誘導を足立・岡³⁾⁴⁾に従って行う。

関数 f_d の決定

関連流れ則に立脚した場合を考え、normality rule において塑性降伏関数が応力の第1,第2不変量の関数であると仮定する。そのうえで粘性土の応答がCam-clay 型の降伏条件に従うものとする。

一般的なCam-clay 型の降伏関数は

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left\{ \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) + \frac{\eta}{M} \right\} - v^p = 0 \quad (2.9)$$

- λ : 圧縮指数
- κ : 膨潤指数
- e_0 : 間隙比
- p : 平均応力
- p_0 : 圧密終了時における平均応力
- η : 応力比 (q/p)
- M : 破壊時における応力比
- v^p : 塑性体積ひずみ

で表される。また、これはつぎのように有効応力の形で表すこともできる。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left\{ \ln \left(\frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} \right) + \frac{\sqrt{2J_2}}{M\sigma_m'} \right\} - v^p = 0 \quad (2.10)$$

- σ_m' : 平均有効応力
- σ_{my}' : 降伏時の平均有効応力

足立・岡は式(2.10)を一部修正し、動的降伏関数を

$$f_d = \frac{\sqrt{2J_2}}{M\sigma_m'} + \ln \left(\frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} \right) = k_d \quad (2.11)$$

$$k_d = \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} v^p \quad (2.12)$$

と定義した。

関数 Φ の決定

関数 Φ は材料実験により決定される。足立・岡によれば、正規圧密粘土のせん断試験の結果から、ひずみ速度と超過応力関数 F の間につぎの関係が求まる。

$$\ln \dot{\epsilon} \simeq \ln \dot{\epsilon}^{vp} \propto F \quad (2.13)$$

これにより、関数 $\Phi(F)$ について次式の仮定が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Phi(F) &= C \exp[F] \\ &= C \exp \left[m' \left(\frac{\sqrt{2J_2}}{M\sigma_m'} + \ln \sigma_m' - \ln \sigma_{my}' - \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} v^p \right) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

C, m' : 粘塑性パラメータ

ここで右辺()内の第1および2項は動的状態を表し、第3および4項は静的状態を表す。また、 C はPerzynaの理論式(2.4)における γ に相当するパラメータであり、 m' は二次圧密に対応したパラメータで、ともに異なったひずみ速度のCU試験により求められる。

さらに、粘塑性パラメータ C は加速クリープを考慮する場合において

$$C(\delta, \xi) = C \times \exp \left[\frac{\delta}{M - (\sqrt{2J_2}/\sigma_m')} - \xi \right] \quad (2.15)$$

と関数形で表される。これにより、破壊のごく近傍でパラメータ $C(\delta, \xi)$ が急激に増大することをモデル化できる。

以上により、粘性土の構成則の粘塑性成分は次式で表される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \Phi(F) \left(1 - \frac{\sqrt{2J_2}}{M\sigma_m'} \right) \frac{\delta_{ij}}{3\sigma_m'} + \Phi(F) \frac{1}{M\sigma_m'} \frac{S_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \quad (2.16a)$$

$$\Phi(F) = C(\delta, \xi) \exp \left[m' \left\{ \frac{\sqrt{2J_2}}{M\sigma_m'} + \ln \left(\frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} \right) - \frac{1 + e_0}{\lambda - \kappa} v^p \right\} \right] \quad (2.16b)$$

$$C(\delta, \xi) = C \times \exp \left[\frac{\delta}{M - (\sqrt{2J_2}/\sigma_m')} - \xi \right] \quad (2.16c)$$

したがって、式(2.16)を適用するには $C, \delta, \xi, M, e_0, \lambda, \kappa, m'$ そして初期降伏時の有効平均応力との全部で9つのパラメータを材料試験より求める必要がある。

3. 弾粘塑性問題における均質化理論

3.1 弾粘塑性体について

3.1.1 非線形問題における静的境界値問題

一般の境界値問題における支配方程式は以下のものである。

釣合式

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (3.1)$$

ひずみ - 変位関係

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

境界条件

$$\sigma_{ij} n_j = F_i(\mathbf{x}; t) \quad (3.3)$$

$$u_i = \bar{u}_i(\mathbf{x}; t)$$

ここでは、このような境界値問題を弾粘塑性という非線形問題について解くために時間 $[t, t + \Delta t]$ についての増分形で記述することにする。

まず、現在の応力やひずみ、荷重をつぎのように定義する。

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \Delta \sigma_{ij} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \Delta \varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{ij}^{vp} = \varepsilon_{ij}^{*vp} + \Delta \varepsilon_{ij}^{vp} \quad (3.6)$$

$$f_i^e = f_i^{*e} + \Delta f_i^e \quad (3.7)$$

ここに、添字の(*) は前段階の状態を、また(vp) は粘塑性成分を表す。そして Δ は現段階と前段階との差を意味する。すると、式(3.1)は

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Delta f_i + \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + f_i^* \right) = 0 \quad (3.8)$$

のように書きかえられる。式(3.8)において、() 内の成分は前段階でつり合わなかった超過分の応力または荷重であり、仮に

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + f_i^* \equiv 0 \quad (3.9)$$

が保証されるならば、式(3.8)は以下の増分形で書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Delta f_i = 0 \quad (3.10)$$

3.1.2 弾粘塑性体の構成則

前節でつり合い式が導かれたので、弾粘塑性体の構成則が与えればこの問題の解を得ることができる。ここでは弾粘塑性挙動をあらわすレオロジカルモデルを図3.1のような弾性挙動を示すバネと粘性を示すダッシュポット、塑性の挙動を示すスライダーから成る比較的単純なモデルを採用する。

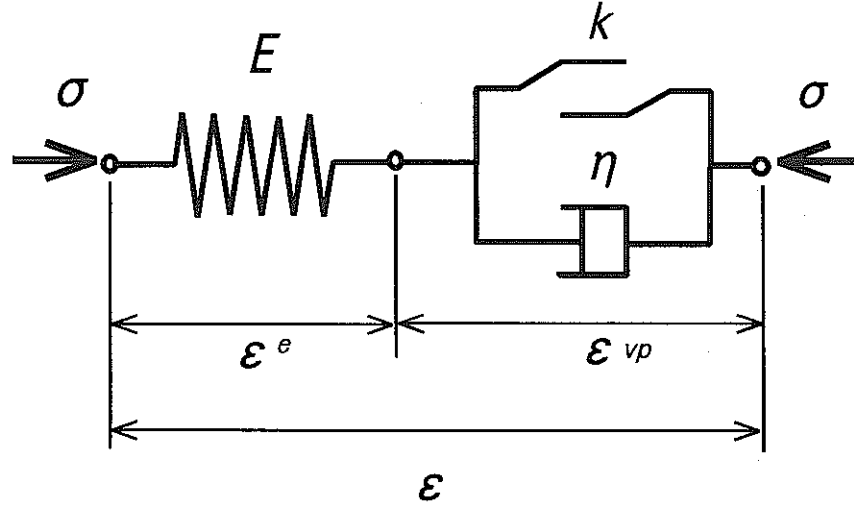


図3.1 レオロジカルモデル

図3.1においてつぎの関係がいえる。

$$\dot{\sigma} = D\dot{\epsilon}^e = D(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{vp}) \quad (3.11)$$

ひずみ速度の弾性成分についてはHooke 則により、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{\dot{\sigma}_m}{3K} \delta_{ij} \quad (3.12)$$

と表される。ここで、 G はせん断弾性係数であり、 K は体積弾性係数である。粘性土の場合、 K については

$$K = \frac{(1 + e_0)\sigma_m}{\kappa} \quad (3.13)$$

として求められる。一方、 G は材料実験からパラメータとして与えられる。

また、ひずみ速度の粘塑性成分については前章で述べたようにPerzyna のモデルに従うとすると、

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \left\langle \Phi \left(\frac{f_d}{f_s} - 1 \right) \right\rangle \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.14)$$

となり、弾粘塑性体としての構成則は次式のようになる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{ij} + \gamma \left\langle \Phi \left(\frac{f_d}{f_s} - 1 \right) \right\rangle \left\{ \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{ij}} \right\} \quad (3.15)$$

$$C_{ijkl} = D_{ijkl}^{-1}$$

つぎに、数値解析を行うことを考慮し、式(3.11)で求めた構成則を時間 Δt における増分形で表すことを考える。まず、式(3.16)は

$$\Delta \sigma_n = D(\Delta \epsilon_n - \Delta \epsilon_n^{vp}) \quad (3.16)$$

と書きかえられる。ここで、添字の n は n 番目の計算ステップにおける値を意味する。式(3.16)において、粘塑性ひずみ増分 $\Delta \epsilon_n^{vp}$ の求め方が問題となる。

本解析では θ 法により、つぎのような形で求めることにする。

$$\Delta \epsilon_n^{vp} = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\epsilon}^{vp} dt = \dot{\epsilon}_{n+\theta}^{vp} \Delta t \quad (3.17)$$

ここに、

$$\dot{\epsilon}_{n+\theta}^{vp} = (1-\theta)\dot{\epsilon}_n^{vp} + \theta\dot{\epsilon}_{n+1}^{vp} \quad (3.18)$$

である。因みに、 $\theta = 0$ のときは陽差分法、 $\theta = 1$ のときは陰差分法、 $\theta = 0.5$ のときはCrank-Nicolsonの差分法と呼ばれる。一般には $\dot{\epsilon}_{n+1}^{vp}$ の値は未知であるので、Taylor展開ふうに

$$\dot{\epsilon}_{n+1}^{vp} = \dot{\epsilon}_n^{vp} + \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_n^{vp}}{\partial \sigma} \right) \Delta \sigma_n \quad (3.19)$$

$$\left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_n^{vp}}{\partial \sigma} \right) = \gamma \left\langle \Phi \frac{\partial}{\partial \sigma} \left\{ \frac{\partial f_d}{\partial \sigma} \right\}^t + \frac{d\Phi}{df} \left\{ \frac{\partial f_d}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f_d}{\partial \sigma} \right\}^t \right\rangle$$

とすることにより、既知として扱うことができる。粘塑性ひずみ速度の増分は、結局、

$$\Delta \epsilon_n^{vp} = \dot{\epsilon}_n^{vp} \Delta t + \theta \Delta t \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_n^{vp}}{\partial \sigma} \right) \Delta \sigma_n \quad (3.20)$$

と求められる。これを式(3.16)に代入すると、

$$\Delta \sigma_n = D \left\{ \Delta \epsilon_n - \dot{\epsilon}_n^{vp} \Delta t - \theta \Delta t \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_n^{vp}}{\partial \sigma} \right) \Delta \sigma_n \right\} \quad (3.21)$$

となる。式(3.21)を $\Delta \sigma_n$ について整理することにより、弾粘塑性体の構成則が

$$\Delta \sigma_n = \bar{D}_n (\Delta \epsilon_n - \dot{\epsilon}_n^{vp} \Delta t) \quad (3.22)$$

$$\bar{D}_n = \left\{ I + \theta \Delta t D \left(\frac{\partial \dot{\epsilon}_n^{vp}}{\partial \sigma} \right) \right\}^{-1} D$$

のように得られる。

以上から、Perzynaの理論に立脚した弾塑性体のつり合い問題における支配方程式が、時間 Δt の増分形でつぎのように求まった。

つり合い式

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \Delta f_i + \left(f_i^* + \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3.23)$$

ひずみ - 変位関係

$$\Delta \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.24)$$

境界条件

$$\Delta\sigma_{ij}n_j = \Delta F_i(\mathbf{x}; t) \quad (3.25)$$

$$\Delta u_i = \Delta \bar{u}_i(\mathbf{x}; t)$$

構成則

$$\Delta\sigma_{ij} = \bar{D}_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\sigma_{ij}^{vp} \quad (3.26)$$

$$\Delta\sigma_{ij}^{vp} = \bar{D}_{ijkl}\varepsilon_{ij}^{vp}\Delta t$$

3.2 弾粘塑性体における均質化理論

3.2.1 均質化 (Homogenization) 法の概要

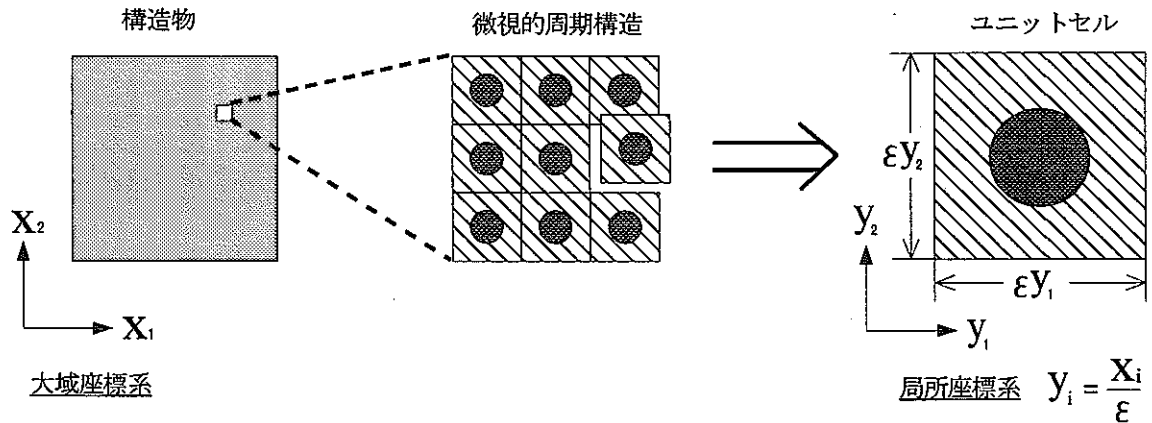


図3.2 微視的周期構造を有する材料とユニットセル

図3.2に示すような、異種材料が規則的に配置された複合材料からなる構造物を仮定する。このような材料の特徴は、その物性が微視的にみて周期的かつその周期の中で急激に変化することである。

構造物全体の力学的挙動を求める（これを巨視的問題と呼ぶことにする）には、この微視的に異なる物性を、巨視的に等価な1つの物性におきかえる（平均化する）必要がある。そのための数学的手法の1つとして均質化法があり、その基本的な内容については以下に述べる。

まず、構造物全体の配置を大域座標系 $\mathbf{x}$ により規定する。つぎに、材料の微視的な周期構造の各々（これをユニットセルと呼ぶ）について、その配置を局所座標系 $\mathbf{y}$ によって規定する。この2つの座標系は ε というスケールを用いて、 $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ と関連づけられている。

このような材料の物性を ϕ^ε とすると、 ϕ^ε は

$$\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.27)$$

と $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の2変数関数で表示される。

また、物性の変化はユニットセル（周期 Y ）ごとに繰り返されるので、

$$\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{Y}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.28)$$

となる。このことを Y -periodic 関数であるという。

このような材料について静的つり合い問題を考える場合、それを満足する解を得るための準備として、 ϕ^ε をつぎのような摂動法による漸近展開の形で表す。

$$\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \phi^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \phi^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \phi^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (3.29)$$

このような漸近展開法を解くべき境界値問題の支配方程式に適用し、微視的スケールを $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより、材料の物性が平均化されると同時に巨視的問題と微視的問題の近似式を得ることができる。

3.2.2 弾粘塑性体への均質化法の適用

弾粘塑性体の均質化理論においては、変位をつぎのように漸近展開する。

$$\Delta u_i^\varepsilon(\mathbf{x}; t) = \Delta u_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \varepsilon \Delta u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \varepsilon^2 \Delta u_i^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \dots \quad (3.30)$$

ここで、局所座標 $\mathbf{y}$ についての周期性 (Y -periodic) は

$$\Delta u_i^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \Delta u_i^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{Y}; t) \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.31)$$

となる。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限においては $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は独立となるので微分演算子が

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (3.32)$$

と書き変わることに注意して、式(3.24)を展開すると以下ようになる。

$$\Delta \varepsilon_{ij}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \Delta \varepsilon_{ij}^{0y} + [\Delta \varepsilon_{ij}^{0x} + \Delta \varepsilon_{ij}^{1y}] + \varepsilon [\Delta \varepsilon_{ij}^{1x} + \Delta \varepsilon_{ij}^{2y}] + \dots \quad (3.33)$$

ここに、

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{\alpha x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i^\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j^\alpha}{\partial x_i} \right) \quad (3.34a)$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{\alpha y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i^\alpha}{\partial y_j} + \frac{\partial \Delta u_j^\alpha}{\partial y_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3; \alpha = 0, 1, \dots) \quad (3.34b)$$

である。

また応力についても、

$$\Delta \sigma_{ij}^\varepsilon(\mathbf{x}; t) = \frac{1}{\varepsilon} \Delta \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \Delta \sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \varepsilon \Delta \sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) + \dots \quad (3.35)$$

とひずみに対応した形で表されとする。

以上で求めた応力、ひずみを構成式(3.26)に代入し、微視的スケール $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、 ε の各オーダーで収束する速度が異なることからつぎの関係が求まる。

$$\Delta\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = D_{ijkl}^\varepsilon \Delta\varepsilon_{kl}^{0y} \quad (3.36a)$$

$$\Delta\sigma_{ij}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = D_{ijkl}^\varepsilon \left\{ \Delta\varepsilon_{kl}^{0x} + \Delta\varepsilon_{kl}^{1y} \right\} - \Delta\sigma_{ij}^{vp} \quad (3.36b)$$

$$\Delta\sigma_{ij}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = D_{ijkl}^\varepsilon \left\{ \Delta\varepsilon_{kl}^{1x} + \Delta\varepsilon_{kl}^{2y} \right\} \quad (3.36c)$$

⋮

ここで、 $\Delta\sigma_{ij}^1$ の項に粘塑性成分 $\Delta\sigma_{ij}^{vp}$ が入っていることに注意する。

また、つり合い式(3.23)についてはつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^\varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^0}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^1}{\partial y_j} \right) + \left(\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^2}{\partial y_j} \right) + \dots \\ &= -\Delta f_i^\varepsilon - \left(f_i^{*\varepsilon} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

ここでも同様に、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると ε の各項について0となる必要がある。 ε^{-2} , ε^{-1} , ε^0 の項について0とすると、以下の議論が展開できる。

$O(\varepsilon^{-2})$ 項について:

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^0}{\partial y_j} = 0 \implies \Delta\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \Delta\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; t) \quad (3.38)$$

また、式(3.35)について $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると $\Delta\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; t) = 0$ となることから、

$$\Delta u_i^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \Delta u_i^0(\mathbf{x}; t) \quad (3.39)$$

がいえ。すなわち、 Δu_i^0 は微視構造の影響を受けない平均的な変位であることが分かる。

$O(\varepsilon^{-1})$ 項について (局所問題):

$$\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^0}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^1}{\partial y_j} = 0 \quad (3.40)$$

$\Delta\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}; t) = 0$ により式(3.40)は $\frac{\partial \Delta\sigma_{ij}^1}{\partial y_j} = 0$ となる。これに式(3.36b)を代入することにより、

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ D_{ijkl}^\varepsilon (\Delta\varepsilon_{kl}^{0x} + \Delta\varepsilon_{kl}^{1y}) - \Delta\sigma_{ij}^{vp} \right\} = 0 \quad (3.41)$$

が得られる。式(3.41)を境界条件(周期条件)

$$\Delta u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \Delta u_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{Y}; t) \quad (3.42)$$

のもとに弱形式化すると、

$$\int_Y D_{ijkl}^\varepsilon \Delta\varepsilon_{kl}^{1y} \frac{\partial V_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} = \left\{ \int_Y D_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial V_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \right\} \Delta\varepsilon_{kl}^{0x} - \int_Y \Delta\sigma_{ij}^{vp} \frac{\partial V_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} d\mathbf{y} \quad (3.43)$$

となる。ここで、 $V_i(\mathbf{y})$ は Y -periodic な任意関数である。

局所形における特性関数を

$$\Delta u_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = \chi_k^{pq}(\mathbf{y}; t) \frac{\partial \Delta u_p^0}{\partial x_q} + c(\mathbf{x}) \quad (3.44)$$

と定義すると、ユニットセルにおける微視的問題(弱形式)が以下のように得られる。

$$\left[\int_Y (\bar{D}_{ijop} \frac{\partial \chi_o^{kl}}{\partial y_p} - \bar{D}_{ijkl}) \frac{\partial V_i}{\partial y_j} dY \right] \Delta \varepsilon_{kl}^{0x} = - \int_Y \Delta \sigma_{ij}^{vp} \frac{\partial V_i}{\partial y_j} dY \quad (3.45)$$

ここで χ_o^{kl} は局所問題におけるユニットセルに巨視的なひずみ(ここではひずみ増分)を与えたときに生じる変位の微視的な乱れを表す。

$O(\varepsilon^0)$ 項について (巨視問題):

$$\frac{\partial \Delta \sigma_{ij}^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}^2}{\partial y_j} = -\Delta f_i^\varepsilon - \left(f_i^{*\varepsilon} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \quad (3.46)$$

式(3.44)をユニットセル内で平均化すると、

$$\left\langle \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}^1}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}^2}{\partial y_j} \right\rangle = -\langle \Delta f_i^\varepsilon \rangle - \langle f_i^{*\varepsilon} \rangle - \left\langle \frac{\partial \sigma_{ij}^{*\varepsilon}}{\partial x_j} \right\rangle \quad (3.47)$$

となる。 $\langle \phi \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \phi dy$ は平均化演算子と呼ばれる。ここで、左辺第二項について $\Delta \sigma_{ij}^2$ が Y-periodic であることを考慮すると発散定理により

$$\left\langle \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}^2}{\partial y_j} \right\rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \frac{\partial \Delta \sigma_{ij}^2}{\partial y_j} dv = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \Delta \sigma_{ij}^2 n_j dS = 0 \quad (3.48)$$

となることから、式(3.47)は

$$\frac{\partial \langle \Delta \sigma_{ij}^1 \rangle}{\partial x_j} = -\langle \Delta f_i^\varepsilon \rangle - \langle f_i^{*\varepsilon} \rangle - \frac{\partial \langle \sigma_{ij}^{*\varepsilon} \rangle}{\partial x_j} \quad (3.49)$$

と書きかえられる。

また、式(3.33)について $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより、材料のひずみが

$$\Delta \varepsilon_{ij}^\varepsilon \simeq \Delta \varepsilon_{ij}^{0x} + \Delta \varepsilon_{ij}^{1y} \quad (3.50)$$

と近似される。このひずみに微視項 $\Delta \varepsilon_{ij}^{1y}$ が残ることは、巨視的挙動を考える際でも微視的周期構造の影響を無視できないことを意味する。さらに上述の局所問題において $\Delta \varepsilon_{ij}^{0x}$ と $\Delta \varepsilon_{ij}^{1y}$ の関係が得られることから、

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{1y} = \frac{\partial \chi_i^{kl}}{\partial y_j} \Delta \varepsilon_{kl}^{0x} \quad (3.51)$$

となり、式(3.36b)はつぎのようになる。

$$\Delta\sigma_{ij}^1 = (D_{ijkl}^\varepsilon + D_{ijrs}^\varepsilon \frac{\partial\chi_r^{kl}}{\partial y_s}) \Delta\varepsilon_{kl}^0 - \Delta\sigma_{ij}^{vp} \quad (3.52)$$

式(3.52)をユニットセル内で平均化すると、

$$\langle \Delta\sigma_{ij}^1 \rangle = D_{ijkl}^H \Delta\varepsilon_{kl}^0 - \langle \Delta\sigma_{ij}^{vp} \rangle \quad (3.53)$$

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (\bar{D}_{ijkl} + \bar{D}_{ijop} \frac{\partial\chi_o^{kl}}{\partial y_p}) dY \quad (3.54)$$

となる。ここで、 D_{ijkl}^H はミクロな幾何構造を反映したマクロな定数であることから、均質化弾性定数とよばれる。これにより式(3.47)は

$$\frac{\partial\{D_{ijkl}^H \Delta\varepsilon_{kl}^0\}}{\partial x_j} = \frac{\partial\langle \Delta\sigma_{ij}^{vp} \rangle}{\partial x_j} - \langle \Delta f_i^\varepsilon \rangle - \langle f_i^{*\varepsilon} \rangle - \frac{\partial\langle \sigma_{ij}^{*\varepsilon} \rangle}{\partial x_j} \quad (3.55)$$

と書きかえられる。

幾何学的境界条件

$$\Delta u_i^\varepsilon = \Delta \bar{u}_i(\mathbf{x}; t) \quad \text{on } \partial\Omega_u^\varepsilon \quad (3.56)$$

および、力学的境界条件

$$\Delta\sigma_{ij}^\varepsilon n_j = \Delta F_i(\mathbf{x}; t) \quad \text{on } \partial\Omega_t^\varepsilon \quad (3.57)$$

を考慮し、任意関数 $v_i(\mathbf{x}; t)$ を用いて式(3.55)を弱形式化すると

$$\begin{aligned} \int_\Omega D_{ijkl}^H \Delta\varepsilon_{kl}^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv &= \int_\Omega \left[\frac{\partial\langle \Delta\sigma_{ij}^{vp} \rangle}{\partial x_j} - \langle \Delta f_i^\varepsilon \rangle - \langle f_i^{*\varepsilon} \rangle - \frac{\partial\langle \sigma_{ij}^{*\varepsilon} \rangle}{\partial x_j} \right] v_i dv \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \Delta F_i v_i dS \quad \forall v_i (v_i = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_u) \end{aligned} \quad (3.58)$$

となる。式(3.58)の右辺第一項は粘塑性項による荷重を表し、超過応力関数による降伏判定を行うことで計算される。式(3.45)と式(3.58)を連立させて解くことにより、式(3.53)で示された均質化応力を求めることができる。

4. 数値解析と解析例

4.1 解析方法とフローチャート

ここでは、弾粘塑性材料の1つである粘性土内に礫成分を有する混合土の時間依存挙動を解析するために均質化法を適用し、有限要素法を用いて解析を行う。この際、非線形挙動を扱うために時間増分理論に立脚した「初期ひずみ法」を用いる。すなわち、各時間ステップにおいて生じた粘塑性過剰応力 ($\Delta\sigma_{ij}^{vp}$) を荷重として扱う方法を用いるが、それには各ステップにおいて釣り合い式を満たすまでこの過剰応力を各要素に再分配する方法 (LIM) と、つぎのステップの荷重として扱う方法 (粘塑性法) があるが、本解析では簡単のため後者を採用する。ただし精度の点で問題が残らないよう、時間ステップを細かく取った (時間ステップについては次節で述べる)。

解析の手順を以下に示す。

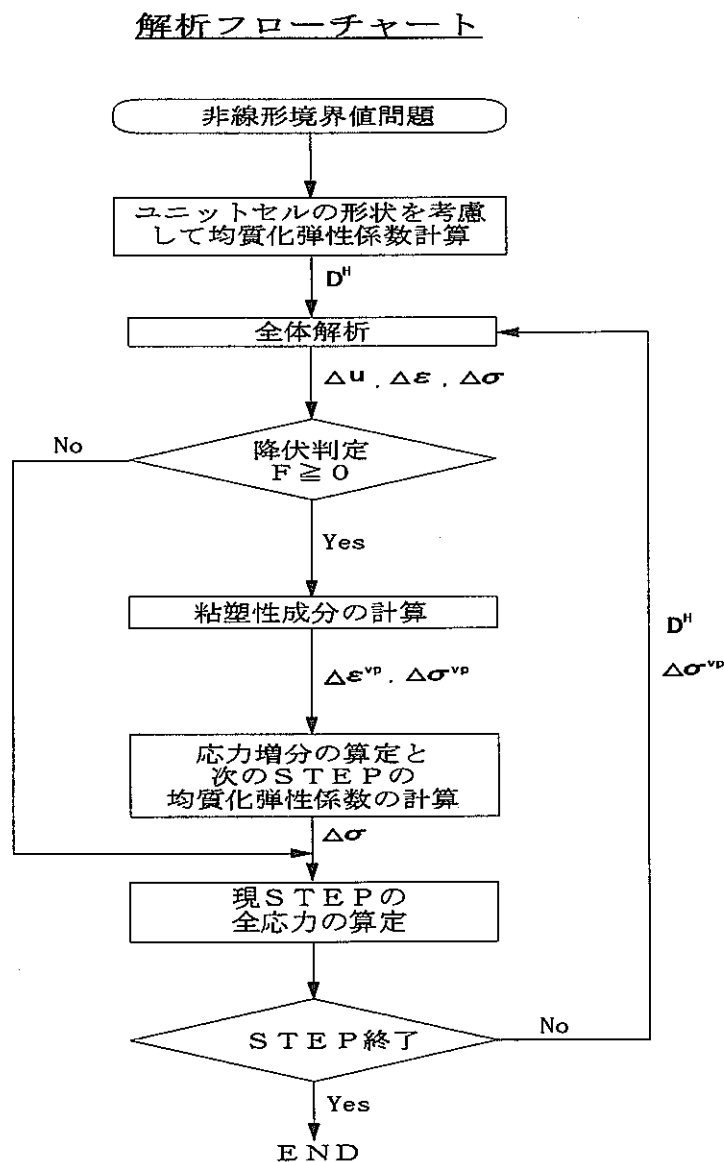


図4.1 プログラムの解析手順

4.2 解析モデルと解析条件

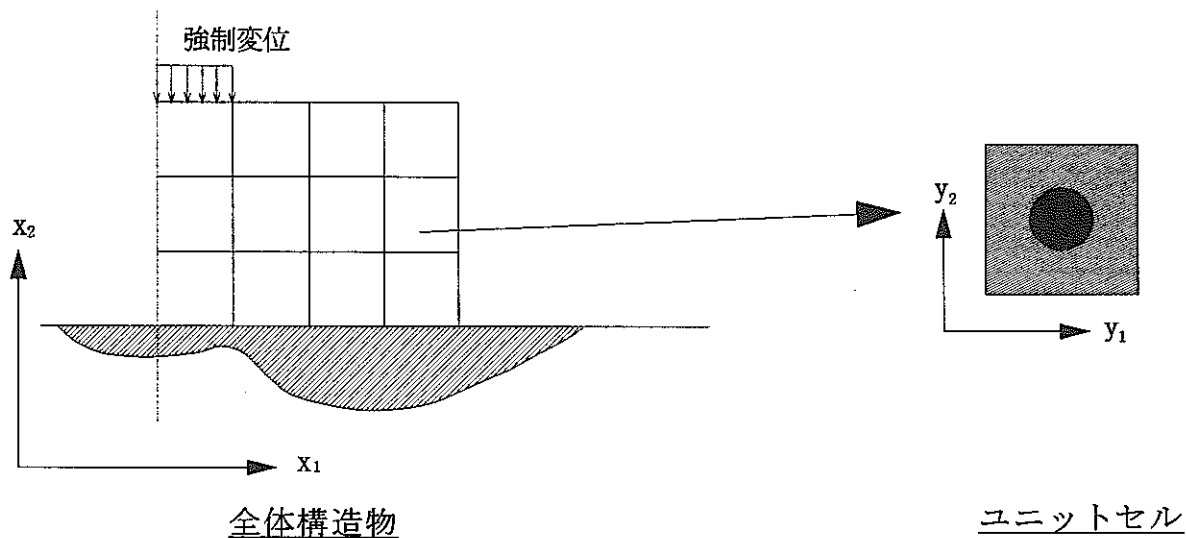


図4.2 地盤の全体解析

図4.2で示す地盤 ($4.0m \times 3.0m$) に部分的に強制変位を与えて応力の時間依存性を考察する。対象とした材料は、弾粘塑性体と仮定した大阪沖積粘土と礫を想定した弾性材料である。大阪沖積粘土の物性については足立らによる材料試験で得られた以下のパラメータを用いる。

表4.1 粘性土の材料物性値

	$C(sec^{-1})$	λ	κ	e_0	M	m'	$G_0(MPa)$	$P_0(MPa)$
材料1 (大阪型)	2.70×10^{-6}	0.372	0.054	1.28	1.28	21.5	12.9	0.588

大阪型粘性土において P_0 は圧密終了時の有効応力であり、本解析ではこのときに材料は初期降伏に達しているものと仮定する。また、弾性材料の物性はヤング率 $E = 50.0(MPa)$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする。

4.3 解析例

4.3.1 粘塑性成分の評価と計算ステップの考察(解析1)

先に述べた時間ステップについて、以下のモデルを用いてその影響を調べる。解析モデルはユニットセルを用い、全て大阪型粘性土とし、時間ステップを0.5秒,1.0秒,2.0秒,5.0秒とした。

結果と考察:

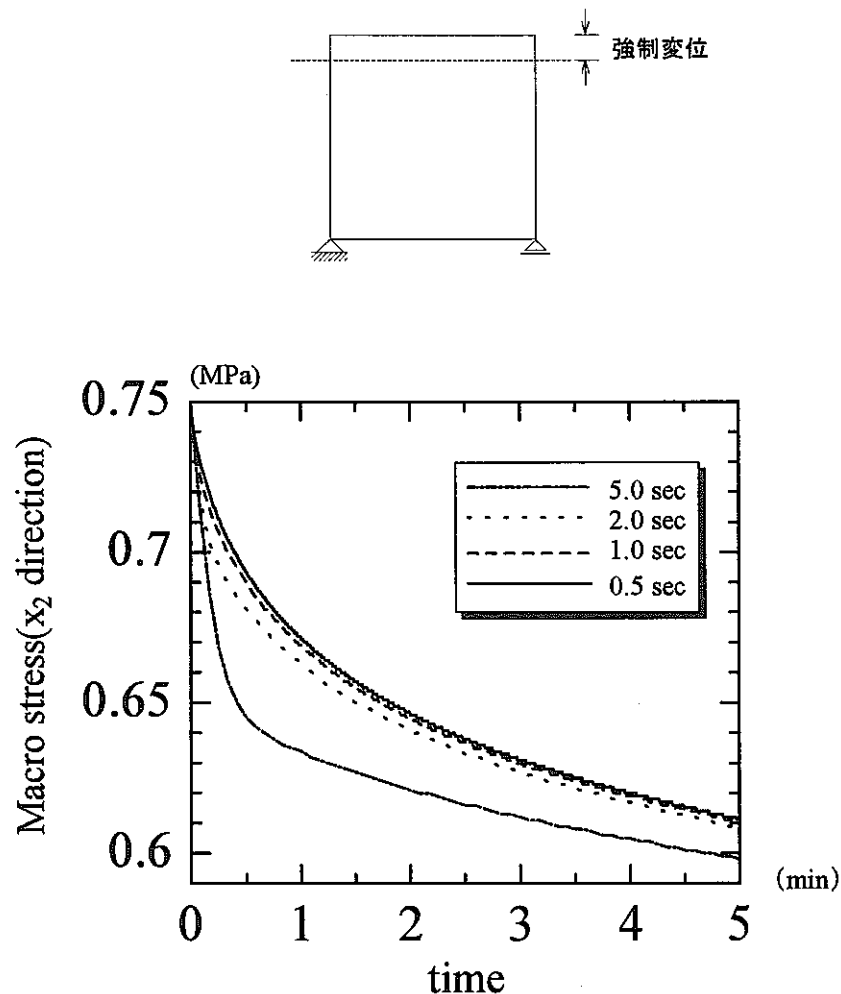


図 4.3 時間ステップによる応答の比較

図 4.3 は初期圧密応力を 0.75(MPa), 強制変位を 1(%) とした条件のもとで得られた応答である。これによると、時間ステップを長くするほど応力の収束が速く、その挙動が不安定になっていく様子が伺える。これは時間ステップを大きく取った場合、応力の粘塑性成分を過大に評価していると考えられる。本解析において、計算の精度を保证するためにはできるだけ時間ステップを短くすることが重要となる。ただし、図において 1 秒間隔のときと 0.5 秒間隔のときではその挙動にあまり差はなく、解析の効率等を考慮して今後は時間ステップ 1 秒で計算を行うこととする。

4.3.2 初期圧密応力に関する考察 (解析2)

解析1と同じモデルを用いて、圧密終了時を想定した初期圧密応力を0.65,0.70,0.75,0.80... (MPa)と変化させたときの挙動を調べる。

結果と考察:

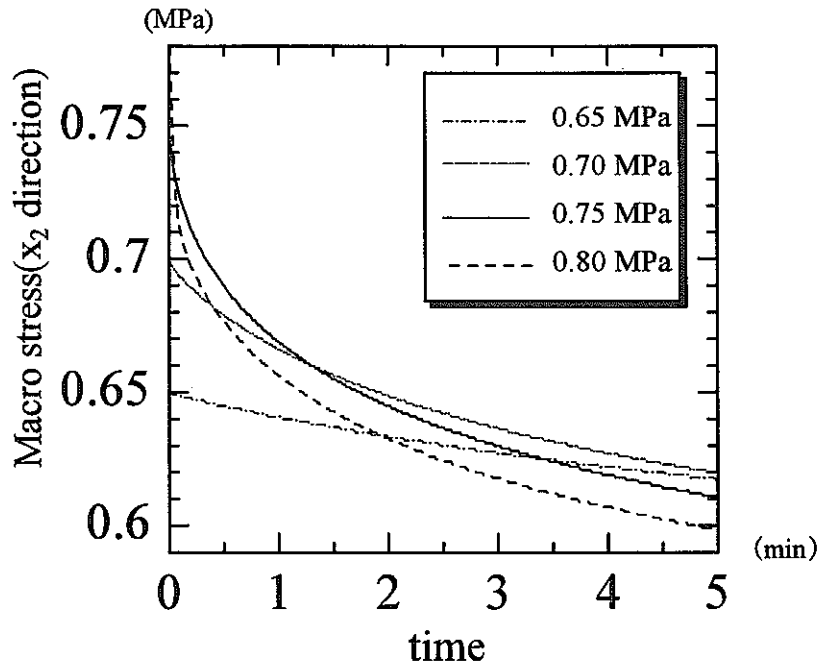


図4.4 初期圧密応力依存性による挙動の比較

図4.4より初期圧密応力が初期降伏応力よりも大きくなるにしたがつて応力緩和が顕著になってくる。これより粘塑性を有する材料は、初期降伏応力のある程度超える応力が作用すると、挙動が不安定になるという予測ができる。

4.3.3 地盤材料の解析（解析3）

粘性土地盤改良を想定したケースについて、4つの解析ポイント（要素 5,9,10,11）の応答を調べる。

CASE1 の材料は全て大阪型粘性土とし、CASE2は弾性材料を中心に体積比にして16%含む大阪型粘性土の複合材料とする。解析条件としては図4.5の構造物に強制変位を1%（element 9）与えた。

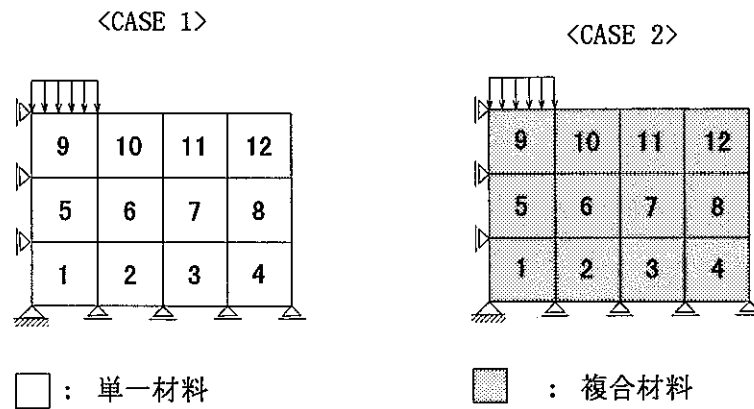


図4.5 全体構造物

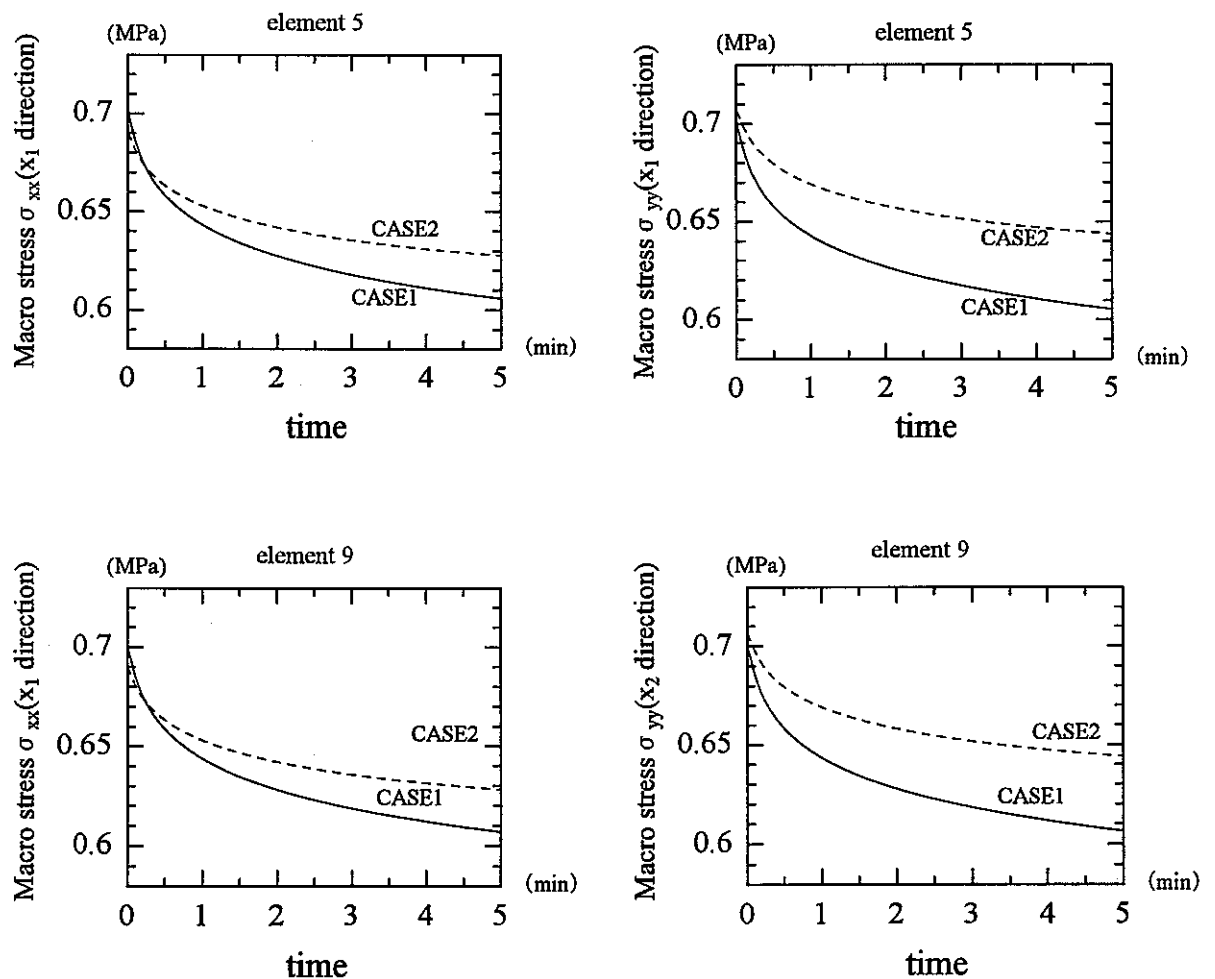


図4.6 CASE1 と CASE2 の応力緩和挙動 (1)

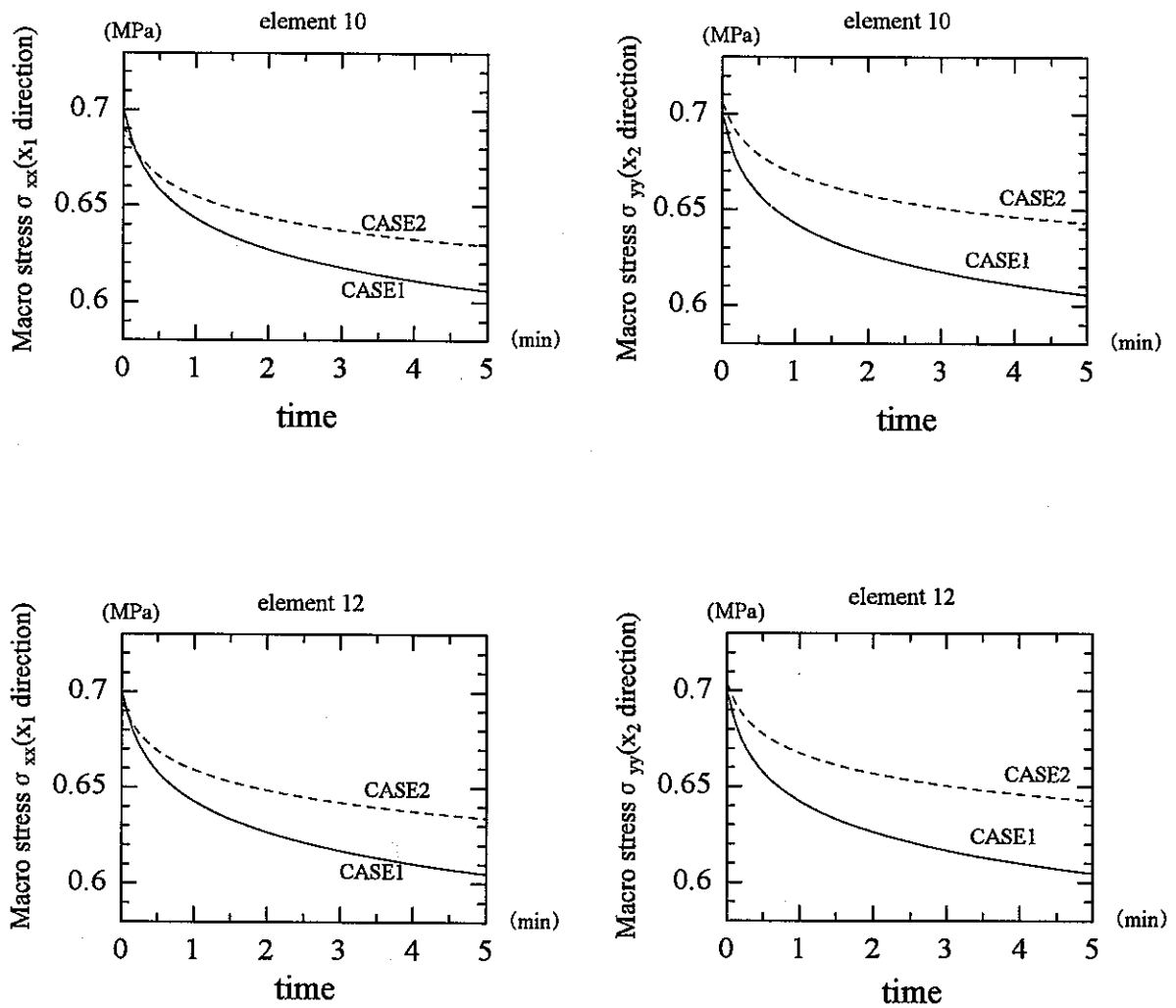


図4.6 CASE1とCASE2の応力緩和挙動(2)

各要素の応力緩和現象は弾性材料を混入することで改善されたが、この結果を見るかぎり、きわだって場所依存性があるわけではないことがわかる。

4.3.4 ミクロ配置の全体解析の影響(解析4) – 均質化解析 –

前節のCASE2のユニットセルの弾性材料の形状、体積比、配置の違いが全体構造の各要素にどのような影響をおよぼすかを調べる。用いるユニットセルは以下の5つのパターンとする。解析条件はCASE2と同様とし、解析ポイントは要素番号 9,10,12 とする。

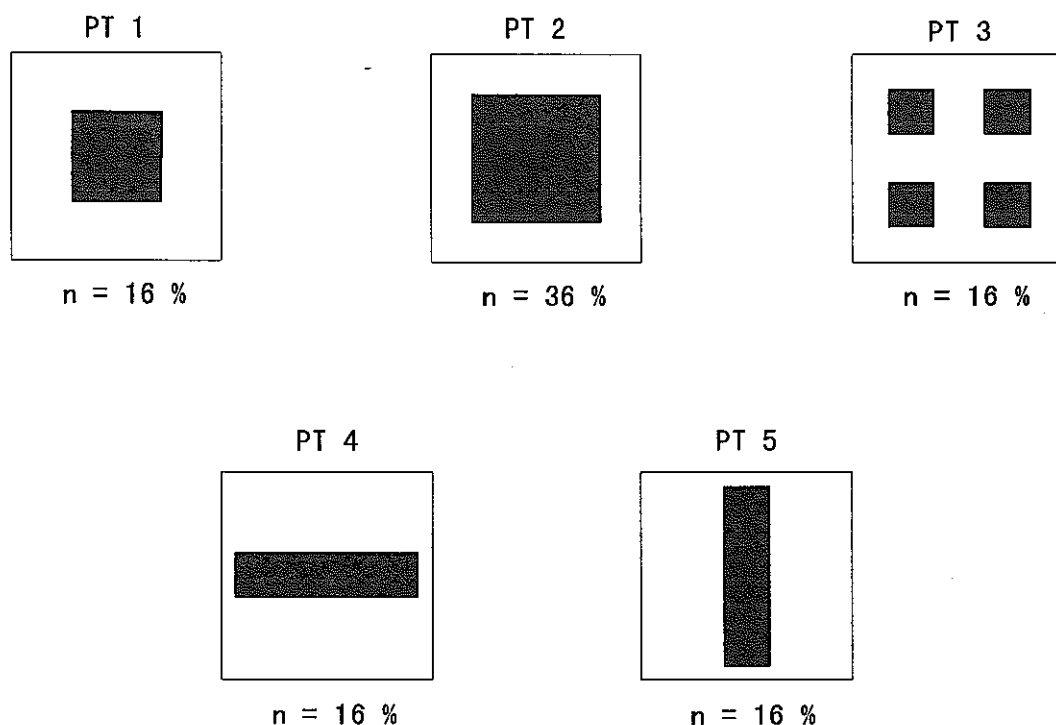


図4.7 粘性土の中に礫を配したユニットセル

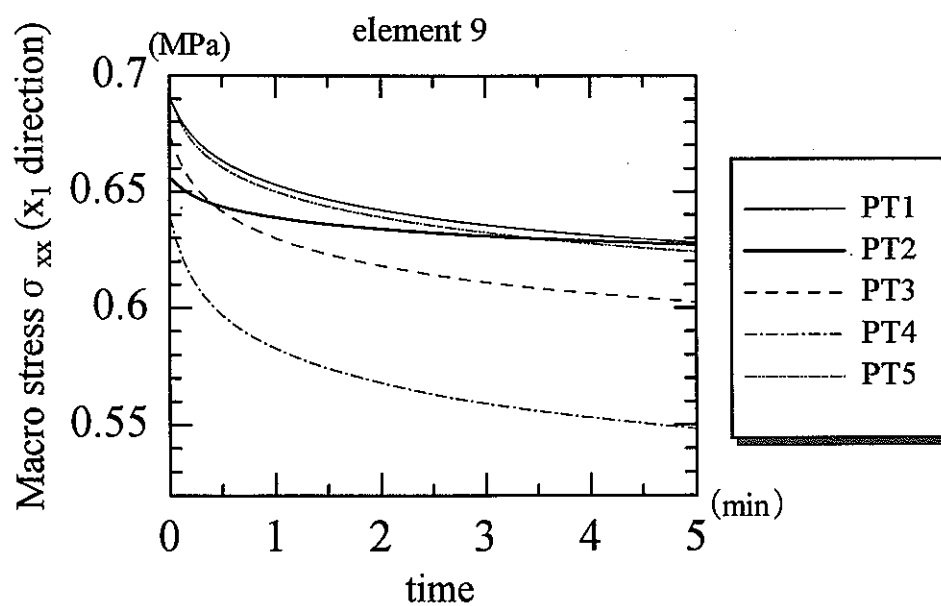


図4.8 ユニットセル形状の相違による応力緩和曲線(1)

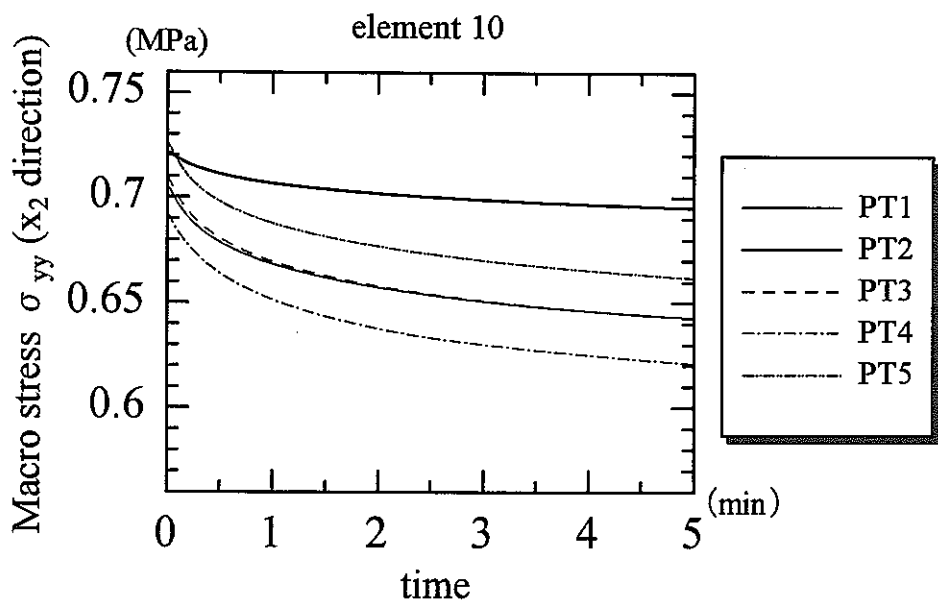
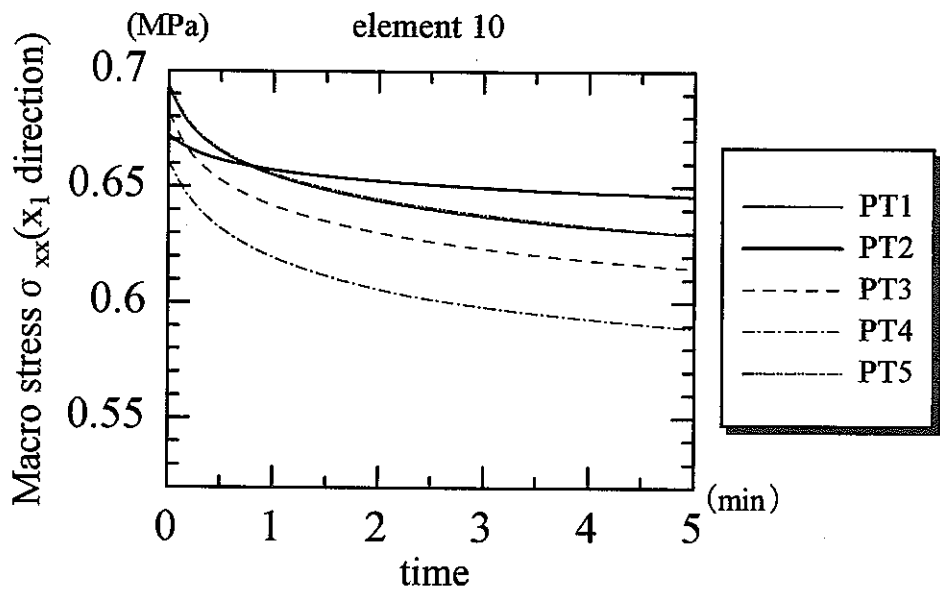
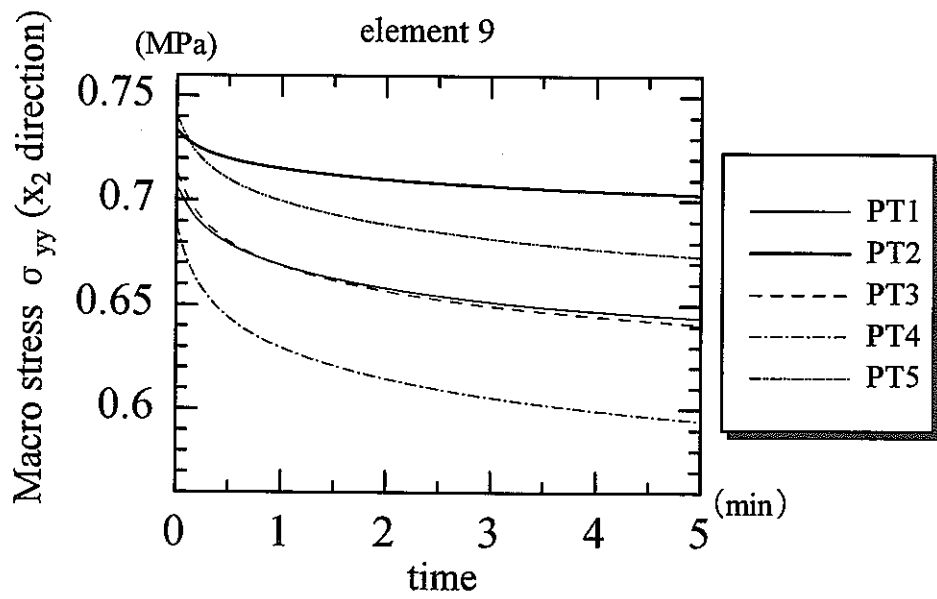


図4.8 ユニットセル形状の相違による応力緩和曲線(2)

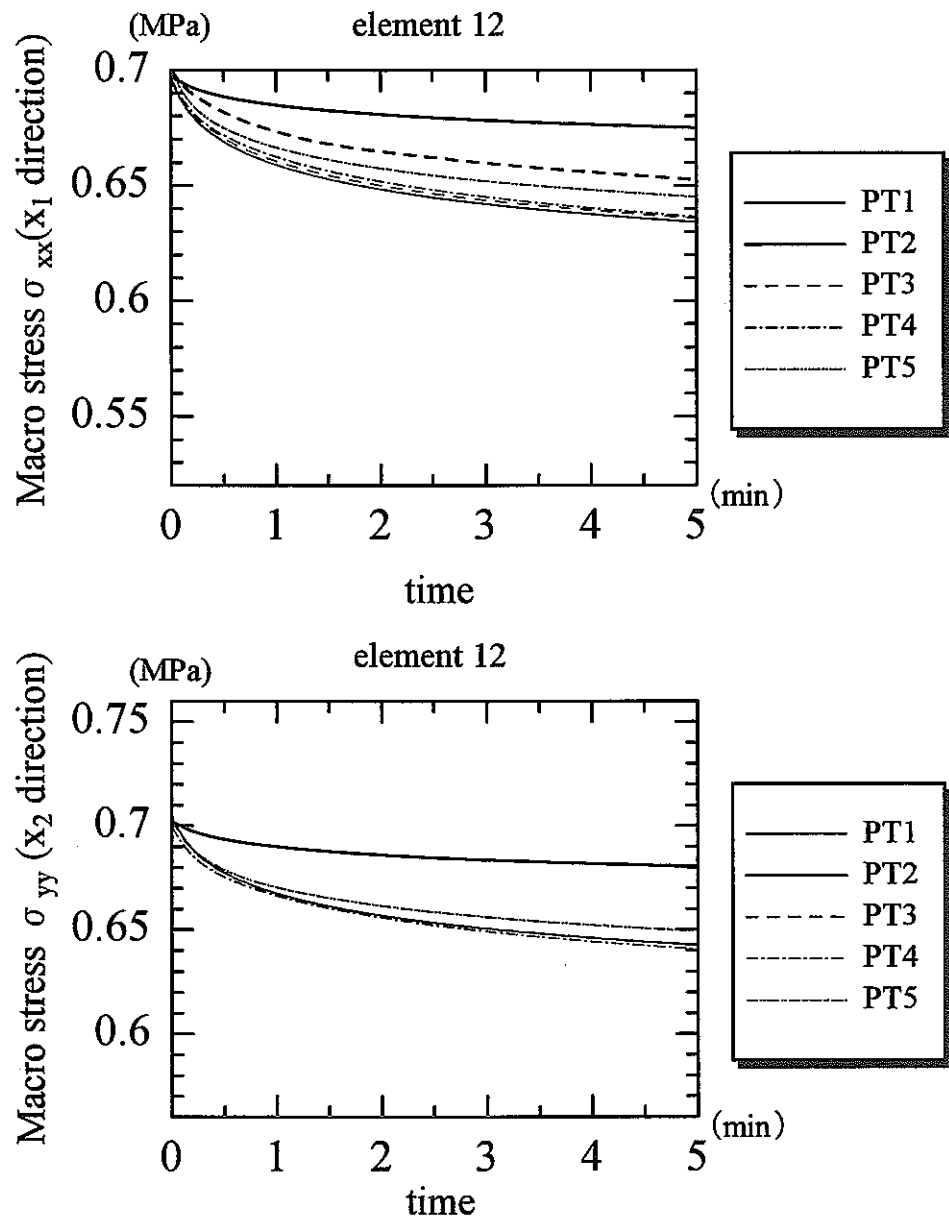


図4.8 ユニットセル形状の相違による応力緩和曲線 (3)

以上の解析結果は先の (解析3) と比較して明らかに場所 (要素) による依存性が見られる。特に、強制変位を直接受ける要素 9 はユニットセル形状による応力緩和曲線のばらつきが大きく出ることが図より確かめられる。このばらつきは、ひずみ増分の大きさによるものと考えられるが応力緩和傾向を支配するまでの影響力はない。PT4 と PT5 の応力緩和曲線を比較すればそのちがいは明らかである。要素 9, 10 において、層状に弾性材料が配置された PT4 と、棒状に弾性材料が配置された PT5 は同じ体積配分率にもかかわらず応力緩和傾向が異なる。要素 12 においては要素 9, 10 ほど微視構造による差異がみられなかった。以上より、ひずみ増分が大きいほど微視構造特性がよくあらわれることがわかる。また PT2 は他のパターンと比べてすべての図において緩和曲線がゆるやかで応答が弾性的になることがわかる。

つぎにこの解析でキーポイントとである粘塑性応力増分で比較を行う。

以下に30秒内の粘塑性応力増分と均質化応力挙動を X_2 方向のみにについて示す。

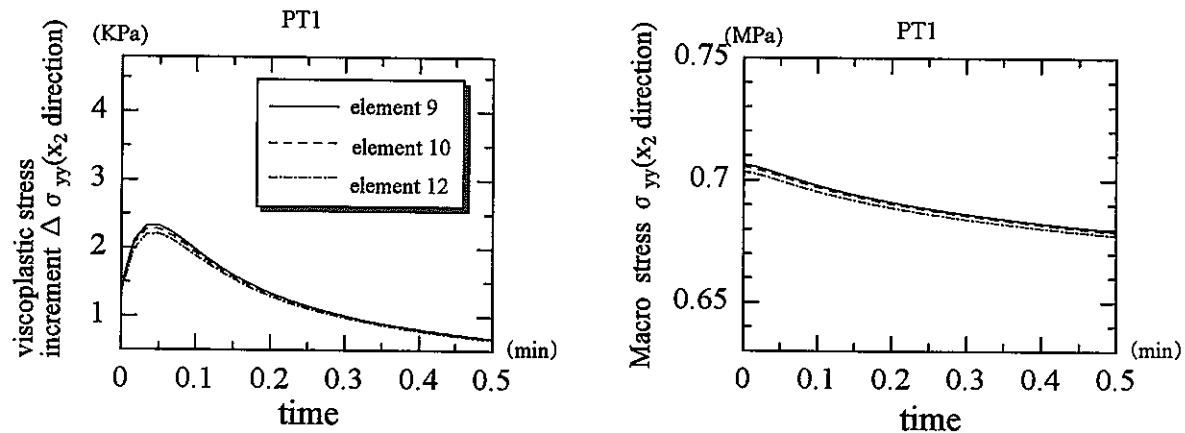


図 4.9 PT1:粘塑性応力増分とマクロ応力挙動

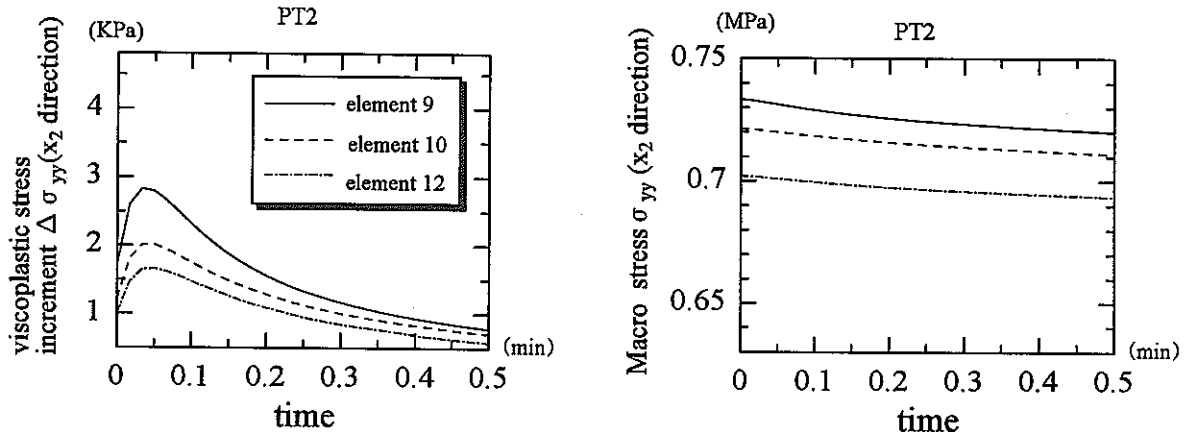


図 4.10 PT2:粘塑性応力増分とマクロ応力挙動

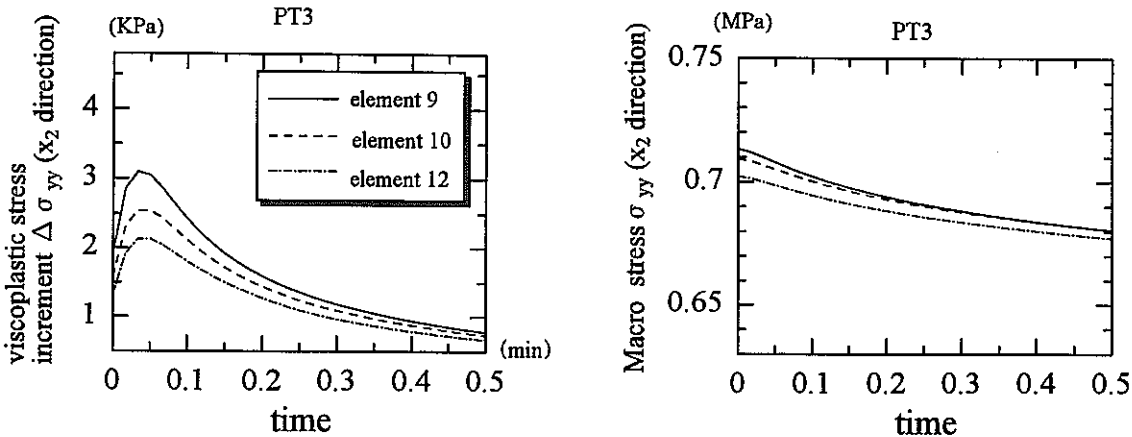


図 4.11 PT3:粘塑性応力増分とマクロ応力挙動

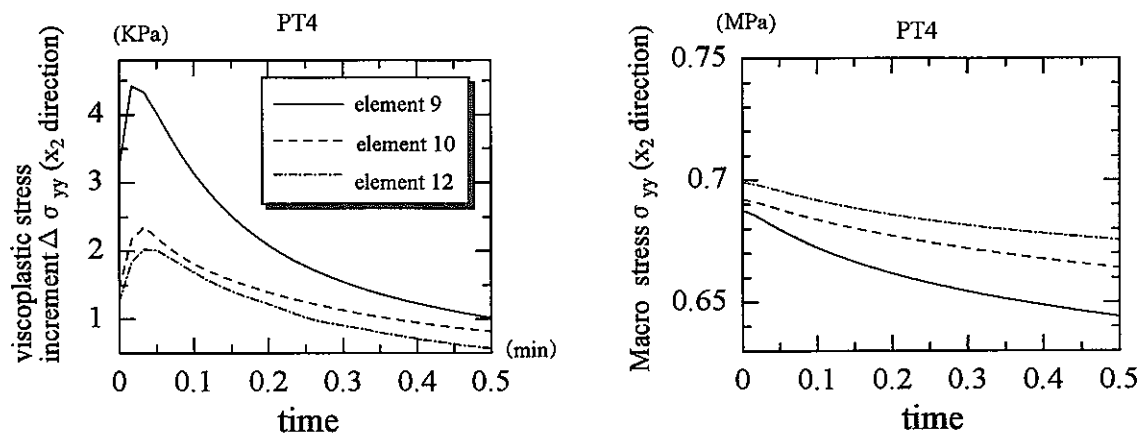


図 4.12 PT4:粘塑性応力増分とマクロ応力挙動

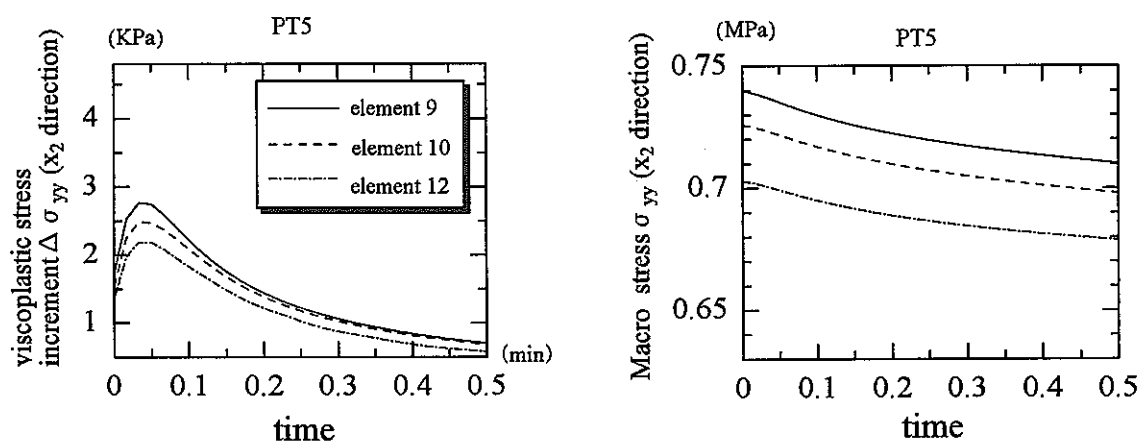


図 4.13 PT5:粘塑性応力増分とマクロ応力挙動

まず、PT3(図 4.11),PT5(図 4.13) の粘塑性応力増分に注目する。この2つのパターンは弾性材料の配分率も等しく、粘塑性応力増分の図も同じような傾向が見られる。しかし応力の緩和傾向にはちがいがあるといえる。ここにも微視的構造に起因した異方性の影響が現れているものと考えられる。また、PT4(図 4.12) に関しては要素9において粘塑性応力増分が大きく生じており、その結果、急激な応力緩和現象を図の上で観察できる。逆に要素12では粘塑性応力増分は他のパターンと同等の値を取り緩和曲線にもそれが現れている。これからも場所による依存性を見い出すことができる。以上より、応力緩和現象の傾向は粘塑性成分に影響されるといえるが、それが全てではない。異なった材料を含む複合材料を取り扱う場合は、その構造特性も影響する。

つぎに体積配分率は同じであるが弾性材料の配置の異なるPT1,PT4,PT5について変形図を示す。
ただし、左側の図は強制変位を与えた直後の変形図を、右側の図は5分経過後の変形図を表す。

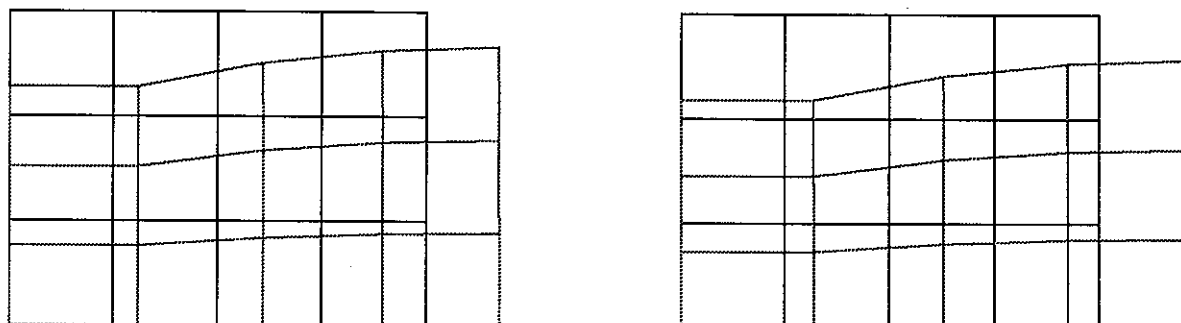


図 4.14 変形図 (0 min → 5 min) :PT1

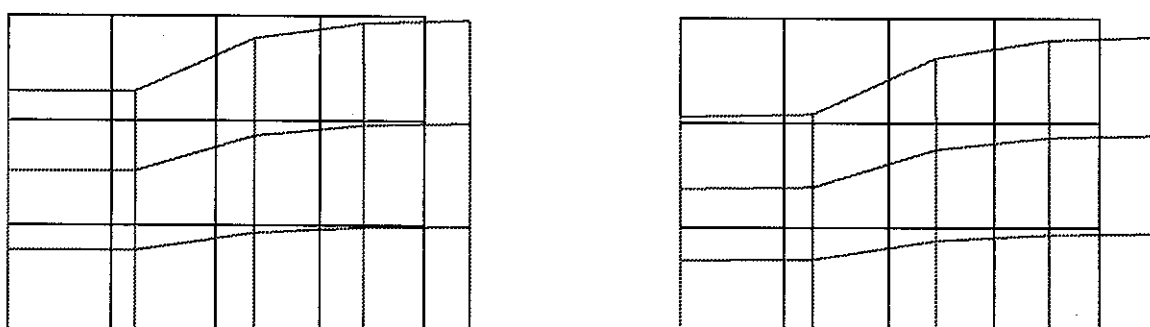


図 4.15 変形図 (0 min → 5 min) :PT4

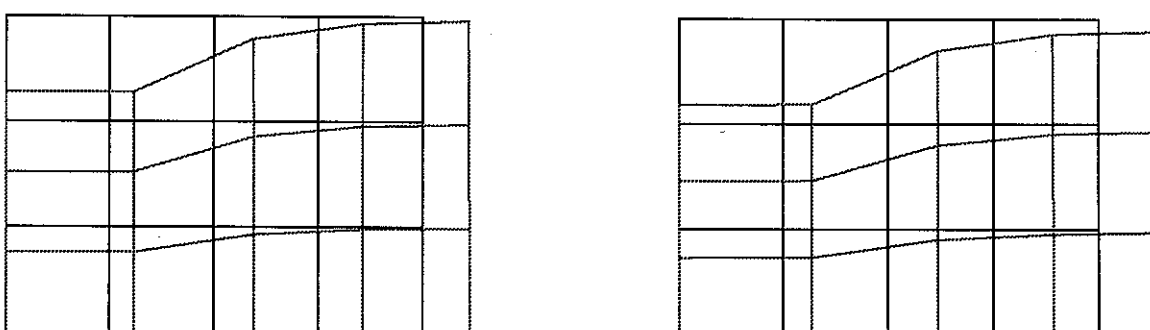


図 4.16 変形図 (0 min → 5 min) :PT5

これらの変形図からも微視的構造の影響があるものと考えられる。

5. 結論

ここでは弾粘塑性体の性質を有する複合地盤材料（例えば、礫混入改良地盤）に対し、均質化法によってその材料の微視的な構造と物性を反映させたマクロな挙動を求める手法を開発し、粘性土地盤を想定した地盤材料の応力緩和現象について数値解析を試みた。

本解析により、土粒子の骨格系の粘塑性挙動に起因する応力緩和現象を表現できた。ただし、実際の粘土の挙動は間隙水の流れと連成して導かれるものであり、本解析による結果を粘土の実挙動として説明することはできない。しかしながら、粘塑性成分が卓越するにともない応力が緩和するという現象を説明するには妥当な結果が得られた。

非線形材料を対象とした従来の均質化法の研究では、ユニットセルの挙動のみを対象にする解析例が多かったが、本研究では全体構造の影響を考慮し、微視的レベルと巨視的レベルの力学挙動を時間増分で互いに関連させて解析を実施した。いくつかの解析例を通し、微視的な材料の形状や配置に起因した異方性が全体構造物の場所と時間に大きく影響することが確認できた。

参考文献

- 1) Perzyna, P.: The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive materials, Proc. of Vibration Prob., Warsaw, pp.281-289, 1963.
- 2) Sanchez-Palencia, E.: Non-homogeneous media and vibration theory, Lec. Note Phy., Springer-Verlag, 1980.
- 3) Adachi, T., and Oka, F.: Constitutive equations for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity; Soils & Found., 22, 4, pp.57-70, 1982.
- 4) Adachi, T., and Oka, F.: Mathematical structure of an overstress elasto-viscoplastic model for clay; Soils & Found., 27, 3, pp.31-42, 1987.
- 5) Wang, J.-G.: A homogenization theory for geomaterials; nonlinear effect and water flow; D.Eng. thesis in Nagoya Univ., 1996.
- 6) 和仁雅明: 結晶質岩の時間依存挙動に関する均質化解析; 名古屋大学修士論文, 1996.
- 7) Maugin, G.A.: The thermomechanics of plasticity and fracture, Cambridge Univ. Pr., 1992.
- 8) 市川康明: 地盤力学における有限要素法入門; 日科技連, 1990.

全体のまとめと今後の方針

1. 平成8年度の研究のまとめ

岩盤の1万年にも渡る長期の挙動を予測するためには、ミクロな構造まで考慮に入れた精度の高い解析が要求される。本研究の第I部では、まず、花崗岩の造岩鉱物（石英、長石、黒雲母）中や鉱物粒界に普遍的に存在するマイクロクラックの分布状況を顕微鏡を用いて観察した。一方、岩盤の長期時間依存性挙動の例として、一定の荷重条件の下でひずみが増加していくクリープ現象と、一定の変位条件の下で応力が緩和していく応力緩和現象が挙げられるが、本研究では応力緩和実験を顕微鏡観察下において実施した。更に、これらのマイクロクラックが粘弾性的性質を有すると仮定し、鉱物集合体である花崗岩のミクロ／マクロ挙動を均質化理論によって導き、有限要素法を適用して数値解析を行った。

つぎに第II部では、弾粘塑性体の性質を有する複合地盤材料（例えば、礫混入改良地盤）に対し、均質化法によってその材料の微視的な構造と物性を反映させたマクロな挙動を求める手法を開発し、粘性土地盤を想定した地盤材料の応力緩和現象について数値解析を試みた。

これらの結果得られた知見は以下のようである。

1) マイクロクラックの観察について

- マイクロクラックは石目に沿って分布している。
- リフト面やグレイン面よりもハードウェイ面上に多くのマイクロクラックが分布し、しかもその平均長は長い。
- マイクロクラックの平均長は細粒の花崗岩よりも粗粒の花崗岩の方が長い。

2) 応力緩和実験の結果について

- マイクロクラックの進展が応力緩和に深く影響しており、特に初期段階ではその関連性がはっきりと見られた。
- マイクロクラックは载荷方向に多く進展する。
- 時間経過に従って応力は減少し、一定値に収束していく。
- 変位が一定であるにもかかわらず、破壊に至る場合がある。
- 実験開始から30~50時間までは各供試体の応力緩和速度に差はあるが、それ以降はばらつきは小さくなる。また、今回の実験の範囲内では、初期载荷ひずみの値は応力緩和速度に影響を及ぼさないと考えられる。

3) 粘弾性解析の結果について

- 均質化解析において、粘弾性挙動を表せるジョイント要素としてマイクロクラックを表現すると、マイクロクラックの方向性を考慮に入れた応力緩和シミュレーションが可能である。
- 実験を想定した全体解析を行った結果、応力が定常状態になるまでには2ヶ月~3ヶ月を要する。
- 均質化法を用いることによって巨視的な応力緩和挙動だけではなく、微視的な応力緩和挙動についても観察することができた。

4) 弾粘塑性解析の結果について

- 非線形材料を対象とした従来の均質化法の研究では、ユニットセルの挙動のみを対象にする解析例が多かったが、本研究では全体構造の影響を考慮し、微視的レベルと巨視的レベルの力学挙動を時間増分で互いに関連させて解析を実施した。

- 本解析により、土粒子の骨格系の粘塑性挙動に起因する応力緩和現象を表現できた。ただし、実際の粘土の挙動は間隙水の流れと連成して導かれるものであり、本解析による結果を粘土の実挙動として説明することはできない。しかしながら、粘塑性成分が卓越するにともない応力が緩和するという現象を説明するには妥当な結果が得られた。
- いくつかの解析例を通し、微視的な材料の形状や配置に起因した異方性が全体構造物の場所と時間に大きく影響することが確認できた。

2. 平成9年度研究項目

以下に、平成9年度に計画している研究項目を挙げる。

1) 顕微鏡観察下における岩石供試体の応力緩和試験

－ 一軸及び三軸試験装置の改良

本実験装置は当初、漸増荷重載荷時における供試体の変形破壊挙動を観察するために開発された。平成7年度には装置を再製作し、変位をクランプして応力緩和試験が行なえるように載荷部を改良した。平成8年度は主に計測装置（荷重計測用ロードセル）の改良を進め、試料を水浸した実験を実施した。この時、試験装置（ステンレス鋼製）の腐食とそれによる水の汚濁に悩まされたので、平成9年度にはチタン・コーティング等の防錆処置を施す。また、三軸実験を実施するために周圧維持装置を購入する。

－ 一軸及び三軸試験の実施

改良した実験装置を使用して一軸及び三軸応力緩和試験を実施する。

岩石：稲田花崗岩

環境：20 ± 2°C 程度の恒温、気乾状態及び水浸状態

緩和ひずみ：ピーク強度時のひずみの60, 70, 80, 90%

拘束応力：0, 20 kgf/cm²

試験片：縦4cm × 横2cm × 厚さ0.5cmの直方体

2) 弾粘塑性挙動を示す物体の均質化理論

－ 線形粘弾性体の均質化理論

平成6年度はLaplace変換の下における等価原理に基づいて、花崗岩や大理石のような多結晶体を対象とした線形粘弾性体の均質化理論を開発した。平成7年度はこの理論、解析プログラムを用いていくつかの例題を解き、その妥当性と適用範囲を検討した。平成8年度は花崗岩試料中に存在する分布亀裂の状態を考慮した粘弾性解析を実施し、現象的に実験と適合する解析結果を得ることができた。粘弾性体の均質化解析は、平成8年度で以て所定の結果を得たものと判断し、解析理論の詳細・プログラム等に移管する準備を進める。

－ 弾粘塑性体の均質化理論

岩石の時間依存破壊過程を検討するためには、線形粘弾性体の理論では不十分である。平成7年度は岩石及び造岩鉱物の時間依存変形破壊特性を表現するため、均質化理論に基づく弾粘塑性体の構成則を導入し、数値解析法、特に、局所問題について検討を実施した。平成8年度は局所問題と大域問題を統一的に扱えるプログラムを開発し、この解析プログラムを用いて、粘塑性構成則の判明している粘土材料を対象としたいいくつかの例題を解き、その妥当性と適用範囲を検討した。

－ 物理化学的性質の検討

花崗岩の造岩鉱物（石英、長石、黒雲母）について、その物理化学的性質を文献にて調査

すると共に、室内試験法（一軸及び三軸応力緩和試験）について検討し、いくつかの供試体を用いて実験を開始する。また、数値シミュレーション（分子動力学等）の可能性についても検討する。