

PNC TJ9270 90-004

FINAS : DA-90001

## 汎用非線形構造解析システム

### ファイナス “FINAS” 拡張・整備報告書 (IV)

平成 2 年 9 月

**CRC** センチュリリサーチセンター 株式会社

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせ下さい。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団 大洗工学センター

システム開発推進部 技術管理室

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to:  
Technology Management Section, O-arai Engineering Center, Power Reactor  
and Nuclear Fuel Development Corporation 4002, Narita O-arai-machi Higashi-  
Ibaraki-gun, Ibaraki, 311-14, Japan

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development  
Corporation)

PNC TJ9270 90-004

FINAS : DA-90001

## 汎用非線形構造解析システム

### ファイナス “FINAS” 拡張・整備報告書 (IV)

平成 2 年 9 月

**CRC** センチュリリサーチ センタ 株式会社

## 汎用非線形構造解析システム“FINAS”拡張・整備報告書(IV)\*

千葉隆久\*\* 上野睦郎\*\*  
大鹿順司\*\* 柄谷和輝\*\*  
津田徹\*\*

### 要 旨

本報告書は、高速増殖炉開発に伴う構造解析上のさまざまな問題を解決する有効な数値解析手段として開発されてきた汎用非線形構造解析システムFINAS\*\*\*の平成元年度の拡張・整備の成果について報告するものである。

FINASは昭和60年度までに、汎用構造解析システムとしての諸機能が備えられてきたが、より広範囲かつ高度な問題に対して有効なシステムとするべく昭和61年度より改良、拡張、整備を継続して実施している。本年度は主として非弾性解析、面接触解析、破壊力学解析、動的解析機能等について拡張・整備を行なった。

本報告では、平成元年度の拡張・整備の詳細な結果について解析理論、数値解法、プログラム検証および応用例の観点からまとめたものである。なお、解析理論と検証については、FINAS全般にわたる理解が可能ないように、これまでの整備状況を示している。

---

\* 本報告書は、センチュリ リサーチ センタ(株)が、動力炉・核燃料開発事業団の委託により実施した研究の成果である。

\*\* センチュリ リサーチ センタ株式会社

\*\*\* FINAS (Finite Element Nonlinear Analysis System)

# EXTENSION AND MAINTENANCE OF FINITE ELEMENT NONLINEAR STRUCTURAL ANALYSIS SYSTEM "FINAS" (IV)\*

Takahisa Chiba\*\*, Mutsuro Ueno\*\*  
Junji Oshika\*\*, Kazuteru Garatani\*\*  
Touru Tsuda\*\*

## Abstract

A general purpose finite element nonlinear structural analysis system FINAS\*\*\* has been developed since 1976 for fast breeder reactor (FBR) components. Extension, improvement and maintenance of this system has been continued hitherto. This report describes the results of the work which was carried out during March 1990 September 1990.

FINAS is equipped with basic capabilities of a general purpose program as the results of the past ten years development. However improvement and enhancement of this system are needed to cover more wide range of problems. In this year, inelastic analysis, contact analysis, fracture mechanics analysis, dynamic analysis were mainly extended, improved and developed.

The first part of this report is the result of maintenance and extension obtained in this year. In second part, the theory of structural analysis and numerical method employed in FINAS are described. Finally, numerical examples intended for verification and demonstration of applicability to practical problems are illustrated.

---

\* This performed by CRC under contract with Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation  
\*\* Century Research Center Corporation (CRC)  
\*\*\* FINAS (Finite Element Nonlinear Structural Analysis System)

# 目 次

要 旨 .....	i
Abstract .....	ii
序 文 .....	1
<b>第 I 編 平成元年度 FINAS 拡張・整備</b>	
序 .....	3
1. システム全般 .....	4
2. 静的応力解析 .....	9
3. 動的解析 .....	101
4. 有限要素 .....	119
5. 入出力 .....	148
6. プログラムの検証 .....	150
7. プログラムの設置・更新 .....	153
<b>第 II 編 FINAS における解析の理論と方法</b>	
序 .....	155
1. 有限要素解析の理論 .....	156
1.1 はじめに .....	156
1.2 微小変形解析 .....	157
1.3 非弾性解析 .....	162
1.4 大変形解析 .....	245
1.5 座屈荷重解析 .....	255
1.6 破壊力学解析 .....	257
1.7 動的解析 .....	265
1.8 熱伝導解析 .....	279
1.9 荷重増分自動決定機能 .....	287
1.10 流体・構造連成解析機能 .....	294
1.11 動的解析における時間増分自動決定機能 .....	303
1.12 周波数応答解析機能 .....	308
1.13 面接触解析機能 .....	311
2. 数値解法 .....	321
2.1 はじめに .....	321
2.2 連立一次方程式の解法とアルゴリズム .....	322
2.3 固有値問題の解法とアルゴリズム .....	327

### 第 III 編 FINAS の検証と応用

序 .....	332
1. 検証のための解析 .....	333
VP-178 2 曲面繰返し塑性モデルを用いたサイクリック弾塑性問題(2) .....	359
VP-179 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(1) .....	363
VP-180 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(2) .....	366
VP-181 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(3) .....	370
VP-182 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(4) .....	373
VP-183 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(5) .....	376
VP-184 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(6) .....	379
VP-185 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(7) .....	381
VP-186 統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題(1) .....	387
VP-187 統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題(2) .....	392
VP-188 時間増分自動決定機能を用いた 2 本棒の熱ラチェット問題 .....	396
VP-189 面接触機能を用いた円板塑性加工問題 .....	401
VP-190 使用者作成のサブプログラムによる組合せ硬化モデルの組み込み .....	411
VP-745 減衰のある 1 自由度系の周波数応答問題 .....	416
結 語 .....	418

# 図 表 目 次

## 第 I 編

図 2-1	荷重-変形曲線のパターン .....	9
図 2-2	除荷アルゴリズム .....	10
図 2-3	弾塑性解析の流れ .....	11
図 2-4 (a)	X方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間12ステップ) .....	15
図 2-4 (b)	X方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間12ステップ) .....	15
図 2-5 (a)	XY方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間12ステップ) .....	16
図 2-5 (b)	XY方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間12ステップ) .....	16
図 2-6 (a)	X方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間24ステップ) .....	18
図 2-6 (b)	X方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間24ステップ) .....	18
図 2-7 (a)	XY方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間24ステップ) .....	19
図 2-7 (b)	XY方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間24ステップ) .....	19
図 2-8 (a)	内側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(従来の方法) .....	22
図 2-8 (b)	内側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(新しい方法) .....	22
図 2-9 (a)	内側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴(従来の方法) .....	23
図 2-9 (b)	内側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴(新しい方法) .....	23
図 2-10(a)	外側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴(従来の方法) .....	24
図 2-10(b)	外側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴(新しい方法) .....	24
図 2-11(a)	外側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(従来の方法) .....	25
図 2-11(b)	外側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(新しい方法) .....	25
図 2-12	使用者作成のサブプログラム XMAT 1 .....	27
図 2-13	使用者作成のサブプログラム XMAT 2 .....	28
図 2-14	サブルーチン XMAT 1 のフローチャート .....	37
図 2-15	サブルーチン XMAT 2 のフローチャート .....	38
図 2-16	直応力-直ひずみの関係の比較(ケース1) .....	56
図 2-17	せん断応力-せん断ひずみの関係の比較(ケース2) .....	57
図 2-18	直応力-直ひずみの関係の比較(ケース2) .....	58
図 2-19	せん断応力-せん断ひずみの関係の比較(ケース2) .....	59
図 2-20	直応力-直ひずみの関係の比較(ケース3) .....	60
図 2-21	せん断応力-せん断ひずみの関係の比較(ケース3) .....	61
図 2-22	周方向応力の管厚方向分布 .....	64
図 2-23	Robinson の参照解 .....	65
図 2-24	各要素の応力-ひずみ履歴 .....	68
図 2-25	き裂先端と径路 .....	70
図 2-26	仮想き裂進展法 .....	71



図2-27	FINASによる $J, \hat{J}$ 積分値	73 0
図2-28	岸本らの $J, \hat{J}$ 積分値	73
図2-29	積分径路の定義	75
図2-30	$J$ と $T^*$ の各径路での値と平均値	80
図2-31	$J, T^*$ 積分値(平均値)の履歴図	81
図2-32	ひずみエネルギー密度	82
図2-33	き裂先端要素	83
図2-34	き裂先端部の局所座標系および節点	84
図2-35	線形破壊力学による疲労き裂進展解析のアルゴリズムの流れ	86
図2-36	き裂先端要素	89
図2-37	内部メッシュ分割の例	89
図2-38	構造モデル	91
図2-39(a)	押し込み量10mmでの変形図	92
図2-39(b)	押し込み量35mmでの変形図	92
図2-40	子午線方向ひずみ分布図	93
図2-41	構造モデル	94
図2-42	完全すべり( $\mu=0.0$ )の変形図	95
図2-43	摩擦すべり( $\mu=0.4$ )の変形図	95
図2-44	構造物の静的荷重径路	97
図2-45	荷重増分自動決定機能の流れ	99
図3-1	変位プリント出力の例(ケース2)	115
図3-2	入力加速度波	117
図3-3(a)	大変形を考慮しない場合	118
図3-3(b)	大変形を考慮した場合	118
図4-1	応力解析のための要素	125
図4-2	熱伝導解析のための要素	128
図4-3	2節点軸対称シェル	132
図4-4(a)	円形プレート	134
図4-4(b)	たわみの分布	134
図4-4(c)	モーメントの分布	134
図4-5	解析の流れ	136
図4-6	要素に依存するモジュール	137
表1-1	新・旧ソルバーCPU時間の比齢(IBM 3094 Q)	5
表1-2	新・旧ソルバーCPU時間の比齢(CRAY-XMP)	5
表1-3	サブセット版FINASの規模	6
表2-1	解析結果と理論解との比較	12
表2-2	DP021の解の比較(AB間にステップ)	14
表2-3	DP021の解の比較(AB間24ステップ)	17

表 2-4	要素 1 での各ステップにおける相当応力/相当塑性ひずみ	21
表 2-5	要素 20 での各ステップにおける相当応力/相当塑性ひずみ	21
表 2-6	ベクトル型内部状態変数 (NVCT=3)	35
表 2-7	スカラー型内部状態変数 (NSCR=1)	35
表 2-8	フラッグ型内部状態変数 (NFLG=1)	35
表 2-9	組合せ硬化モデル組み込みのためのサブルーチン	36
表 2-10	DP 021 の解の比較 (ケース 1)	52
表 2-11	DP 021 の解の比較 (ケース 2)	53
表 2-12	DP 021 の解の比較 (ケース 3)	54
表 2-13	ケース 2 のステップ AB 間での応力変化の比較	55
表 3-1	$f=3\text{Hz}$ における応答変位および位相角	115
表 4-1	応力解析のための要素	120
表 4-2	熱伝導解析のための要素	126
表 4-3	要素別の適用可能機能	129
表 6-1	平成元年度に解析した VP	151
表 7-1	大洗工学センターでの FINAS 更新履歴	153
表 7-2	主な要望事項に対する処理	154

## 第 II 編

図 1.2-1	連続体と有限要素モデル	157
図 1.3-1	単軸応力場での降伏曲面の挙動	170
図 1.3-2	多軸応力場における $\alpha$ リセット法	171
図 1.3-3	降伏面と限界面	172
図 1.3-4	繰返し非硬化領域の発達	172
図 1.3-5	弾塑性問題に対するマルチレイヤーモデル	174
図 1.3-6	降伏曲面に対する Mroz の移動則	179
図 1.3-7	降伏曲面に対する Tseng-Lee の移動則	180
図 1.3-8	時間硬化説とひずみ硬化説	186
図 1.3-9	補助法則を用いたクリープ応答	187
図 1.3-10	応力反転に対するクリープ応答	187
図 1.3-11	クリープひずみが両方の原点に近づく場合	190
図 1.3-12	回復可能なクリープ硬化範囲とクリープ硬化変数の変化	191
図 1.3-13	多軸応力状態でのクリープ硬化面	193
図 1.3-14	降伏時	227
図 1.3-15	除荷時	228
図 1.3-16	比較 $\gamma$ の計算	229
図 1.3-17	遷移領域の処理	235
図 1.4-1	固定した座標系での物体の運動	245

図 1.6-1	き裂の基本変形モード	257
図 1.6-2	3次元き裂	257
図 1.6-3	$J$ 積分	259
図 1.6-4	任意の積分曲面 $S$	260
図 1.6-5	3次元 $J$ 積分のための積分径路 $\Gamma$ と積分領域 $A$ ( $\epsilon \rightarrow 0$ )	260
図 1.6-6	FINAS における $J$ 積分	262
図 1.6-7	破壊力学解析の流れ	263
図 1.7-1	動的解析手法の分類	265
図 1.7-2	構造物の静的変位と動的変位	267
図 1.7-3	接触物体	273
図 1.7-4	接触面の形状	274
図 1.7-5	接触状態の形状	274
図 1.7-6	接触ペア節点の形状	274
図 1.7-7	接触面の有限要素モデル	277
図 1.7-8	接触ペア節点での局所座標系	277
図 1.8-1	熱伝導解析のアルゴリズム	284
図 1.8-2	時間増分自動決定のアルゴリズム	285
図 1.9-1	荷重増分自動決定機能のアルゴリズム	292
図 1.10-1	流体構造物連成問題	294
図 1.10-2	流体構造接面での法線方向ベクトル	300
図 1.10-3	流体構造連成問題モデル化	301
図 1.11-1	FFT による地震波の Fourier 変換	307
図 1.12-1	周波数応答関数	310
図 1.13-1	接触問題の形式	311
図 1.13-2	2次元問題での面接触形状	312
図 1.13-3	固着とすべりでの接触位置	317
図 1.13-4	接触面の定義	318
図 1.13-5	4節点四辺形面接触要素	318
図 2.3-1	サブスペース法の計算アルゴリズム	330
表 1.3-1	SUS 304 鋼のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数	204
表 1.3-2	SUS 304 鋼の降伏応力, 加工硬化係数	205
表 1.3-3	SUS 304 鋼の単調応力-ひずみ関係式	207
表 1.3-4	SUS 304 鋼のクリープひずみ式	208
表 1.3-5	SUS 316 鋼のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数	209
表 1.3-6	SUS 316 鋼の降伏応力, 加工硬化係数	210
表 1.3-7	SUS 316 鋼の単調応力-ひずみ関係式	211
表 1.3-8	SUS 316 鋼のクリープひずみ式	212
表 1.3-9	SUS 321 鋼伝熱管のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数	213

表 1.3-10	SUS 321 鋼伝熱管の降伏応力, 加工硬化係数 .....	214
表 1.3-11	SUS 321 鋼伝熱管の単調応力-ひずみ関係式 .....	215
表 1.3-12	SUS 321 鋼伝熱管のクリープひずみ .....	216
表 1.3-13	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 板のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数 .....	217
表 1.3-14	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 板の降伏応力, 加工硬化係数 .....	218
表 1.3-15	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 板の単調応力-ひずみ関係式 .....	219
表 1.3-16	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 板のクリープひずみ式 .....	220
表 1.3-17	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 伝熱管のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数 .....	221
表 1.3-18	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 伝熱管の降伏応力, 加工硬化係数 .....	222
表 1.3-19	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 伝熱管の単調応力-ひずみ関係式 .....	223
表 1.3-20	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 伝熱管のクリープひずみ式 .....	224
表 1.7-1	接触-衝撃アルゴリズム .....	278
表 1.11-1	代表的有限要素の固有振動数 $\omega$ .....	306
表 1.13-1	接触状態と拘束マトリックス .....	316
表 2.3-1	固有値問題の解法比較 .....	327

### 第 3 編

図 1.178-1	構造モデル .....	359
図 1.178-2	有限要素モデル .....	359
図 1.178-3	規定変位の履歴 .....	360
図 1.178-4	FINAS による応力-ひずみ履歴 .....	361
図 1.178-5	ADMODEL による応力-ひずみ履歴 .....	362
図 1.179-1	構造モデル .....	363
図 1.179-2	有限要素モデル .....	363
図 1.179-3	積分領域 .....	364
図 1.180-1	構造モデル .....	366
図 1.180-2	有限要素モデル .....	366
図 1.180-3	積分領域 .....	367
図 1.180-4	$\hat{J}$ -COD 関係図 .....	369
図 1.181-1	構造モデル .....	370
図 1.181-2	有限要素モデル .....	371
図 1.181-3	積分領域 .....	372
図 1.182-1	埋没円き裂を有する無限体 .....	373
図 1.182-2	有限要素モデル .....	373
図 1.182-3	$J$ 積分の領域 .....	374
図 1.183-1	埋没円き裂を有する無限体 .....	376
図 1.183-2	有限要素モデル .....	376
図 1.183-3	温度分布 .....	377

図1.183-4	積分領域	377
図1.184-1	構造モデル	379
図1.184-2	有限要素モデル(1/4モデル)	379
図1.184-3	積分領域	379
図1.184-4	$\sigma_0 - \delta$ 関係図	380
図1.184-5	FINASによる $J, \hat{J}$ 積分値	380
図1.184-6	岸本らの $J, \hat{J}$ 積分値	380
図1.185-1	構造モデル	381
図1.185-2	有限要素モデル(1/4モデル)	381
図1.185-3	負荷履歴	381
図1.185-4	積分領域	382
図1.185-5	$\sigma_0$ - 変位関係図	382
図1.185-6	FINASにおける $\hat{J}$ の履歴	383
図1.185-7	FNSFRCTにおける $\hat{J}$ の履歴	383
図1.185-8	FINASにおける $\hat{J}$ 積分値の径路独立性	384
図1.185-9	FNSFRCTにおける積分値の径路の独立性	384
図1.186-1	構造モデル	387
図1.186-2	有限要素モデル	387
図1.186-3	境界条件と負荷条件	388
図1.186-4	負荷履歴	388
図1.186-5	周方向応力の管厚方向分布	390
図1.186-6	Robinson の参照解	391
図1.187-1	構造モデル	392
図1.187-2	有限要素モデル	392
図1.187-3	境界条件と負荷条件	393
図1.187-4	負荷履歴	393
図1.187-5	外面での半径方向変位の履歴	395
図1.187-6	Y. Chang 等の参照解	394
図1.188-1	構造モデル	396
図1.188-2	有限要素モデル	396
図1.188-3	温度変化および保持時間	397
図1.188-4	各要素の応力 - ひずみ履歴	399
図1.188-5	FINAS EXECUTION SUMMARY	400
図1.188-6	Robinson らによる参照解	400
図1.189-1	構造モデル	401
図1.189-2	有限要素モデル	402
図1.189-3	押込み量 10mm での変形図	404
図1.189-4	押込み量 20mm での変形図	405

図1.189-5	押し込み量 30mmでの変形図	406
図1.189-6	押し込み量 35mmでの変形図	407
図1.189-7	Z方向変位分布の履歴図	408
図1.189-8	子午線方向ひずみ分布図	409
図1.189-9	周方向ひずみ分布図	410
図1.190-1	構造モデル	411
図1.190-2	有限要素モデル	411
図1.190-3	FINASによる応力ひずみ関係	414
図1.190-4	ADMODELによる応力-ひずみ関係	415
図1.745-1	有限要素モデル	416
表1-1	静的解析VPの一覧表	333
表1-2	熱伝導解析VPの一覧表	352
表1-3	動的解析VPの一覧表	355
表1.178-1	解析ステップの大きさ	360
表1.179-1	J積分値	364
表1.180-1	$\hat{J}$ -Integration-Value (無次元化)	368
表1.180-2	$\hat{J}$ -Integration-Value (無次元化)	368
表1.181-1	J積分値の比較	372
表1.182-1	$\hat{J}$ 積分値の比較	375
表1.183-1	$\hat{J}$ 積分値(ステップ1)	378
表1.183-2	$\hat{J}$ 積分値(ステップ2)	378
表1.186-1	各時刻における周方向応力の比較(内, 外面)	389
表1.187-1	半径方向変位の比較	394
表1.188-1	各時刻における各要素での応力-ひずみの比較	398
表1.190-1	負荷条件	412
表1.190-2	解析における荷重増分	412
表1.190-3	解析結果	413
表1.745-1	$f=3\text{Hz}$ における応答変位	417

# 序 文

有限要素法による汎用非線形構造解析システム FINAS (Finite Element Nonlinear Structural Analysis System) は、動力炉・核燃料開発事業団が国家プロジェクトとして開発を進めている高速増殖炉における構造上の種々の問題を解決するための有効な手段となるように、昭和51年から開発が行なわれ、現在では事業団内外を含む各方面で実解析に頻繁に利用されながら、さらに改良、拡張、整備が続けられている汎用構造解析システムである。

一般に原子力プラントは高い安全性が要求されており、機器の破損を防止し、かつ安定的な運転を続けるために、構造設計上詳細かつ精密な評価が必要とされている。高速増殖炉の場合には、材料の塑性やクリープなどの非弾性挙動を考慮に入れなければならないような高温領域で運転が行なわれるために、構造解析上の手法も非線形解析など高度のものが必要とされる。FINASは初期の5カ年間の開発(Phase I)において、非弾性解析機能を中心に汎用構造解析プログラムの枠組みと基本的な機能を備えることができた。この間の開発経緯および成果はFINAS開発報告書として各年度毎に動燃事業団に報告されてきた。<sup>1), 2), 3), 4), 5)</sup>

FINASの高速増殖炉開発のための実計算への適用は昭和53年10月よりCRC社のCDC6600/CYBER74, 73によって始まった。昭和55年4月には動燃事業団の大洗工学センターへのFACOM M-190へのインストレーションが行なわれ、以来、動燃事業団内部の技術者、研究者により広範な利用が行なわれるようになった。

昭和56年から始まったFINAS改良・整備作業(Phase II)は、FINASが広く高速増殖炉の設計解析ならびに構造設計法の開発研究等に有効なプログラムとして適用できるように5カ年計画をもって実施された。主な改良・整備の項目は、実際の解析作業において不十分な機能の拡張・整備、計算効率等の性能面の充実、解析手法の改良、前処理および後処理機能の充実、検証問題による信頼性の向上などが行なわれた。<sup>7), 8), 9), 10), 11)</sup>

FINASは昭和60年9月に一般公開され、FBR関連製造メーカーおよび一般メーカー、国立研究機関等でも利用されるようになった。昭和61年度から開始された拡張、整備作業(Phase III)<sup>12), 13), 14)</sup>では、FBR分野における各種解析法の高度化、効率化の要求に応えることのほか、FBR以外の分野の解析需要に応えることも考慮して、FINASをより高度で汎用性の広い構造解析システムとすることが意図されている。これらの中心課題としては、非弾性解析機能における高精度モデルの整備、実用問題への大変形解析機能の適用と精度の向上、破壊力学解析機能の充実、流体・構造連成解析機能の拡張などである。また、利用者の便を図るためには、関連文書の更新および充実も欠くことのできない事項である。

本報告書は、平成2年3月から9月までのFINASの拡張・整備の成果について述べたものである。第I編では各作業項目について、拡張・整備が必要となった背景と共にその成果の概要を述べる。第II編はFINASで採用している理論、解析手法を静的・動的解析および熱伝導解析、数値解法について示したもので、FINASの各解析機能の理論面における現状を明らかにするように記述されている。また、第III編は本年度行なわれた検証問題および解析例の結果をまとめたものである。

なお、本報告書とは別に、FINASシステムの一連の説明書として、理論説明書、使用説明書、要素ライブラリ説明書、プログラム説明書、解析例題書が用意されており、FINASの詳細が記されている。

〔参考文献〕

- 1) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発計画書”, SN 241 78-29, 昭和53年
- 2) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅰ)”, ZJ 240 77-01, 昭和52年
- 3) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅱ)”, SJ 240 78-01, 昭和53年
- 4) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅲ)”, SJ 240 79-01, 昭和54年
- 5) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅳ)”, SJ 240 80-01, 昭和55年
- 6) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅴ)”, SJ 240 81-01, 昭和56年
- 7) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅰ)”, SJ 240 82-01, 昭和57年
- 8) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅱ)”, SJ 240 83-03, 昭和58年
- 9) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅲ)”, SJ 940 84-01, 昭和59年
- 10) “高速炉非弾性構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅳ)”, SJ 240 85-01, 昭和60年
- 11) “汎用非線形構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅴ)”, SJ 9270 86-01, 昭和61年
- 12) “汎用非線形構造解析システム FINAS 拡張・整備報告書(Ⅰ)”, SJ 9270 87-001, 昭和62年
- 13) “汎用非線形構造解析システム FINAS 拡張・整備報告書(Ⅱ)”, SJ 9270 88-001, 昭和63年
- 14) “汎用非線形構造解析システム FINAS 拡張・整備報告書(Ⅲ)”, SJ 9270 90-001, 平成元年



# 第 I 編 平成元年度 FINAS 拡張・整備

# 序

本編は、平成元年度に行なわれたFINAS拡張・整備作業の成果について、拡張の必要とした背景、具体的な拡張・整備の内容を述べたものである。本年度は主に非弾性解析、面接触解析、破壊力学解析、動的解析について拡張・整備を行なった。また、大洗工学センターにおけるFINAS利用に係わる問題点および利用性の高いものについて優先的に対処が行なわれた。

以下に、各項目について、拡張・整備の成果の概要をまとめる。

# 1. システム全般

## (1) ソルバーモジュール機能拡張

本年度は、周波数応答解析の組み込みに伴ってソルバーモジュールの複素領域への拡張が行なわれた。また、面接触解析機能の組み込みに当たり、接触力の求解の便宜を図る目的で、拘束条件自動生成機能が組み込まれた。

### a. 複素領域への拡張

ソルバーモジュールの改良・整備は、59年度より継続的に行なわれて来たものであり、昨年度までの改良・整備により静的解析、動的解析、熱伝導解析のすべてについて、新しい高効率ソルバーへの入れ替えと統一化が完了している。この新しい高効率ソルバーは、次に示すようなサブルーチン群で構成されている。

- マトリックスデータ入出力サブルーチン
- 三角分解ルーチン
- 前進・後退代入ルーチン
- 加減算ルーチン
- 乗算ルーチン
- 分割・併合ルーチン

これらのルーチン群はいずれも、ファイル上のマトリックスデータを入力とし、必要な演算を行なった後、結果を別のファイルに出力する、という形になっているが、取り扱える行列は実数行列に限られていた。本年度の作業では、これらのルーチン群すべてが、複素行列をも取り扱えるように拡張された。

したがって、FINAS内部での行列演算は、実数・複素数の区別なく同様に取り扱えるようになり、周波数応答解析においても、これまでのFINASの持つ機能、すなわち FASTENING、基盤加振、流体構造連成解析等がそのまま引き継がれ適用可能となっている。

なお、複素数版マトリックスソルバーの内部ロジックは、実数版のそれと相似であり、実数版マトリックスソルバーの持つ高性能をそのまま引き継ぐものとなっている（表1-1, 2参照）。また、表1, 2が示すように、拡張による実数版マトリックスソルバーの処理効率への影響は無視できると言える。

表1-1 新・旧ソルバー CPU時間の比較

(IBM 3094Q)

元 数	CPU 時 間 (sec)				
	V10 実数 (a)	V11 実数 (b)	比率 (b/a)	V11 複素数(c)	比率 (c/b)
500	0.555	0.554	1.00	1.418	2.56
1000	4.483	4.456	0.99	12.464	2.80
2000	36.380	36.269	1.00	101.631	2.80

表1-2 新・旧ソルバー CPU時間の比較

(CRAY-XMP)

元 数	CPU 時 間 (sec)				
	V10 実数 (a)	V11 実数 (b)	比率 (b/a)	V11 複素数 (c)	比率 (c/b)
500	0.105	0.105	1.00	0.130	1.24
1000	0.488	0.488	1.00	0.680	1.39
2000	2.295	2.296	1.00	3.851	1.68
4000	11.462	11.461	1.00	23.983	2.09

b. 拘束条件自動生成機能

面接触解析において、接触状態にある2節点間のオーバーラップ量から接触力を求めようとするとき、これらの節点に対して別途BOUNDARYデータによる拘束条件が与えられていると、解くべき係数行列の当該自由度の行と列がすべてゼロとなる場合がある(詳細は第II編1.13節参照)。

この場合の物理的な意味は、拘束条件により当該節点は変位せず、接触力の受渡しもないということであり、これら節点がSURFACE入力データから除外されていれば問題は生じない。

しかし、そこまでの注意を使用者に喚起させるのは一般的でないと考え、ソルバー側で対処できるように組み込まれたのが拘束条件自動生成機能であり、一つのオプションとして作動する。

このオプションが有効である場合、マトリックスソルバーは係数行列の中で、対角項の上下左右すべてゼロの自由度を検出すると、その自由度を完全拘束として取り扱う。

なお、このオプションを使用すれば、例えば平面モデルの面外方向自由度を自動的に拘束することも可能であるが、解析本体の安全性を考慮して、外部的な使用方法の公開は見送られ、当面の間、接触力の求解における内部的な使用に留めることとなった。

(2) サブセット版FINASの試作

本年度は、FINASの熱伝導解析機能だけを含んだサブセット版の試作が行なわれた。これは、パーソナルコンピュータ上で稼働する電場解析プログラムの開発を目的としたもので、かつそのプログラムはFINASのサブルーチン群を最大限に再利用するという方針があった。一般的に電場解析と熱伝導解析の定式化には共通する部分が多くある。したがってサブセット版FINASが十分にコンパクトなもので、パーソナルコンピュータ上で稼働すれば、その方針

が可能になる。

実際に試作されたサブセット版 FINAS の概要は以下に示すものである。

- 解析機能 (フルセットと同じ)
  - 定常および非定常熱伝導解析
  - リスタート機能を含む。
- 適用要素 (フルセットと同じ)
  - 熱伝導要素
  - 熱伝達要素
  - 熱伝達リンク要素
  - 輻射リンク要素
- 出力機能
  - プリント出力, ポストテープ出力
  - 温度コンター図, XYプロット出力
  - (以上, フルセットと同じ)
  - 独立XYプロット機能含まず。

以上の条件で作成されたサブセット版 FINAS の規模は表1-3に示されており, 640KBのメモリーを持つパーソナルコンピュータ上で稼働できることが確認された。

このサブセット版 FINAS の試作は, 少ない労力で容易に実現されており, FINAS で採用しているモジュール化プログラム構造の特徴, すなわち拡張・保守の容易性を示す例ともなった。

表1-3 サブセット版FINASの規模

	フルセット	サブセット
サブルーチン数	1,492	878
機能モジュール数	96	42
必要メモリー (IBM)	1,200KB	320KB

### (3) マニュアルの電子化

FINASシステムの保有しているマニュアルとしては, FINASプログラム説明書, FINAS理論説明書, FINAS要素説明書, FINAS解析例題書, FINAS使用説明書があり, FINASの解析機能の開発, 拡張, 改良等によるバージョンアップに伴い, その内容の更新あるいは改訂が行なわれている。特に, 一般のユーザーがFINASを利用する場合に必要な使用説明書は印刷, 製本されたものとなっている。

従来の使用説明書の更新, 改訂では, 開発者がFINASのバージョンアップに従い, 印刷原稿を手書きで作成し, 写植, 校正, 印刷等と多大な時間が費やされてきた。また, ユーザも使用説明書の印刷, 製本が完了するまでは, 手書き原稿のコピーを参考にFINASを利用している。もしFINASの使用説明書がすべて電子化され1つのファイルとし処理可能となれば, 開発者が簡単にCRT上で使用説明書の更新, 改訂等が可能となる。さらに, 印刷業者を通

しての校正作業も減少し、常時、最新版の使用説明書の管理が可能となり、保守性も向上する。また、初心者ของผู้向けの必要最小限の内容から構成される簡易的な使用説明書、静的解析、熱伝導解析等の解析タイプごとにまとめられた使用説明書等を作成することも容易になる。

本年度は、以上のような主旨のもとに DTP (Desk Top Publishing) システムの 1 つである XEROX 社の J-STAR を用いて、FINAS 使用説明書 V11.0 の電子化が行なわれ、バインダータイプから製本タイプに新しく作成された。

#### (4) プログラムシステムの保守整備

1 つのアプリケーションプログラムが健全に運用されるためにはプログラムの保守・整備という作業は不可欠である。FINAS においても例外ではなく、本年度作業でも本報告書にある拡張・整備と並行して、プログラムの移植、チューニング、エラー対策等々の保守作業が行なわれた。

ところで、プログラムを拡張あるいは保守しようとするとき、そのプログラムシステムの全容を理解しなくてはならない。そのための資料としてプログラム説明書がある。FINAS プログラム説明書にはプログラムの設計思想から始まり、システム構成、全サブルーチン、機能モジュール、ファイルとテーブル類のフォーマットが説明されているのみならず、プログラミング基準、保守指針、文書執筆要領等も含まれており、これまでの拡張・保守・整備のための重要な資料として使用されてきた。

しかし一方では、このプログラム説明書は、「部外者にとっていまひとつ解り易いものではない」という批判があった。批判の理由の一つには、システムが大型化していることが挙げられている。FINAS では、どのような拡張にも耐え得るシステム構成として、高度なモジュール化構成が用いられている。一連の解析の中の各段階は、それぞれの段階を受け持つ、完全に独立した機能モジュールで実行される。そして各機能モジュールの実行順序を制御し、データの受け渡しを行なうものとして、コントロールシステムがある。

コントロールシステムはまた、制御すべき機能モジュールの個数や受け渡すデータの個数に対して行なう制限を持たないように設計されており、任意のモジュールを任意の順序で実行させることができる。このようなシステム構成をしたために、これまでの拡張・整備によるモジュールの増減や入出力データの増減、実行順序の変更等にも柔軟に対処することができた。

一方、コントロールシステム自体は、その機能の多様さと高度さ故に構成要素が多い。主な構成要素には次のようなものがある。

- ATOM プログラム

- モジュールの実行順序と入出力データを表わしたプログラム

- ATOM コンパイラ

- 上記 ATOM プログラムを翻訳し、制御表を作る

- シークエンス・モニター

- 制御表に従って順次モジュールを起動する。

- ファイル・アロケータ

- モジュールが使用する論理ファイルと、ディスク装置との対応付けを行なう。

- 実行制御モジュール群

- ATOM プログラム内での条件ジャンプとループを扱う。

- チェックポイント/リスタートサービス

リスタート時の自動的なセットアップを行なう。

これらの構成要素は、ATOMプログラムを中心にして相互に関連している。そのためコントロールシステムの全体を理解するのは必ずしも容易とは言えない。

そこで本年度作業では、プログラム説明書とは別に「FINAS コントロールシステム解説書」が作成された。

「FINAS コントロールシステム解説書」には、コントロールシステムの各構成要素についての機能、目的、内部ロジックおよび全体の中での位置付けと他の構成要素との関連について詳細に説明されており、システムの全体を理解するのに資するところ大であると思われる。

## 2. 静的応力解析

### (1) 非弾性解析機能

#### a. 除荷アルゴリズムの改良

弾塑性解析における除荷アルゴリズムについて説明する。接線剛性法による増分解析では、構造物の剛性が急激に変化することにより近似誤差を生じ、剛性の変化と誤差の大きさは相似関係である。剛性変化の典型的なパターンとして2つの場合が考えられる。1つは図2-1の曲線Iで表わされる剛性が連続的に変化する場合であり、幾何学的非線形問題でみられるものである。このケースは、荷重増分を小さくすることで十分な線形近似が得られるので、解の収束性が保証されると考えられる。他のケースは図2-1の曲線IIで表わされるような剛性が不連続に変化する場合であり、弾塑性問題における遷移領域、除荷領域や座屈問題でみられる。特に塑性状態から弾性状態へ変化する除荷状態では剛性が急激に高くなり誤差の発生が顕著となる。動的問題では時間増分を小さくすることにより誤差の拡大を予防することがあると報告されているが、静的問題では荷重ステップを小さくすることだけで誤差の発生を防ぐことはできない。

FINASにおける除荷アルゴリズムとしては、除荷を検出した解析ステップにおいて、弾塑性状態に依存する剛性マトリックス等の再計算を行ない、平衡方程式を再度求解することで近似誤差の取り込みを予防している。

図2-2に示す弾塑性単軸問題で除荷アルゴリズムを説明する。解析ステップ*i* (A点)において除荷が生じ、応力が $\Delta\sigma$ 減少する場合を考えると、除荷後は弾性挙動であるので、*i+1*ステップの応力-ひずみ点としてはB点

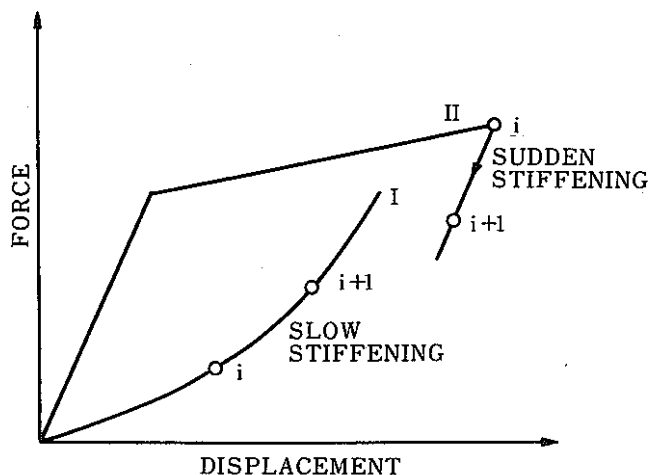


図2-1 荷重-変形曲線のパターン



が正解である。接線剛性法の増分解析では、ステップ*i*の状態を参照基準として剛性マトリックス、荷重項等を探め、これらを用いてステップ*i+1*の状態を求めることになるので、除荷時の応答はA→B'点の径路となり、応力評価法としてラジアル・リターン法(Radial return method)を用いるとすれば、除荷後の応力-ひずみ点としてB''点が解として得られる。正解であるB点と近似解B''点との応力差が接線剛性法での誤差であり、次のステップへ繰り越す残差修正荷重である。解析を進めることにより残差修正項を考慮することにより誤差を改善することができるが、実際問題ではより複雑な誤差が様々な影響を計算結果へ与えることになる。

図2-2においてラジアル・リターン法での応力増分は次のように計算される。

$$\Delta \sigma^* = [E^e] \Delta \epsilon^* \quad (2-1)$$

除荷時のひずみ増分  $\Delta \epsilon^*$  を弾性ひずみ増分と仮定し、材料の弾性マトリックス  $E^e$  より応力増分を求めることになる。このようなアルゴリズムでは、一般的に除荷時に過大な応力が発生し、最悪の場合には発散的な振動パターンの解析結果となる。

一方、ステップ*i+1*の真の解はB点であるので、弾性ひずみ増分は次のように与えられる。

$$\Delta \epsilon = [E^e]^{-1} \Delta \sigma \quad (2-2)$$

接線剛性変位法を基礎とした応力解析では、基準となる系の剛性や荷重項を正しく評価し、変位とひずみを精度よく求める必要がある。FINASの除荷アルゴリズムでは、除荷が発生した場合の基準状態を塑性より弾性へ変更し、剛性マトリックス等の再評価を行ない、再度求解を計算する図2-3に示す除荷補正アルゴリズムを採用している。この補正計算は各解析ステップあたり1回だけ実施し、入力データの指定により補正計算を行なわない従来のアルゴリズムを選択することも可能である。

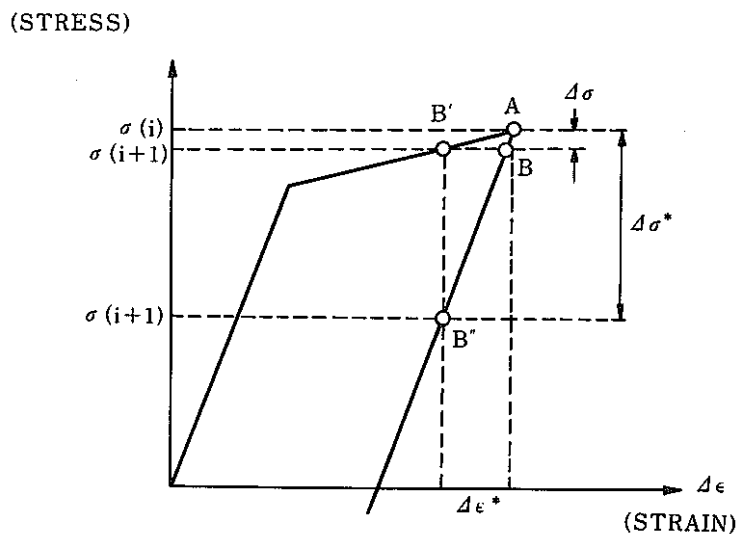


図2-2 除荷アルゴリズム

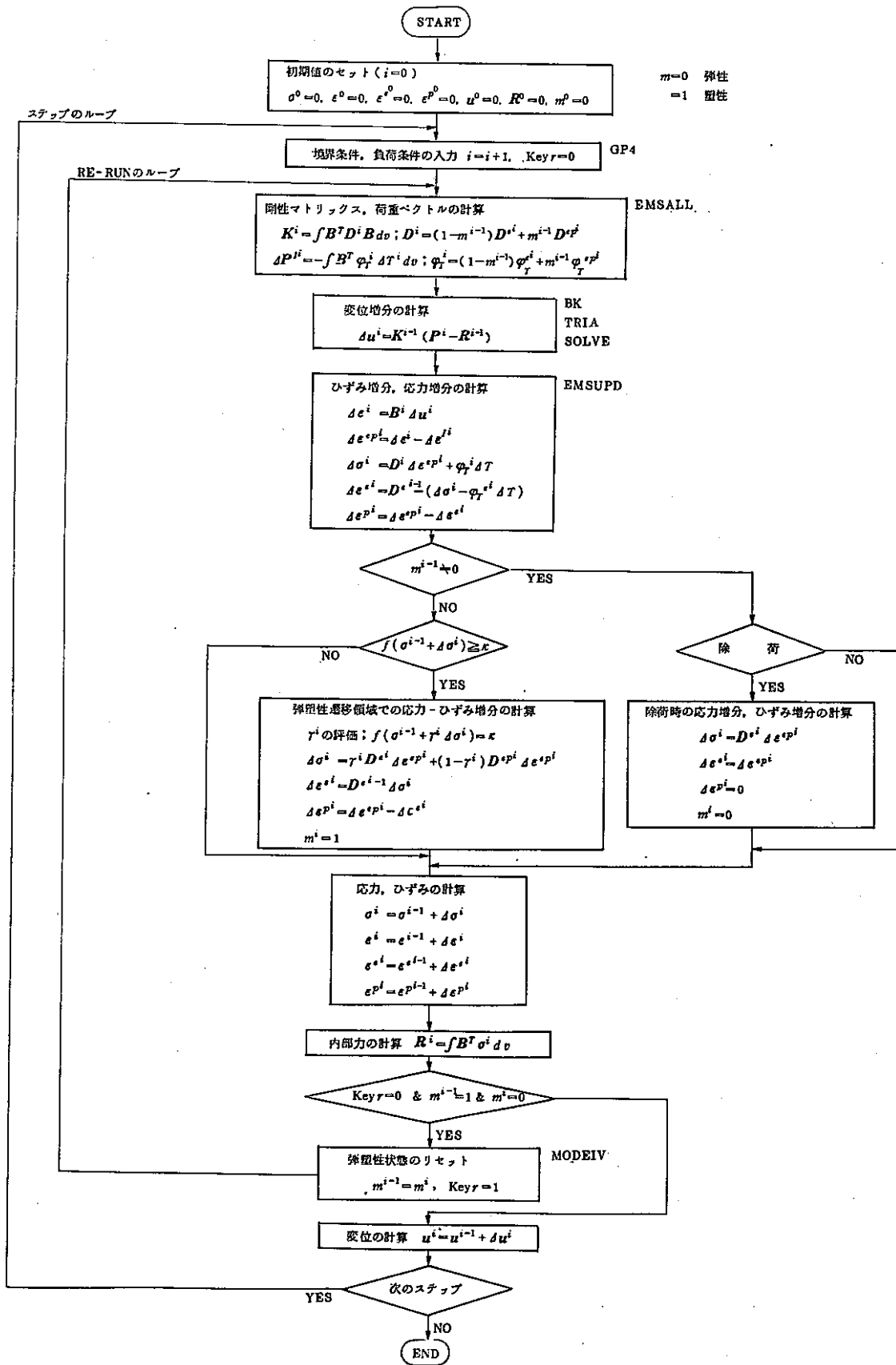
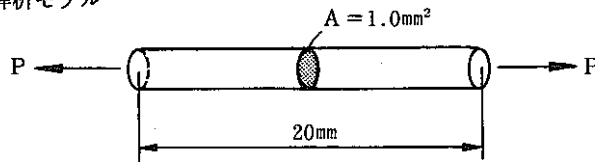


図2-3 弾塑性解析の流れ

● 単軸弾塑性問題

単軸弾塑性問題の解析を行なう。

解析モデル



ヤング係数  $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$   
 降伏応力  $\sigma_Y = 10 \text{ kg/mm}^2$   
 加工硬化係数  $H' = 300 \text{ kg/mm}^2$   
 硬化則 等方硬化則

荷重  $P = 0.0 \sim 12.0 \text{ kg}$  (負荷)  $\sim 11.0 \text{ kg}$  (除荷) を与える。

解析結果

表2-1に従来の方法, 新しい方法および理論解との比較を示す。

表2-1 解析結果と理論解との比較

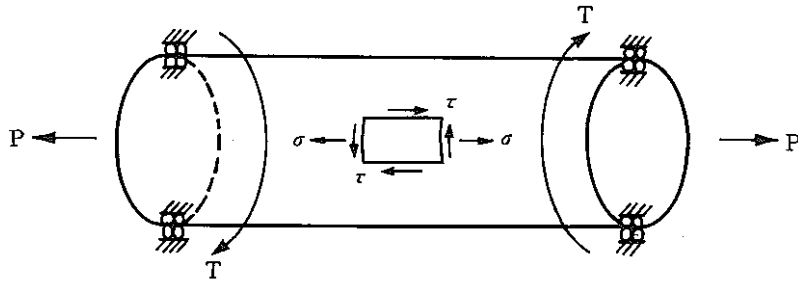
荷 重	応力 / ひずみ	従来の方法	新しい方法	理 論 解
$P = 8.0$	$\sigma$	$8.0000 E+00$	$8.0000 E+00$	8.0
	$\epsilon^e$	$3.8095 E-04$	$3.8095 E-04$	$3.8095 \times 10^{-4}$
	$\epsilon^p$	0	0	0
$P = 11.0$	$\sigma$	$1.0074 E+01$	$1.0014 E+01$	11.0
	$\epsilon^e$	$4.7686 E-04$	$4.7686 E-04$	$5.2381 \times 10^{-4}$
	$\epsilon^p$	$4.6948 E-05$	$4.6948 E-04$	$3.3333 \times 10^{-4}$
$P = 12.0$	$\sigma$	$1.2000 E+01$	$1.2000 E+01$	12.0
	$\epsilon^e$	$5.7143 E-04$	$5.7143 E-04$	$5.7143 \times 10^{-4}$
	$\epsilon^p$	$6.6667 E-03$	$6.6667 E-03$	$6.6667 \times 10^{-3}$
$P = 11.0$	$\sigma$	$-5.9000 E+01$	$1.1000 E+01$	11.0
	$\epsilon^e$	$-2.8095 E-03$	$5.2381 E-04$	$5.2381 \times 10^{-4}$
	$\epsilon^p$	$6.6667 E-03$	$6.6667 E-03$	$6.6667 \times 10^{-3}$
$P = 11.0$	$\sigma$	$1.1000 E+01$	$1.1000 E+01$	11.0
	$\epsilon^e$	$5.2381 E-04$	$5.2381 E-04$	$5.2381 \times 10^{-4}$
	$\epsilon^p$	$6.6667 E-03$	$6.6667 E-03$	$6.6667 \times 10^{-3}$

● 引張りとねじりの組み合わせ荷重が作用する弾塑性問題 (DP021)

DP021 の引張りとねじりの組み合わせ荷重が作用する弾塑性問題を新しいアルゴリズムで解析する。

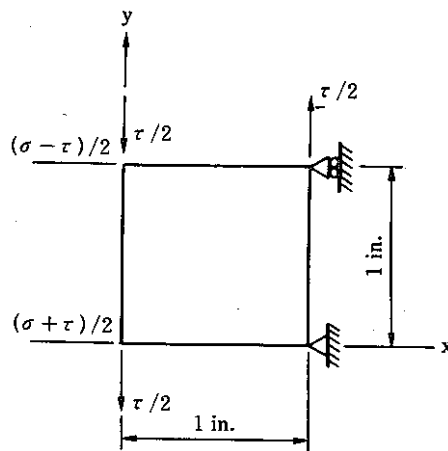
解析モデル

両端で同方向に移動支持された理想化モデルを取り扱う。



有限要素モデル

円筒から単位面積だけ取り出した試験片を4節点四辺形平面応力要素でモデル化する。



材料定数と硬化則

弾性係数  $E = 28.3 \times 10^6$  psi

ポアソン比  $\nu = 0.3$

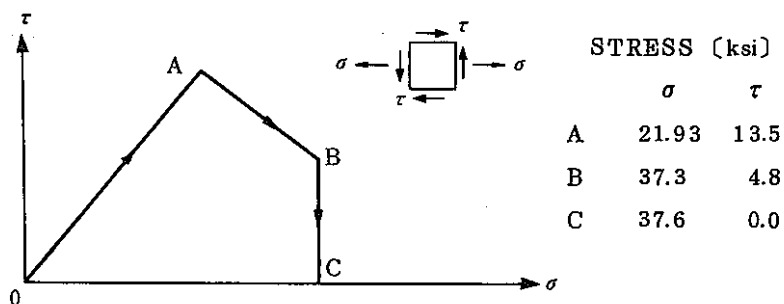
降伏応力  $\sigma_Y = 26.25 \times 10^3$  psi

加工硬化係数  $H' = 28.35 \times 10^8$  psi

硬化則 移動硬化則

境界条件と負荷条件

境界条件は前図に示すとおりである。また、負荷は断面に分布する応力を節点荷重に変換して載荷する。直応力とせん断応力の関係は次のとおりである。



• 解析結果

表2-2 DP 021 の解の比較 (AB 間 12ステップ)

ステップ	応力 / ひずみ	従来の方法	新しい方法	ZABORの解
A (7)	$\sigma$	2.1930E+04	2.1931E+04	7.1930E+04
	$\tau$	1.3500E+04	1.3500E+04	1.3500E+04
	$\epsilon$	1.4788E-02	1.4788E-02	1.4788E-02
	$\gamma$	2.7120E-02	2.7120E-02	2.7120E-02
	$\epsilon^P$	1.4013E-02	1.4013E-02	1.4033E-02
	$\gamma^P$	2.5879E-02	2.5879E-02	2.5879E-02
B (19)	$\sigma$	3.7307E+04	3.7295E+04	3.7300E+04
	$\tau$	4.7268E+03	4.8522E+03	4.8000E+03
	$\epsilon$	3.7990E-02	3.7990E-02	4.0526E-02
	$\gamma$	3.9436E-02	3.9436E-02	3.9906E-02
	$\epsilon^P$	3.6671E-02	3.6672E-02	3.9208E-02
	$\gamma^P$	3.9002E-02	3.8990E-02	3.9465E-02
C (31)	$\sigma$	3.7605E+04	3.7594E+04	3.7600E+04
	$\tau$	-5.4272E-01	-7.7954E-01	-2.2737E-13
	$\epsilon$	4.2105E-02	4.1085E-02	4.4075E-02
	$\gamma$	3.8366E-02	3.8273E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.0766E-02	3.9756E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8366E-02	3.8273E-02	3.8522E-02
O (33)	$\sigma$	4.5859E+00	-5.5000E+00	-2.9195E-10
	$\tau$	-5.4248E-01	7.7942E-01	0.0
	$\epsilon$	4.0776E-02	3.9756E-02	4.2746E-02
	$\gamma$	3.8366E-02	3.8273E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.0776E-02	3.9756E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8366E-02	3.8273E-02	3.8522E-02

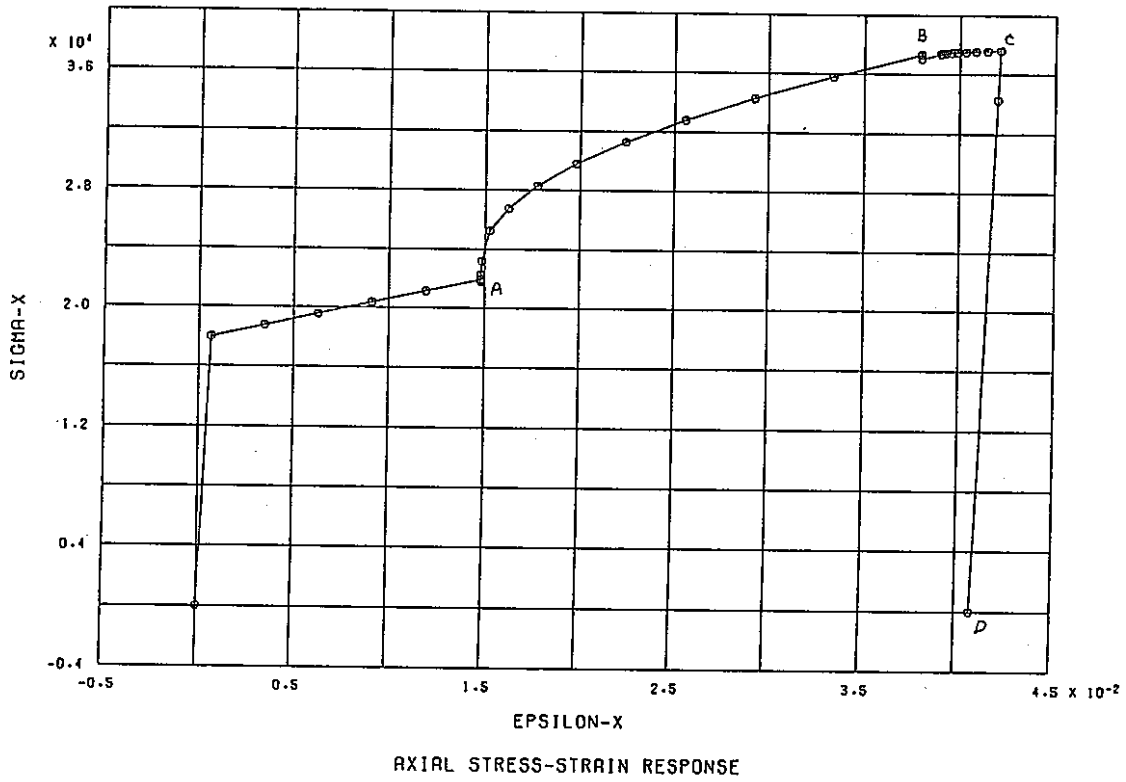


図2-4(a) X方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間12ステップ)

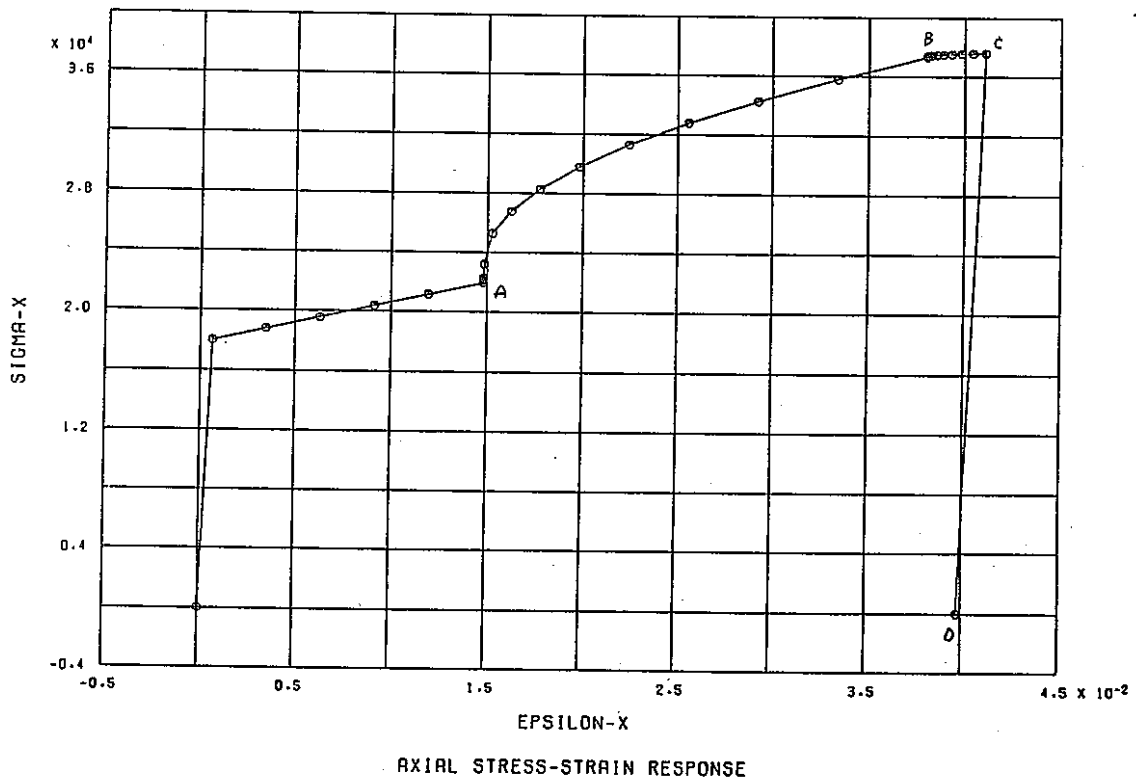


図2-4(b) X方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間12ステップ)

FINAS

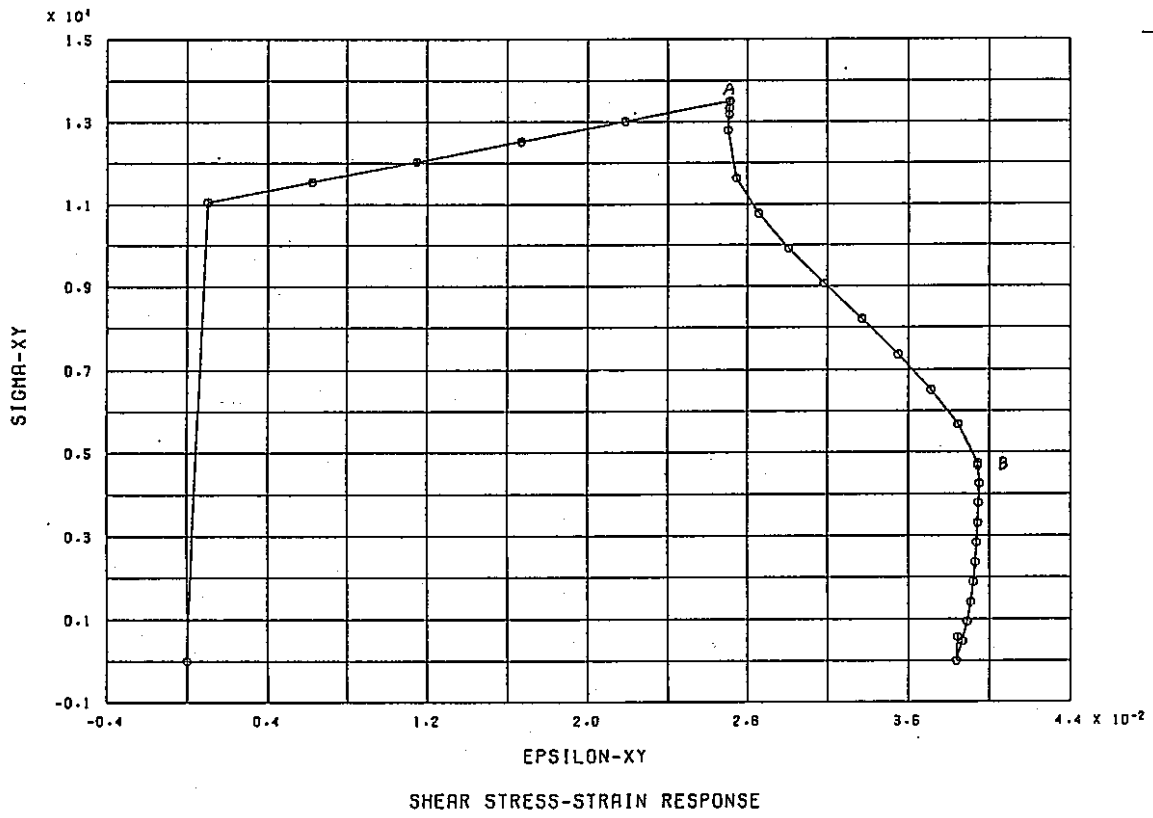


図2-5(a) XY方向応力-ひずみ履歴(従来の方向)(AB間12ステップ)

FINAS

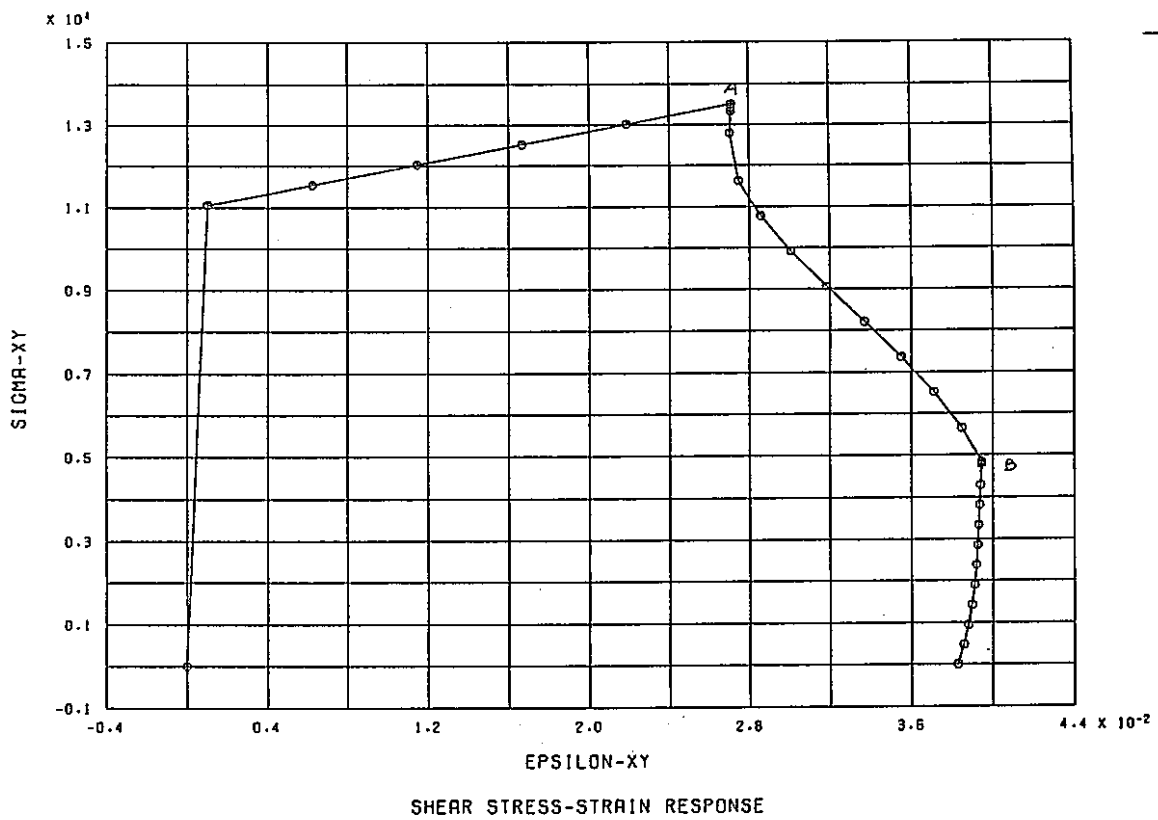


図2-5(b) XY方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間12ステップ)

表 2-3 DP021 の解の比較 (AB間24ステップ)

ステップ	応力 / ひずみ	従来の方法	新しい方法	ZABORの解
A (7)	$\sigma$	2.1930E+04	2.1930E+04	2.1930E+04
	$\tau$	1.3500E+04	1.3500E+04	1.3500E+04
	$\epsilon$	1.4788E-02	1.4788E-02	1.4788E-02
	$\gamma$	2.7120E-02	2.7120E-02	2.7120E-02
	$\epsilon^P$	1.4013E-02	1.4013E-02	1.4013E-02
	$\gamma^P$	2.5879E-02	2.5879E-02	2.5879E-02
B (31)	$\sigma$	3.7300E+04	3.7300E+04	3.7300E+04
	$\tau$	4.8000E+03	4.7999E+03	4.8000E+03
	$\epsilon$	3.9311E-02	3.9311E-02	4.0526E-02
	$\gamma$	3.9767E-02	3.9767E-02	3.9906E-02
	$\epsilon^P$	3.7993E-02	3.7993E-02	3.9208E-02
	$\gamma^P$	3.9326E-02	3.9326E-02	3.9465E-02
C (43)	$\sigma$	3.7600E+04	3.7600E+04	3.7600E+04
	$\tau$	-7.8125E-02	-8.0078E-02	-2.2737E-13
	$\epsilon$	4.3478E-02	4.2486E-02	4.4075E-02
	$\gamma$	3.8654E-02	3.8567E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.2149E-02	4.1157E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8654E-02	3.8567E-02	3.8522E-02
O (45)	$\sigma$	-1.0156E-01	-1.0156E+00	-2.9195E-10
	$\tau$	-7.8612E-02	-8.0810E-02	0.0
	$\epsilon$	4.2149E-02	4.1157E-02	4.2746E-02
	$\gamma$	3.8654E-02	3.8567E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.2149E-02	4.1157E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8654E-02	3.8567E-02	3.8522E-02



FINAS

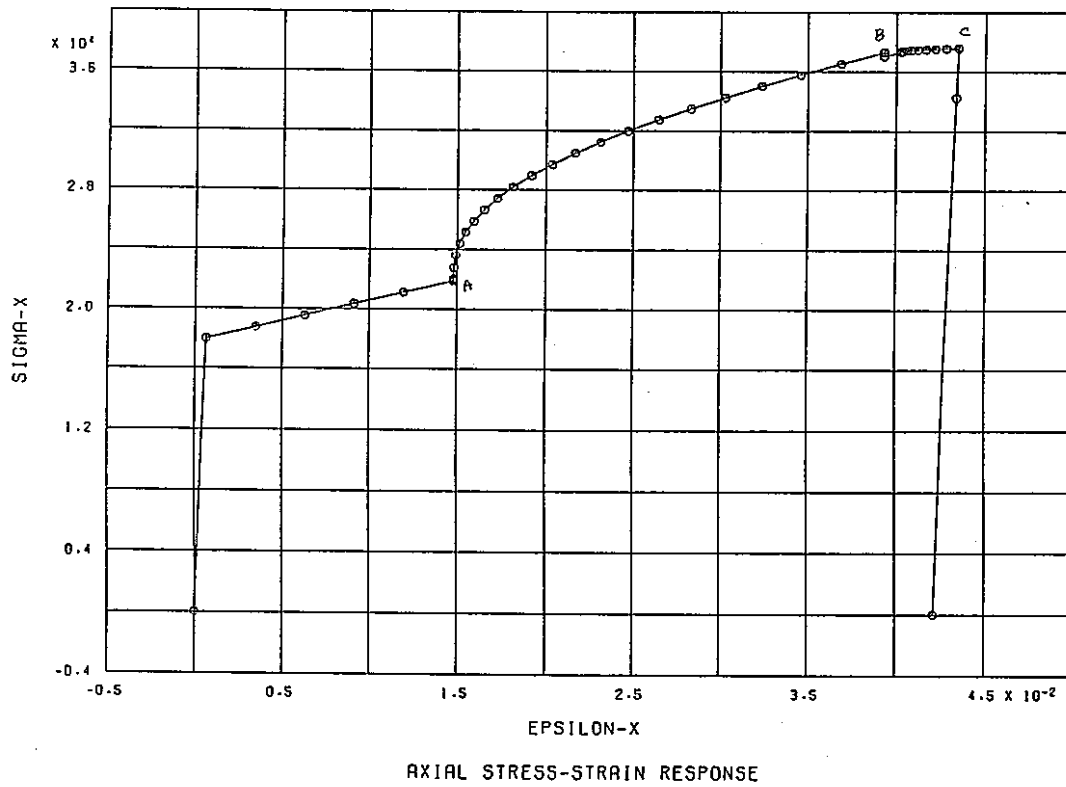


図2-6(a) X方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間24ステップ)

FINAS

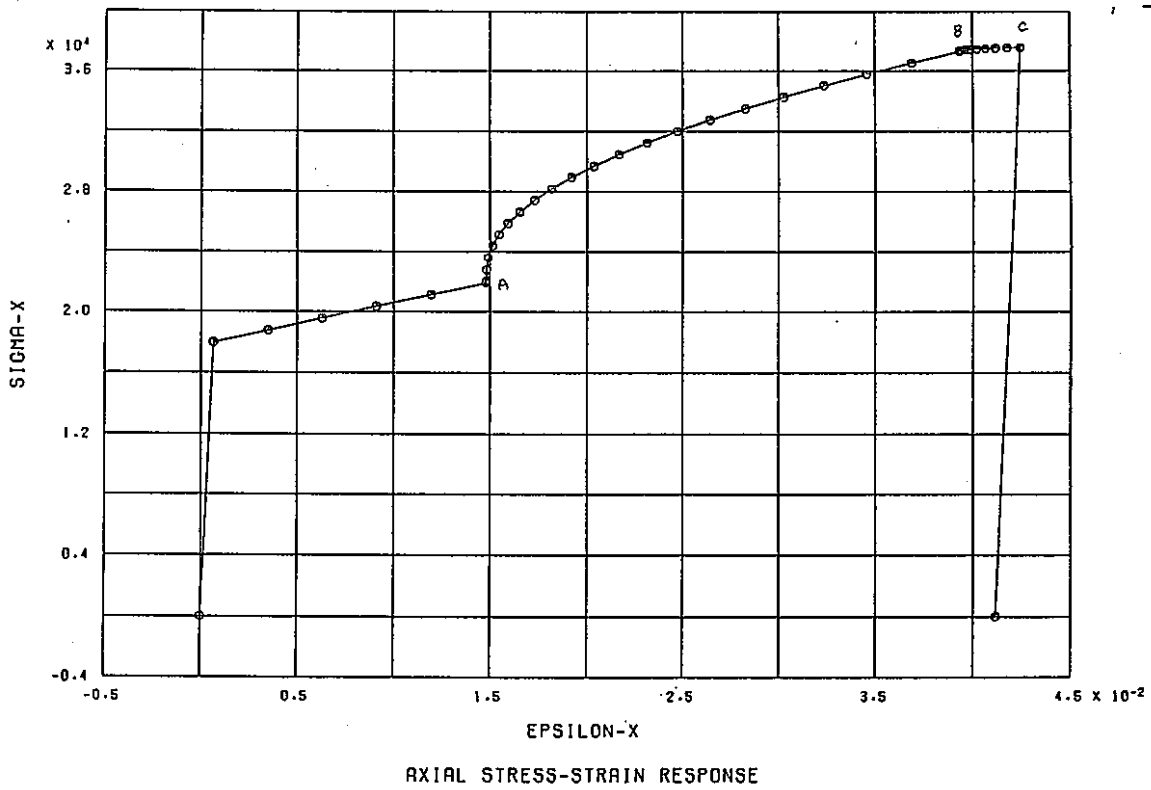


図2-6(b) X方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間24ステップ)

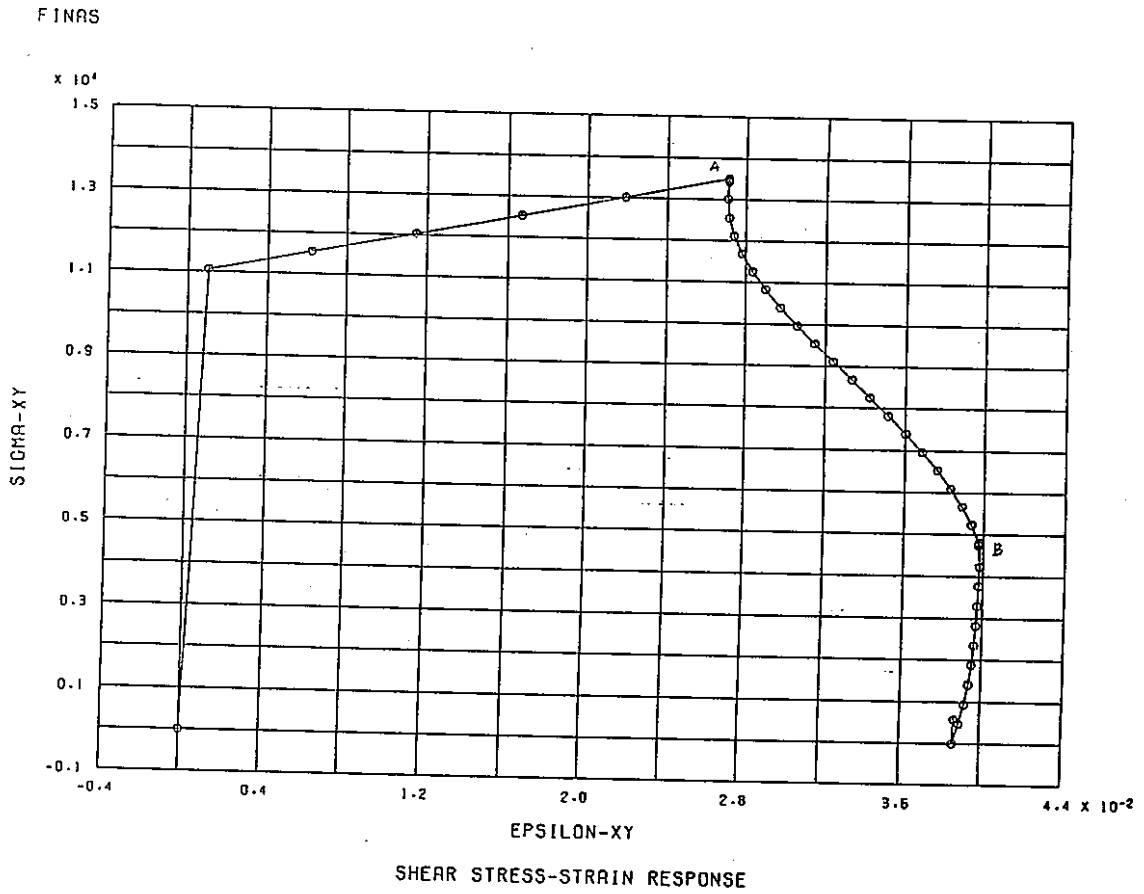


図2-7(a) XY方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)(AB間24ステップ)

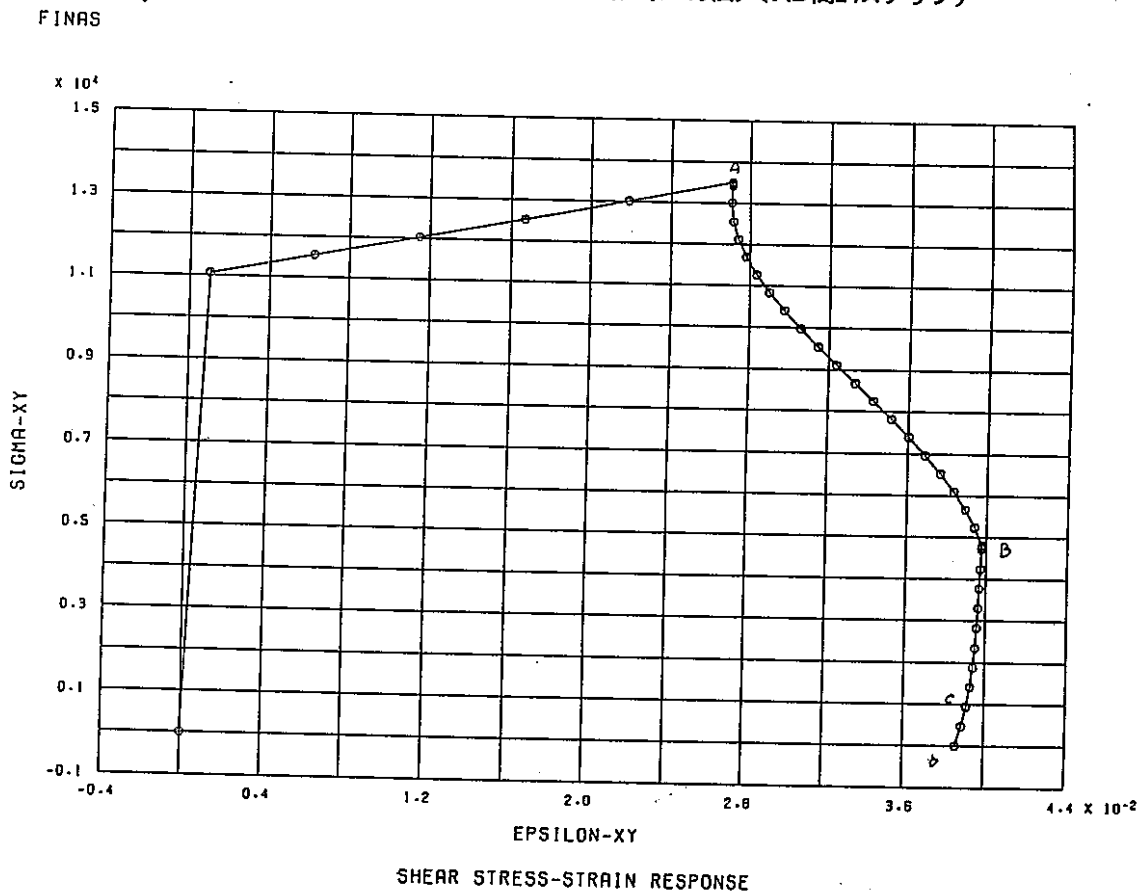


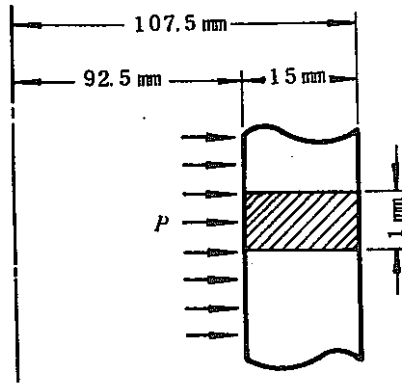
図2-7(b) XY方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)(AB間24ステップ)

● 熱弾塑性ラッチェティング問題 (DP001)

DP001の熱弾塑性ラッチェティング問題を新しいアルゴリズムで解析する。

解析モデル

内径 185mm, 管厚 15mmの 304 ステンレス鋼無限円筒 (両端閉じ) に一定内圧  $P$  が作用し, 管厚方向に直線分布の温度変化が繰り返し加えられる。



有限要素モデル

QAX4 要素により内側より外側へ分割幅を変化する 20 分割でモデル化する。

20	120	220	320	420	520	620	720	820	920	1020	1120	1220	1320	1420	1520	1620	1720	1820	1920	2020	221
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	

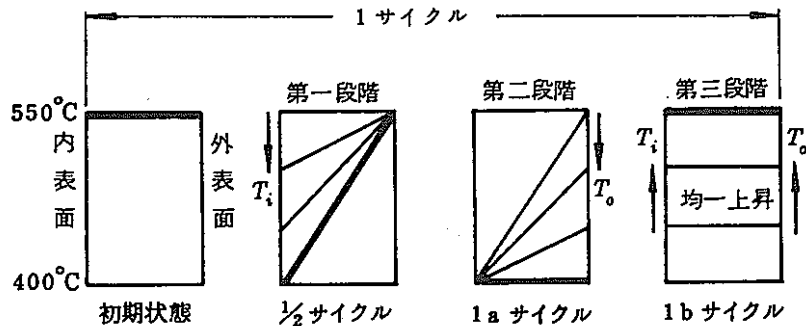
負荷条件

機械荷重は, 内圧  $P$  と内圧に対応した軸方向荷重  $F$  である。

$$P = 1.1352 \text{ kg/mm}^2$$

$$F = \pi P r_i^2 = 30514.46 \text{ kg}$$

一方, 熱荷重は 図に示す管厚方向に直線分布の温度変化を 3 回繰り返し加える。



解析結果

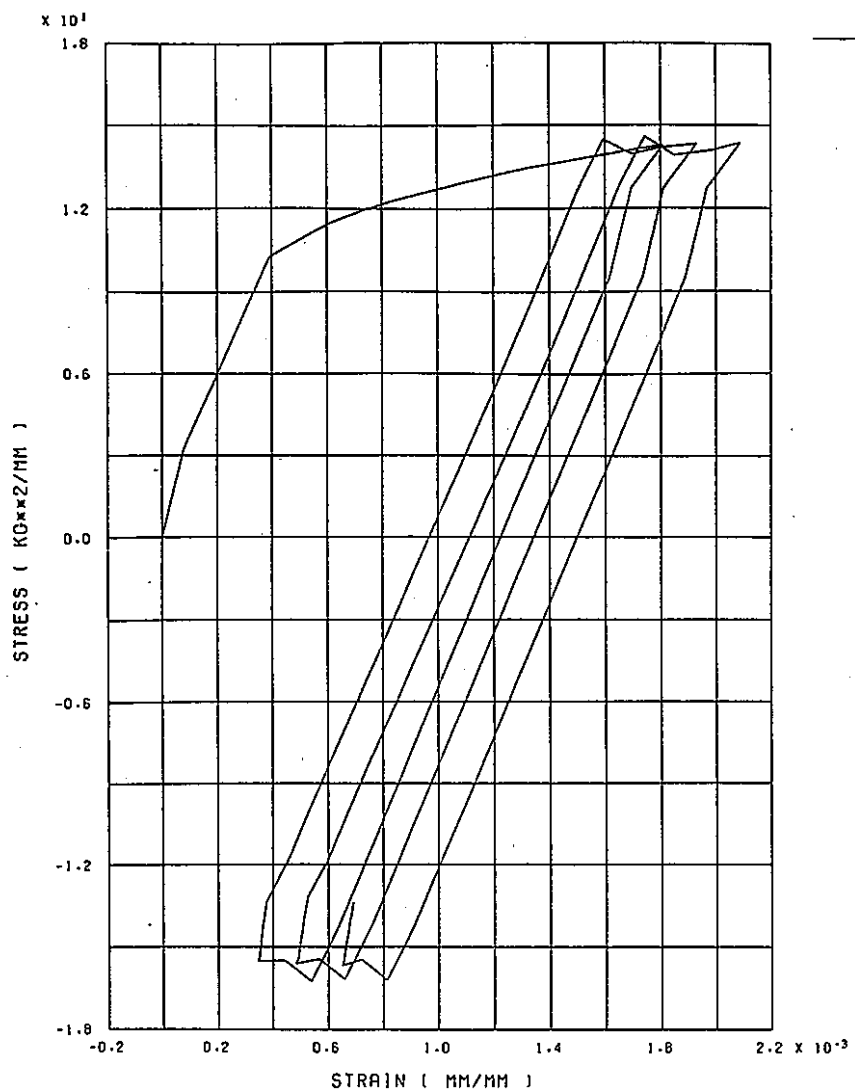
図 2-8 (a), (b) および 図 2-9 (a), (b) は内側要素図心での  $Z$  方向および周方向応力とひずみの関係を示している。  
 図 2-10 (a), (b) および 図 2-11 (a), (b) は外側要素図心での  $Z$  方向および周方向応力とひずみの関係を示している。  
 また, 表 2-4, 5 は各ステップにおける相当応力 / 相当塑性ひずみの比較を示したものである。

表2-4 要素1での各ステップにおける相当応力/相当塑性ひずみ

ステップ \ 応力/ひずみ	相当応力 $\bar{\sigma}$		相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^P$	
	従来の方法	新しい方法	従来の方法	新しい方法
1/2 サイクル目 (17)	1.5988E+01	1.5988E+01	3.0247E-03	3.0247E-03
1 a " (32)	1.3980E+01	1.3980E+01	2.5693E-03	2.5691E-03
1 b " (42)	1.1388E+01	1.1327E+01	2.5693E-03	2.5691E-03
1 1/2 サイクル目 (57)	1.6084E+01	1.6088E+01	3.3855E-03	3.3917E-03
2 a " (72)	1.3833E+01	1.3828E+01	2.9957E-03	3.0248E-03
2 b " (82)	1.1042E+01	1.1187E+01	2.9957E-03	3.0248E-03
2 1/2 サイクル目 (97)	1.6289E+01	1.6287E+01	3.8902E-03	3.9038E-03
3 a " (112)	1.3650E+01	1.3645E+01	3.5493E-03	3.5634E-03
3 b " (132)	1.1059E+01	1.0930E+01	3.5493E-03	3.5634E-03

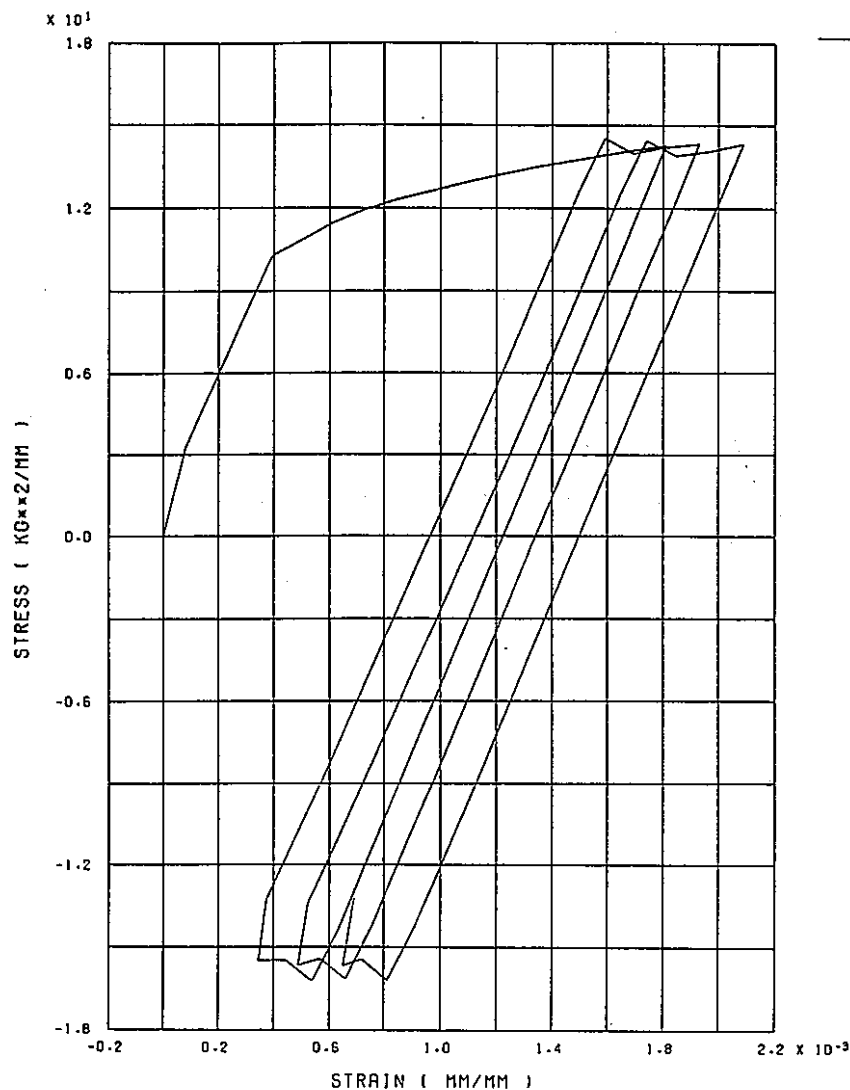
表2-5 要素20での各ステップにおける相当応力/相当塑性ひずみ

ステップ \ 応力/ひずみ	相当応力 $\bar{\sigma}$		相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^P$	
	従来の方法	新しい方法	従来の方法	新しい方法
1/2 サイクル目 (17)	1.3456E+01	1.3456E+01	5.1357E-04	5.7357E-04
1 a " (32)	1.4831E+01	1.4827E+01	2.0480E-04	2.0753E-04
1 b " (42)	1.3192E+01	1.3187E+01	1.9263E-04	1.8999E-04
1 1/2 サイクル目 (57)	1.3313E+01	1.3316E+01	2.8450E-04	2.8221E-04
2 a " (72)	1.4955E+01	1.4956E+01	3.3600E-04	3.4254E-04
2 b " (82)	1.3323E+01	1.3316E+01	5.0003E-04	4.9066E-04
2 1/2 サイクル目 (97)	1.3158E+01	1.3160E+01	3.5165E-04	3.4382E-04
3 a " (112)	1.5133E+01	1.5125E+01	7.5504E-04	7.4125E-04
3 b " (132)	1.3497E+01	1.3489E+01	9.3205E-04	9.1778E-04



Z-STRESS/STRAIN RELATION ( INNER SURFACE )

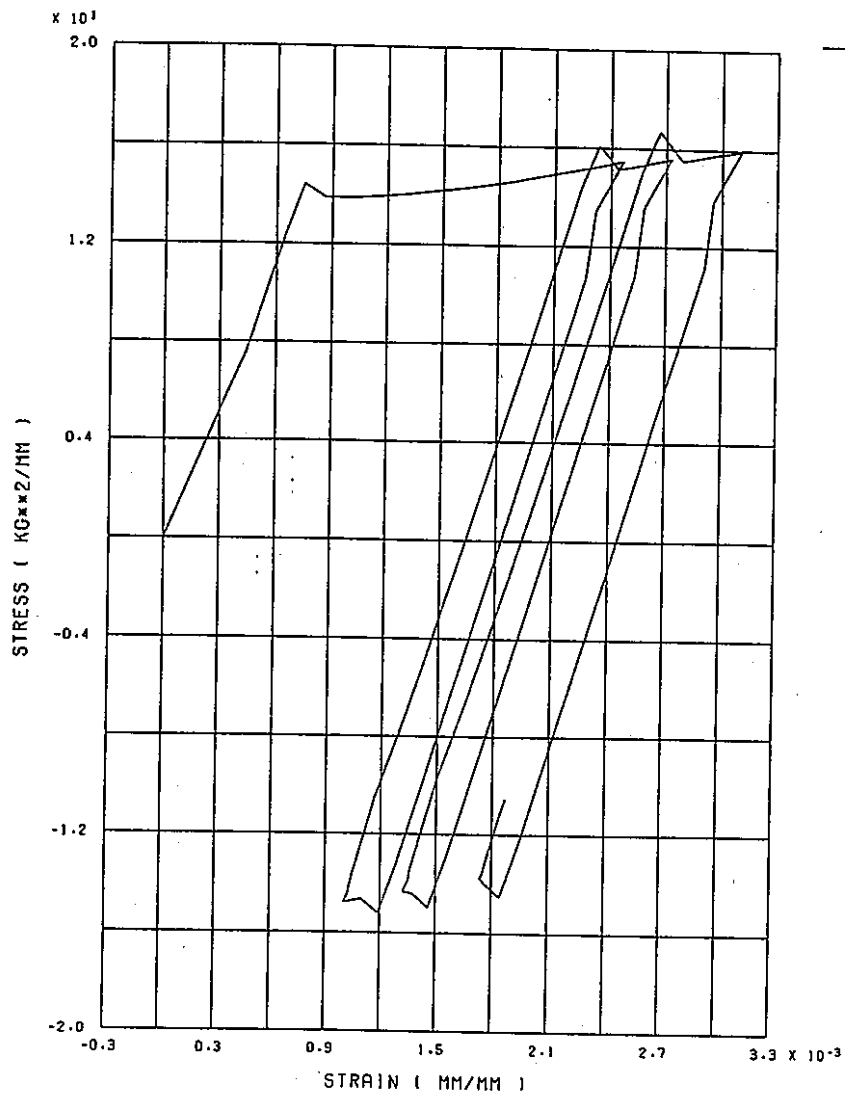
図2-8(a) 内側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)



Z-STRESS/STRAIN RELATION ( INNER SURFACE )

図2-8(b) 内側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)

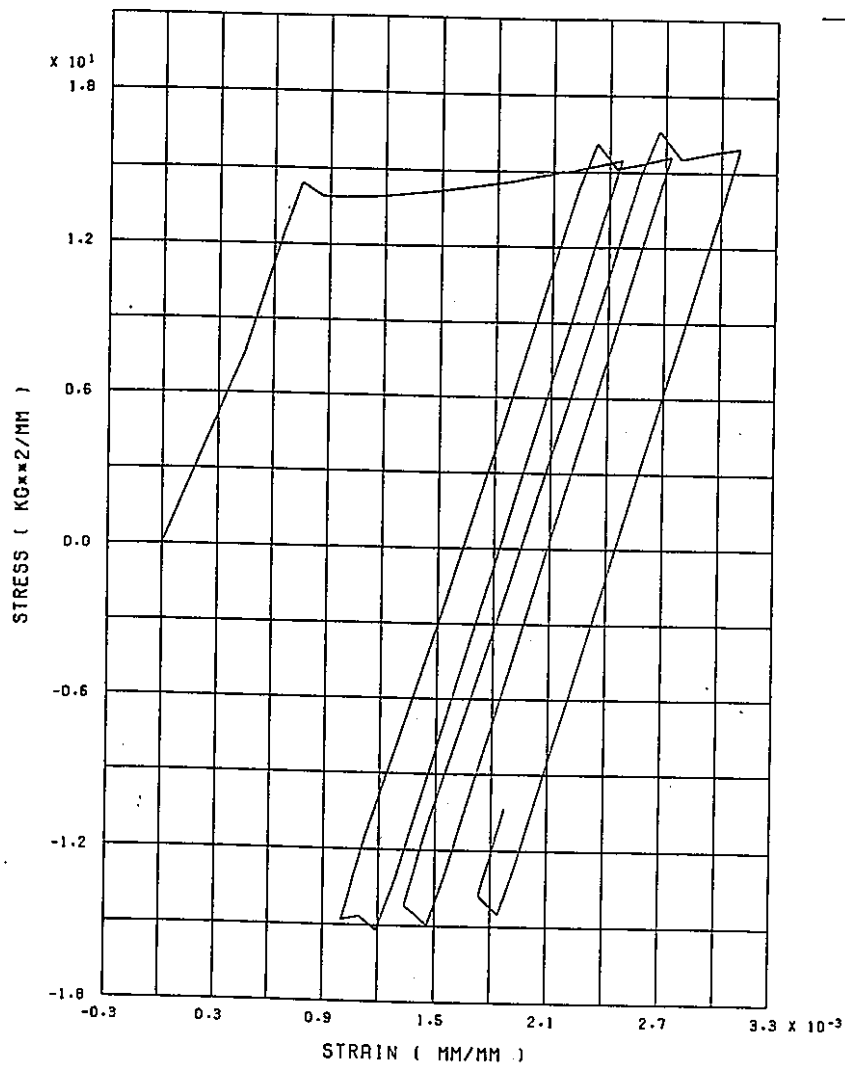
FINAS



THETA-STRESS/STRAIN RELATION ( INNER SURFACE )

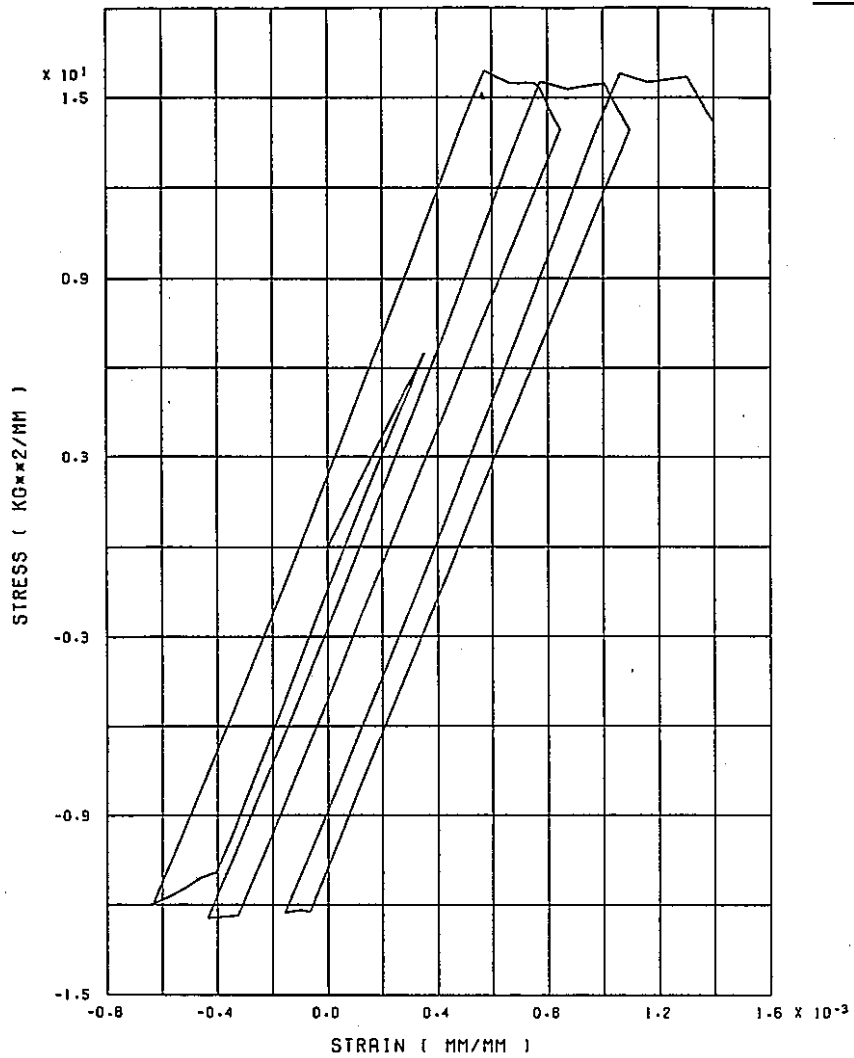
図2-9(a) 内側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴 (従来の方法)

FINAS



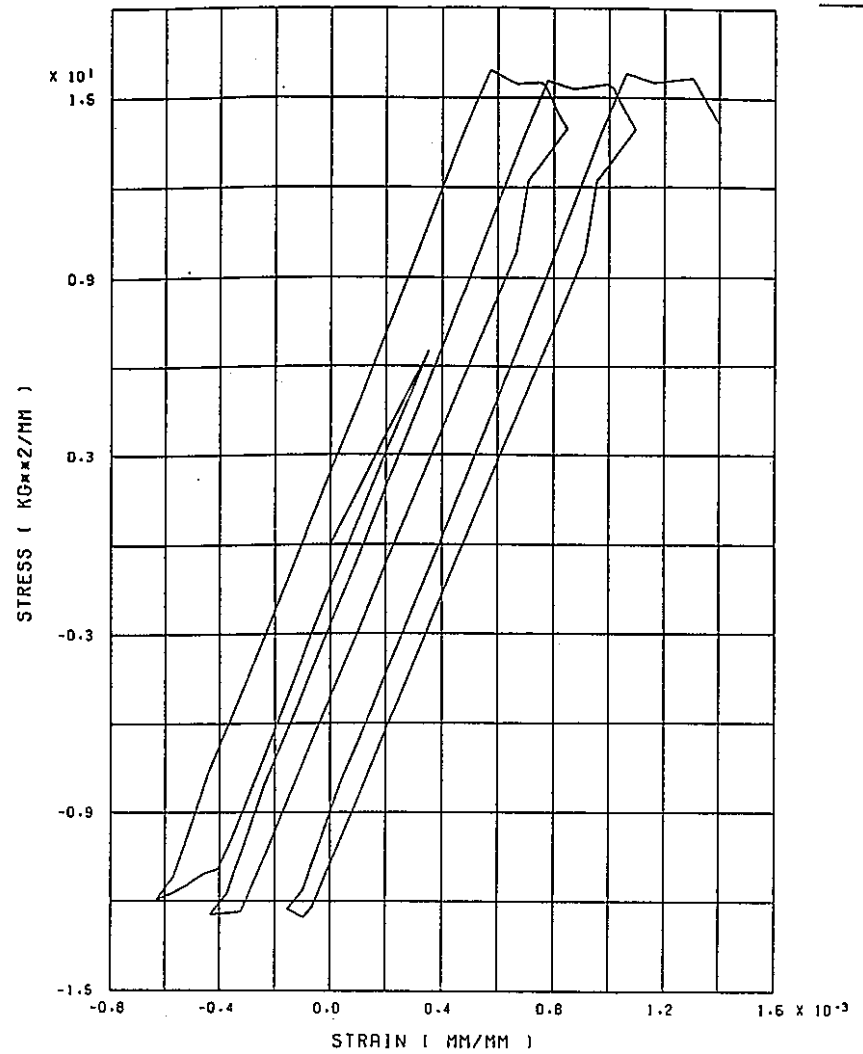
THETA-STRESS/STRAIN RELATION ( INNER SURFACE )

図2-9(b) 内側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴 (新しい方法)



THETA-STRESS/STRAIN RELATION ( OUTER SURFACE )

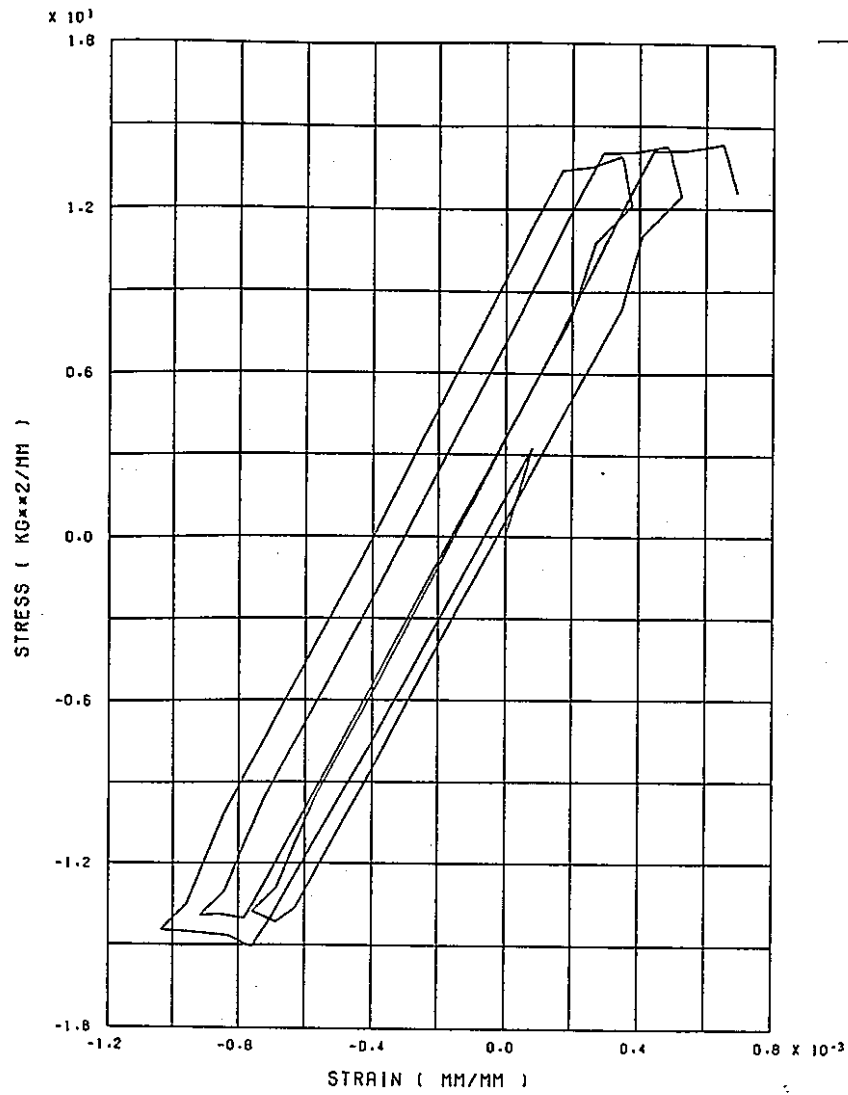
図2-10(a) 外側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)



THETA-STRESS/STRAIN RELATION ( OUTER SURFACE )

図2-10(b) 外側要素図心での周方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)

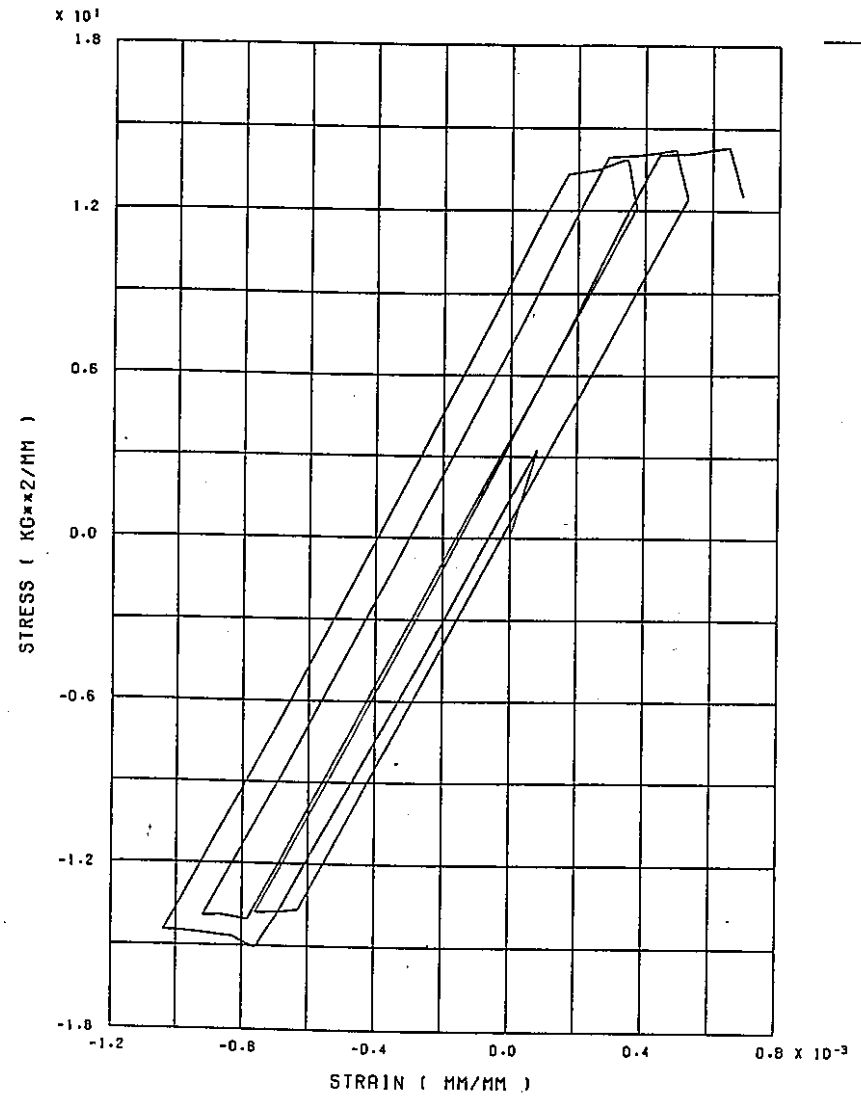
FINAS



Z-STRESS/STRAIN RELATION ( OUTER SURFACE )

図2-11(a) 外側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(従来の方法)

FINAS



Z-STRESS/STRAIN RELATION ( OUTER SURFACE )

図2-11(b) 外側要素図心でのZ方向応力-ひずみ履歴(新しい方法)



## b. 任意の構成モデルサブルーチン

非弾性解析での解析精度および実用性は、解析に用いる材料の力学的特性のモデル化、すなわち構成モデルの定式化に依存する面が大きい。現在、弾塑性、クリープ、粘塑性特性等を表わすための高精度な構成モデルは数多く存在し、さらに発展段階で年毎に改良、拡張が行なわれているものもある。しかし、これらの構成モデルは一般に簡単なベンチマーク問題に適用され、実験結果のデータと比較され、その特性、挙動が確認されているにすぎない。実用的な構造問題への適用は少なく、その有効性、妥当性が評価されていない。

FINASでは、前で述べたような有効性があまり評価されていない各種構成モデルの組み込みが行なわれ、それに伴い入力データ、出力データ、データブロック等の拡張および構成モデルのための機能サブプログラムの追加が行なわれてきた。しかし、評価が確定しない構成モデルをむやみに組み込むことはFINASシステムを複雑にし、利用者の混乱を招くことになり得策とは言えない。したがって、昨年度はこれらの各種構成モデルを定義するための使用者作成のサブプログラムに関して、他の汎用構造解析プログラムの調査およびFINASへの組み込みの仕様の検討が行なわれた。

本年度は、その仕様に従って、任意の構成モデルを定義するためのサブプログラムの組み込みが行なわれた。以下にその仕様の概要および具体的なサブプログラムの例を示す。

### (i) 入力データ

- MATERIALデータの使用者作成の構成モデルを使用するためのカード(USER MODEL)を追加する。材料定数はすべて使用者がサブプログラムの中で定義する。また、このカードにより使用者が定義する状態変数の個数を指定する。

### (ii) 出力データ

- プリント出力は通常、応力、全ひずみ、温度、時間のみとし、使用者が定義した状態変数はDIAGフラッグにより出力可能とする。このとき出力すべき状態変数の指定はできず、すべてを出力する。
- ポストテープ出力はプリント出力と同様にDIAGフラッグによって使用者が定義した状態変数を出力する。
- プロット出力では、使用者が定義した状態変数のための種類と記号を新しく追加する。

USV $k_i$  : 使用者が定義した $k$ 番目のベクトル型状態変数の成分 $i$

USS $k$  : 使用者が定義した $k$ 番目のスカラー型状態変数

### (iii) 状態変数

- FINASで用意する要素積分点の状態変数は、応力、全ひずみ、温度のみである。この他の状態変数、たとえば熱ひずみ、塑性ひずみ、背応力等はすべて使用者が定義する。したがって、使用者が定義する状態変数は、ベクトル、スカラー、フラッグ型の3種類を用意し、ベクトル型では熱ひずみ、塑性ひずみ等、スカラー型では弾塑性のフラッグとして使用する。

### (iv) データブロック

- 状態変数のためのデータブロック"EVIV", "DIV"に使用者が定義する状態変数の領域EVUSV(6,9)(ベクトル型), EVUSS(9)(スカラー型), IVUFL(9)(フラッグ型)を追加する。

### (v) その他

- 使用者作成のサブプログラムで参照される時間は実時間とする。

```

SUBROUTINE      XMAT1( IEXN, IECOD, NCOMP, IDMAT, IP, ISTEP,
+               TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, GEOM, CORD,
+               DISP, EPS, SIG, USTV, USTS, EMAT, GG, IFLG)
IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
DIMENSION GEOM(1), CORD(1), DISP(1), EPS(NCOMP), SIG(NCOMP),
+         USTV(NCOMP, 1), USTS(1), EMAT(NCOMP, NCOMP), GG(NCOMP), IFLG(1)

```

使用者がコーディング

```

RETURN
END

```

• 入力パラメータ

IEXN	: 要素番号
IECOD	: 要素タイプコード
NCOMP	: 応力成分数
IDMAT	: 材料特性識別番号
IP	: 要素内の積分点番号
ISTEP	: 解析ステップ番号
TIME	: 時 間
TEMP	: 積分点 IP の温度
GEOM	: 幾何学データ (GEOMETRY データで定義されたもの)
CORD	: 要素の節点座標
DISP	: 要素の節点変位
EPS	: 積分点 IP の全ひずみ $\{\varepsilon\}$
SIG	: 積分点 IP の応力成分 $\{\sigma\}$
USTV	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態変数 (ベクトル型)
USTS	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態変数 (スカラー型)
IFLG	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態識別変数 (整数型)

( TIME, TEMP のプレフィックス " D " は各々の増分を意味する )

• 出力パラメータ

EMAT	: 増分形応力ひずみ関係マトリックス ( $[E]$ )
GG	: 状態変数の変化による応力増分 ( $\Delta\{g\}$ )
IFLG	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態識別変数 (整数型)

図2-12 使用者作成のサブプログラム XMAT1

```

SUBROUTINE      XMAT2(IECN, IECOD, NCOMP, IDMAT, IP, ISTEP,
+              TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, GEOM, CORD,
+              DISP, EPS, SIG, USTV, USTS,
+              DDISP, DEPS, DSIG, DUSTV, DUSTS, IFLG)
IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
DIMENSION GEOM(1), CORD(1)
+         DISP(1), EPS(NCOMP), SIG(NCOMP), USTV(NCOMP, 1), USTS(NCOMP),
+         DDISP(1), DEPS(NCOMP), DSIG(NCOMP), DUSTV(NCOMP, 1), DUSTS(NCOMP),
+         IFLG(1)

```

使用者がコーディング

```

RETURN
END

```

• 入力パラメータ

IECN	: 要素番号
IECOD	: 要素タイプコード
NCOMP	: 応力成分数
IDMAT	: 材料特性識別番号
IP	: 要素内の積分点番号
ISTEP	: 解析ステップ番号
TIME	: 時間
TEMP	: 積分点 IP の温度
GEOM	: 幾何学データ (GEOMETRY データで定義されたもの)
CORD	: 要素の節点座標
DISP	: 増分前の要素節点変位
EPS	: 増分前の積分点 IP の全ひずみ $\{\epsilon\}$
SIG	: 増分前の積分点 IP の応力成分 $\{\sigma\}$
USTV	: 増分前の積分点 IP の使用者が定義した内部状態変数 (ベクトル型)
USTS	: 増分前の積分点 IP の使用者が定義した内部状態変数 (スカラー型)
IFLG	: 増分前の積分点 IP の使用者が定義した内部状態識別変数 (整数型)

(TIME, TEMP, DISP, EPS のプレフィックス "D" は各々の増分を意味する)

• 出力パラメータ

DSIG	: 積分点 IP の応力成分の増分 $\Delta\{\sigma\}$
DUSTV	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態変数 (ベクトル型) の増分
DUSTS	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態変数 (スカラー型) の増分
IFLG	: 積分点 IP の使用者が定義した内部状態識別変数 (整数型) の増分後の値

図2-13 使用者作成のサブプログラム XMAT2

(M) 使用者作成のサブプログラム

- 任意の構成モデルのために使用者が作成するためのサブプログラムは XMAT1, XMAT2 である。XMAT1 は式(2-3)に示されるように増分形応力ひずみ関係マトリックス〔E〕, 状態変数の変化による応力増分  $d\{g\}$  等を定義するものである。

$$d\{\sigma\} = [E] d\{\epsilon\} + d\{g\} \quad (2-3)$$

一方, XMAT2 は式(2-3)の構成式より, 応力と使用者の定義した状態変数の増分を計算するものである。

図2-12, 2-13 にサブプログラム XMAT1, XMAT2 の内容を示す。

(サブルーチン: XMAT1, XMAT2 による組合せ硬化モデルの組み込み例)

i) 組合せ硬化モデルの定式化

ここでは温度依存場における組合せ硬化モデルを XMAT1, XMAT2 に組み込むために以下のような形の構成方程式を導く手順を示す。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} de_{kl} + dg_{ij} \quad (2-4)$$

材料は等方性とし弾性域では線形弾性, 塑性域では von-Mises の降伏条件を用い, これを塑性ポテンシャルとする associate な流れ則に従うとする。

• ひずみの分解

熱弾塑性問題において全ひずみ増分  $de_{ij}$  は以下の成分に分解される。

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p + de_{ij}^T \quad (2-5)$$

• 塑性, 熱ひずみ増分

塑性ひずみ増分  $de_{ij}^p$  は塑性流れ理論によって以下のように表わされる。

$$de_{ij}^p = \langle \lambda^p \rangle \frac{\partial \phi}{ds_{ij}} \quad (2-6)$$

$\lambda^p$  : 塑性負荷では正のスカラ一量

$\phi$  : 塑性ポテンシャル (今回は式(2-10)の  $f$  とする)

また相当塑性ひずみ増分  $d\bar{e}^p$  を以下のように定義する。

$$d\bar{e}^p = \left( \frac{2}{3} de_{ij}^p de_{ij}^p \right)^{1/2} \quad (2-7)$$

熱ひずみ増分  $de_{ij}^T$  は瞬間線膨張係数  $\alpha^T$  によって以下のように書ける。

$$de_{ij}^T = \alpha^T \delta_{ij} dT \quad (2-8)$$

$\delta_{ij}$  : Kronecker のデルタ

• Hook の法則

等方性線形弾性材料においては、弾性ひずみ  $e_{ij}^e$  と応力  $\sigma_{ij}$  の間に以下のような Hook の法則が成り立つ (増分形でないことに注意)。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= K e_{aa}^e \delta_{ij} + 2G e_{ij}^e \\ (\sigma_{ij} &= \lambda e_{aa}^e \delta_{ij} + 2G e_{ij}^e) \end{aligned} \quad (2-9)$$

$K$  : 体積弾性係数

$\lambda, G$  : Lamé の定数

• 組合せ硬化則

$$f = \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij}) (s_{ij} - \alpha_{ij}) - \kappa^2 = 0 \quad (2-10)$$

抗応力の進展則 (等方硬化則) は以下のように定義する。

$$d\kappa = H'_i d\bar{e}^p + \frac{d\kappa}{dT} dT \quad (2-11)$$

ただし、 $H'_i = \frac{d\kappa}{d\bar{e}^p}$  : 等方硬化係数

背応力の進展則 (移動硬化則) は以下のように定義する。

$$d\alpha_{ij} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} H'_c \nu_{ij} d\bar{e}^p + \frac{d\alpha_{ij}}{dT} dT \quad (2-12)$$

ただし、 $H'_c$  : 移動硬化係数

$$\nu_{ij} = \frac{d\alpha_{ij}}{(d\alpha_{ij} d\alpha_{ij})^{1/2}} : \text{背応力増分の方} \quad (2-13)$$

• 適合条件式

塑性負荷が継続するなら応力は降伏面上にあり式 (2-10) を満足する。したがって、 $f$  関数の全微分  $df=0$ 。さて、 $df$  として一階微分項のみを考えると以下の適合条件が得られる ( $f$  は  $T$  の陽な関数ではなく  $T$  に関する偏微項は陽に入らない)。

$$df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} + \frac{df}{d\kappa} d\kappa = 0 \quad (2-14)$$

以上の関係式より構成方程式を導くが、まず準備として各量を偏差成分と等方成分に分解する。

• 全ひずみ増分の分解

$$de_{ij} = de'_{ij} + \frac{1}{3} de_{aa} \delta_{ij} \quad (2-15)$$

ただし,  $de_{aa} = de_{11} + de_{22} + de_{33}$

• 弾性ひずみ増分の分解

$$de_{ij}^e = de_{ij}^{e'} + \frac{1}{3} de_{aa}^e \delta_{ij} \quad (2-16)$$

さて、塑性ひずみ、熱ひずみは各々偏差成分、等方成分のみより成ると仮定すると式(2-5)は以下のように表記できる。

$$\begin{aligned} de_{aa} &= de_{aa}^e + de_{aa}^T && : \text{等方成分 (弾性, 熱ひずみ)} \\ de'_{ij} &= de_{ij}^{e'} + de_{ij}^p && : \text{偏差成分 (弾性, 塑性ひずみ)} \end{aligned} \quad (2-17)$$

Hookの法則も分解して表記すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{aa} &= Ke_{aa}^e && : \text{等方成分} \\ s_{ij} &= 2Ge_{ij}^{e'} && : \text{偏差成分 (} s_{ij} : \text{偏差応力)} \end{aligned} \quad (2-18)$$

• 弾性域

まず熱弾性領域における構成方程式を導く。弾性領域では塑性ひずみ増分が存在しないので(2-17)式は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} de_{aa} &= de_{aa}^e + de_{aa}^T && : \text{等方成分} \\ de'_{ij} &= de_{ij}^{e'} && : \text{偏差成分} \end{aligned} \quad (2-19)$$

次にHookの法則式(2-9)より応力増分を定める。ただし、一般的に $K$ 、 $G$ も温度依存性を持つため式(2-9)の全微分形は以下の形をとる。

$$dd_{ij} = Kde_{aa}^e \delta_{ij} + 2Gde_{ij}^{e'} + \left( \frac{dK}{dT} e_{aa}^e \delta_{ij} + \frac{d2G}{dT} e_{ij}^{e'} \right) dT \quad (2-20)$$

または式(2-18)より

$$d\sigma_{aa} = 3Kde_{aa}^e + \frac{3dK}{dT} e_{aa}^e dT && : \text{等方成分} \quad (2-21)$$

$$ds_{ij} = 2Gde'_{ij} + \frac{d2G}{dT}e'_{ij}dT \quad : \text{偏差成分} \quad (2-21)$$

式(2-20)に式(2-19), 式(2-8)を代入し,  $de'_{ij}$ ,  $de^T_{ij}$ を消去すれば, 以下のような熱弾性領域における構成方程式が得られる。

$$d\sigma_{ij} = Kde_{aa}\delta_{ij} + 2Gde'_{ij} + \left( \frac{dK}{dT}e_{aa}\delta_{ij} + \frac{d2G}{dT}e'_{ij} - 3K\alpha^T\delta_{ij} \right) dT \quad (2-22)$$

または式(2-21)より

$$d\sigma_{aa} = 3Kde_{aa} + \left( \frac{3dK}{dT}e_{aa} - 9K\alpha^T \right) dT \quad : \text{等方成分} \quad (2-23)$$

$$ds_{ij} = 2Gde'_{ij} + \frac{d2G}{dT}e'_{ij}dT \quad : \text{偏差成分}$$

#### • 塑性域

今回は塑性ひずみが偏差成分のみよりなると仮定しているので等方成分に関する構成方程式は弾性域の式(2-23)の上に同様である。ここでは偏差成分のみを新たに導出する。

まず準備として  $\lambda^P$ ,  $de^P$  の関係を求める。

式(2-6)の  $\phi$  関数として式(2-10)の  $f$  を用いるなら

$$de^P_{ij} = \lambda^P 3(s_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (2-24)$$

上式の両辺についてテンソル積をとると,

$$de^P_{ij}de^P_{ij} = 9(\lambda^P)^2 (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (2-25)$$

上式に式(2-6), 式(2-10)を代入すると,

$$\lambda^P = \frac{d\bar{e}^P}{2\kappa} \quad (2-26)$$

または式(2-6)より

$$de^P_{ij} = \frac{3}{2\kappa} (s_{ij} - \alpha_{ij}) d\bar{e}^P \quad (2-27)$$

次に偏差応力増分を式(2-21), 式(2-17)より以下のように表わしておく。

$$ds_{ij} = 2G(de'_{ij} - de^p_{ij}) + \frac{d2G}{dT} e'_{ij} dT \quad (2-28)$$

さて、以上の準備のもとに偏差成分に関する構成方程式の導出にかかる。まず適合条件式(2-14)に式(2-10)を代入して

$$3(s_{ij} - \alpha_{ij}) ds_{ij} - 3(s_{ij} - \alpha_{ij}) d\alpha_{ij} - 2\kappa d\kappa = 0 \quad (2-29)$$

前式に式(2-28, 11, 12)を代入し  $ds_{ij}$ ,  $d\alpha_{ij}$ ,  $d\kappa$  を消去、さらに式(2-27)より  $de^p_{ij}$  を消去して  $d\bar{e}^p$  についてとけば、

$$d\bar{e}^p = \frac{3G(s_{ij} - \alpha_{ij}) de'_{ij} + \left\{ \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij}) \left( \frac{d2G}{dT} e'_{ij} - \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T} \right) - \kappa \frac{d\kappa}{dT} \right\} dT}{\kappa(3G + AH'_c + H'_i)} \quad (2-30)$$

ここに新たに定義した量  $A$  は背応力増分と塑性ひずみ増分(降伏曲面の法線方向)の方向余弦を表わし、以下の式で定義される。

$$A = \frac{(s_{ij} - \alpha_{ij})}{\|s_{ij} - \alpha_{ij}\|} \nu_{ij} \quad (2-31)$$

ただし、 $\|s_{ij} - \alpha_{ij}\| = \{(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij})\}^{1/2}$

$$\lambda^p = \frac{3G(s_{ij} - \alpha_{ij}) de'_{ij} + \left\{ \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij}) \left( \frac{d2G}{dT} e'_{ij} - \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T} \right) - \kappa \frac{d\kappa}{dT} \right\} dT}{2\kappa^2(3G + AH'_c + H'_i)} \quad (2-32)$$

上式の  $\lambda^p$  は除荷、負荷の判定に用いられ、 $\lambda^p \geq 0$  なら負荷で塑性状態が継続するが、 $\lambda^p < 0$  ならば除荷が発生し弾性状態に戻す必要がある。

以上の関係より式(2-30)を再び式(2-27)に代入し  $d\bar{e}^p$  を消去し、これを式(2-28)に代入して  $de^p_{ij}$  を消去すれば、偏差成分に関する構成方程式が得られる。

$$ds_{ij} = 2G de'_{ij} - \frac{9G^2(s_{kl} - \alpha_{kl}) de'_{kl} (s_{ij} - \alpha_{ij})}{\kappa^2(3G + AH'_c + H'_i)} + \left[ \frac{d2G}{dT} e'_{ij} - \frac{\frac{9}{2}G(s_{kl} - \alpha_{kl}) \left( \frac{d2G}{dT} e'_{kl} - \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) (s_{ij} - \alpha_{ij}) - 3\kappa G(s_{ij} - \alpha_{ij}) \frac{d\kappa}{dT}}{\kappa^2(3G + AH'_c + H'_i)} \right] dT \quad (2-33)$$

以上をまとめると温度変動下における組合せ硬化モデルの構成方程式は以下のようになる。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} de_{kl} + dg_{ij} \quad (2-34)$$



ただし,

$$E_{ijkl} = E_{ijkl}^e + E_{ijkl}^p \quad (2-35)$$

$E_{ijkl}^e$  : 弾性応力 - ひずみ関係

$$E_{ijkl}^p = -\frac{9G^2 (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{kl} - \alpha_{kl})}{\kappa^2 (3G + \Lambda H_c' + H_i')} \quad (2-36)$$

$$dg_{ij} = dg'_{ij} + \frac{1}{3} dg_{aa} \delta_{ij} \quad (2-37)$$

$$dg_{aa} = 3 \left( \frac{dK}{dT} e_{aa}^e - 3K\alpha^T \right) dT \quad (2-38)$$

$$dg'_{ij} = \frac{d2G}{dT} e_{ij}^{re}$$

$$-\frac{\frac{9}{2}G(s_{kl} - \alpha_{kl}) \left( \frac{d2G}{dT} e_{kl}^{re} - \frac{\partial \alpha_{kl}}{\partial T} \right) (s_{ij} - \alpha_{ij}) - 3\kappa G (s_{ij} - \alpha_{ij}) \frac{d\kappa}{dT}}{\kappa^2 (3G + \Lambda H_c' + H_i')}$$

(2-39)

ここに,

$H_c, H_i$  : 移動硬化係数, 等方硬化係数

$\Lambda = \frac{(s_{ij} - \alpha_{ij})}{\|s_{ij} - \alpha_{ij}\|} \nu_{ij}$  : 塑性歪増分と背応力増分の方向余弦

$\nu_{ij} = \frac{d\alpha_{ij}}{\|d\alpha_{ij}\|}$  : 背応力増分の方

ただし, 弾性状態では  $E_{ijkl}^p, dg'_{ij}$  の第二項は零である。

また, 除荷の判定には以下の  $\lambda^p$  を用いる。

$$\lambda^p = \frac{3G(s_{ij} - \alpha_{ij}) de'_{ij} + \left\{ \frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij}) \left( \frac{d2G}{dT} e_{ij}^{re} - \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial T} \right) - \kappa \frac{d\kappa}{dT} \right\} dT}{2\kappa^2 (3G + \Lambda H_c' + H_i')} \quad (2-40)$$

今回は一定温度下における問題を扱うので温度に関する項はすべて零となる。また移動硬化則として Prager の移動硬化則を用いると背応力の発展則は一定温度下において以下の式となる (Ziegler の移動硬化則を用いても同様)。

$$d\alpha_{ij} = c de_{ij}^p \quad (2-41)$$

式(2-12)より

$$H'_c = \frac{3}{2}c, \nu_{ij} = \frac{de_{ij}^P}{\|de_{ij}^P\|}$$

従って、式(2-11, 27)より

$$A=1.0$$

(2-42)

ii) 内部状態変数

使用者作成のサブプログラムによる構成モデルの組込みを行なう場合にはモデル特有の内部状態変数を使用者が定義する必要がある。ここでは内部状態変数を以下のように設定し、使用している。

表2-6 ベクトル型内部状態変数 (NVCT=3)

番号	記号	変数名		内容
		ADMODEL	XMAT1, XMAT2	
1	$e_{ij}^T$	USTV(1.6)		熱ひずみ
2	$e_{ij}^P$	USTV(2.6)	EP(9)	塑性ひずみ
3	$\alpha_{ij}^T$	USTV(3.6)	AL(9)	背応力

表2-7 スカラー型内部状態変数 (NSCR=1)

番号	記号	変数名		内容
		ADMODEL	XMAT1, XMAT2	
1	$\bar{e}^P$	USTS(1)	EPSPB	相当塑性ひずみ

表2-8 フラッグ型内部状態変数 (NFLG=1)

番号	記号	変数名		内容
		ADMODEL	XMAT1, XMAT2	
1		IFLG(1)	IELPL	弾塑性フラッグ $\begin{bmatrix} 0 : \text{弾性} \\ 1 : \text{塑性} \end{bmatrix}$

iii) サブルーチンとその機能

構成モデルの組込みはサブルーチン XMAT1, XMAT2 によって行なうが、プログラミングを効率化するため、これらのサブルーチンは各構成モデルにおいて共通に使用できるユーティリティサブルーチンを呼んでいる。またこれらのサブルーチン名は FINAS で使用しているサブルーチン名との重複を避けるためにすべて頭文字を "Y" としている。表2-9にこれらのサブルーチン名とその機能を示す。

表2-9 組合せ硬化モデル組込みのためのサブルーチンとその機能

サブルーチン名	機 能
(XMAT1)	$[E], \{dg\}$ を定義する
(XMAT2)	状態変数の増分を定義する
YMATCT	材料定数の設定
YDGDCT	組合せ硬化モデルにおける $\{dg\}$ の偏差成分の計算
YDGMCT	組合せ硬化モデルにおける $\{dg\}$ の等方成分の計算
YDSRT	組合せ硬化モデルにおける応力、塑性ひずみ増分の計算
YEET	テンソル型の弾性応力-ひずみ関係のセット
YETVTR	テンソル型の応力-ひずみ関係をベクトル型に変換
YFLAMP	組合せ硬化型モデルにおける $\lambda^p$ の計算
YTGAM	曲面を飛び出す場合の分割比率
YFTT'M	テンソル積の計算 (FUNCTION)
YMVMUL	マトリックスとベクトルの積
YT2V	テンソル型の変数をベクトル型へ変換
YV2T	ベクトル型の変数をテンソル型へ変換
YTDEV	テンソル型の変数を偏差と等方成分へ分解
YTSUM	テンソル型変数において偏差と等方成分の和を作る

iv) XMAT1, XMAT2のフローチャート

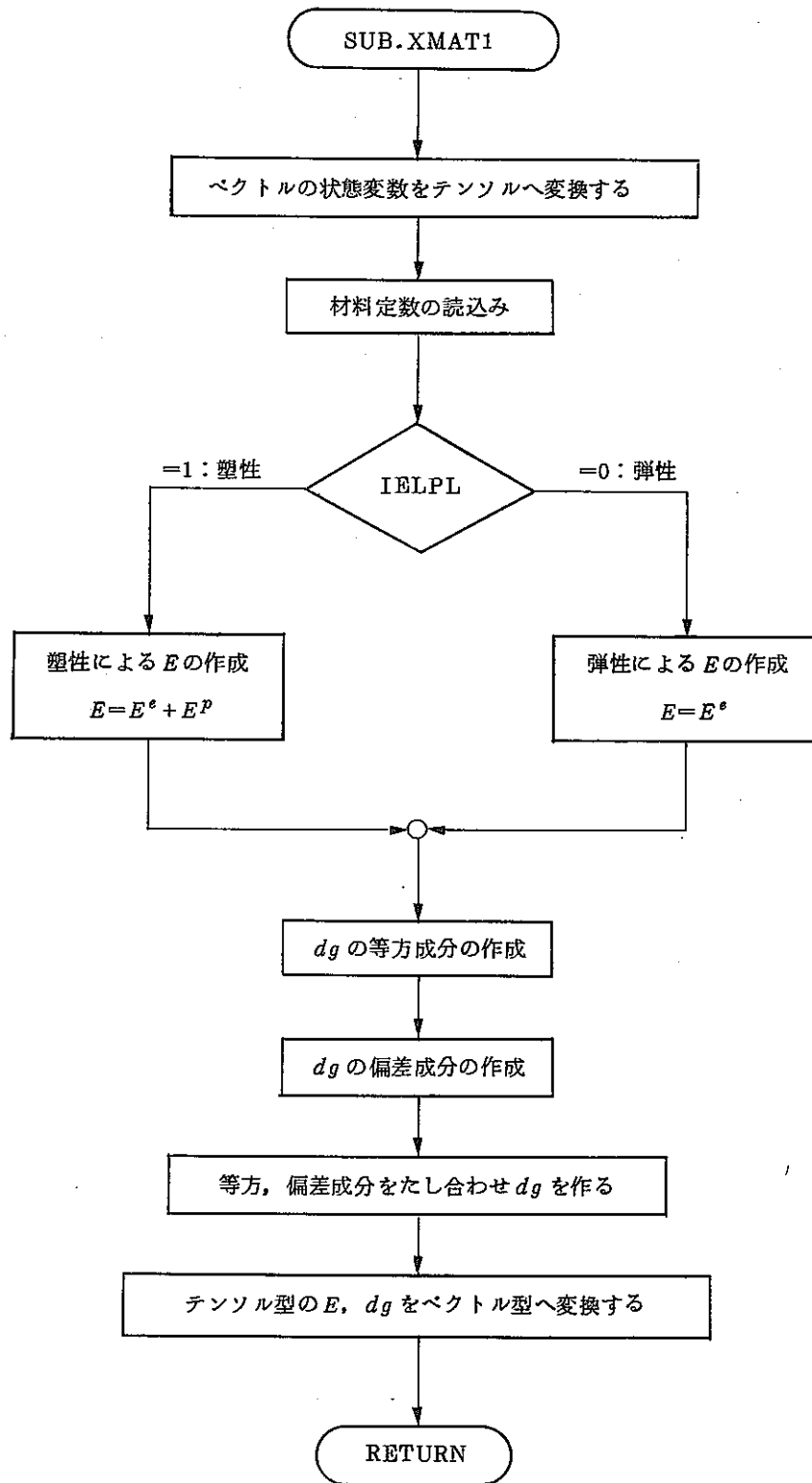


図2-14 サブルーチンXMAT1のフローチャート

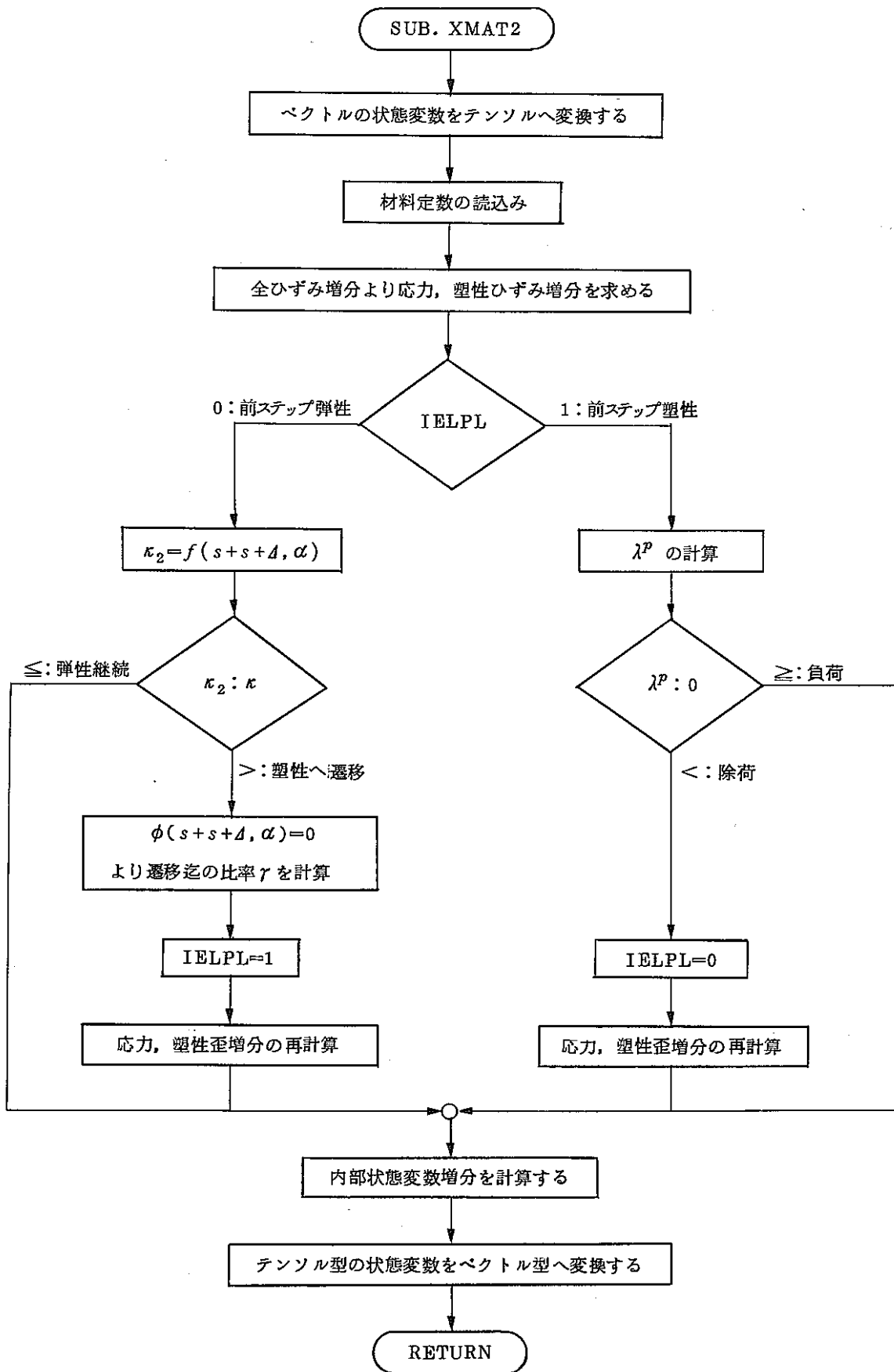


図2-15 サブルーチンXMAT2のフローチャート

V) 組み合わせ硬化モデルの組み込みに使用したサブルーチン群

```

SUBROUTINE XMATI ( IEXN, IECOD, NCOMP, NNOR, IDMAT, IP, ISTEP,
.             TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, GEOM, CORD,
.             DISP, EPS, SIG, USTV, USTS,
.             EMAT, GG, IFLG )
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   TO CALCULATE CONSTITUTIVE EQUATION AND UPDATE FLAGS
C   FOR FINAS USER DEFINED CONSTITUTIVE MODEL.
C
C             (DSIG) = (EMAT) (DEPS) + (GG)
C
C             PROGRAMED BY K. GARATANI (CRC) ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   IEXN  D. ARG (INT)   : ELEMENT EXTERNAL ID.
C   IECOD D. ARG (INT)   : ELEMENT TYPE CODE. (REF. TABLE C.1-1)
C   NCOMP D. ARG (INT)   : COMPONENTS NO. OF STRESS OR STRAIN
C   NNOR  D. ARG (INT)   : NORMAL COMPONENTS NO. OF ABOVE
C   IDMAT D. ARG (INT)   : MATERIAL ID.
C   IP    D. ARG (INT)   : ELEMENT INTEGRATION POINT ID.
C   ISTEP D. ARG (INT)   : STEP COUNT
C   TIME  D. ARG (INT)   : TIME
C   DTIME D. ARG (REAL*8) : TIME INCREMENT
C   TEMP  D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE
C   DTEMP D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE INCREMENT
C   GEOM(1) D. ARG (REAL*8) : GEOMETRY DATA
C   CORD(1) D. ARG (REAL*8) : NODAL COORDINATES OF THE ELEMENT
C   DISP(1) D. ARG (REAL*8) : NODAL DISPLACEMENT OF THE ELEMENT
C   EPS (I) D. ARG (REAL*8) : TOTAL STRAIN COMPONENTS
C   SIG (I) D. ARG (REAL*8) : STRESS COMPONENTS
C   USTV(I, J) D. ARG (REAL*8) : USER DEFINED ST. VARIABLES (VEC. FORM)
C   USTS(J) D. ARG (REAL*8) : USER DEFINED ST. VARIABLES (SCR. FORM)
C   *IFLG(J) D. ARG (INT) : USER DEFINED FLAGS
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   EMAT(I, J) D. ARG (REAL*8) : INCREMENTAL STRESS-STRAIN MATRIX
C   GG (I) D. ARG (REAL*8) : PSEUDO STRESS INCREMENT VECTOR
C   *IFLG(J) D. ARG (INT) : USER DEFINED FLAGS
C-----
C-----< USER COMMENT BELLOW >-----
C
C===== << FOR CLASSIC COMBINED HARDENING MODEL (TEMP. DEP. ) >>=====
C                                     BY K. GARATANI ON JAN. 1990
C * MODEL STATUS VARIABLES
C   USTV(I, J) .. VECTOR VARIABLES
C     J=1: ; THERMAL STRAIN (NOT USED HERE)
C     J=2: ; PLASTIC STRAIN (NOT USED HERE)
C     J=3: 'ALPHA(9)'; BACK STRESS
C   USTS(J) .. SCALAR VARIABLES
C     J=1: 'EPSPB' ; EQUIVALENT PLASTIC STRAIN

```

```

C   IFLG(J) .. FLAGS
C     J=1: 'IELPL' ; PLASTIC FLAG ( 0:ELASTIC, 1:PLASTIC )
C-----
C * COMMENT
C   THIS ROUTINE TREAT ALL STRESS OR STRAIN BY TENSOR EXPRESSION
C-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION GEOM(*), CORD(*), DISP(*), EPS(NCOMP), SIG(NCOMP),
.             USTV(NCOMP, *), USTS(*),
.             EMAT(NCOMP, NCOMP), GG(NCOMP), IFLG(*)
C
C..... ( USER PROGRAM BELOW ).....
C
C   DIMENSION STRES(9), ALPHA(9), EED(9), DG(9),
.             SD (9), SDA (9),
.             EEPT(9, 9), DALDT(9)
C
C ***** CHECK COMPONENT NO.
C
C   IF (NCOMP.NE.6) GOTO 9010
C
C ***** SET INPUT VARIABLES (TRANSFER VECTOR TO TENSOR)
C
C   CALL YV2T(1, NCOMP, NNOR, SIG , STRES)
C   CALL YV2T(3, NCOMP, NNOR, USTV(1, 3), ALPHA)
C
C   EPSPB = USTS(1)
C
C   IELPL = IFLG(1)
C
C ***** SET MATERIAL CONSTANTS
C
C   CALL YMATCT(TEMP, DTEMP, EPSPB,
.             ALT, ALM1, G1, HD, HDC, AKAP,
.             ALM2, G2, DALMDT, DGD, DKAPDT, DALDT)
C
C   HDK = HD + HDC
C   AK1 = ALM1 + 2.0D0/3.0D0*G1
C   AK2 = ALM2 + 2.0D0/3.0D0*G2
C   DKDT = DALMDT + 2.0D0/3.0D0*DGD
C
C ***** DIV. STRESS, GET ELASTIC STRAIN OF PREVIOUS STEP
C
C   CALL YTDEV(STRES, SM, SD)
C
C   EEM = SM / (3.0D0*AK1)
C   DO 100 I=1, 9
C     EED(I) = SD(I) / (2.0*G1)
C 100 CONTINUE

```

```

C
C ***** COMPOSE 'EEP' TENSOR DEPENDS ON STATUS
C
C     IF (IELPL.EQ.0) THEN
C
C         ..... < IELPL=0:ELASTIC STATUS > .....
C
C         CALL YEET (ALM2,G2,EEPT)
C
C     ELSE
C         ..... < IELPL=1:PLASTIC STATUS > .....
C
C         DO 200 I=1,9
C           SDA(I) = SD(I) - ALPHA(I)
C 200    CONTINUE
C
C         *** GET KAPPA**2 FROM F=0 CONDITION
C
C         XKAP2 = 3.0D0/2.0D0*YFTTM(SDA,SDA)
C         XKAP  = SQRT(XKAP2)
C
C         CALL YEET(ALM2,G2,EEPT)
C
C         SS = 9.0*G2**2 / (XKAP2*(3.0*G2+HDX))
C
C         DO 310 J=1,9
C           DO 300 I=1,9
C             EEPT(I,J) = EEPT(I,J) - SDA(I)*SDA(J)+SS
C 300    CONTINUE
C 310    CONTINUE
C
C         ENDIF
C
C         ***** GET 'DG' TENSOR OF MEAN-NORMAL AND DEV. TERM THEN SUM UP
C
C         CALL YDGMCT(EEM,DTEMP,AK2,ALT,DKDT,DGM)
C
C         CALL YDGDCT(IELPL,EED,DTEMP,DGDT,SDA,XKAP,G2,HDX,DKAPDT,DALDT,
C                   DG)
C
C         CALL YTSUM (DGM,DG,DG)
C
C         ***** TRANSFER TENSOR TO VECTOR EXPRESSION FOR OUTPUT
C
C         CALL YETVTR(EEPT,EMAT)
C
C         CALL YT2V (1,NCOMP,NNOR,DG,GG)
C
C         ***** SET OTHER OUTPUT VALUES
C
C         IFLG(1) = IELPL

```

```

C
C     RETURN
C
C ***** ERROR
C
C 9010 WRITE(6,*) ' ***** ERROR ON SUB. XMAT1 : ILLEGAL NCOMP ',NCOMP
C     STOP
C     END
C     SUBROUTINE XMAT2 ( IEXN, IECOD, NCOMP, NNOR, IDMAT, IP, ISTEP,
C                      TIME, DTIME, TEMP, DTEMP, GEOM, CORD,
C                      DISP, EPS, SIG, USTV, USTS,
C                      DDISP, DEPS, DSIG, DUSTV, DUSTS, IFLG )
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   CALCULATE INCREMENT OF STATUS VARIABLES AND UPDATE FLAGS
C   FOR FINAS USER DEFINED CONSTITUTIVE MODEL.
C
C   PROGRAMED BY K. GARATANI (CRC) ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   IEXN   D. ARG (INT)   : ELEMENT EXTERNAL ID.
C   IECOD  D. ARG (INT)   : ELEMENT TYPE CODE. (REF. TABLE C.1-1)
C   NCOMP  D. ARG (INT)   : COMPONENTS NO. OF STRESS OR STRAIN
C   NNOR   D. ARG (INT)   : NORMAL COMPONENTS NO. OF ABOVE
C   IDMAT  D. ARG (INT)   : MATERIAL ID.
C   IP     D. ARG (INT)   : ELEMENT INTEGRATION POINT ID.
C   ISTEP  D. ARG (INT)   : STEP COUNT
C   TIME   D. ARG (INT)   : TIME
C   DTIME  D. ARG (REAL*8) : TIME INCREMENT
C   TEMP   D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE
C   DTEMP  D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE INCREMENT
C   GEOM(1) D. ARG (REAL*8) : GEOMETROY DATA
C   CORD(1) D. ARG (REAL*8) : NODAL COORDINATES OF THE ELEMENT
C   DISP(1) D. ARG (REAL*8) : NODAL DISPLACEMENT OF THE ELEMENT
C   DDISP(1) D. ARG (REAL*8) : NODAL DISPLACEMENT INCREMENT
C   EPS(1)  D. ARG (REAL*8) : TOTAL STRAIN COMPONENTS
C   DEPS(1) D. ARG (REAL*8) : TOTAL STRAIN COMPONENTS INCREMENT
C   SIG(1)  D. ARG (REAL*8) : STRESS COMPONENTS
C   USTV(1,J) D. ARG (REAL*8) : USER DEFINED ST. VARIABLES (VEC. FORM)
C   USTS(J)  D. ARG (REAL*8) : USER DEFINED ST. VARIABLES (SCR. FORM)
C   +IFLG(J) D. ARG (INT)   : USER DEFINED FLAGS
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   DSIG(1) D. ARG (REAL*8) : STRESS COMPONENTS INCREMENT
C   DUSTV(1,J) D. ARG (REAL*8) : USER DEFINED ST. VARIABLES INCREMENT
C   DUSTS(J)  D. ARG (REAL*8) : USER DEFINED ST. VARIABLES INCREMENT
C   +IFLG(J)  D. ARG (INT)   : USER DEFINED FLAGS
C-----
C-----< USER COMMENT BELLOW >-----
C

```

```

C===== << FOR CLASSIC COMBINED HARDENING MODEL (TEMP. DEP. ) >>=====
C                                     BY K. GARATANI ON JAN. 1990
C * MODEL STATUS VARIABLES
C   USTV(I, J)                .. VECTOR VARIABLES
C     J=1:                    ; THERMAL STRAIN (NOT USED HERE)
C     J=2:                    ; PLASTIC STRAIN (NOT USED HERE)
C     J=3: 'ALPHA(9)' ; BACK STRESS
C   USTS(J)                   .. SCALAR VARIABLES
C     J=1: 'EPSPB' ; EQUIVALENT PLASTIC STRAIN
C   IFLG(J)                   .. FLAGS
C     J=1: 'IELPL' ; PLASTIC FLAG ( 0:ELASTIC, 1:PLASTIC )
C   DUSTV(I, J)               .. VECTOR VARIABLES
C     J=1:                    ; THERMAL STRAIN INCREMENT
C     J=2: 'DEP (9)' ; PLASTIC STRAIN INCREMENT
C     J=3: 'DALPHA(9)' ; BACK STRESS INCREMENT
C   DUSTS(J)                  .. SCALAR VARIABLES
C     J=1:                    ; EQUIVALENT PLASTIC STRAIN INCREMENT
C-----
C * COMMENT
C   THIS ROUTINE TREAT ALL STRESS OR STRAIN BY TENSOR EXPRESSION
C-----
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION GEOM(+), CORD(+), IFLG(+),
C     DISP(+), EPS(NCOMP), SIG(NCOMP), USTV(NCOMP,+), USTS(+),
C     DDISP(+), DEPS(NCOMP), DSIG(NCOMP), DUSTV(NCOMP,+), DUSTS(+)*
C
C..... ( USER PROGRAM BELOW ) .....
C
C   DIMENSION STRES(9), DSTRES(9), ALPHA(9), DE (9),
C     SD (9), DSD (9), SDA (9), DED (9), EED (9),
C     DSDE (9), SDAX (9),
C     DSDP (9), DEDP (9), EEDX(9),
C     DALPHA(9), DEP (9), DALDT(9)
C
C                                     ... 'YDEL' FOR YIELD JUDGE
C   DATA YDEL / 0.99 /
C
C   IF (NCOMP.NE.5) GOTO 9010
C ***** SET INPUT VARIABLES (TRANSFER VECTOR TO TENSOR)
C
C   CALL YV2T(1, NCOMP, NNOR, SIG , STRES )
C   CALL YV2T(2, NCOMP, NNOR, DEPS , DE )
C   CALL YV2T(3, NCOMP, NNOR, USTV(1, 3), ALPHA )
C
C   EPSPB = USTS(1)
C
C   IELPL = IFLG(1)

```

```

C ***** SET MATERIAL CONSTANTS
C
C   CALL YMATCT(TEMP, DTEMP, EPSPB,
C     ALT, ALM1, G1, HD, HDC, AKAP,
C     ALM2, G2, DALMDT, DGGT, DKAPDT, DALDT)
C
C   HDX = HD + HDC
C   AK1 = ALM1 + 2.0D0/3.0D0*G1
C   AK2 = ALM2 + 2.0D0/3.0D0*G2
C   DKDT = DALMDT + 2.0D0/3.0D0*DGGT
C
C ***** DEVIDE DEV. AND MEAN-NORMAL TERM AND GET E. STRAIN OF PREV.
C
C   CALL YTDEV(STRES, SM , SD )
C   CALL YTDEV(DE , DEM, DED)
C
C   DO 100 I=1, 9
C     SDA(I) = SD(I) - ALPHA(I)
C 100 CONTINUE
C
C   EEM = SM / (3.0D0*AK1)
C   DO 200 I=1, 9
C     EED(I) = SD(I) / (2.0D0*G1)
C 200 CONTINUE
C
C ***** GET KAPPA**2 FROM F=0 CONDITION
C
C   XKAP = SQRT(3.0D0/2.0D0*YFTTM(SDA, SDA))
C
C ***** RECOVER MEAN NORMAL STRESS INCREMENT
C
C   CALL YDGMCT(EEM, DTEMP, AK2, ALT, DKDT, DGM)
C
C   DSM = 3.0*AK2*DEM + DGM
C
C ***** RECOVER DEVIATORIC STRESS INCREMENT AND P. STRAIN INC.
C
C   CALL YDSRT(IELPL, DED, EED, DTEMP, DGGT,
C     SDA, XKAP, G2, HDX, DKAPDT, DALDT, DSD, DEP)
C
C *** CORRECT DEV. STRESS AND P. STRAIN INC., DEPEND ON PREVIOUS STATUS
C
C   IF (IELPL.EQ.0) THEN
C     ..... < IELPL=0: PREVIOUS STEP WAS ELASTIC > .....
C
C ** CHECK TO BECOME PLASTIC
C
C   DO 300 I=1, 9
C     SDAX(I) = SDA(I) + DSD(I)
C 300 CONTINUE

```



```

C
C      XKAPX = SQRT(3. ODO/2. ODO*YFTTM(SDAX, SDAX))
C
C      IF (XKAPX.GT.AKAP) THEN
C          ... EL. TO PL. CORRECTION
C          IELPL = 1
C          .. GET TRASIENT RATIO
C          COF = 3. ODO/2. ODO
C          CALL YTGAM(SD, DSD, ALPHA, AKAP, COF, GAM)
C          .. ELASTIC PART
C          DO 400 I=1, 6
C              DSDE (I) = DSD(I) * GAM
C              SDAX(I) = SD(I) + DSDE(I) - ALPHA(I)
C              EEDX(I) = EED(I) + DSDE(I)/(2. ODO*G1)
C              DEDP (I) = DED(I) * (1. 0-GAM)
400      CONTINUE
C
C          DTEMP = DTEMP * (1. 0-GAM)
C          .. PLASTIC PART
C          CALL YDSRT(IELPL, DEDP, EED, DTEMP, DGD,
C                  SDAX, AKAP, G2, HDX, DKAPDT, DALDT, DSDP, DEP)
C          .. SUM UP STRESS INC.
C          DO 500 I=1, 9
C              DSD(I) = DSDE(I) + DSDP(I)
500      CONTINUE
C
C      ENDIF
C          ... ASSUME TO BE PLASTIC AT NEXT STEP
C
C      IF (XKAPX.GT.AKAP*YDEL) IELPL = 1
C
C      ELSE
C          .....< IELPL=1: PREVIOUS STEP WAS PLASTIC > .....
C
C      *** CHECK UNLOADING BY LAMDA-P
C
C      ALAMP = YFLAMP(DED, EED, DTEMP, DGD, SDA, XKAP, G2, HDX, DKAPDT, DALDT)
C
C      IF (ALAMP.LT. 0. 0) THEN
C          ... UNLOADING CORRECTION
C          IELPL = 0
C
C          CALL YDSRT(IELPL, DED, EED, DTEMP, DGD,
C                  SDA, XKAP, G2, HDX, DKAPDT, DALDT, DSD, DEP)
C
C      ENDIF
C          ..... CORRECTION END .....
C      ENDIF
C

```

```

C ***** SUM UP MEAN-NORMAL AND DEV. STRESS TENSOR INC.
C
C      CALL YTSUM(DSM, DSD, DSTRES)
C
C ***** GET BACK STRESS INCREMENT
C
C      DO 600 I=1, 9
C          DALPHA(I) = 2. ODO/3. ODO*HDC * DEP(I) + DALDT(I)*DTEMP
600      CONTINUE
C
C ***** TRANSFER TENSOR TO OUTPUT VECTOR
C
C      CALL YT2V(1, NCOMP, NNOR, DSTRES, DSIG)
C      CALL YT2V(2, NCOMP, NNOR, DEP, DUSTV(1, 2))
C      CALL YT2V(1, NCOMP, NNOR, DALPHA, DUSTV(1, 3))
C
C ***** SET THERMAL STRAIN INCREMENT
C
C      DO 700 I=1, 3
C          DUSTV(I, 1) = ALT*DTEMP
700      CONTINUE
C      DO 710 I=4, 6
C          DUSTV(I, 1) = 0. 0
710      CONTINUE
C
C ***** SET EQUIVALENT PLASTIC STRAIN INCREMENT AND FLAG
C
C      DUSTS(1) = SQRT(2. ODO/3. ODO * YFTTM(DEP, DEP))
C
C      IFLG (1) = IELPL
C
C      RETURN
C
C ***** ERROR
C
C      9010 WRITE(6, *) ' ***** ERROR ON SUB. XMAT2 : ILLEGAL NCOMP ', NCOMP
C          STOP
C          END
C          SUBROUTINE YDGDCT(IELPL, EED, DT, DGD, SDA, AKAP, G, HD, DKAPDT, DALDT,
C                          DGD)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   GET DEVIATORIC PSEUDO STRESS TENSOR INCREMENT
C                                     FOR THERMAL EL.-PL. PROBLEM.
C                                     PROGRAMED BY K.GARATANI ON JAN. 1990 (VER 1. 0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   IELPL  D. ARG (INT)      : STATUS FLAG (0:ELASTIC, 1:PLASTIC)
C   EED(9) D. ARG (REAL*8)  : DEVIATORIC E. STRAIN TENSOR OF PREV.
C   DT     D. ARG (REAL*8)  : TEMPERATURE INCREMENT

```

```

C   DGD  D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'G'
C   SDA(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC STRESS - BACK STRESS TENSOR
C   AKAP  D. ARG (REAL*8) : YIELD STRESS OF PREVIOUS STEP
C   G     D. ARG (REAL*8) : SHEAR MODULUS OF ELASTICITY
C   HD   D. ARG (REAL*8) : PLASTIC HARDENING RATIO (H+H'C)
C   DKAPDT D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'AKAP' (YIELD STRESS)
C   DALDT(9) D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'ALPHA' (BACK STRESS)
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   DGD(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC PSEUDO STRESS TENSOR INC.
C-----
C * COMMENT
C   WHEN ELASTIC (IELPL=0), SDA, AKAP, G, HD, DKAPDT, DALDT NOT USED
C-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION EED(9), SDA(9), DALDT(9), DGD(9),
C         TSR(9)
C
C ***** SET ELASTIC PART OF 'DGD'
C
C   DO 100 I=1, 9
C     DGD(I) = 2.000*DGD+DT * EED(I)
C 100 CONTINUE
C
C   IF (IELPL.EQ.1) THEN
C
C ***** ADD PLASTIC PART OF 'DGD' WHEN PLASTIC
C
C   DO 200 I=1, 9
C     TSR(I) = 2.0*DGD+EED(I)-DALDT(I)
C 200 CONTINUE
C
C     TERM = 9.000/2.000*G * YFTM(SDA, TSR) - 3.000*AKAP*G+DKAPDT
C     DENOM = AKAP**2*(3.000*G+HD)
C     TERM = TERM / DENOM * DT
C
C   DO 300 I=1, 9
C     DGD(I) = DGD(I) - TERM*SDA(I)
C 300 CONTINUE
C
C   ENDIF
C
C   RETURN
C   END
C   SUBROUTINE YDGMCT(EEM, DT, AK, ALT, DKDT, DGM)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   GET MEAN-NORMAL PSEUDO STRESS TENSOR INCREMENT
C   FOR THERMAL PROBLEM.

```

```

C-----
C                                     PROGRAMED BY K. GARATANI ON JAN. 1990 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   EEM   D. ARG (REAL*8) : MEAN-NORMAL E. STRAIN      OF PREV.
C   DT    D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE INCREMENT
C   AK    D. ARG (REAL*8) : BULK MODULUS OF ELASTICITY
C   ALT   D. ARG (REAL*8) : INSTANTANEOUS THERMAL EXPANSION RATIO
C   DKDT  D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'AK'
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   DGM   D. ARG (REAL*8) : MEAN-NORMAL STRESS TENSOR INCREMENT
C-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C
C   DGM = (DKDT*3.000+EEM - 3.000*AK*ALT)*DT
C
C   RETURN
C   END
C   SUBROUTINE YDSRT(IELPL, DED, EED, DT, DGD,
C         SDA, AKAP, G, HD, DKAPDT, DALDT, DSD, DEP)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   GET DEVIATORIC STRESS AND P. STRAIN TENSOR INCREMENT
C   FOR THERMAL EL.-PL. PROBLEM.
C                                     PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   IELPL D. ARG (REAL*8) : STATUS FLAG (0:ELASTIC, 1:PLASTIC)
C   DED(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC STRAIN TENSOR INCREMENT
C   EED(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC E. STRAIN TENSOR OF PREV.
C   DT     D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE INCREMENT
C   DGD    D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'G'
C   SDA(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC STRESS - BACK STRESS TENSOR
C   AKAP   D. ARG (REAL*8) : YIELD STRESS OF PREVIOUS STEP
C   G      D. ARG (REAL*8) : SHEAR MODULUS OF ELASTICITY
C   HD     D. ARG (REAL*8) : PLASTIC HARDENING RATIO (H+H'C)
C   DKAPDT D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'AKAP' (YIELD STRESS)
C   DALDT(9) D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'ALPHA' (BACK STRESS)
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   DSD(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC STRESS TENSOR INCREMENT
C   DEP(9) D. ARG (REAL*8) : PLASTIC STRAIN TENSOR INCREMENT
C-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION DED(9), EED(9), SDA(9), DALDT(9), DSD(9), DEP(9),
C         DGD(9)
C
C   G2 = 2.0 * G

```

```

C
C ***** GET PSEUDO STRESS INCREMNT 'DGD' TERM
C
C      CALL YDGDCT(IELPL, EED, DT, DGD, SDA, AKAP, G, HD, DKAPDT, DALDT, DGD)
C
C ***** RECOVER STRESS AND P. STRAIN
C
C      IF (IELPL.EQ.0) THEN
C          ..<< ELASTIC >>..
C          DO 100 I=1, 9
C              DSD(I) = G2*DED(I) + DGD(I)
C              DEP(I) = 0.0
100      CONTINUE
C
C      ELSE
C          ..<< PLASTIC >>..
C          COF = 9.0 + G**2 / (AKAP**2*(3.0*G+HD))
C          COF = COF * YFTTH(SDA, DED)
C          DO 200 I=1, 9
C              DSD(I) = G2*DED(I) - COF*SDA(I) + DGD(I)
200      CONTINUE
C          COF = 2.0*DDO*DGD/G2*DT
C          DO 300 I=1, 9
C              DEP(I) = DED(I) - DSD(I)/G2 + COF*EED(I)
300      CONTINUE
C
C      ENDIF
C
C      RETURN
C      END
C      SUBROUTINE YEET(ALAMDA, G, EETEN)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   COMPOSE ELASTIC STRESS-STRAIN TENSOR
C   PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   ALAMDA  D. ARG (REAL*8) : LAME'S CONSTANTS 'LAMDA'
C   G       D. ARG (REAL*8) : LAME'S CONSTANTS 'G' (SHEAR MODULAS)
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   EETEN(9,9) D. ARG (REAL*8) : STRESS-ELASTIC STRAIN TENSOR
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C      DIMENSION EETEN(9,9)

```

```

C
C ***** CLEAR
C
C      DO 110 J=1, 9
C          DO 100 I=1, 9
C              EETEN(I, J) = 0.0
100      CONTINUE
110      CONTINUE
C
C ***** SET
C
C      DO 200 I=1, 9
C          EETEN(I, I) = 2.0 * G
200      CONTINUE
C
C      DO 310 J=1, 3
C          DO 300 I=1, 3
C              EETEN(I, J) = EETEN(I, J) + ALAMDA
300      CONTINUE
310      CONTINUE
C
C      RETURN
C      END
C      SUBROUTINE YETVTR(EETEN, EEMAT)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   TRANSFER STRESS-STRAIN TENSOR RELATION TO VECTOR RELATION
C   FOR ONLY 3-D STRESS FIELD
C   PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   EETEN(9,9) D. ARG (REAL*8) : STRESS-ELASTIC STRAIN TENSOR
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   EEMAT(6,6) D. ARG (REAL*8) : STRESS-ELASTIC STRAIN MATRIX
C-----
C * COMMENT
C   VECTOR STRAIN ASSUMED TO BE EXPRESSED BY ENGINNERING STRAIN
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C      DIMENSION EETEN(9,9), EEMAT(6,6)
C
C ***** NORMAL PART
C
C      DO 110 J=1, 3
C          DO 100 I=1, 6
C              EEMAT(I, J) = EETEN(I, J)
100      CONTINUE
110      CONTINUE

```

```

C
C ***** CONDENSE SHEAR STIFFNESS (eij=eji) AND TRANSFER ENG. STRAIN
C
      DO 210 J=4, 6
      DO 200 I=1, 6
        EEMAT(I, J) = (EETEN(I, J)+EETEN(I, J+3))/2.0
200  CONTINUE
210  CONTINUE
C
      RETURN
      END
      FUNCTION YFLAMP(DED, EED, DT, DGD, SDA, AKAP, G, HD, DKAPDT, DALDT)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   GET LAMDA-P VALUE FOR THERMAL EL.-PL. PROBLEM
C                                     FOR THERMAL EL.-PL. PROBLEM.
C                                     PROGRAMED BY K.GARATANI ON JAN. 1990 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   DED(9)  D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC STRAIN TENSOR INCREMENT
C   EED(9)  D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC E. STRAIN TENSOR OF PREV.
C   DT      D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE INCREMENT
C   DGD     D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'G'
C   SDA(9)  D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC STRESS - BACK STRESS TENSOR
C   AKAP    D. ARG (REAL*8) : YIELD STRESS OF PREVIOUS STEP
C   G       D. ARG (REAL*8) : SHEAR MODULUS OF ELASTICITY
C   HD      D. ARG (REAL*8) : PLASTIC HARDENING RATIO (H'+H' C)
C   DKAPDT  D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'AKAP' (YIELD STRESS)
C   DALDT(9) D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'ALPHA' (BACK STRESS)
C-----
C * VALUE OF FUNCTION
C   YFLAMP  FUNC. (REAL*8) : LAMDA-P VALUE
C-----
C * COMMENT
C   WHEN ELASTIC (IELPL=0), SDA, AKAP, G, HD, DKAPDT, DALDT NOT USED
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION DED(9), EED(9), SDA(9), DALDT(9),
               TSR(9)
C
      .. NUMERATOR
      TERM1 = 3.0D0*G + YFTTM(SDA, DED)
C
      DO 100 I=1, 9
        TSR(I) = 2.0*DGD*EED(I)-DALDT(I)
100  CONTINUE
C
      TERM2 = (3.0D0/2.0D0*YFTTM(SDA, TSR) - AKAP*DKAPDT)*DT
C
      .. DENOMINATOR
      DENOM = 2.0D0*AKAP**2+(3.0D0*G+HD)

```

```

C
      YFLAMP = (TERM1 + TERM2) / DENOM
C
      RETURN
      END
      FUNCTION YFTTM(T1, T2)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   3*3 TENSOR MULTIPLY OPERATION
C                                     PROGRAMED BY K.GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   T1(9)  D. ARG (REAL*8) : 3*3 TENSOR-1
C   T2(9)  D. ARG (REAL*8) : 3*3 TENSOR-2
C-----
C * VALUE OF FUNCTION
C   YFTTM  FUNC. (REAL*8) : YFTTM = T1(I, J)*T2(I, J)
C-----
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      DIMENSION T1(9), T2(9)
C
      S = 0.0
      DO 100 I=1, 9
        S = S + T1(I)*T2(I)
100  CONTINUE
C
      YFTTM = S
C
      RETURN
      END
      SUBROUTINE YMATCT(TEMP, DTEMP, EPB,
                    ALT, ALM1, G1, HD, HDC, AKAP,
                    ALM2, G2, DALMDT, DGD, DKAPDT, DALDT)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   SET MATERIAL CONSTANTS FOR CLASSIC COMBINED MODEL (TEMP. DEP.)
C                                     PROGRAMED BY K.GARATANI ON JAN. 1990 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   TEMP  D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE BEFORE INCREMENT
C   DTEMP D. ARG (REAL*8) : TEMPERATURE INCREMENT
C   EPB   D. ARG (REAL*8) : EQUIVALENT PLASTIC STRAIN BEFORE. INC.
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   ALT  D. ARG (REAL*8) : INSTANTANEOUS THERMAL EXPANSION RATIO
C                                     (AT MID TEMP.)
C   ALM1 D. ARG (REAL*8) : LAME'S CONSTANTS 'LAMDA' (BEFOR INC.)
C   G1   D. ARG (REAL*8) : LAME'S CONSTANTS 'G' (BEFOR INC.)
C   HD   D. ARG (REAL*8) : WORK HARDENING CONSTANT H

```

```

C   HDC      D. ARG (REAL*8) : KINEMATIC HARDENING CON. H'C (3/2*C)
C   AKAP     D. ARG (REAL*8) : YIELD STRESS
C   ALM2     D. ARG (REAL*8) : LAME'S CONSTANTS 'LAMDA' (AFTER INC.)
C   G2       D. ARG (REAL*8) : LAME'S CONSTANTS 'G' (AFTER INC.)
C   DALMDT   D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'ALM'
C   DGBT     D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'G'
C   DKAPDT   D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'AKAP'
C   DALDT(9) D. ARG (REAL*8) : TEMP. DIFF. OF 'ALPHA'

```

```

C-----
C * COMMENT
C   GETTING TEMPERATURE POINT OF MATERIAL CONSTANTS AS BELOW
C   .AT BEFORE INCREMENT (AT TEMP)
C     ALM1, G1 (USE ONLY GETTING ELASTIC STRAIN AT PREVIOUS STEP)
C   .AT MID POINT (AT TEMP+DTEMP/2)
C     ALT
C   .AT AFTER INCREMENT (AT TEMP+DTEMP)
C     ALM2, G2, HD, HDC, AKAP
C-----

```

```

C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION DALDT(9)

```

```

C
C ***** USER DEFINED MATERIAL CONSTANTS DATA (NO TEMP. DEP.)
C

```

```

C   DATA E , POI , ALTX , HDX , HDCX , SY
C     / 2.0D4 , 0.0D0 , 0.00D-5 , 2.4D2 , 2.4D2 , 15.0 /

```

```

C
C   TEMP2 = TEMP + DTEMP
C   TEMP1 = TEMP

```

```

C
C   E1 = E
C   AKAP1 = SY + EPB*HDX
C   E2 = E
C   AKAP2 = SY + EPB*HDX

```

```

C
C ***** CONSTANTS AT BEFORE INCREMENT (AT TEMP)
C

```

```

C   ALM1 = E1*POI / ((1.0*POI)*(1.0-2.0*POI))
C   G1 = E1 / (2.0*(1.0*POI))

```

```

C
C ***** CONSTANTS AT MID POINT (AT TEMP+DTEMP/2)
C

```

```

C   ALT = ALTX

```

```

C
C ***** CONSTANTS AT AFTER INCREMENT (AT TEMP+DTEMP)
C

```

```

C   ALM2 = E2*POI / ((1.0*POI)*(1.0-2.0*POI))
C   G2 = E2 / (2.0*(1.0*POI))

```

```

C
C   HD = HDX

```

```

HDC = HDCX
AKAP = AKAP2

```

```

C
C ***** DIFFERENCIATION OF TEMPERATRE
C

```

```

C   IF (DTEMP.EQ.0.0) THEN
C     DALMDT = 0.0
C     DGBT = 0.0
C     DKAPDT = 0.0
C     DO 100 I=1,9
C       DALDT(I) = 0.0
100 CONTINUE

```

```

C   ELSE
C     DALMDT = (ALM2-ALM1) /DTEMP
C     DGBT = (G2 -G1 ) /DTEMP
C     DKAPDT = (AKAP2-AKAP1)/DTEMP
C     DO 110 I=1,9
C       DALDT(I) = 0.0
110 CONTINUE

```

```

C   ENDIF

```

```

C
C   RETURN
C   END
C   SUBROUTINE YMMUL(N, M, A, B, C)

```

```

C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   MULTYPLY MATRIX-VECTOR
C                                     PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----

```

```

C * INPUT VARIABLES
C   N      D. ARG (INT) : LOW SIZE OF MATRIX
C   M      D. ARG (INT) : COLUMN SIZE OF MATRIX
C   A(N, M) D. ARG (REAL*8) : INPUT MATRIX
C   B(M)   D. ARG (REAL*8) : INPUT VECTOR

```

```

C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   C(N)   D. ARG (REAL*8) : OUTPUT VECTOR C(N) = A(N, M) * B(M)
C-----

```

```

C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION A(N, M) , B(M), C(N)

```

```

C
C   DO 110 I=1, N
C     C(I) = 0.0
C     DO 100 J=1, M
C       C(I) = C(I) + A(I, J)*B(J)

```

```

100 CONTINUE
110 CONTINUE

```

```

C
C   RETURN

```

```

END
SUBROUTINE YT2V(KEY, NCOMP, NNOR, TENSOR, VECTOR)
-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   TRANSFER 3-D TENSOR(3*3) TO VECTOR EXPRESSION
C   PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
-----
C * INPUT VARIABLES
C   KEY      D. ARG (INT)  : KEY OF TRANSFER
C             WHERE 1:STRESS, 2:STRAIN,
C   NCOMP    D. ARG (INT)  : LENGTH OF VECTOR COMPONENTS (MAX. 6)
C   NNOR     D. ARG (INT)  : LENGTH OF NORMAL COMPONENTS (MAX. 3)
C   TENSOR(I) D. ARG (REAL*8) : INPUTED 3-D 3*3=9 TENSOR (I=1, 9)
-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   VECTOR(I) D. ARG (REAL*8) : OUTPUT VECTOR (I=1, NCOMP)
-----
C * COMMENT
C   THIS ROUTINE ASSUME STRAIN VECTOR EXPRESSED BY ENGINEERING STRAIN
C   SO MULTIPLY 2.0 FOR SHEAR TERM.
C   THIS ROUTINE MUST BE COMPILE BY FORTRAN-77 'DO' SYNTAX.
-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION VECTOR(NCOMP), TENSOR(9)
C
C   IF ((NNOR .LT. 0 ) .OR. (NNOR .GT. 3)) GOTO 9020
C   IF ((NCOMP.LT. 0 ) .OR. (NCOMP.GT. 6)) GOTO 9020
C   IF ( NNOR .GT. NCOMP ) GOTO 9020
C
C   GOTO ( 1000 , 2000 ) , KEY
C   GOTO 9010
C
C   ..... STRESS TYPE (KEY=1)
1000 CONTINUE
C   DO 100, I=1, NNOR
C     VECTOR(I) = TENSOR(I)
100 CONTINUE
C   DO 110, I=NNOR+1, NCOMP
C     VECTOR(I) = TENSOR(3+I-NNOR)
110 CONTINUE
C   GOTO 8000
C
C   ..... STRAIN TYPE (KEY=2)
C   MULTIPLY 2.0 FOR SHEAR TERMS
2000 CONTINUE
C   DO 200, I=1, NNOR
C     VECTOR(I) = TENSOR(I)
200 CONTINUE
C   DO 210, I=NNOR+1, NCOMP
C     VECTOR(I) = TENSOR(3+I-NNOR) * 2.0
210 CONTINUE

```

```

GOTO 8000
C
8000 CONTINUE
RETURN
C
9010 WRITE(6, *) ' ***** ERROR ON SUB. YT2V : ILLEGAL KEY ', KEY
STOP
9020 WRITE(6, *) ' ***** ERROR ON SUB. YT2V : ILLEGAL NCOMP, NNOR ',
NCOMP, NNOR
STOP
END
SUBROUTINE YTDEV(TENSOR, TENM, TENDEV)
-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C   SEPARATE TENSOR TO MEAN-NORMAL AND DEVIATORIC TERM
C   PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
-----
C * INPUT VARIABLES
C   TENSOR(9) D. ARG (REAL*8) : INPUT TENSOR
-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   TENM      D. ARG (REAL*8) : MEAN-NORMAL COMPONENT OF TENSOR
C   TENDEV(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC COMPONENTS OF TENSOR
-----
C
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
C   DIMENSION TENSOR(9), TENDEV(9)
C
C ***** MEAN-NORMAL COMPONENT
C
C   TENM = ( TENSOR(1) + TENSOR(2) + TENSOR(3) ) / 3.000
C
C ***** DEVIATORIC COMPONENTS
C
C   TENDEV(1) = TENSOR(1) - TENM
C   TENDEV(2) = TENSOR(2) - TENM
C   TENDEV(3) = TENSOR(3) - TENM
C
C   TENDEV(4) = TENSOR(4)
C   TENDEV(5) = TENSOR(5)
C   TENDEV(6) = TENSOR(6)
C   TENDEV(7) = TENSOR(7)
C   TENDEV(8) = TENSOR(8)
C   TENDEV(9) = TENSOR(9)
C
C   RETURN
C   END
SUBROUTINE YTGAM(SS, DS, OR, RK, COF, GAM)
-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE

```

```

C      CALCULATE BREAK POINT RATIO OF DS, WHERE F=0
C
C      F = COF * (SS+DS-OR)ij:(SS+DS-OR)ij - RK**2
C
C      PROGRAMED BY M. OGASAWARA ON 1986 (SUB. RATIO2)
C      MODIFIED BY K. GARATANI ON NOV. 1989
C-----
C * INPUT VARIABLES
C      SS(9)   D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC TENSOR
C      DS(9)   D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC TENSOR INCREMENT
C      OR(9)   D. ARG (REAL*8) : ORIGIN SHIFT TENSOR
C      RK      D. ARG (REAL*8) : RADIUS OF SURFACE
C      COF     D. ARG (REAL*8) : COEFFICIENT TO BE MULTIPLY
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C      GAM     D. ARG (REAL*8) : BREAK POINT RATIO OF DS
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION SS(9) , DS(9) , OR(9)
C
C      AA = YFTTM(DS, DS)
C      B1 = YFTTM(SS, DS)
C      B2 = YFTTM(DS, OR)
C      C1 = YFTTM(SS, SS)
C      C2 = YFTTM(SS, OR)
C      C3 = YFTTM(OR, OR)
C
C      BB = B1 - B2
C      CC = C1 - 2.0*C2 + C3 - 1.0/COF*RK**2
C
C      IF(AA.EQ.0) GO TO 10
C      DD = BB**2 - AA*CC
C
C      ADD = ABS(DD)
C      IF(ADD.LT.1.0D-50) DD = 0.0
C      IF(DD.LT.0.0) GO TO 30
C      DD = SQRT(DD)
C      GAM1 = (-BB+DD)/AA
C      GAM2 = (-BB-DD)/AA
C
C      IF((GAM1.GT.1.0).AND.(GAM1.LT.1.0001D0)) GAM1 = 1.0
C      IF((GAM1.GT.1.0).OR.(GAM1.LT.0.0)) GO TO 20
C      GAM = GAM1
C      GO TO 999
C
C 20 CONTINUE
C      IF((GAM2.GT.1.0).AND.(GAM1.LT.1.0001D0)) GAM1 = 1.0
C      IF((GAM2.GT.1.0).OR.(GAM2.LT.0.0)) GO TO 30
C      GAM = GAM2

```

```

GO TO 999
C
C 10 CONTINUE
C      IF(BB.EQ.0) GO TO 30
C      GAM1 = -CC/(2.0*BB)
C      IF((GAM1.GT.1.0).OR.(GAM1.LT.0.0)) GO TO 30
C      GAM = GAM1
C      GO TO 999
C
C 30 CONTINUE
C      GAM = 0.0
C 999 CONTINUE
C      RETURN
C      END
C      SUBROUTINE YTSUM(TENM, TENDEV, TENSOR)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C      SUM UP MEAN-NORMAL AND DEVIATORIC TENSOR
C      PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C      TENM     D. ARG (REAL*8) : MEAN-NORMAL COMPONENT OF TENSOR
C      TENDEV(9) D. ARG (REAL*8) : DEVIATORIC COMPONENTS OF TENSOR
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C      TENSOR(9) D. ARG (REAL*8) : OUPUT TENSOR
C-----
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION TENSOR(9), TENDEV(9)
C
C ***** SUM UP
C
C      TENSOR(1) = TENDEV(1) + TENM
C      TENSOR(2) = TENDEV(2) + TENM
C      TENSOR(3) = TENDEV(3) + TENM
C
C      TENSOR(4) = TENDEV(4)
C      TENSOR(5) = TENDEV(5)
C      TENSOR(6) = TENDEV(6)
C      TENSOR(7) = TENDEV(7)
C      TENSOR(8) = TENDEV(8)
C      TENSOR(9) = TENDEV(9)
C
C      RETURN
C      END
C      SUBROUTINE YV2T(KEY, NCOMP, NNOR, VECTOR, TENSOR)
C-----
C * FUNCTION OF THIS SUBROUTINE
C      TRANSFER EACH STRESS OR STRAIN FIELD VECTOR

```

```

C                               TO 3-D TENSOR(3*3) EXPRESSION.
C                               PROGRAMED BY K. GARATANI ON DEC. 1989 (VER 1.0)
C-----
C * INPUT VARIABLES
C   KEY      D. ARG (INT)   : KEY OF TRANSFER
C             WHERE 1;STRESS, 2;STRAIN,
C             3;STRESS(DEV.), 4;STRAIN(DEV.) TYPE.
C   NCOMP    D. ARG (INT)   : LENGTH OF VECTOR COMPONENTS (MAX.6)
C   NNOR     D. ARG (INT)   : LENGTH OF NORMAL COMPONENTS (MAX.3)
C   VECTOR(I) D. ARG (REAL*8) : INPUT VECTOR (I=1, NCOMP)
C-----
C * OUTPUT VARIABLES
C   TENSOR(I) D. ARG (REAL*8) : 3-D 3*3=9 TENSOR (I=1, 9)
C-----
C * COMMENT
C   THIS ROUTINE ASSUME STRAIN VECTOR EXPRESSED BY ENGINEERING STRAIN
C                               SO DIVIDE BY 2.0 FOR SHEAR TERM.
C   THIS ROUTINE MUST BE COMPILE BY FORTRAN-77 'DO' SYNTAX.
C-----
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION VECTOR(NCOMP), TENSOR(9)
C
C   IF ((NNOR .LT. 0) .OR. (NNOR .GT. 3)) GOTO 9020
C   IF ((NCOMP.LT.0) .OR. (NCOMP.GT.6)) GOTO 9020
C   IF ( NNOR .GT. NCOMP ) GOTO 9020
C
C   DO 10, I=1, 9
C     TENSOR(I) = 0.0
C 10 CONTINUE
C
C   GOTO ( 1000 , 2000 , 3000 , 4000 ) , KEY
C   GOTO 9010_
C
C       ..... STRESS TYPE (KEY=1)
C 1000 CONTINUE
C     DO 100, I=1, NNOR
C       TENSOR(I) ) = VECTOR(I)
C 100  CONTINUE
C     DO 110, I=NNOR+1, NCOMP
C       TENSOR(3+I-NNOR) = VECTOR(I)
C       TENSOR(6+I-NNOR) = VECTOR(I)
C 110  CONTINUE
C     GOTO 8000
C
C       ..... STRAIN TYPE (KEY=2)
C                               DEVIDE BY 2.0 FOR SHEAR TERMS
C 2000 CONTINUE
C     DO 200, I=1, NNOR
C       TENSOR(I) ) = VECTOR(I)
C 200  CONTINUE
C     DO 210, I=NNOR+1, NCOMP

```

```

      TENSOR(3+I-NNOR) = VECTOR(I) / 2.0
      TENSOR(6+I-NNOR) = VECTOR(I) / 2.0
210  CONTINUE
      GOTO 8000
C
C       ..... DEV. STRESS TYPE (KEY=3) EX. BACK STRESS
C       MAKE UP NORMAL TERMS TO BECOME 1+2+3=0
C 3000 CONTINUE
C     DO 300, I=1, NNOR
C       TENSOR(I) ) = VECTOR(I)
C 300  CONTINUE
C     IF (NNOR.EQ.1) THEN
C       TENSOR(2) ) = -VECTOR(1)/2.0
C       TENSOR(3) ) = TENSOR(2)
C     ENDIF
C     IF (NNOR.EQ.2) THEN
C       TENSOR(3) ) = -(VECTOR(1)+VECTOR(2))
C     ENDIF
C     DO 310, I=NNOR+1, NCOMP
C       TENSOR(3+I-NNOR) = VECTOR(I)
C       TENSOR(6+I-NNOR) = VECTOR(I)
C 310  CONTINUE
      GOTO 8000
C
C       ..... DEV. STRAIN TYPE (KEY=4) EX. P. STRAIN
C       MAKE UP NORM. AND MUL. 2.0 FOR SHEAR
C 4000 CONTINUE
C     DO 400, I=1, NNOR
C       TENSOR(I) ) = VECTOR(I)
C 400  CONTINUE
C     IF (NNOR.EQ.1) THEN
C       TENSOR(2) ) = -VECTOR(1)/2.0
C       TENSOR(3) ) = TENSOR(2)
C     ENDIF
C     IF (NNOR.EQ.2) THEN
C       TENSOR(3) ) = -(VECTOR(1)+VECTOR(2))
C     ENDIF
C     DO 410, I=NNOR+1, NCOMP
C       TENSOR(3+I-NNOR) = VECTOR(I) / 2.0
C       TENSOR(6+I-NNOR) = VECTOR(I) / 2.0
C 410  CONTINUE
      GOTO 8000
C
C 8000 CONTINUE
      RETURN
C
C 9010 WRITE(6,*) ' ***** ERROR ON SUB. YV2T : ILLEGAL KEY ', KEY
C       STOP
C 9020 WRITE(6,*) ' ***** ERROR ON SUB. YV2T : ILLEGAL NCOMP, NNOR ',
C                               NCOMP, NNOR
C
C       STOP
C       END

```



### c. 弾塑性領域の数値積分法の適用

FINASで採用している弾塑性領域の数値積分法は、増分形式をベースに定式化された接線剛性法 (Tangent Stiffness Method) であり、この方法は増分間での状態の変化は線形であると仮定して次の状態を決定している。この線形化による誤差については増分を細かくするほかに、外荷重と計算された内部応力から得られる荷重との差に対応する等価節点力を考慮することにより減少させている。

しかし、多軸応力場においては増分を細かくしても、弾塑性領域で評価される応力状態は降伏曲面を飛び越えてしまう場合が多く、その後の解析ステップの結果に影響を与える。昨年度は、このような点を改善するために従来の接線剛性法に加え、Substep法およびRadial Return法が組み込まれ、円孔を有する弾塑性問題へ適用された。

本年度は、さらに多軸性および温度依存性を有する問題に対して、このアルゴリズムを用いて解析を行ない、そのアルゴリズムの有効性、実用性の検討が行なわれた。多軸性の問題としてはDP021の引張りとねじりの組合せ荷重が作用する弾塑性問題、温度依存性を有する問題としてはDP001の熱弾塑性ラッチェティング問題が採り上げられた。

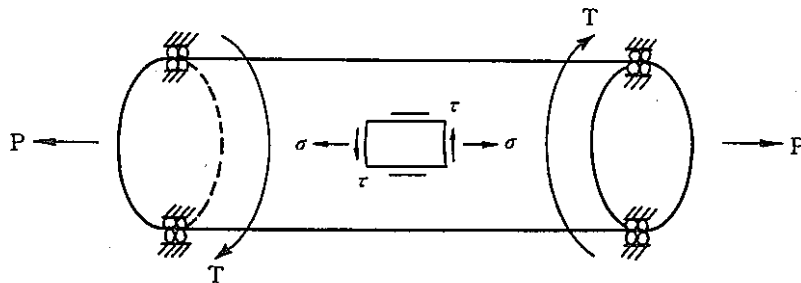
ここで、多軸性の問題に対する計算例を示す。

#### (計算例)

DP021の引張りとねじりの組合せ荷重が作用する弾塑性問題に対して、Substep法およびRadial Return法を用いて解析し、通常の方法(接線剛性法のみ)との比較を示す。

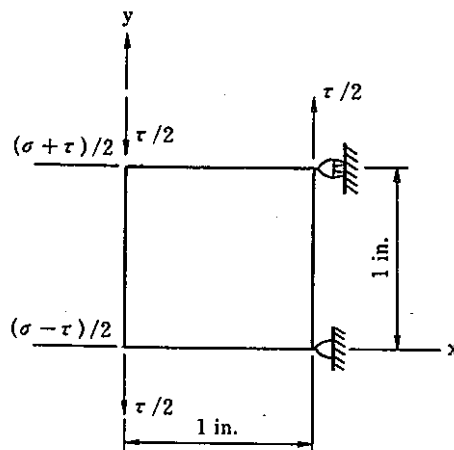
#### 解析モデル

両端で周方向に移動支持された理想化モデルを取り扱う。



#### 有限要素モデルと境界条件

円管から単位面積だけを取り出した試験片を4節点四辺形平面応力要素QMEM4でモデル化する。

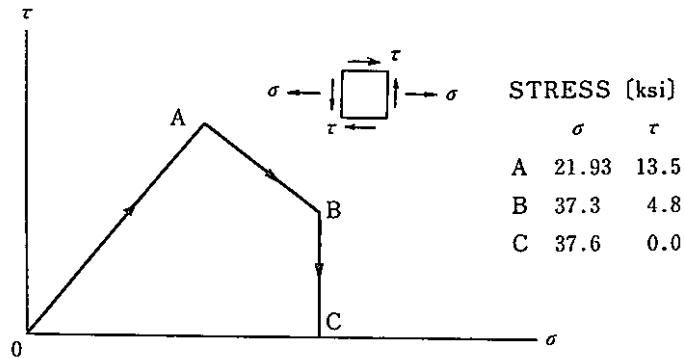


材料定数と硬化則

弾性係数  $E = 28.3 \times 10^8$  (psi)  
 ポアソン比  $\nu = 0.3$   
 降伏応力  $\sigma_y = 26.25 \times 10^8$  (psi)  
 加工硬化係数  $H' = 28.35 \times 10^8$  (psi)  
 硬化則 移動硬化則

負荷条件

荷重は断面に分布する直応力 $\sigma$ とせん断応力 $\tau$ を節点荷重に変換して載荷する。  
 直応力とせん断応力の各ステップにおける関係は下図に示される。



解析ケース

解析するケースはOA, AB, BC, CO間の負荷ステップ数を下表のように変化させて3ケースを考える。  
 なお、負荷ステップは等分割とする。

ケース名	OA	AB	BC	CO
ケース1	10	20	20	10
ケース2	5	10	10	5
ケース3	20	40	40	20

考 察

通常の方法およびサブステップ法を用いた解析結果では、表2-10, 11, 12に示されるように、ステップB, Cにおけるせん断応力の値が著しく異なっている。また、ケースの応力-ひずみ関係では負荷ステップAB間においてサブステップ法を適用したものは除荷が生じており、図2-18, 19に示されるとおりである。

せん断応力の値の違いあるいは除荷が生じる原因は、弾塑性領域でひずみを信頼し、サブステップ間で弾塑性マトリックス $[D^{ep}]$ を作成しているためである。この $[D^{ep}]$ マトリックスを用いて応力を計算すると $y$ 方向応力 $\sigma_{yy}$ が発生し、サブステップごとにこの $\sigma_{yy}$ が累積されて、せん断応力 $\tau_{xy}$ が過大に評価され、同時に内部力も大きな値をもち、次のステップへの計算に影響を与えていると考えられる。

一方、通常の方法では、弾塑性遷移領域で発生した $\sigma_{yy}$ は残差修正により取り除かれ、その後の塑性負荷継続領域の $\sigma_{yy}$ の値は小さくなり、ZABORの解に近づいている。なお、表2-7はケース2のステップAB間での応力変化を示したものである。

表2-10 DP021の解の比較(ケース1)

ステップ	応力/ひずみ	通常の方法	サブステップ法	ZABORの解
A (11)	$\sigma$	2.1930E+04	2.1920E+04	2.1930E+04
	$\tau$	1.3500E+04	1.3554E+04	1.3500E+04
	$\epsilon$	1.4794E-02	1.4792E-02	1.4788E-02
	$\gamma$	2.7119E-02	2.7114E-02	2.7120E-02
	$\epsilon^P$	1.4019E-02	1.4017E-02	1.4013E-02
	$\gamma^P$	2.5876E-02	2.5874E-02	2.5879E-02
B (31)	$\sigma$	3.7300E+04	3.7081E+04	3.7300E+04
	$\tau$	4.8000E+03	5.7321E+03	4.8000E+03
	$\epsilon$	3.9237E-02	4.0080E-02	4.0526E-02
	$\gamma$	3.9669E-02	4.1278E-02	3.9906E-02
	$\epsilon^P$	3.7919E-02	3.8771E-02	3.9208E-02
	$\gamma^P$	3.9228E-02	4.0752E-02	3.9465E-02
C (51)	$\sigma$	3.7600E+04	3.7614E+04	3.7600E+04
	$\tau$	-3.0665E-02	4.6599E+01	-2.2737E-13
	$\epsilon$	4.3849E-02	4.4242E-02	4.4075E-02
	$\gamma$	3.8465E-02	3.9782E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.2521E-02	4.2913E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8465E-02	3.9778E-02	3.8522E-02
O (61)	$\sigma$	-2.5806E-01	-2.6294E-01	-2.9195E-10
	$\tau$	-3.0190E-02	-3.1075E-02	0.0.
	$\epsilon$	4.2521E-02	4.2913E-02	4.2746E-02
	$\gamma$	3.8465E-02	3.9778E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.2521E-02	4.2913E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8465E-02	3.9978E-02	3.8522E-02

表2-11 DP021の解の比較(ケース2)

ステップ	応力/ひずみ	通常の方法	サブステップ法	ZABORの解
A (6)	$\sigma$	1.7992E+04	1.7993E+04	2.1930E+04
	$\tau$	1.1076E+04	1.1077E+04	1.3500E+04
	$\epsilon$	7.7491E-04	7.7441E-04	1.4788E-02
	$\gamma$	1.2403E-03	1.2403E-03	2.7120E-02
	$\epsilon^P$	1.3914E-04	1.3910E-04	1.4013E-02
	$\gamma^P$	2.2271E-04	2.2261E-04	2.5879E-02
B (16)	$\sigma$	3.7299E+04	3.5774E+04	3.7300E+04
	$\tau$	4.8078E+03	7.9287E+03	4.8000E+03
	$\epsilon$	3.7918E-02	3.7227E-02	4.0526E-02
	$\gamma$	3.9387E-02	4.2411E-02	3.9906E-02
	$\epsilon^P$	3.6600E-02	3.5969E-02	3.9208E-02
	$\gamma^P$	3.8945E-02	4.1682E-02	3.9465E-02
C (26)	$\sigma$	3.7599E+04	3.7657E+04	3.7600E+04
	$\tau$	1.5869E-02	1.9815E+02	-2.2737E-13
	$\epsilon$	4.2454E-02	4.453E-02	4.4075E-02
	$\gamma$	3.8201E-02	4.0981E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.1155E-02	4.3022E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8201E-02	4.0962E-02	3.8522E-02
O (31)	$\sigma$	-5.6641E-01	-1.4844E-01	-2.9195E-10
	$\tau$	1.5320E-02	-1.3466E-02	0.0
	$\epsilon$	4.1125E-02	-4.3022E-02	4.2746E-02
	$\gamma$	3.8201E-02	4.0962E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^P$	4.1125E-02	4.3022E-02	4.2746E-02
	$\gamma^P$	3.8201E-02	4.0962E-02	3.8522E-02

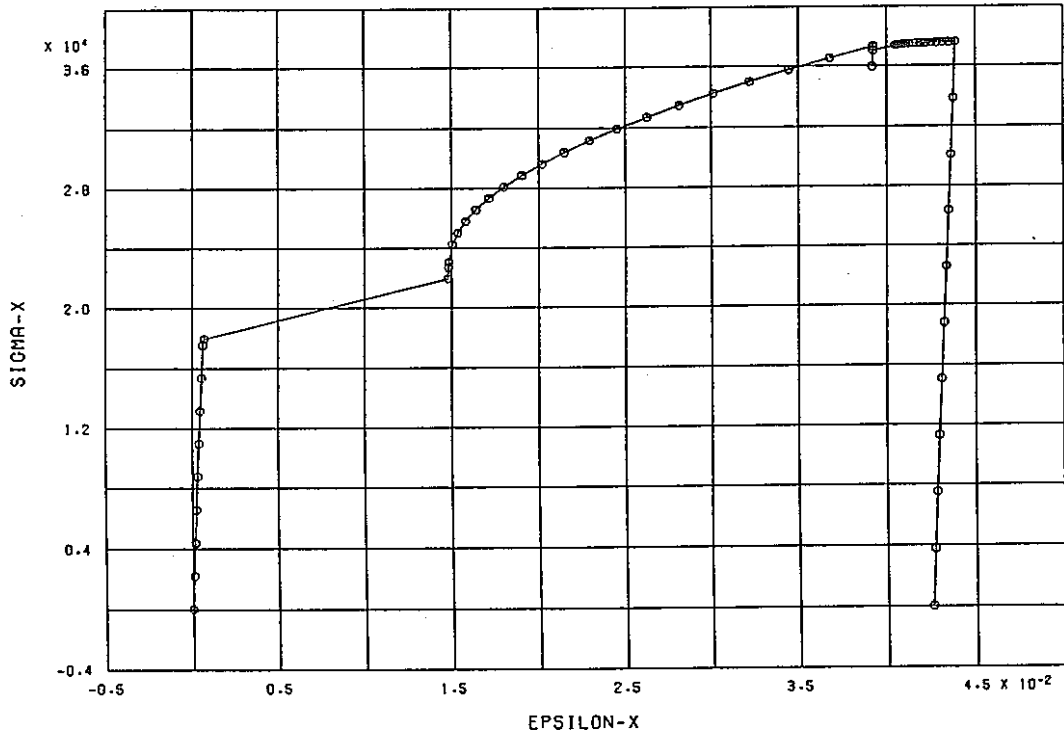
表2-12 DP021の解の比較(ケース3)

ステップ	応力/ひずみ	通常の方法	サブステップ法	ZABORの解
A (21)	$\sigma$	2.1930E+04	2.1930E+04	2.1930E+04
	$\tau$	1.3500E+04	1.3500E+04	1.3500E+04
	$\epsilon$	1.4790E-02	1.4789E-02	1.4788E-02
	$\gamma$	2.7119E-02	2.7117E-02	2.7120E-02
	$\epsilon^p$	1.4015E-02	1.4011E-02	1.4013E-02
	$\gamma^p$	2.5879E-02	2.5877E-02	2.5879E-02
B (61)	$\sigma$	3.7300E+04	3.7270E+04	3.7300E+04
	$\tau$	4.7999E+03	4.9879E+03	4.8000E+03
	$\epsilon$	3.9896E-02	4.0475E-02	4.0526E-02
	$\gamma$	3.9807E-02	4.0262E-02	3.9906E-02
	$\epsilon^p$	3.8578E-02	3.9158E-02	3.9208E-02
	$\gamma^p$	3.9366E-02	3.9804E-02	3.9465E-02
C (101)	$\sigma$	3.7599E+04	3.7603E+04	3.7600E+04
	$\tau$	-6.0776E-02	1.1003E+01	-2.2737E-13
	$\epsilon$	4.3971E-02	4.4116E-02	4.4075E-02
	$\gamma$	3.8523E-02	3.8845E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^p$	4.2643E-02	4.2788E-02	4.2746E-02
	$\gamma^p$	3.8523E-02	3.8844E-02	3.8522E-02
O (121)	$\sigma$	-5.3418E-01	-5.4980E-01	-2.9196E-10
	$\tau$	-6.0825E-02	-6.2390E-02	0.0 0
	$\epsilon$	4.2643E-02	4.2788E-02	4.2746E-02
	$\gamma$	3.8522E-02	3.8844E-02	3.8522E-02
	$\epsilon^p$	4.2643E-02	4.2788E-02	4.2746E-02
	$\gamma^p$	3.8522E-02	3.8844E-02	3.8522E-02

表2-13 ケース2のステップAB間での応力変化の比較

ステップ 番号	通常の方法			サブステップ法		
	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\tau_{xy}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\tau_{xy}$
6	1.7992E+04	2.1171E-04	1.1076E+04	1.7993E+04	-5.7725E+01	1.1077E+04
7	2.3467E+04	2.6454E-02	1.2630E+04	1.1039E+04	1.1205E+04	1.5705E+04
8	2.5004E+04	-1.6271E-02	1.1760E+04	2.4748E+04	2.0512E+02	1.1831E+04
9	2.6541E+04	-7.2570E-03	1.0890E+04	2.5824E+04	2.1636E+02	1.1463E+04
10	2.8078E+04	7.9183E-03	1.0020E+04	2.7147E+04	2.5844E+02	1.0809E+04
11	2.9615E+04	-1.1482E-02	9.1500E+03	2.8433E+04	3.1875E+02	1.0334E+04
12	3.1153E+04	2.8165E-02	8.2800E+03	2.9781E+04	3.7819E+02	9.8314E+03
13	3.2689E+04	-6.5898E-02	7.4099E+03	3.1144E+04	4.2869E+02	9.3607E+03
14	3.4226E+04	1.9646E-01	6.5404E+03	3.2650E+04	4.7054E+02	8.8848E+03
15	3.5763E+04	-7.1497E-01	5.6684E+03	3.4182E+04	5.0618E+02	8.4077E+03
16	3.7299E+04	2.4907E-00	4.8078E+03	3.5774E+04	5.4121E+02	7.9287E+03

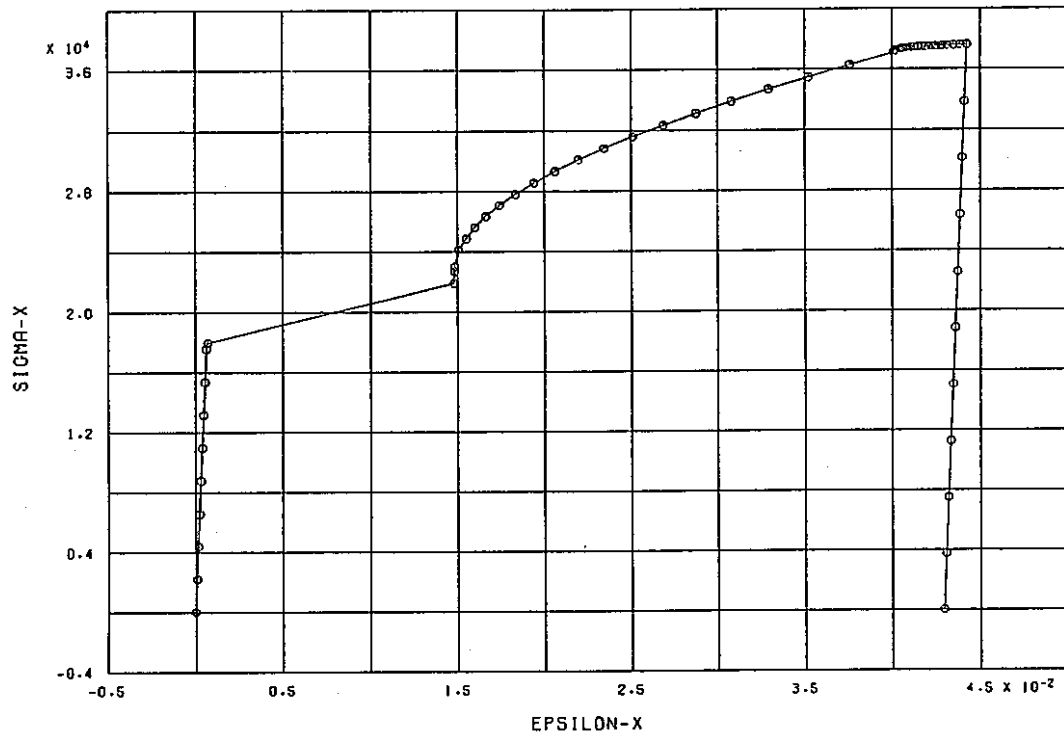
FINAS



AXIAL STRESS-STRAIN RESPONSE

a) 通常の方法

FINAS

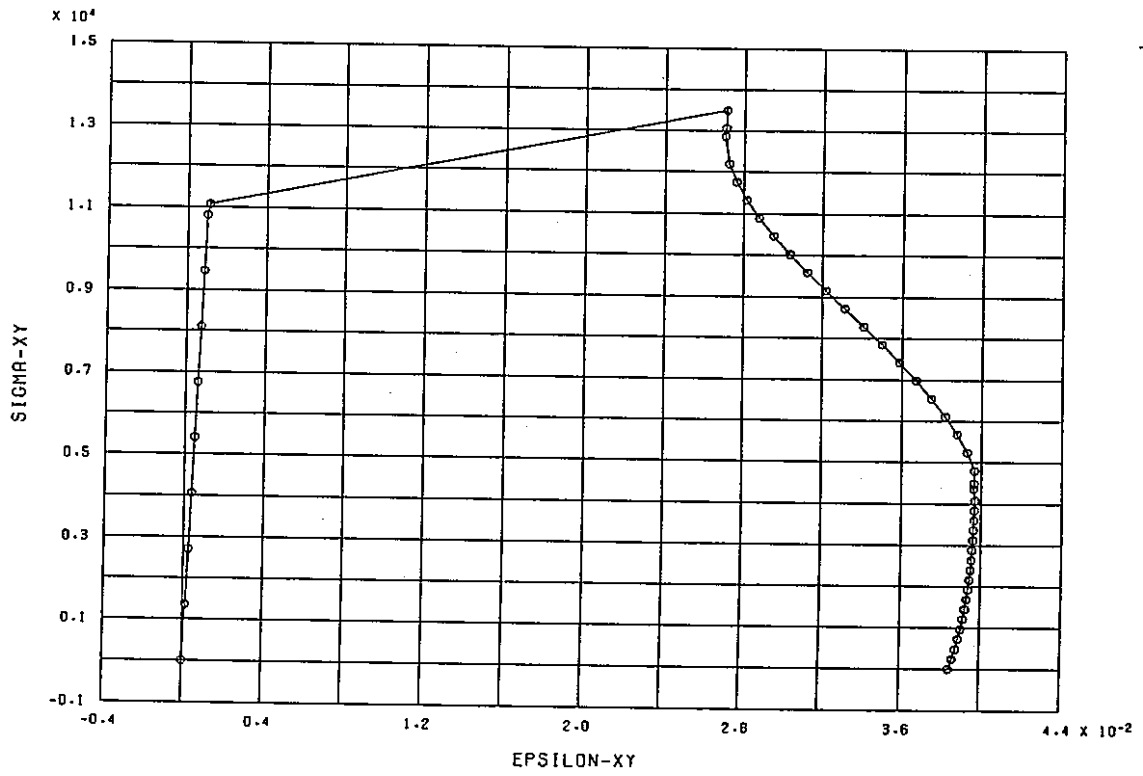


AXIAL STRESS-STRAIN RESPONSE (DP021S)

b) サブステップ法

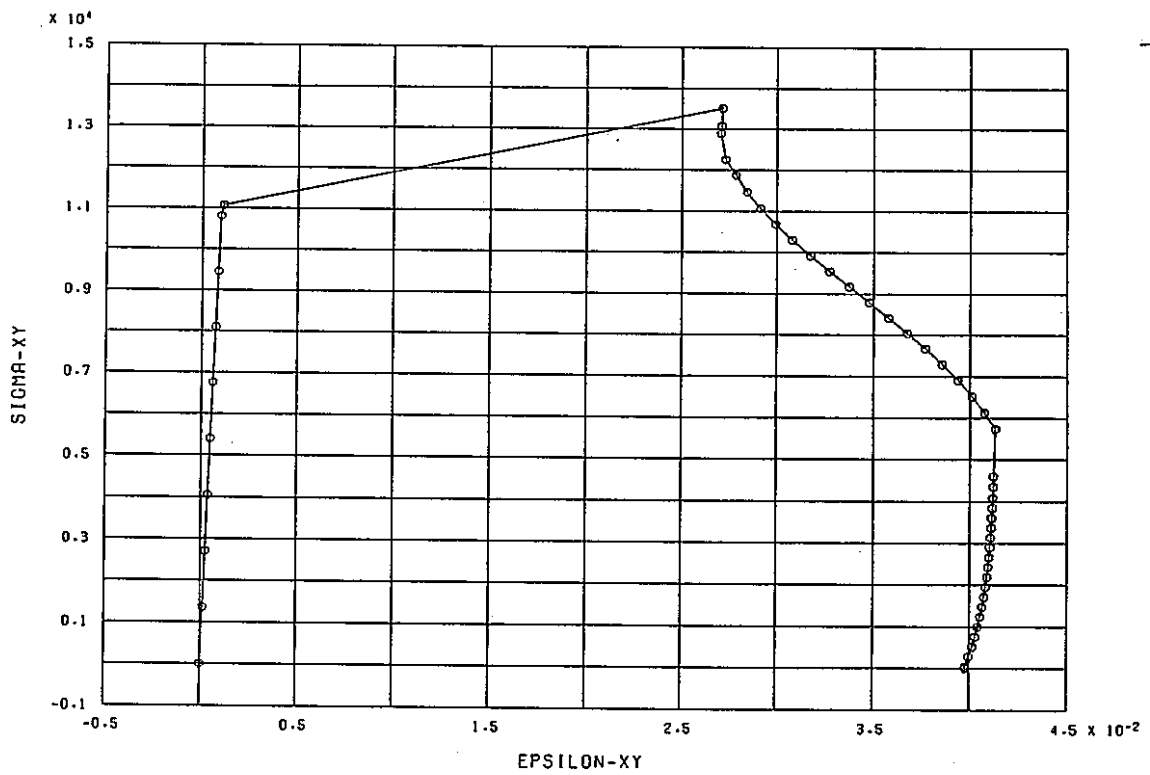
図2-16 直応力-直ひずみの関係の比較(ケース1)

FINAS



a) 通常の方法

FINAS

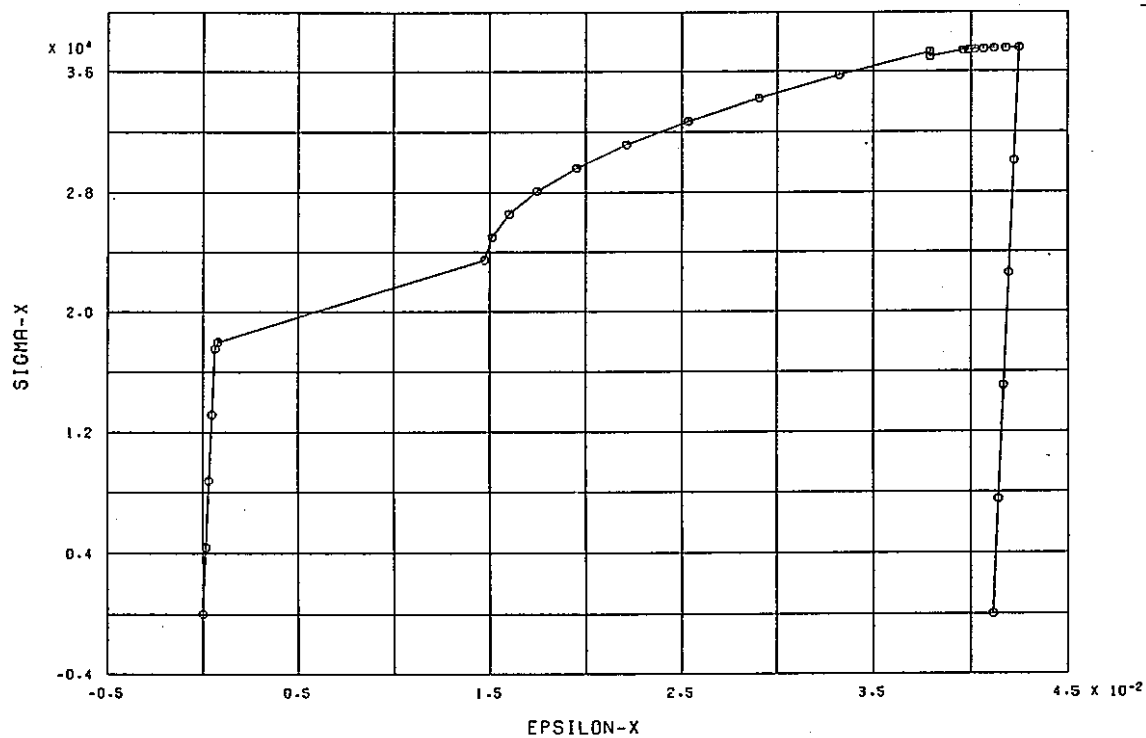


b) サブステップ法

図2-17 せん断応力-せん断ひずみの関係の比較(ケース1)



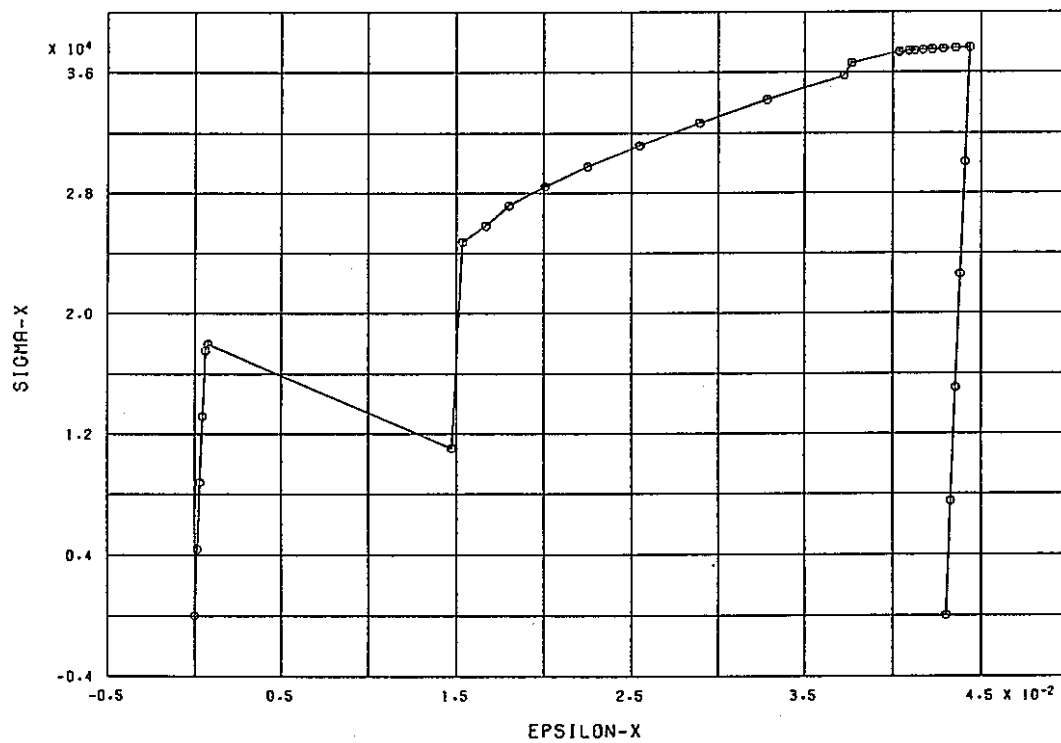
FINAS



AXIAL STRESS-STRAIN RESPONSE (DPO21A)

a) 通常の方法

FINAS

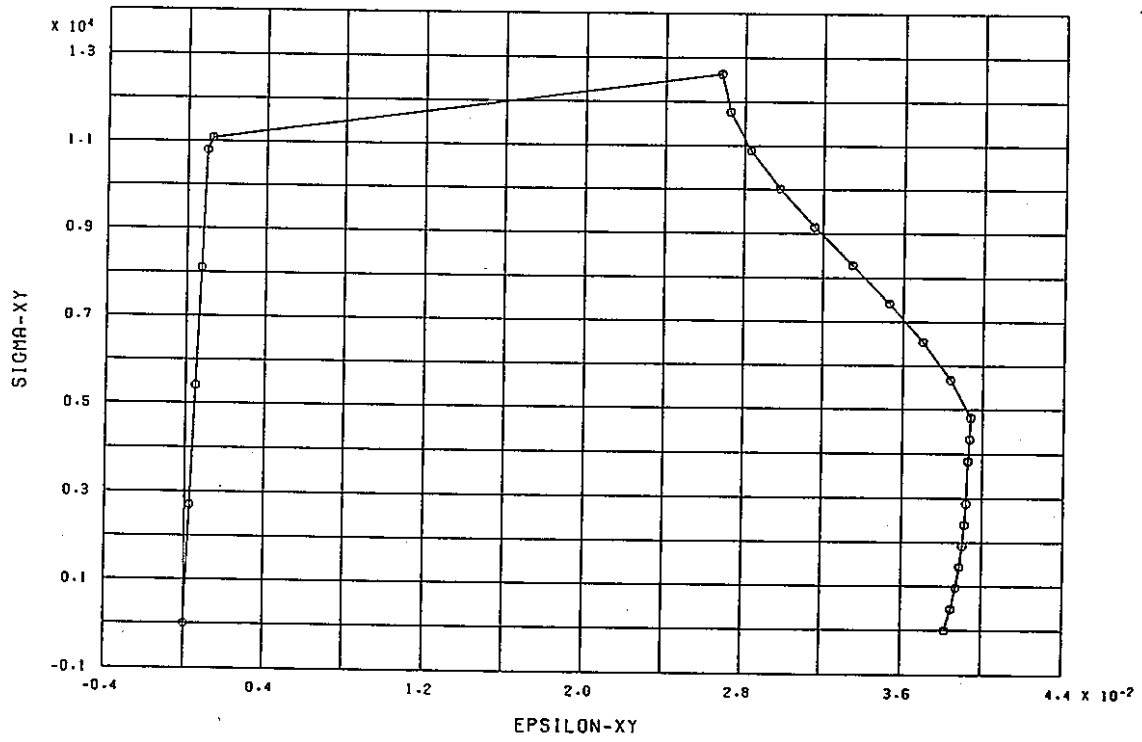


AXIAL STRESS-STRAIN RESPONSE (DPO21SA)

b) サブステップ法

図2-18 直応力-直ひずみの関係の比較(ケース2)

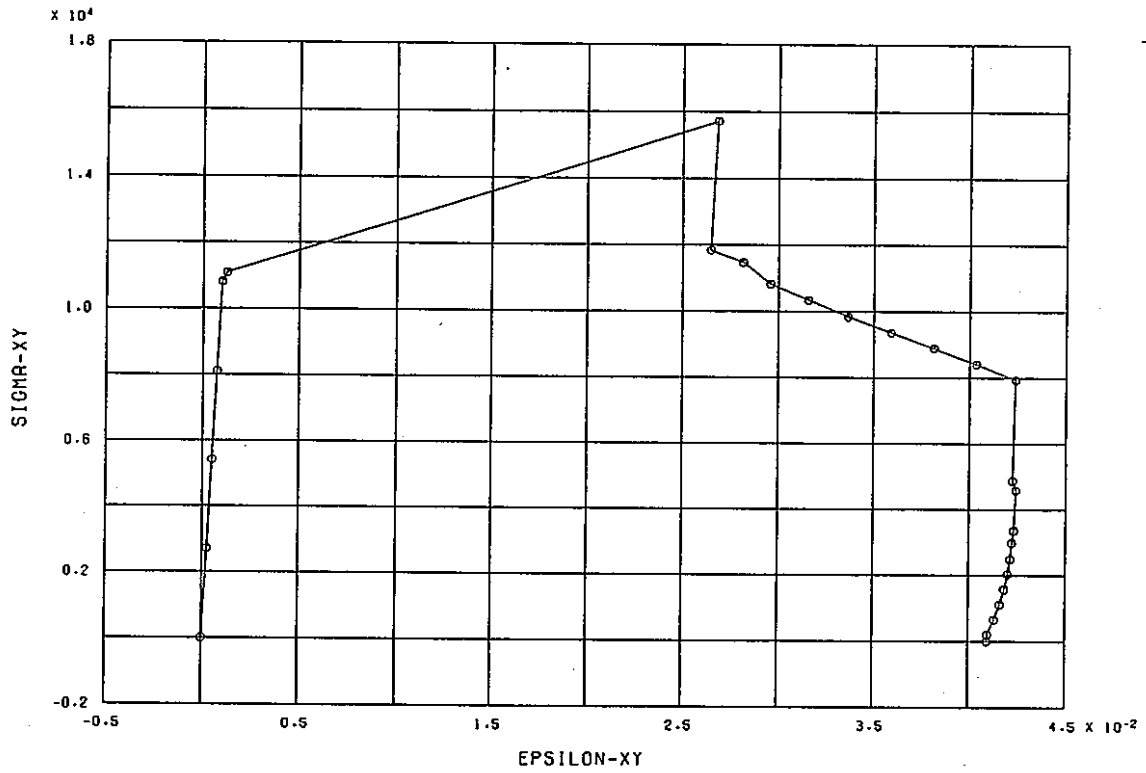
FINAS



SHEAR STRESS-STRAIN RESPONSE (DPO21A)

a) 通常の方法

FINAS

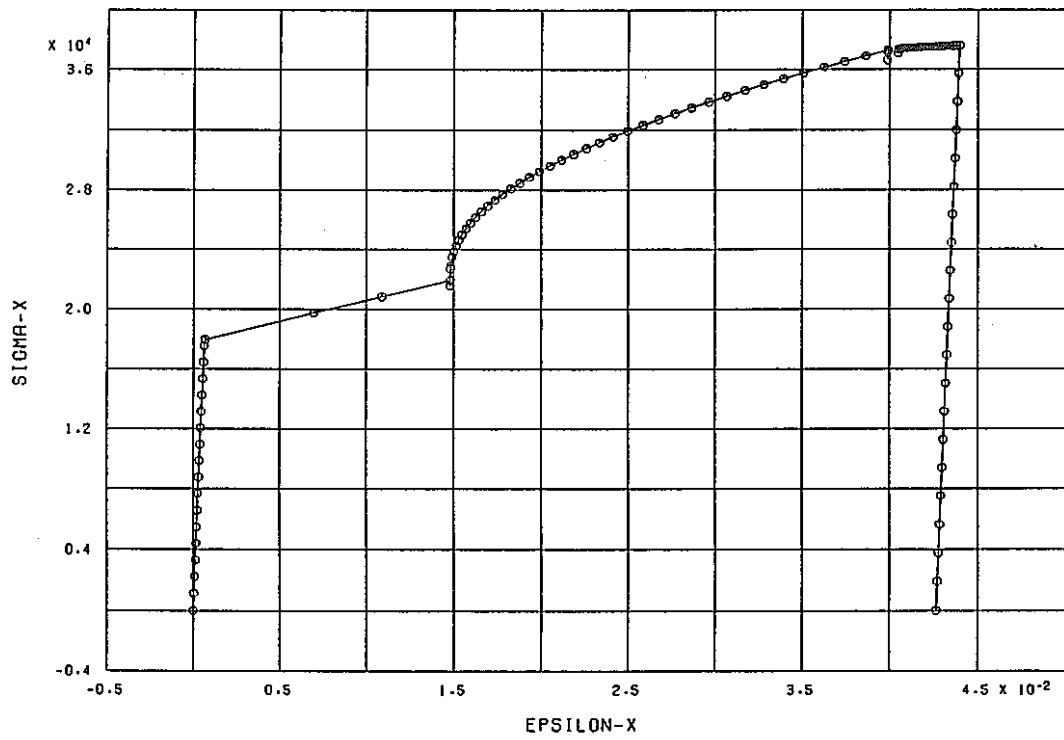


SHEAR STRESS-STRAIN RESPONSE (DPO21SA)

b) サブステップ法

図2-19 せん断応力-せん断ひずみの関係の比較(ケース2)

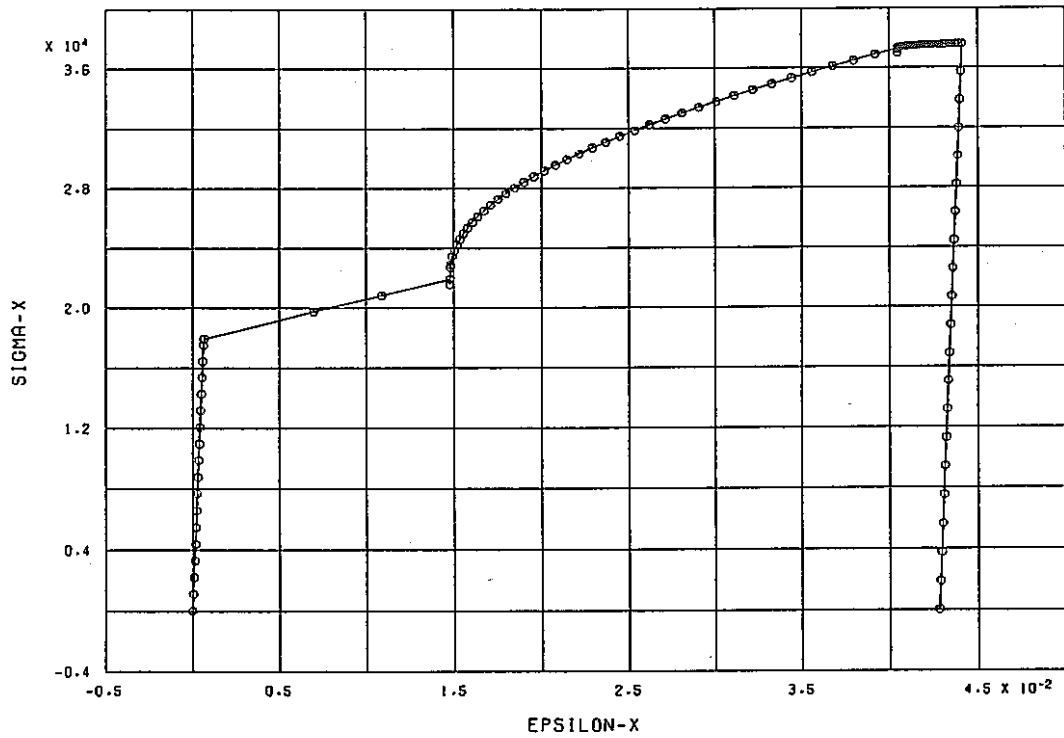
FINAS



AXIAL STRESS-STRAIN RESPONSE (10P021B)

a) 通常の方法

FINAS

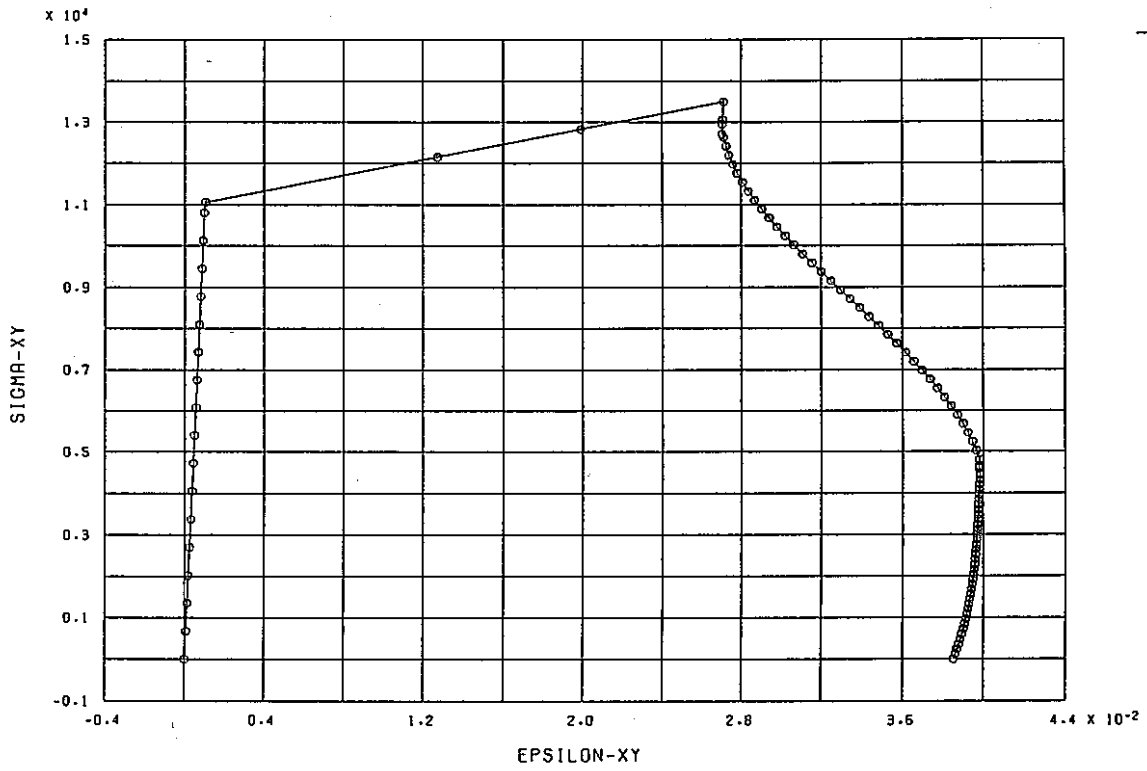


AXIAL STRESS-STRAIN RESPONSE (D0215B)

b) サブステップ法

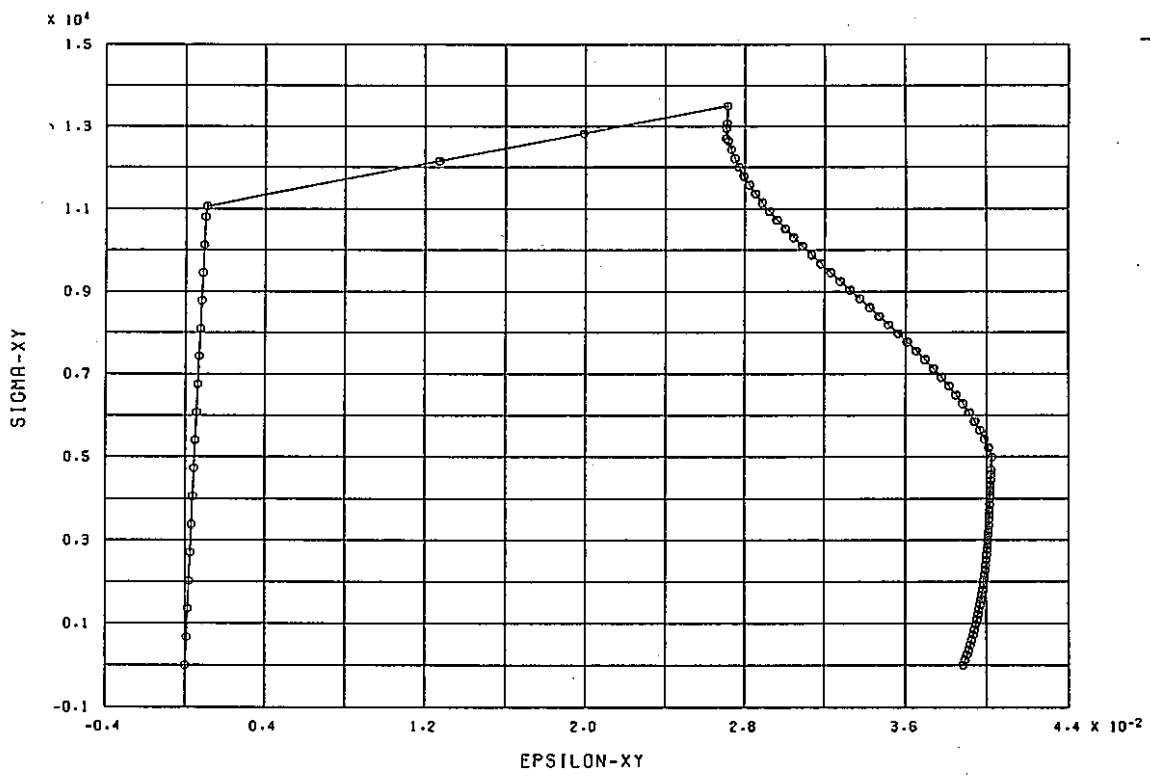
図2-20 直応力-直ひずみの関係の比較(ケース3)

FINAS



a) 通常の方法

FINAS



b) サブステップ法

図2-21 せん断応力-せん断ひずみの関係の比較(ケース3)

d. 塑性クリープ統一型モデルの試用

高温機器の非弾性挙動を精度よく記述するために、塑性ひずみとクリープひずみを1つの非弾性ひずみ(粘塑性ひずみ)として取り扱う塑性クリープ統一型構成式モデルがいくつか提案され、定式の検討、実験データとの比較が行なわれている。

FINASでは、統一型構成モデルに対して、流れ則および発展則等を直接に定義できるような使用者作成のサブプログラムが用意されている。昨年度までは、種々の統一型モデル、すなわち Robinson モデル、Chaboche モデル、Bodner モデル、Walker モデルに関し、簡単な単軸問題を通して、その定式化、特性等の検討が行なわれてきた。

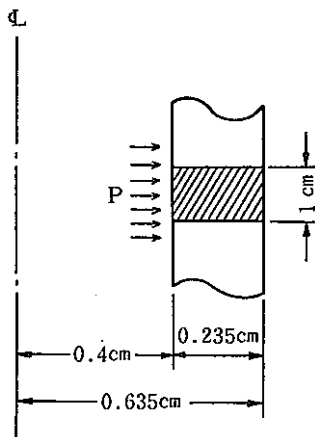
本年度はこれらのモデルのうちRobinson モデルに限定して、内圧を受ける円管、変位保持の単純支持梁等の一般的な構造問題に適用し、その実用性の評価、検討が行なわれた。

(計算例)

内圧を受ける円管問題に対して Robinson モデルを適用して解析を行なう。

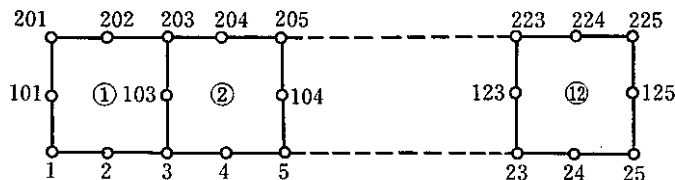
解析モデル

内径 0.4 cm、管厚 0.235 cm の無限円管(両面閉じ)に一定内圧  $P$  が作用する。



有限要素モデル

8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 を用いて以下のようにモデル化する。



材料定数

弾性係数  $E=21877.6$  (ksi)

ポアソン比  $\nu=0.2868$

材料パラメータ

$\bar{\mu}=\mu \exp(\theta_1)(h)$ ,  $\mu=3.61 \times 10^7$ ,  $n=4.0$ ,  $m=7.73$ ,  $\beta=1.5$ ,

$$R = 9.0 \times 10^{-3} \exp(\theta_2) \text{ (ksi/h)}, \quad H = 1.37 \times 10^{-4} \text{ (ksi/h)}, \quad G_0 = 0.14 \text{ (ksi)},$$

$$\kappa = 0.82 \text{ (ksi)}$$

ここで,

$$\theta_1 = (23.8\theta - 2635) (1/811 - 1/\theta)$$

$$\theta_2 = 40,000 (1/800 - 1/\theta)$$

ただし,

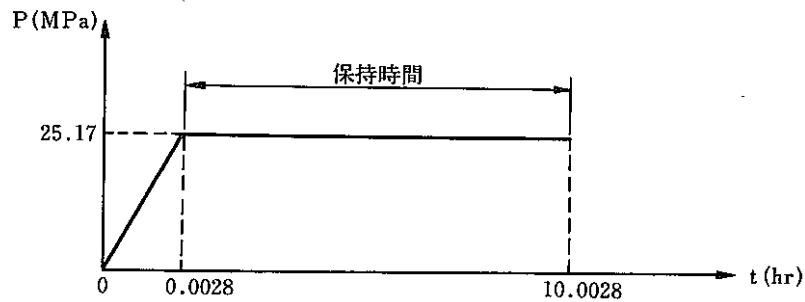
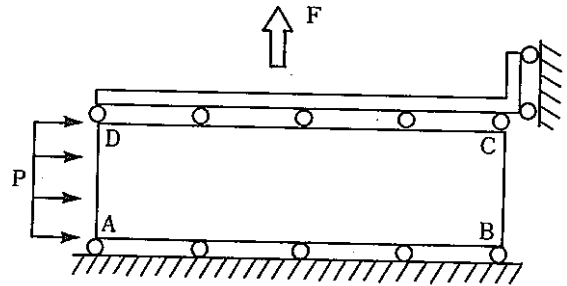
$\theta$  は絶対温度 ( $^{\circ}\text{K}$ ) である。

境界条件および負荷条件

- AB に沿って  $u_z = 0.0$
- DC に沿って  $u_z = \text{一定}$
- 構造内温度一定  $T = 566^{\circ}\text{C}$
- 機械荷重は内圧  $P$  および内圧に対応した軸方向荷重  $F$  で下に示されるように保持時間を考慮した負荷履歴を与える。

$$F = \pi P r^2 = 0.29355 \text{ (ksi)}$$

$$P = 3.65 \text{ (ksi)}$$



FINAS

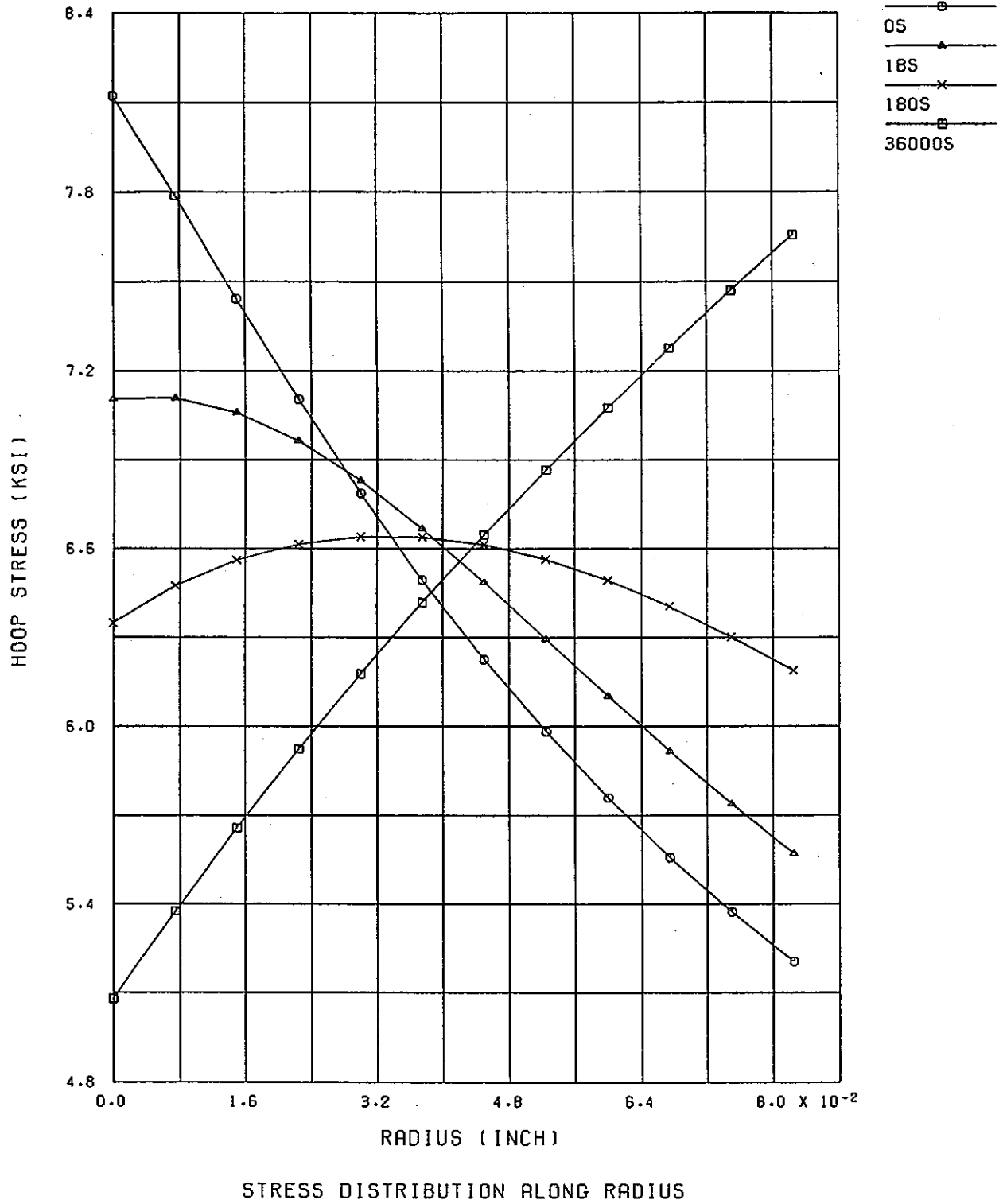


図2-22 周方向応力の管厚方向分布

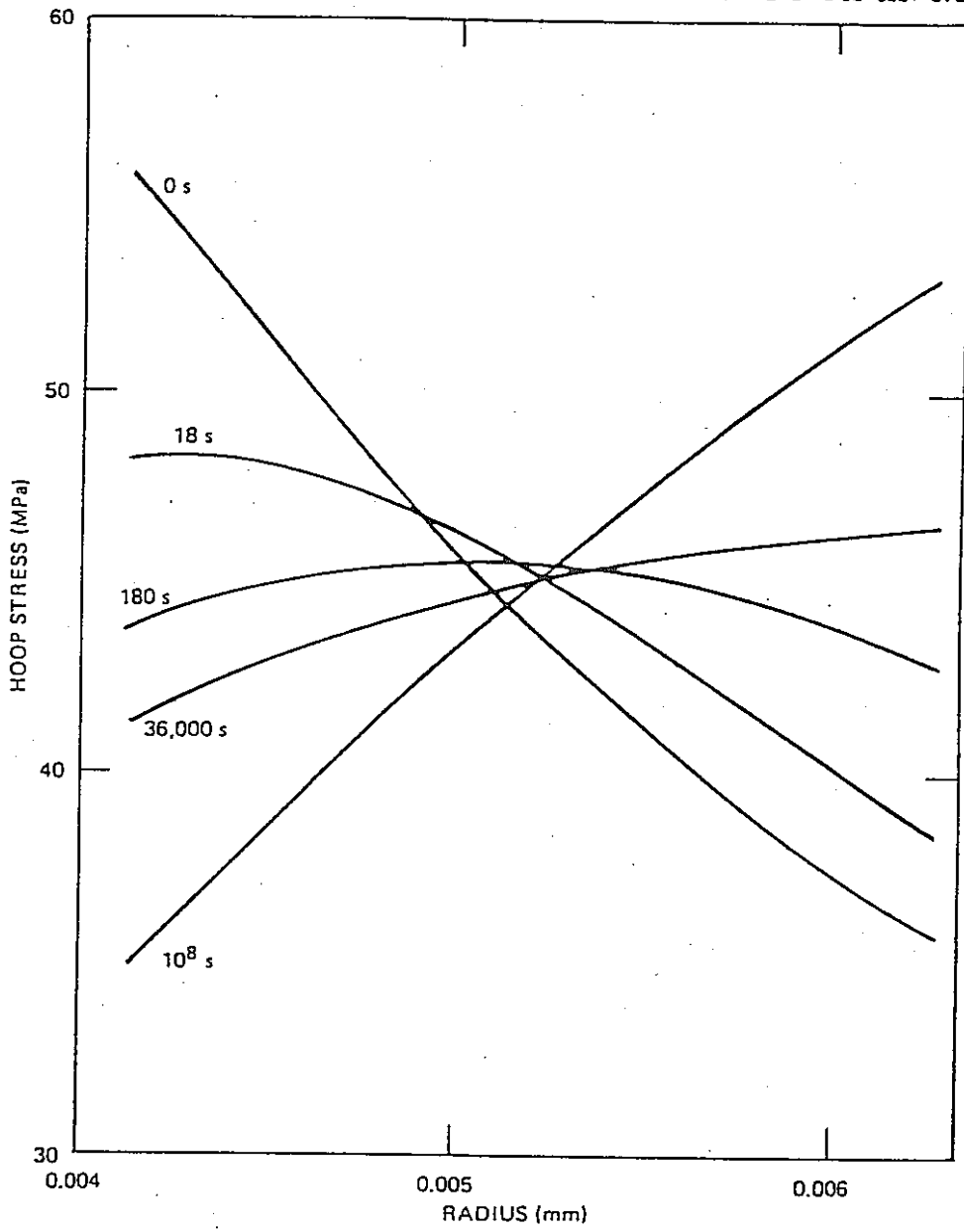


図2-23 Robinsonの参照解



e. 塑性クリープ統一型モデルの時間積分法の適用

塑性ひずみとクリープひずみを1つの非弾性ひずみ(粘塑性ひずみ)として取り扱う統一型構成式モデルは、一般に非常に“stiff”な特性を有している。すなわち、粘塑性ひずみは超過応力のべき乗で表示されるものが多い。したがって、統一型構成式モデルを適用した解析では、増分を非常に細かくしないと精度の良い数値解が得られず、さらに数値的な不安定が生じることもある。また、増分を細かくすることにより計算時間が膨大となる。昨年度は、このような問題を解決するために時間積分法の調査、検討が行なわれ、高効率な時間積分法の1つであるKumar等により提案されている方法が組み込まれた。

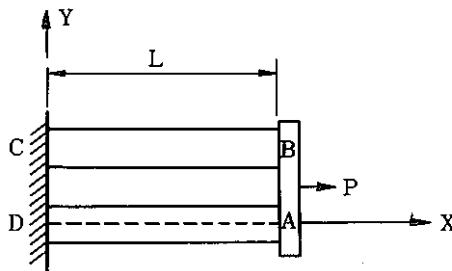
本年度は、この積分法の安定性、精度ならびに実用的な構造問題への適用性を検討するために、サイクリックな変位を受ける単純支持梁や2本棒の熱ラチェット問題が解析された。

(計算例)

- 時間積分法を用いた2本棒の熱ラチェット問題

解析モデル

長さ $L=1.0$  in, 断面積 $S=1.0$  in<sup>2</sup>の2本棒に一定荷重および各棒に温度変化が負荷される。



材料定数

弾性係数  $E=4 \times 10^4 - 21.6\theta$  (ksi)

線膨張係数  $\alpha=14 \times 10^{-6}$

材料パラメータ

$\bar{\mu} = \mu \exp(-\theta_1)$  (h),  $\mu=3.61 \times 10^7$ ,  $n=4$ ,  $m=7.73$ ,  $\beta=1.5$ .

$R=9.0 \times 10^{-3} \exp(\theta_2)$  (ksi/h),  $H=1.37 \times 10^{-4}$ ,  $G_0=0.14$  (ksi),

$K=(K^i/3)^{1/2}$ ,  $K^i=2.0 - (1 - \exp(-4000(1/800 - 1/\theta)))$

ここで,

$\theta_1=(23.8\theta - 2635)(1/811 - 1/\theta)$

$\theta_2=40,000(1/800 - 1/\theta)$

ただし,

$\theta$  は絶対温度

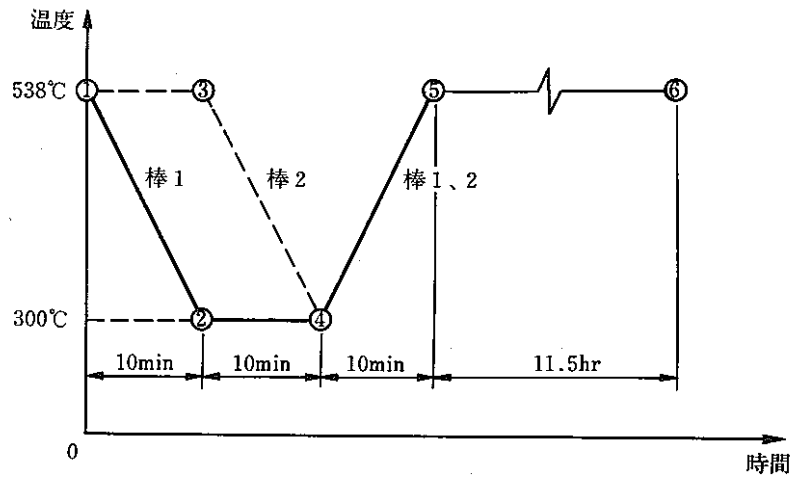
境界条件

OC:  $u_x = u_y = u_z = 0$

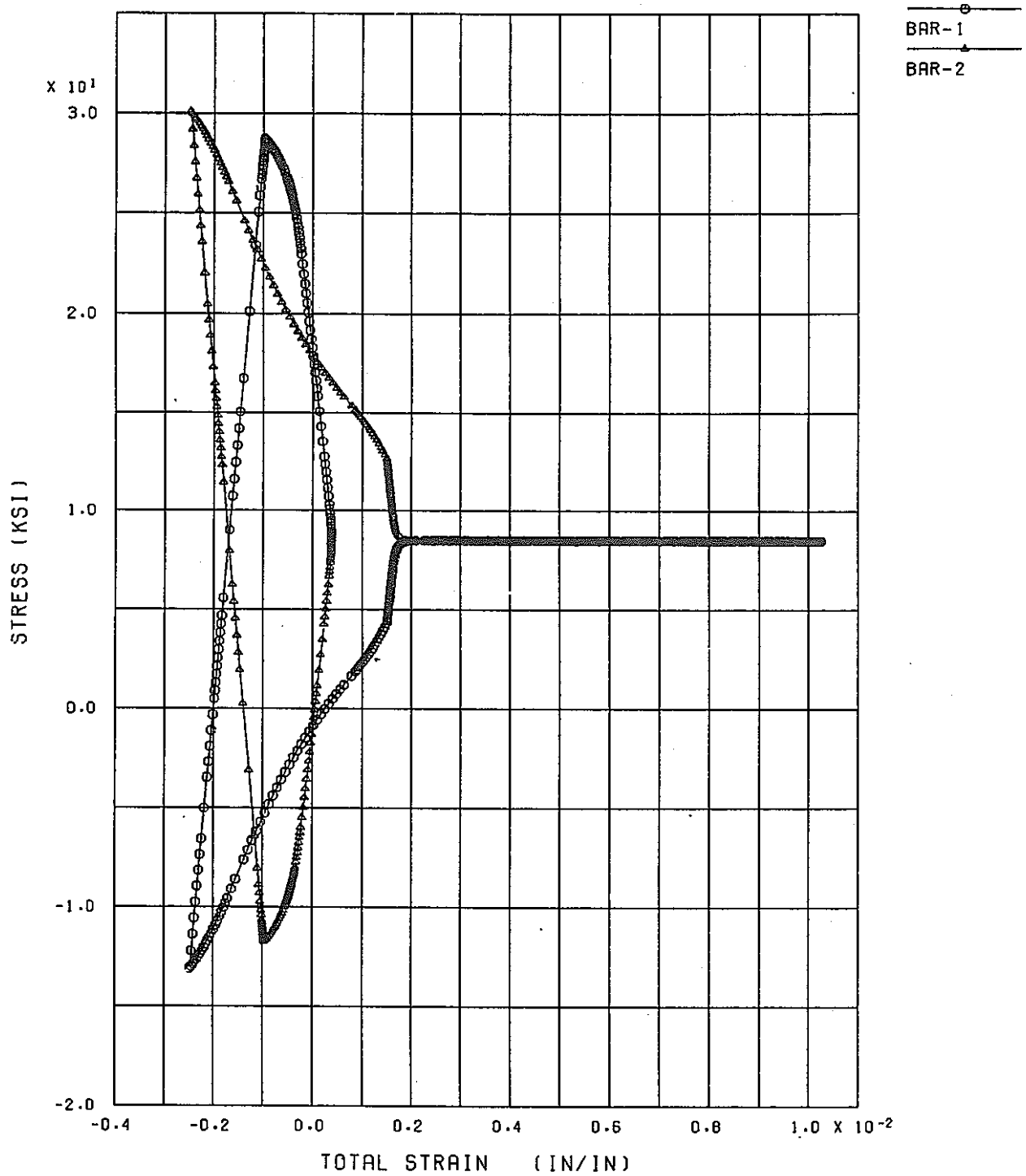
AB:  $u_y = u_z = 0$ ,  $u_x$  は一定

負荷条件

2本棒の平均応力 $\sigma_m = 58.62 \text{ MPa}$ となるように節点荷重 $P$ を与え、その後以下に示す温度変化および保持時間を与える。



FINRS



BAR STRESS-STRAIN CURVE (VP181:TWO-BAR THERMAL RATCHETTING)

図2-24 各要素の応力-ひずみ履歴

〔参考文献〕

- 1) 鈴木, 土屋, 改良形フラクシオンモデルと SUS 304 のクリープ変形に対する適用, 機論, 50-453, A (昭59-5), 1026.
- 2) 鈴木, 材料の粘塑性挙動のモデル化に対する一手法, 材料, 35-391, 昭和61-4, 22.
- 3) D.N. Robinson, "Constitutive Relations for Anisotropic High-Temperature Alloys", Nuclear Engineering and Design, 83 (1984), 389-1396.
- 4) V.G. Ramaswamy, A Constitutive Model for the Inelastic Multiaxial Cyclic Response of A Nickel Base Superalloy RENS'80, ph.D. Thesis, University of Cincinnati, 1985.
- 5) D. Cords, F.G. Kolleman, "An Implicit Time Integration Scheme for Inelastic Constitutive Equations with Internal State Variables", Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol.23, 553-544 (1986).
- 6) J.L. Chaboche, G. Rousselier, "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations—Part I: Rules Developed with Internal Variable Concept", Journal of Pressure Vessel Technology, 1983, Vol.105, pp.153-158.
- 7) J.L. Chaboche, G. Rousselier, "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations—Part II: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steel", Journal of Pressure Vessel Technology, 1983, Vol.105, pp.159-164.
- 8) S.R. Bodner, Y. Parton, "Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain-Hardening Material", Journal of Applied Mechanics, 1975, pp.385-389.
- 9) G.H. James, P.K. Imbrie, P.S. Hill, D.H. Allen, W.E. Haisier, "An Experimental Comparison of Several Current Viscoplastic Constitutive Models at Elevated Temperature", Journal of Engineering Materials and Technology, 1987, Vol.109, pp.130-139.
- 10) D. N. Robinson, R. W. Swindeman, "United Creep-plasticity Constitutive Equations for 2-1/4 CR-MO Steel at Elevated Temperature", Report No. ORNL/TH-84444, Oak Ridge National Laboratory, 1983.
- 11) D. N. Robinson, P. A. Bartolotta, "Viscoplastic Constitutive Relationship with Dependence on Thermo-mechanical History", NASA Contract Report 174836, Dept. of Civil Engineering, University of Akron, Akron, Ohio, Mar., 1985.
- 12) T. Y. Chang, J. Y. Chen and S. C. Chu, "Viscoplastic Finite Element Analysis by Automatic Subincrementing Technique", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 1, January, 1988.

## (2) 破壊力学解析機能

### a. 仮想き裂進展法

昨年度、仮想き裂進展法による破壊力学パラメータ計算機能の FINAS への組込みがなされた。しかし、その検証例における計算結果は必ずしも十分なものとはいえず、その後問題を残した結果となっていた。本年度は、更に仮想き裂進展法の調査を進めて、 $\hat{J}$ 積分値の仮想き裂進展式を導き、その基本式の有効性を検討した。

$J$ 積分値は Rice によって定義され、全体座標系における  $k$  方向の  $J$ 積分値は次式のように表わすことができる。

$$J_k = \int_{\Gamma_1} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} d\Gamma - \int_A \frac{\partial W}{\partial X_k} dA \quad (2-43)$$

ここで、 $T_i$ は表面力、 $u_i$ は変位、 $W$ はひずみエネルギー密度である。

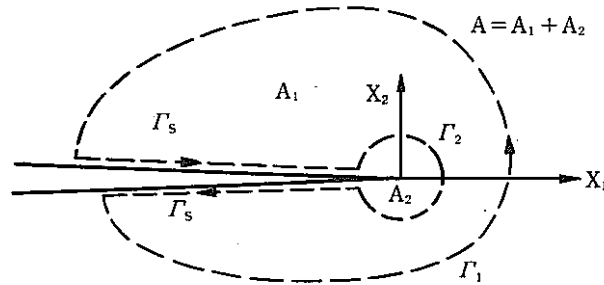


図2-25 き裂先端と径路

ここで、Gauss の発散定理を用いて、径路積分を面積積分に変換すると、上式は次式ようになる。

$$\begin{aligned} J_k &= \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) - \frac{\partial W}{\partial X_k} \right\} dA \\ &= \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W \delta_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial X_j} dA \end{aligned} \quad (2-44)$$

ここで、 $\delta_{jk}$ はクロネッカーのデルタである。

次に、式(2-44)の両辺に微小な仮想き裂進展量  $\Delta X_k$  を乗ずると次式が得られる。

$$J_k \Delta X_k = \frac{\partial}{\partial X_j} \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W \delta_{jk} \right) dA \Delta X_k \quad (2-45)$$

上式は、き裂進展力のなす仮想仕事式を表わしていると解釈できる。これにより、図2-26を参照して、Parks による仮想き裂進展法を適用する。則ち、 $\Gamma_1$ に沿って  $\Delta X_k = 0$  とし、 $\Gamma_2$ に囲まれる領域を  $\Delta X_k$ だけ剛体移動さ

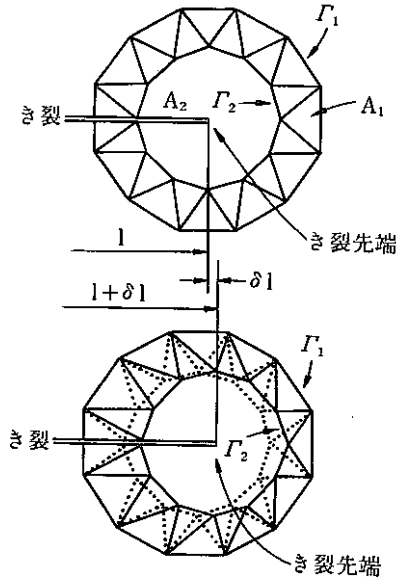


図2-26 仮想き裂進展法

せると、次式のように  $J$  積分値の仮想き裂進展式が得られる。

$$J_k = \frac{1}{\Delta X_k} \int_{A_1} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W \delta_{jk} \right) \frac{\partial \Delta X_k}{\partial X_j} dA \quad (2-46)$$

ここで、仮定により、 $A_2$  において  $\frac{\partial \Delta X_k}{\partial X_j} = 0$  とおいている。

次に、 $\hat{J}$  積分値について同様の手順を行なう。

岸本らの定義により  $\hat{J}$  積分値は、次式のように表わすことができる。

$$\hat{J}_k = \int_{\Gamma} T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} d\Gamma + \int_A F_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dA - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial X_k} dA \quad (2-47)$$

ここで、 $F_i$  は物体力、 $\varepsilon_{ij}$  はひずみである。このとき、ひずみ  $\varepsilon_{ij}$  が弾性ひずみ成分  $\varepsilon_{ij}^e$  と熱ひずみ成分  $\varepsilon_{ij}^t$ 、塑性ひずみ成分  $\varepsilon_{ij}^p$  の和として表わされる場合、弾性ひずみ成分  $\varepsilon_{ij}^e$  に対して、 $\frac{\partial W^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = \sigma_{ij}$  を満足する履歴によらない弾性ひずみエネルギー密度  $W^e$  を定義すると、上式は次式のようにも表わせる。

$$\begin{aligned} \hat{J}_k = & \int_{\Gamma} \left( T_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W^e n_k \right) d\Gamma + \int_A F_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} dA \\ & - \int_A \alpha \sigma_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial X_k} dA - \int_A \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial X_k} dA \end{aligned} \quad (2-48)$$

ここで、 $\alpha$  は熱膨張係数、 $\theta$  は温度である。

式(2-48)の経路積分を面積分に変換すると、次式となる。

$$\hat{J}_k = \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W^e \delta_{jk} \right) \frac{\partial}{\partial X_j} dA + \int_A \left( F_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - \alpha \sigma_{ii} \frac{\partial \theta}{\partial X_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial X_k} \right) dA \quad (2-49)$$

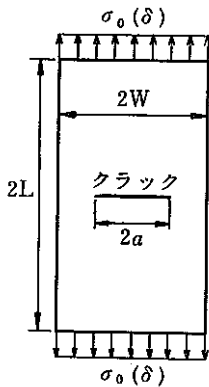
上式の両辺に微小な仮想き裂進展量  $\Delta X_k$  を乗じて、仮想き裂進展法を適用すると、次式のような  $\hat{J}$  積分値の仮想き裂進展式が得られる。

$$\hat{J}_k = \frac{1}{\Delta X_k} \int_{A_1} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - W^e \delta_{jk} \right) \frac{\partial \Delta X_k}{\partial X_j} dA + \frac{1}{\Delta X_k} \int_A \left( F_i \frac{\partial u_i}{\partial X_k} - \alpha \sigma_{ii} \frac{\partial \theta}{\partial X_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial X_k} \right) \Delta X_k dA \quad (2-50)$$

(計算例)

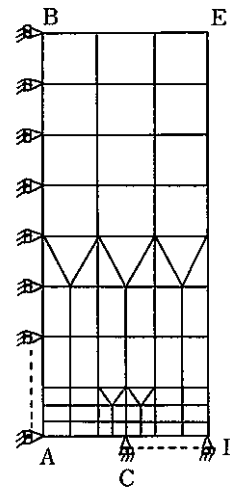
一様引張りを受ける中央き裂を有する平板の弾塑性解析を行ない FINAS に組み込んだ仮想き裂進展式による  $\hat{J}$  積分値、 $\hat{J}$  積分値を計算し、岸本らの解と比較し、その有効性を検討した。

• 解析モデル



- $a = 10.0 \text{ mm}$
- $W = 20.0 \text{ mm}$
- $L = 50.0 \text{ mm}$
- $E = 2100.0 \text{ kgf/mm}^2$
- $\nu = 0.3$
- $\sigma_Y = 49.0 \text{ kgf/mm}^2$
- $H' = 210.0 \text{ kgf/mm}^2$

• 有限要素モデル

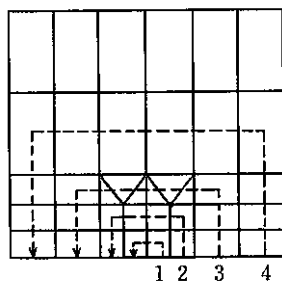


使用要素  
QPLAN8

• 境界条件 (有限要素モデル図参照)

- 辺 AB に沿って  $u_x = 0$
- 辺 CD に沿って  $u_y = 0$
- 辺 BE に沿って  $u_y = 0.15 \text{ mm}$  (強制変位)

• 積分領域



-----> 積分径路

← 径路番号

• 解析結果および考察

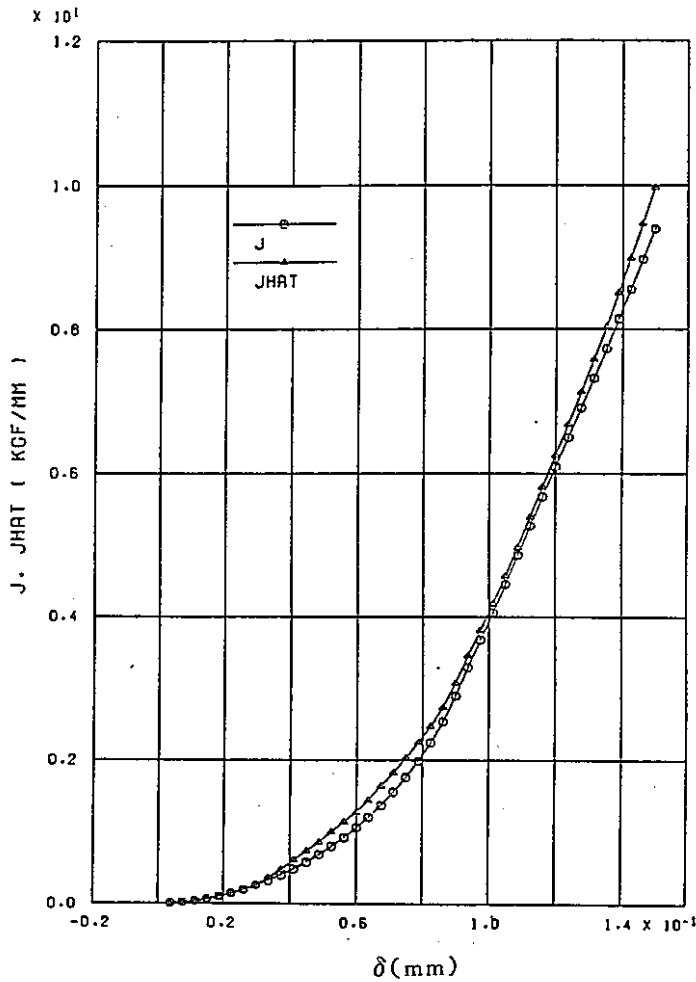


図2-27 FINASによる $J$ ,  $\hat{J}$ 積分値

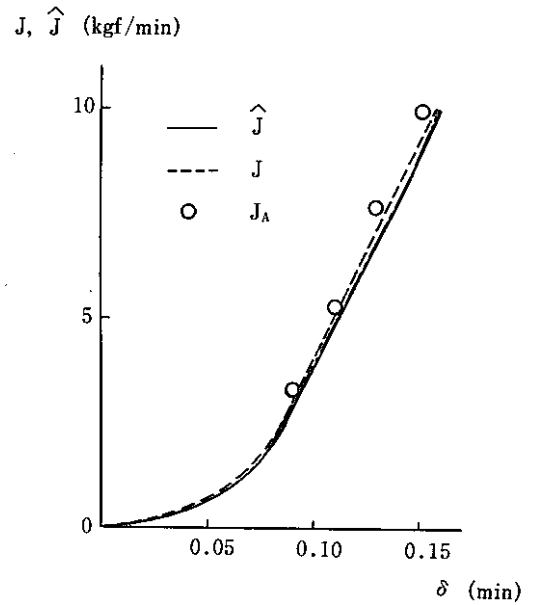


図2-28 岸本らの $J$ ,  $\hat{J}$ 積分値

図2-27は仮想き裂進展法により求めた $J$ 積分値および $\hat{J}$ 積分値である。また、図2-28は岸本らが行なった径路積分法により求めた $J$ ,  $\hat{J}$ 積分値である。

図2-27について、 $J$ 積分値と $\hat{J}$ 積分値は理論上単調増加荷重のもとで一致するが、FINASによる値は、わずかに $\hat{J}$ 積分値の方が大きめであるが、ほぼ一致している。

また、岸本らが行なった値ともよく一致していることがわかる。

〔参考文献〕

- 1) H. G. deLorenzi, "ENERGY RELEASE RATE CALCULATIONS BY THE FINITE ELEMENT METHOD", GENERAL ELECTRIC REPORT, 1982.
- 2) H. G. deLorenzi, "On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations, Int. J. of Fracture 19(1982) 183-193.
- 3) C. F. SHIH, B. MORAN and T. NAKAMURA, "Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body", International Journal of Fracture 30(1986) 76-102.



- 4) 渡辺, 宮崎, 矢川,  $J$  および  $\hat{J}$  積分評価における径路積分法と仮想き裂進展法の関係について, 機論 A50-451, 昭和59-3, 145.
- 5) 青木, 岸本, 鍋田, 坂田, 前荷重を受けた物体に対する弾塑性破壊力学パラメータ, 「材料」第31巻 第343号 60-65.

b. 破壊力学パラメータ  $T^*$  積分

静的線形・非線形の弾性き裂に対して、Rice 等により提案された  $J$  積分は、静的破壊力学の重要なパラメータとして広く認識されている。また、 $J$  積分をおぎなう意味で、塑性変形、物体力、温度場、慣性力の影響を考慮した  $\hat{J}$  積分値が岸本らによって提案され、静的弾塑性き裂のパラメータとして、その実用性が示された。

現在、FINASの破壊力学解析機能は、後処理プログラム FNSFRCTにより、破壊力学パラメータ  $K$  値、 $J$  積分値、 $\hat{J}$  積分値、 $J'$  積分値を求めることができる。適用範囲は線形・非線形静的問題の2次元、軸対称、3次元構造体であり、解析範囲は熱弾塑性領域となっている。

また、最近になり、研究が立ち遅れていた動的破壊力学において、Atluri、西岡等により、動的弾性き裂に対し、 $J'$  積分値（ここでの  $J'$  積分値は FNSFRCT で扱っているクリープ問題における  $J'$  積分とは別個のもの）、動的弾塑性き裂に対して、 $T$  および  $T^*$  積分値が提案され<sup>9)</sup>、多くの論文が発表されている。西岡等は構成式に依存しない径路独立積分  $T^*$  を導いている。

この  $T^*$  積分値は特別な場合として、静的弾性き裂の  $J$  積分を含んでおり、一般的には弾塑性き裂を考慮したき裂先端場の統一的尺度となっている。

一方、Atluri 等は、 $T^*$  積分値を塑性増分流れ理論に基づいて、径路独立積分として求めており、任意の荷重履歴（除荷を含む）に対して有効であることを示している。

本年度は、この動的破壊力学パラメータ  $T^*$  積分値に関して、理論、定式等の調査が行なわれ、後処理プログラム FNSFRCT へ試験的に組み込まれ、 $J$  積分値との比較、検討が行なわれた。

(i)  $T^*$  積分値の基本式

- 静的弾塑性破壊における  $T^*$  積分値

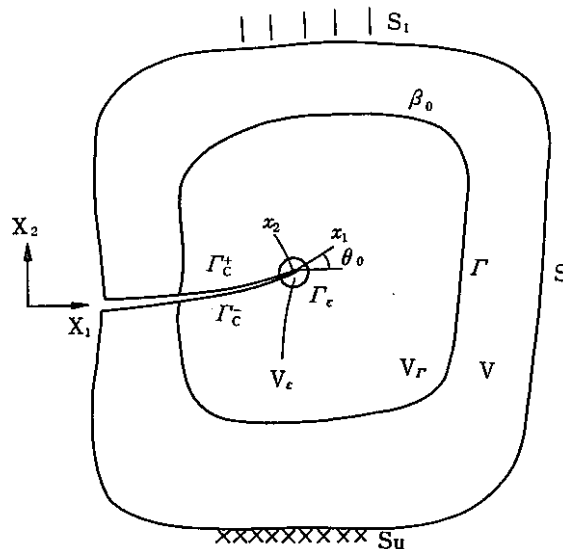


図2-29 積分径路の定義

増分塑性理論に基づき、 $\Delta T_k^*$  は、以下のように定義できる。

$$\Delta T_k^* = \int_{\Gamma_s} [ \Delta W n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} ] ds \quad (2-53)$$

$$\text{ここで, } \Delta W = \left( \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij} \right) \Delta \varepsilon_{ij} \quad (2-52)$$

次に,  $\Gamma$ ,  $\Gamma_o$  および  $\Gamma_e$  が囲む領域によって定まる量を  $\Delta I^*$  とすると, 積分径路によらない  $T^*$  の表示式は次式とおける。

$$\Delta T_k^* = \int_{\Gamma + \Gamma_e} \left[ \Delta W n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds + (\Delta I^*)_k \quad (2-53)$$

$\Delta I^*$  は式(2-51), (2-52) の差をとることにより求められ, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta I_k^* &= - \int_{\Gamma + \Gamma_o - \Gamma_e} \left[ \Delta W n_k - (t_k + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds \\ &= - \int_{V_f - V_e} \left[ \Delta W_{,k} - \{ (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta u_{i,k} \}_j - \{ \Delta \sigma_{ij} u_{i,k} \}_j \right] dV \\ &= - \int_{V_f - V_e} \left[ \sigma_{ij,k} \Delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij,k} + \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij,k} + \frac{\partial \Delta V}{\partial x_k} \Big|_{\text{expl.}} \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \varepsilon_{ij,k} - \Delta \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} \right] dV \\ &= - \int_{V_f - V_e} \left[ \left( \sigma_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,k} \right) \Delta \varepsilon_{ij} - \left( \varepsilon_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij,k} \right) \Delta \sigma_{ij} \right] dV \quad (2-54) \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{\partial \Delta V}{\partial x_k} \Big|_{\text{explicit}} = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij} \Delta \sigma_{ij,k} - \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij,k} \quad (2-55)$$

なお, 式(2-54) の展開において, 式(2-56) の釣合い式および式(2-57) の関係が用いられた。

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (\text{ただし, } f_i \text{ は無視している}) \quad (2-56)$$

$$\begin{aligned} \int_{V_f - V_e} \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \Delta \varepsilon_{ij} \right] dV &= \int_{V_f - V_e} \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k} \Delta \varepsilon_{ij} \right] dV \\ &= \int_{V_f - V_e} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{ij}} \Delta \varepsilon_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k} \right] dV \\ &= \int_{V_f - V_e} \left[ \Delta \sigma_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_k} \right] dV \quad (2-57) \end{aligned}$$

したがって、 $\Delta T_k^*$ の基本式は、式(2-53)に式(2-54)を代入して次式のように表わされる。

$$\Delta T_k^* = \int_{r_c} \left[ \Delta W n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds \quad (2-58)$$

$$= \int_{r+r_c} \left[ \Delta W n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds$$

$$= \int_{V_F - V_i} \left[ \Delta \sigma_{ij} \left( \epsilon_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \epsilon_{ij,k} \right) - \Delta \epsilon_{ij} \left( \sigma_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,k} \right) \right] dV \quad (2-59)$$

また、増分形によらない表示式は、次式で表わすことができる。

$$T_k^* = \int_{r+r_c} \left[ W n_k - t_i u_{i,k} \right] ds + \int_{V_F - V_i} \left[ \sigma_{ij} \epsilon_{ij,k} - W_{,k} \right] dV \quad (2-60)$$

なお、 $\Delta W$ は、式(2-52)で示されるように、増分応力仕事密度であり、増分ひずみエネルギー密度の意味を持たない。したがって、任意の負荷履歴に対して、一般的に、 $W_{,k} \neq \sigma_{ij} \epsilon_{ij,k}$ となる。

• 動的破壊における  $T^*$  積分値

き裂先端域における増分形のパラメータ  $\Delta T^*$  は次式で定義できる。

$$\Delta T_k^* = \int_{r_c} \left[ (\Delta W + \Delta K) n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds \quad (2-61)$$

ただし、

$$\Delta W = \left( \sigma_{ij} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij} \right) \Delta \epsilon_{ij}, \quad \Delta K = \rho \left( \dot{u}_i + \frac{1}{2} \Delta \dot{u}_i \right) \Delta \dot{u}_i \quad (2-62)$$

式(2-62)の  $\Delta K$  は、増分運動エネルギー密度を意味する。

また、静的の場合と同様に、積分径路によらない径路独立式は、以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} \Delta T_k^* &= \int_{r_c} \left[ (\Delta W + \Delta K) n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,l} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds \\ &\equiv \int_{r+r_c} \left[ (\Delta W + \Delta K) n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k} \right] ds \\ &\quad + \int_{V_F - V_i} \left[ \Delta \sigma_{ij} \left( \epsilon_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \epsilon_{ij,k} \right) - \Delta \epsilon_{ij} \left( \sigma_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \rho (\ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i) \Delta u_{i,k} - \rho (\dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i) \Delta \dot{u}_{i,k} + \rho \Delta \ddot{u}_i u_{i,k} - \rho \Delta \dot{u}_i \dot{u}_{i,k} \right] dV \quad (2-63) \end{aligned}$$

ここでは、以下の1次の運動量の釣合い条件が用いられている。

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad \Delta \sigma_{ij,j} = \rho \Delta \ddot{u}_i \quad (2-64)$$

増分形によらない表示式は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} T_k^* &= \int_{\Gamma_c} [(W+K) n_k - t_i u_{i,k}] dS \\ &= \int_{\Gamma+\Gamma_c} [(W+K) n_k - t_i u_{i,k}] dS \\ &\quad + \int_{V_T+V_c} [\rho \ddot{u}_i u_{i,k} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} - W_{,k}] dV \end{aligned} \quad (2-65)$$

(ii) 各破壊力学パラメータとの比較

ここで、再び  $T^*$  積分値の基本式を示す。

$$\begin{aligned} \Delta T_k^* &= \int_{\Gamma+\Gamma_c} [\Delta W n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k}] dS \\ &\quad + \int_{V_T+V_c} \left[ \Delta \sigma_{ij} \left( \varepsilon_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij,k} \right) - \Delta \varepsilon_{ij} \left( \sigma_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,k} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (2-57)$$

右辺第2項の体積積分に注目して、非線形弾性体に限定すれば、式(2-57)より次式が成り立つ。

$$\int_{V_T+V_c} \left[ \Delta \sigma_{ij} \left( \varepsilon_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_{ij,k} \right) \right] dV = \int_{V_T+V_c} \left[ \Delta \varepsilon_{ij} \left( \sigma_{ij,k} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij,k} \right) \right] dV \quad (2-67)$$

よって、 $\Delta T_k^*$  は非線形弾性体の場合次式となる。

$$\Delta T_k^* = \int_{\Gamma+\Gamma_c} [\Delta W n_k - (t_i + \Delta t_i) \Delta u_{i,k} - \Delta t_i u_{i,k}] dS \quad (2-68)$$

上式は非線形弾性体の場合  $J$  積分値の表示式に一致する。

次に  $\hat{J}$  積分値について考える。

$$\hat{J}_k = \int_{\Gamma+\Gamma_c} [-t_i u_{i,k}] dS + \int_{V_T+V_c} [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} + (\rho \dot{u}_i - F_i) u_{i,k}] dV \quad (2-69)$$

物体が全ひずみ理論に従う弾塑性体(除荷は含まない)または非線形弾性体のとき、 $\sigma_{ij}$  と  $\varepsilon_{ij}$  の間に1対1の関係が成り立ち次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2-70)$$

さらに材料が  $x_1$  方向に均質であるとき次式が成り立つ。

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} \quad (2-71)$$

よって、非線形弾性体の場合、式(2-70)、(2-71)および発散定理を用いると  $\hat{J}$  積分値は、 $J$  積分の表示式と一致する。

$$\hat{J} = \int_{\Gamma+T_c} (W n_1 - t_i u_{i,1}) dS = J \quad (2-72)$$

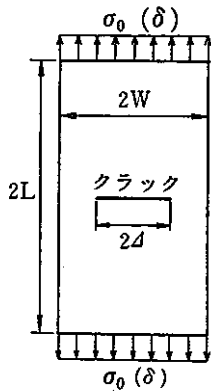
以上のことより静的非線形弾性体の場合、 $J$ 、 $\hat{J}$ 、 $T^*$  の間に次の関係が成り立つ。

$$J = \hat{J} = T^* \quad (2-73)$$

### (計算例)

一様引張りを受ける中央き裂を有する平板の静的弾性、弾塑性解析を行ない、出力されたポストテープを用い、後処理プログラム FNSFRCT へ試験的に組み込まれた  $T^*$  積分値について  $J$  積分値と比較し、その有効性の検討を行なった。

#### • 解析モデル

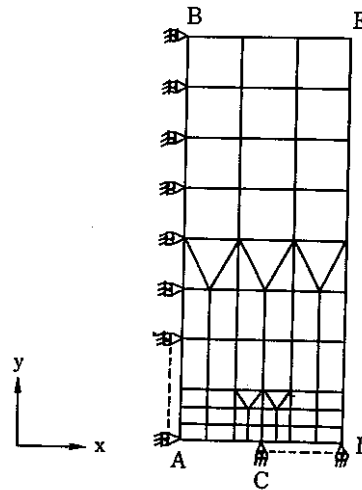


$a=10.0$  mm  
 $W=20.0$  mm  
 $L=50.0$  mm

$\sigma_0$ : 荷重制御  
 (弾性解析時)

$\delta$ : 変位制御  
 (弾塑性解析時)

#### • 有限要素モデル



使用要素  
 QPLAN8

#### • 材料定数

ヤング率  $E = 2100.0$  kgf/mm<sup>2</sup>

ポアソン比  $\nu = 0.3$

降伏応力  $\sigma_Y = 49.0$  kgf/mm<sup>2</sup>

加工硬化係数  $H' = 210.0$  kgf/mm<sup>2</sup>

#### • 境界条件(有限要素モデル図参照)

辺 AB に沿って  $u_x = 0.0$

辺 CD に沿って  $u_y = 0.0$

#### • 負荷条件

##### (a) 静的弾性解析

一様分布荷重  $\sigma_0$  を境界 BE の  $y$  方向へ  $10.0$  kgf/mm<sup>2</sup> を与えた。

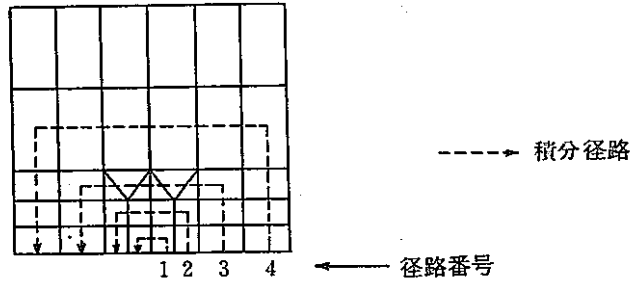
##### (b) 静的弾塑性解析

強制変位  $\delta$  を境界 BE に一様に  $y$  方向へ  $0.15$  mm 引張った。

ステップは等分割で40ステップとした。

• 破壊力学パラメータ解析

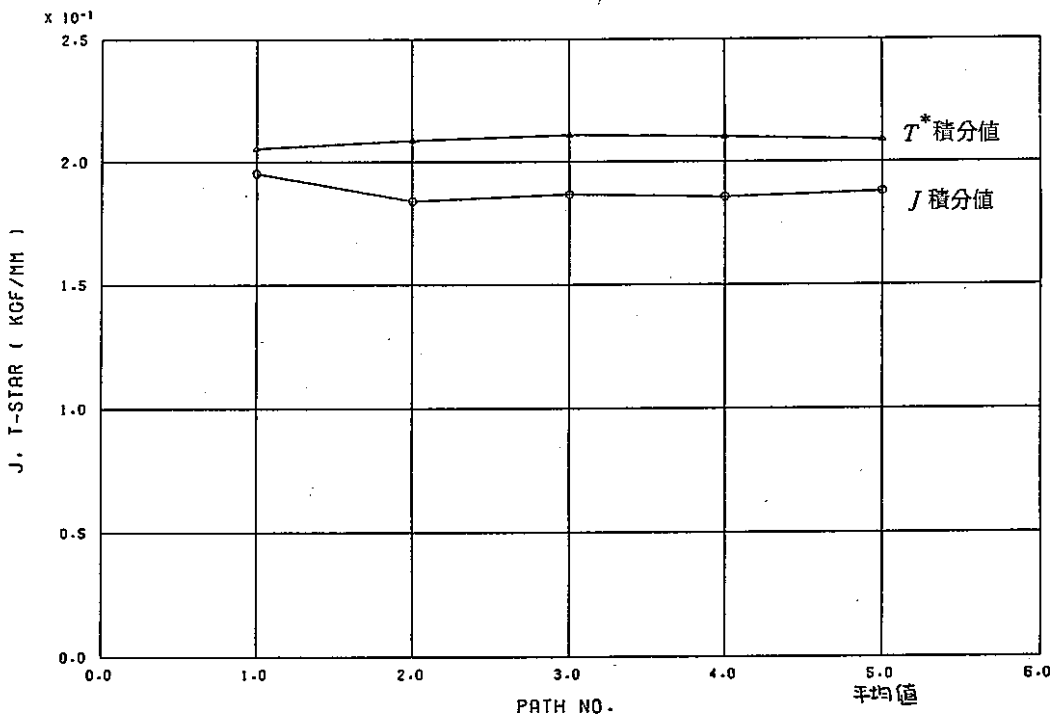
積分経路を下図の通り4経路とし、それぞれのパラメータ値を解析する。



• 解析結果

(a) 静的弾性体

FINAS



J, T-STAR ( PATH RELATE ) ELASTIC PROBLEM

図2-30 JとT\*の各経路での値と平均値

(b) 静的弾塑性体

図2-31に  $J$ ,  $T^*$  積分値とB点(図2-31参照)の  $y$  方向変位の関係を示す。

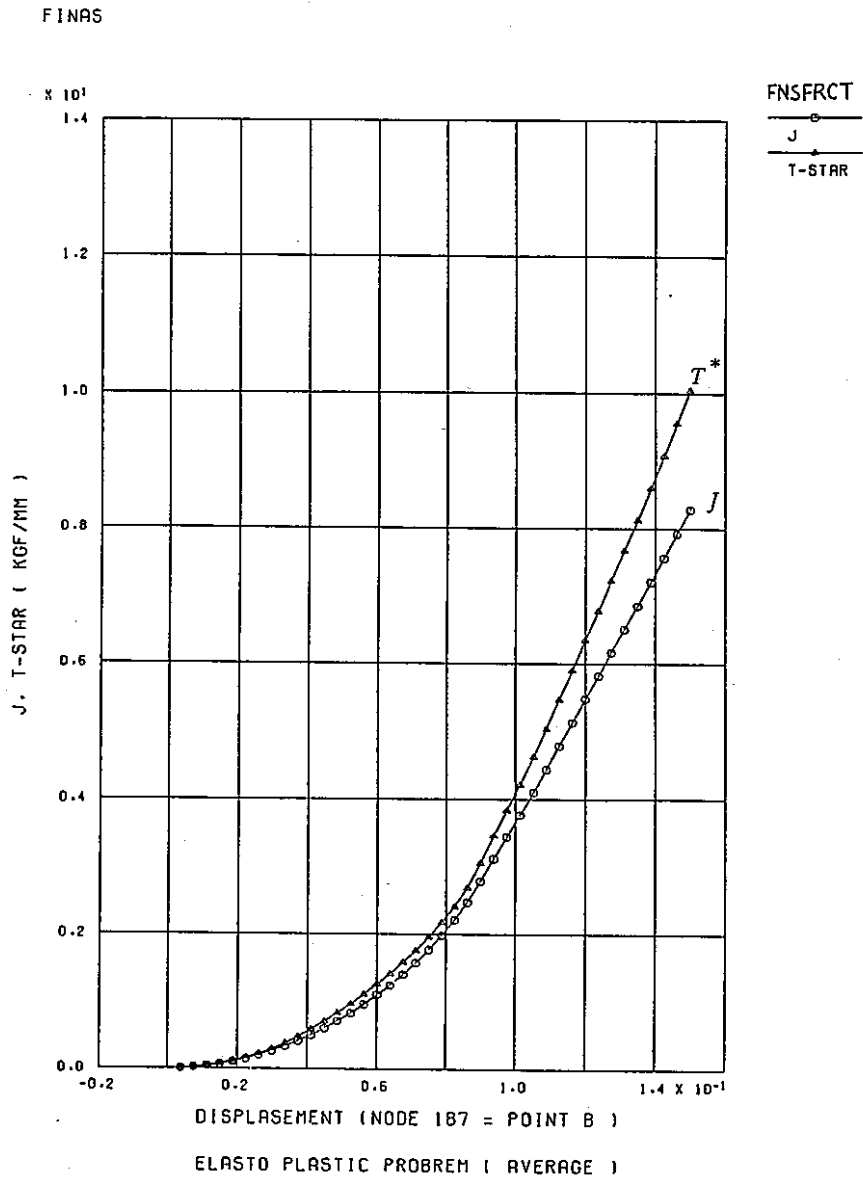


図2-31  $J$ ,  $T^*$  積分値 (平均値) の履歴図



• 考 察

静的弾性体に対する FNSFRCT による計算結果は、 $J$  積分値に比べ  $T^*$  積分値は約 10% ほど大きな値になった。その原因として、 $T^*$  積分の基本式 (2-60) の第 2 項の体積積分が 0 になっていないと考えられる。具体的には、

- 1) 体積積分の特異性を無視している。計算上式 (2-60) の第 2 項の積分領域  $V_F - V_e$  を  $V_F$  としていることが挙げられる。
- 2) 式 (2-60) の  $\int_{V_F - V_e} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} dV$  を計算するために、FNSFRCT では、 $\varepsilon_{ij}$  を外挿し、節点ひずみを使って計算している。この外挿により誤差を生じる可能性がある。

一方、静的弾塑性体での計算は、 $J$  積分値に比べ、 $T^*$  積分値は約 17% ほど大きな値になった。上述した原因の他に、非線形の場合、FNSFRCT が増分形によらないことが考えられる。ひずみエネルギー密度  $W$  の計算について考えると、図 2-32 に示すように、FNSFRCT では、

$$W = W_1 \left( -\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right)$$

となり、 $W_2$  だけ小さく評価されてしまう。よって  $T^*$  の基本式 (2-10) の

$$\int_{V_F - V_e} W_{,k} dV$$

の値は小さくなり、結局、

$$[\text{式(2-10)の第2項の体積積分}] > 0$$

となってしまうと考えられる。

Atluri, 西岡等の論文<sup>1),2)</sup> から、静的非線形弾塑性体については、 $J$ ,  $\hat{J}$  積分値と、 $T^*$  積分値は一致することがわかった。しかし、FNSFRCT へ  $T^*$  積分値を組み込むには、計算例の考察で示したような問題があり、今後の課題であろう。また、FNSFRCT が増分形によらないということに関しては、他の破壊力学パラメータについても検討すべきであろう。

(参考文献)

- 1) Atluri S.N., Nishioka T. and Nakagaki M., Engineering Fracture Mechanics, Vol.20, No.2, pp.209~244, 1984.
- 2) 西岡俊久, 小橋峰夫, 日本機械学会論文集(A編) 5巻 486号(昭62-2) 論文No.86-0863B.

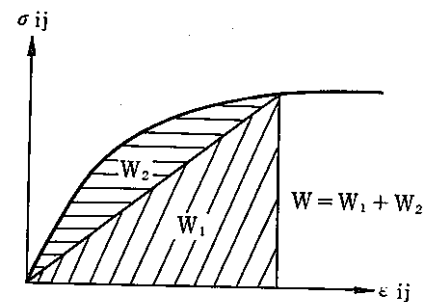


図2-32 ひずみエネルギー密度

c. き裂進展解析機能

近年、供用中の一般構造物において、疲労によるき裂の発生が数多く報告されてきており、き裂の発生場所や原因の解明、き裂に対する補修、さらに保守点検等の方法が検討されている。実際に、き裂の発生している個所は大規模構造物中であり、その変形および応力状態は複雑であり、実験によりその力学的な挙動を再現することは非常に困難なことである。また、疲労実験では解を得るまでには長期の時間が必要となるために、早急に補修をしなければならない構造物に対して、適正な評価や対策を得ることができない場合も生じる。したがって、このような既存の構造物内に発生した疲労き裂に対して、そのき裂進展量の予測、構造物の余寿命の推定等に関して、破壊力学に基づいた理論、手法がいくつか検討されている。

昨年度は、線形 / 非線形破壊力学理論によるき裂進展問題のための理論、アルゴリズムについて調査、報告が行なわれた。本年度はその調査、報告をもとに、線形破壊力学による疲労き裂進展解析機能の FINAS 組込み仕様の検討が行なわれた。

ここでは、2次元平面問題に限定して、理論、アルゴリズム、入出力データ等の仕様内容を述べる。特に、き裂進展を考慮した有限要素モデルのメッシュ分割あるいは再分割方法は重要であり、FINAS への組込み時の問題点について整理を行なう。

(1) 理論、アルゴリズム等の仕様

• 応力拡大係数 (K 値) の評価

き裂先端近傍の点 P の応力  $\sigma_{ij}$  は、塑性論により近似的に次式で与えられ、 $1/\sqrt{r}$  の特異性を有している。

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (2-74)$$

ここで、 $f_{ij}(\theta)$  は各き裂の変形様式に基づいて定まる  $\theta$  のみの無次元関数である。また、 $K$  は構造物の形状と作用する応力分布によって定まる係数で応力拡大係数と呼ばれる。 $r$  はき裂先端から点 P までの距離、 $\theta$  は点 P の x 軸からのなす角を表わす。

したがって、き裂先端部で特異性を示す応力状態を把握するためには、この応力拡大係数を精度よく評価する必要がある。応力拡大係数の評価方法としては、応力法、J 積分法、変位法等があるが、FINAS では高精度でしかも  $K_I$  (開口型)、 $K_{II}$  (面内せん断型) を分離して求めることができる Inganaffea の変位法を採用する。

また、平面問題で高精度の解を得るためには、一般にアイソパラメトリック要素が採用され、特にき裂先端では Barsoum が提案している 6 節点三角形アイソパラメトリック要素 (図 2-33) が用いられることが多い。

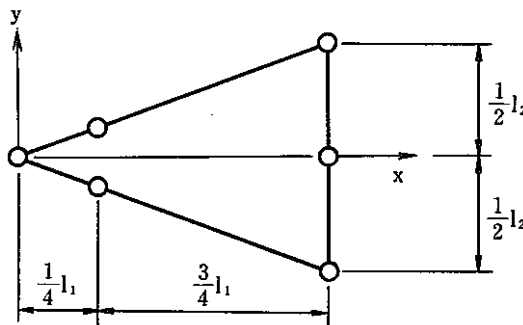


図 2-33 き裂先端要素

この特異要素を用いた場合の混合には、混合モード下における $K$ 値は次式等で評価される。

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \cdot \frac{G}{\kappa+1} [4(v_B' - v_D') + (v_E' - v_C')] \quad (2-75)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \cdot \frac{G}{\kappa+1} [4(u_B' - u_D') + (u_E' - u_C')] \quad (2-76)$$

ここで、 $L$ はき裂先端要素長、 $G$ はせん断弾性係数、 $u'$ 、 $v'$ は弾性解析により得られた変位（図2-34参照）で、 $\kappa$ は次式で表わされる。ただし、 $\nu$ はポアソン比である。

$$\kappa \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \\ (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \end{cases}$$

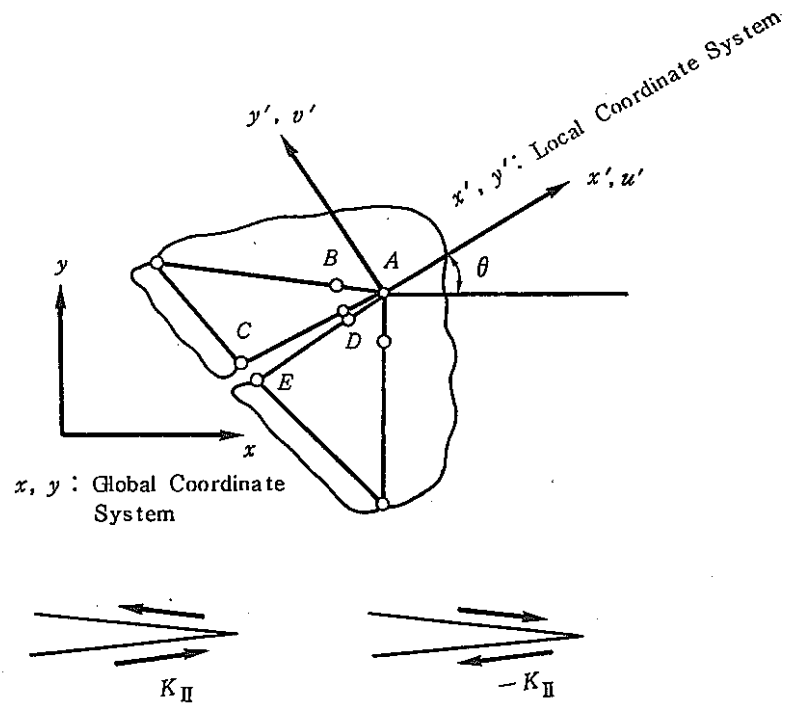


図2-34 き裂先端部の局所座標系及び節点

• き裂進展方向の予測

$K_I$ 、 $K_{II}$ が存在するような混合モード下でのき裂進展解析を行なうためには、各解析ステップでのき裂の進展方向の決定方法には主応力最大の方角、ひずみエネルギー密度最小の方角等があるが、後者は方向をニュートンラプソン法により計算しなければならず、収束計算を必要とする。したがってFINASでは直接に方向を評価できる主応力最大の方角による方法、すなわち式(2-77)を採用する。

$$\theta = \pm \cos^{-1} \frac{3K_{II}^2 + K_I \sqrt{8K_I^2 + K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \quad (2-77)$$

ただし、 $\theta$  の符号は図2-34に示される $K_{II}$ の符号に一致する。なお、この時の $K$ 値は次式で評価する。

$$K = \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (2-78)$$

• き裂進展量の推定

疲労き裂を考慮するき裂進展解析では、き裂進展速度  $da/dN$  の評価式を用いて、ある荷重頻度(荷重繰返し回数)に対するき裂進展量を推定することができる。き裂進展速度の評価式は一般に式(2-79)で与えられ、右辺の  $f(\Delta K)$  の定式が Paris, Tail, Forman 等により提案されている。

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K) \quad (2-79)$$

ここで、 $\Delta K$  は応力拡大係数範囲である。

FINAS では式(2-79)の右辺に対する種々のき裂進展速度の評価式を内部に組み込み、使用者がその式番号とその式の材料パラメータを与えることにより利用できるようにする。

• 荷重頻度の取扱い

前て述べたき裂進展速度の評価式(2-79)を差分的に書き直すと次のようになる。

$$\frac{\Delta a_i}{\Delta N_i} = f(\Delta K_i) \quad (2-80)$$

ここで、 $\Delta a_i$ 、 $\Delta N_i$ 、 $\Delta K_i$  は  $i$  番目のステップのき裂進展量、荷重頻度、応力拡大係数範囲を表わす。

FINAS では荷重頻度は任意ブロック荷重頻度として取り扱い、変動荷重を一定振幅荷重に置き換えて、式(2-80)の  $\Delta K_i$  を次式で評価する。

$$\Delta K_i = K_{\max_i} - K_{\min_i} \quad (2-81)$$

ここで、 $K_{\max_i}$ 、 $K_{\min_i}$  は  $i$  番目のステップにおける一定振幅荷重に対する応力拡大係数の最大値、最小値を表わす。

• 入力データ

線形破壊力学に基づいた疲労き裂進展解析機能の定式は前に述べたが、さらにこの解析機能の全体をコントロールするデータが必要となる。それらのデータとしては、使用者の指定による最大繰返しステップ数( $N_{\max}$ )、初期き裂長( $a_{ini}$ )、最終き裂長( $a_{\max}$ )、破壊じん性値( $K_{IC}$ )、き裂進展速度式の番号および材料パラメータ、き裂進展速度のしきい値( $\Delta K_{th}$ )があり、使用者がこれらのデータを入力可能とする。

また、疲労き裂を予測するための荷重頻度データ、すなわち各解析ステップにおける一定振幅巾のブロック荷重( $\Delta P_i$ )およびサイクル数( $\Delta N_i$ )を与える。

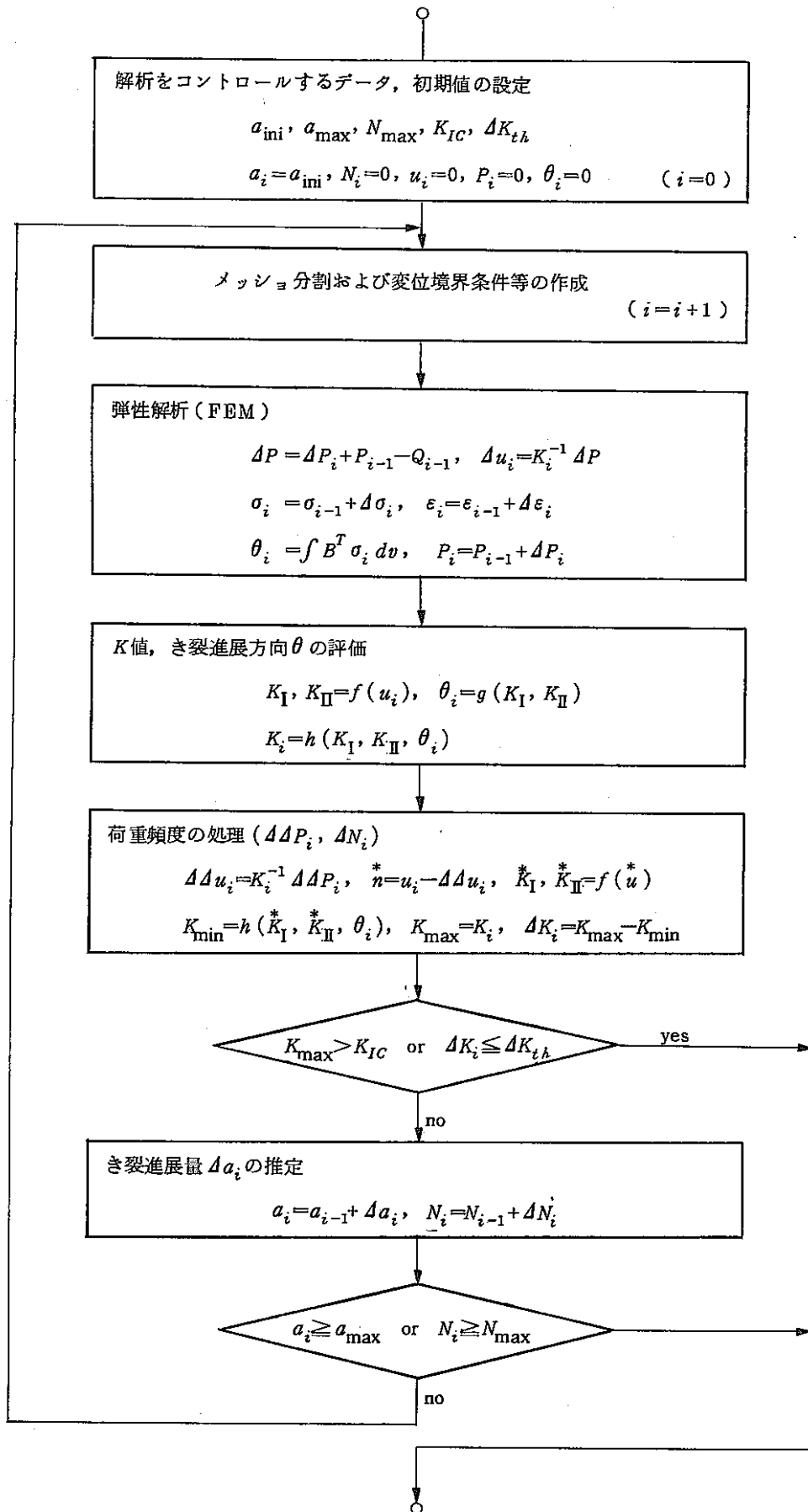


図2-35 線形破壊力学による疲労き裂進展解析のアルゴリズムの流れ

• 出力データ

従来の変位、応力、ひずみの他に、各ステップにおける $K$ 値、き裂進展方向 $\theta$ 、応力拡大係数の最大直 $K_{\max}$ 、最小値 $K_{\min}$ 、応力拡大係数範囲 $\Delta K_i$ 、き裂進展量 $a_i$ 、 $\Delta a_i$ およびサイクル数 $N_i$ 、 $\Delta N_i$ を出力する。

(ii) き裂進展に伴う要素分割

き裂進展解析においては、き裂先端部について適切な要素モデルを用いて高精度の応力を求め、その解を用いてき裂進展量および進展方向が決定される。次にき裂の進展に応じてき裂先端を移動させ、新たなき裂先端部について、高精度応力解析を行なうことになる。したがってき裂の成長に伴って有限要素メッシュの変更が必要となる。

ここでは、メッシュ分割の変更により、解析モデル全体の要素数および節点数が増減し、かつ要素の結合状態が変化する場合について、現バージョン FINAS のプログラム上の問題点を考察する。

FINAS では、通常の有限要素法解析の手順に従って要素剛性マトリックスの計算、全体剛性マトリックスの組立て、境界条件処理、連立一次方程式の求解、要素応力-ひずみの算出と評価、といった一連の手続きを実行するのに必要となるすべての情報を、データブロックというファイル単位にまとめて記憶している。以下に、関連するデータブロックの内容と使用目的を説明する。

1) EST (要素サマリーテーブル)

各要素ごとの解析中変化しない情報で、次のものを含む。

- 要素タイプコード、材料識別番号、節点数、自由度数
- 板厚・断面積等の幾何形状データ
- 初期状態での節点座標値
- 各節点の全体剛性マトリックスにおける行番号

要素剛性マトリックスの計算および応力-ひずみの評価の際使用される。

2) EIV (要素内部変数のテーブル)

各要素の内部点における応力、各種のひずみ成分および内部状態変数をまとめたものであり、負荷ステップのループの中で更新される。

3) ADIC (全体剛性マトリックス・アセンブリーディクショナリー)

各節点に結合している要素のリスト、全体剛性マトリックスの組立て時に使用される。

4) EQIX (節点番号と自由度番号の対応表)

節点番号と、その節点が位置している全体剛性マトリックスにおける行番号の対応表である。節点変位および反力の出力時に使用される。

5) CONE (要素結合データ)

各要素の結合状態を示すテーブルである。等価なデータは、ESTにも含まれており、解析で直接に使用されるものではないが、応力-ひずみのコンター図作成時および等価節点応力-ひずみを出力する際に使用される。

6) NODC (節点座標データ)

各節点の座標値を含む。等価なデータは EST にも含まれており、解析で直接に使用されるものではないが、変位図およびコンター図、ベクトル図の出力時に使用される。

7) ECT (要素結合データ)

各要素の結合状態を、自由度番号を基に示したものである。ADICと合わせて、全体剛性マトリックスの組立て時に使用される。

8) BCDT (変位境界条件データテーブル)

ユーザーが入力した BOUNDARY データ、および FASTENING データを、内部自由度番号順に整理したものである。各負荷ステップ毎に、HISTORY とデータからの引用を受けて、指定された識別番号を持つデータが使用される。

9) LDDT (負荷データテーブル)

ユーザーが入力した FORCE データのうち、節点集中荷重については、内部自由度番号順に、要素分布荷重については、内部要素順序番号の順に整理したものである。各負荷ステップ毎に、HISTORY データからの引用を受けて必要なものが選択され使用される。

10) TMPD (温度増分データテーブル)

ユーザーが入力した TEMPERATURE データを、内部要素順序番号順に整理したものである。各負荷ステップ毎に、HISTORY データからの引用を受けて、指定された識別番号を持つデータが選択・使用される。

FINAS では計算効率の観点から、「負荷ステップのループ内で不変なものはすべて、ループの外で計算しておく」という方針でプログラムが作られている。前述のデータブロックについても、EIV を除くすべてのデータブロックは、負荷ステップのループに先立って作成される。そして、これらデータブロック内のデータ項目では、もとのデータ入力時に用いられていた節点番号はもはや存在せず、すべてが自由度番号あるいは内部要素順序番号に変換されている。これは、負荷ステップのループ内で、繰り返し対応表を検索するという無駄を省くためである。

以上、説明したように、現バージョン FINAS では、負荷ステップのループ内では、総節点数(自由度数)および要素数は不変であるという前提で、データブロックおよび機能モジュールが構成されている。したがって、負荷ステップのループ内で節点数、要素数が変化する場合には、

- 1) 変化の都度、前述のデータブロックすべてを再作成する。あるいは、
- 2) 前述のデータブロックのすべてを、自由度番号や内部要素順序番号に依存しない形に再構成する。

の、いずれかを行なわなくてはならない。

- 1) の再作成とする場合、現状でループの外側で行っていた手続きの大半が、ループ内で繰り返し実行されることになり実行時の効率が低下する。また、

- 2) の再構成とする場合、プログラムの改造に多大な労力が必要となる。

いずれにしても、現状での「節点数、要素数は不変」という前提を覆すことは、現実的でないと考えられる。

したがって、FINAS のき裂進展解析機能においては、き裂の進展に伴う陽な形でのメッシュの変更は断念し、替りに図 2-36 に示すような、き裂進展先端要素を導入する。

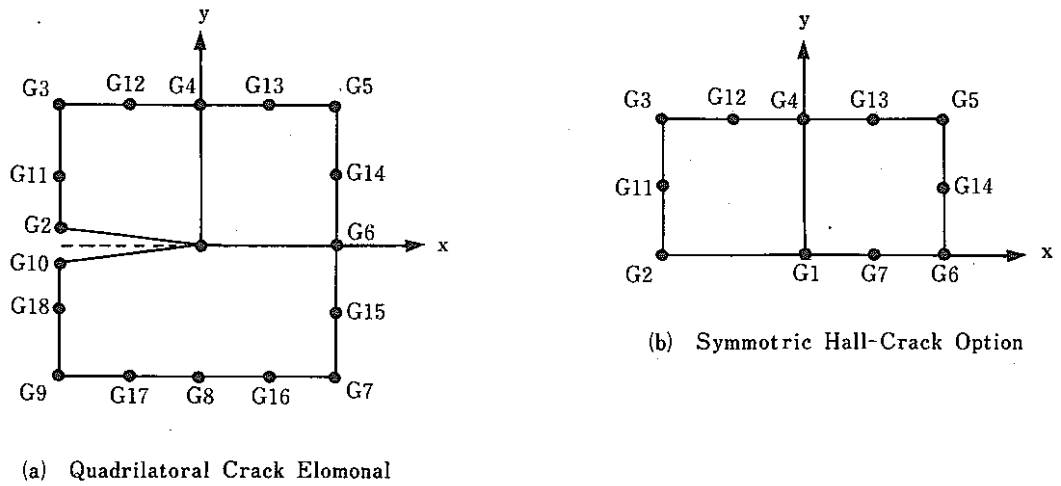


図2-36 き裂先端要素

この要素は、ソルバーモジュールから見た場合には、通常の要素と差異はなく、他の要素と同様に全体剛性マトリックスに組み込まれる。一方、要素剛性マトリックス計算モジュールから見た場合は、この要素は一種のスーパーエレメント、あるいは部分構造であり、例えば図2-37(a)に示されるような要素分割、あるいはもっと詳細な図2-37(b)のような要素分割で構成されているものとする。この要素の要素剛性マトリックス作成ルーチンは、ミニチュア版 FEM プログラムといった感じで、個々の構成要素の剛性マトリックスを重ね合わせ、内部節点自由度を消去し、周辺の結合節点に縮合したものをソルバーモジュールに引き渡す。

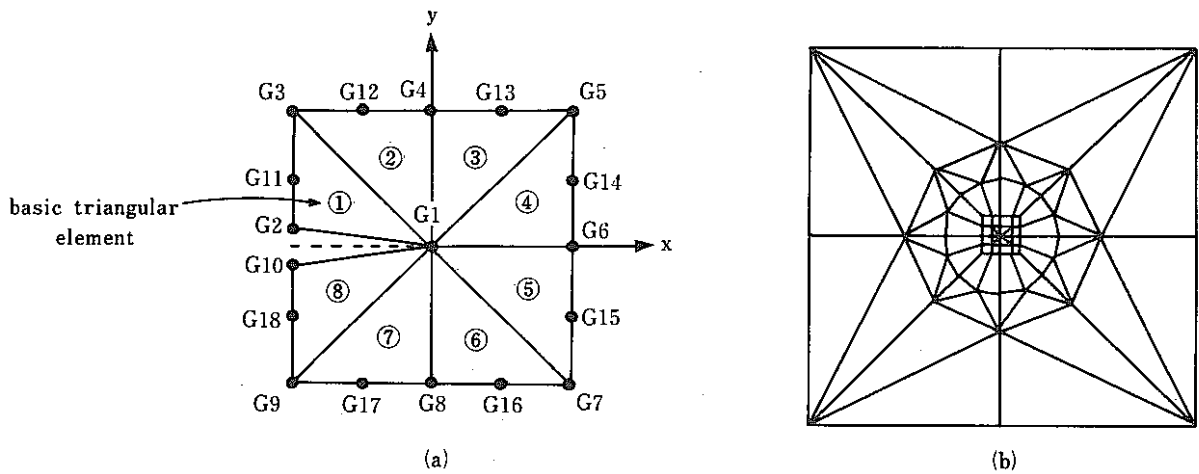


図2-37 内部メッシュ分割の例

以上のような方式にすれば、FINASプログラムの既存部分に大きな影響を与えることなく、き裂進展解析機能を組み込むことができる。ただし、き裂の進展する範囲は、き裂先端要素の内部に限定される点が問題として残る。



### (3) 面接触解析機能

接触問題は構造解析の様々な分野において一般的な現象であるが、大変形挙動や摩擦特性などの境界非線形挙動を数値解析でシミュレーションすることは困難な問題である。Hertzの解法で代表される理論的解法は対象とする形状、前提とする仮定のために実用上の制約が多いために、有限要素法で代表される数値計算による解析法が提案されている。代表的なものとしてはラグランジュ乗数法による接面拘束を与える方法とペナルティ法として接面拘束を与える方法に大別される。

ラグランジュ乗数法は物体間の接触力条件と変位拘束条件をラグランジュ乗数を拘束パラメータとして全体支配方程式へ組み入れるものである。このために、接触状況により支配方程式の元数が増減し、最終的に連立方程式の正定値性や対称性が保証されないので、求解過程は特別な工夫が必要である。

ペナルティ法は、ラグランジュ乗数法での数値計算上の問題を回避する方法として考えられたもので、一種の近似解法であり、接面拘束を与えるペナルティ係数の値を適切に入力すること、接触モデルと離反モデルなどでのモデル化などで使用上の問題点が多い。従来からの非線形パネを用いて接触をモデル化する方法、例えばFINASのCONT 2要素などはペナルティ法の適用例である。

FINASの面接触解析機能はラグランジュ乗数法により定式化し、接触作用力をラグランジュ乗数として導入する。支配方程式の求解過程は変位増分求解フェイズと接触力増分フェイズに分離した2段階相互解析法と収束計算を組み合わせた高精度解法を用いている。前年度では平面構造、軸対称構造、3次元構造での面接触解析のための2節点辺要素と4節点面要素を開発し、固着接触と完全すべり問題の解析機能を開発した。本年度はより一般的な面接触問題を取り扱うために大変形効果、材料非線形効果、摩擦すべり効果等を考慮した汎用機能への改良を行なった。特に材料非線形問題では収束計算の中での接触力の再配分に伴い部分的に除荷領域が発生し、従来の除荷スキームでは解が不安定な発散となる場合が考えられるので、除荷アルゴリズムの改良も行なった。

摩擦を考慮した接触機能では接触力の拘束条件の中に摩擦力を考慮するので変位拘束条件とは対称形とならないことと、摩擦力の方向は物体間の相対的なすべり方向により仮定するので収束計算の中で一義的に定義することは困難である。FINASでは初期状態としては固着を仮定して計算し、すべり接触となる節点については完全すべりとして接触力を計算し、収束計算の最終ステップにおいてすべり方向を求め摩擦力を与えるアルゴリズムを開発した。

#### (計算例-1)

弾塑性大変形面接触問題の解析例として円板塑性加工のベンチマーク問題の解析を行なった。

##### 解析モデル

円板の縁全周をリング状固定のダイで拘束し、中央部より球頭ポンチにより押し込みを行なう。構造としては円板、リング状固定ダイ、球頭ポンチの接触連成問題であり、ポンチに強制変位を与える。

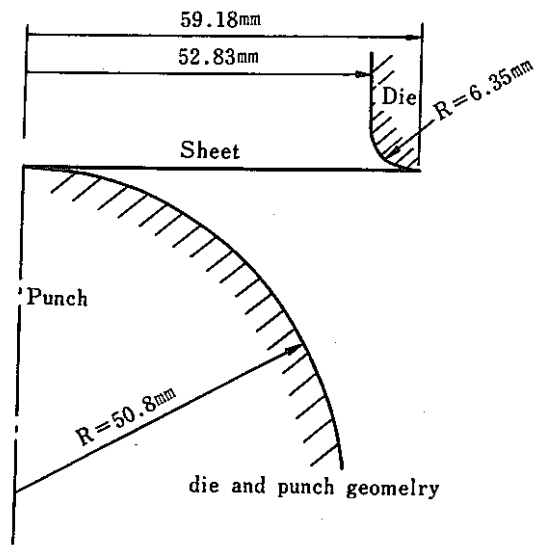
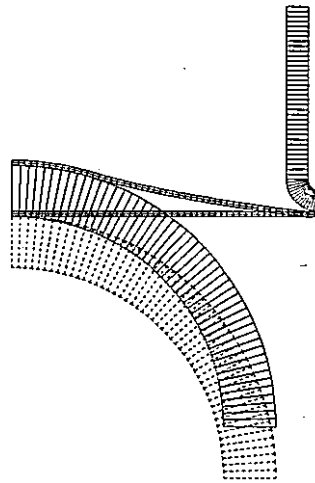


図2-38 構造モデル

解析結果

図2-39, 2-40 はポンチ押し込み量 10mm および 35mm における変形図と加工材にそった子午線方向のひずみ分布履歴を示している。文献8) の仲町等の計算結果を併せて示した。

FINAS  
DEFORMED SHAPE



Z  
R

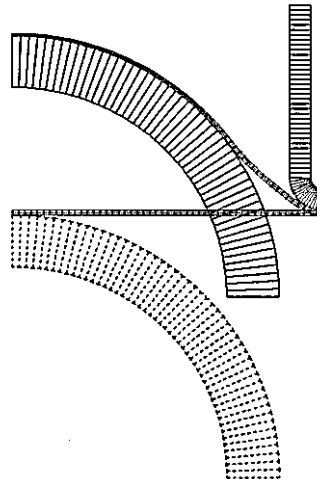
STEP NO. 700

DISP. SCALE 20.0000  
GEOM. SCALE 20.0000

PLATE FORMING

図2-39(a) 押し込み量 10mmでの変形図

FINAS  
DEFORMED SHAPE



Z  
R

STEP NO. 1325

DISP. SCALE 20.0000  
GEOM. SCALE 20.0000

PLATE FORMING

図2-39(b) 押し込み量 35mmでの変形図

FINAS

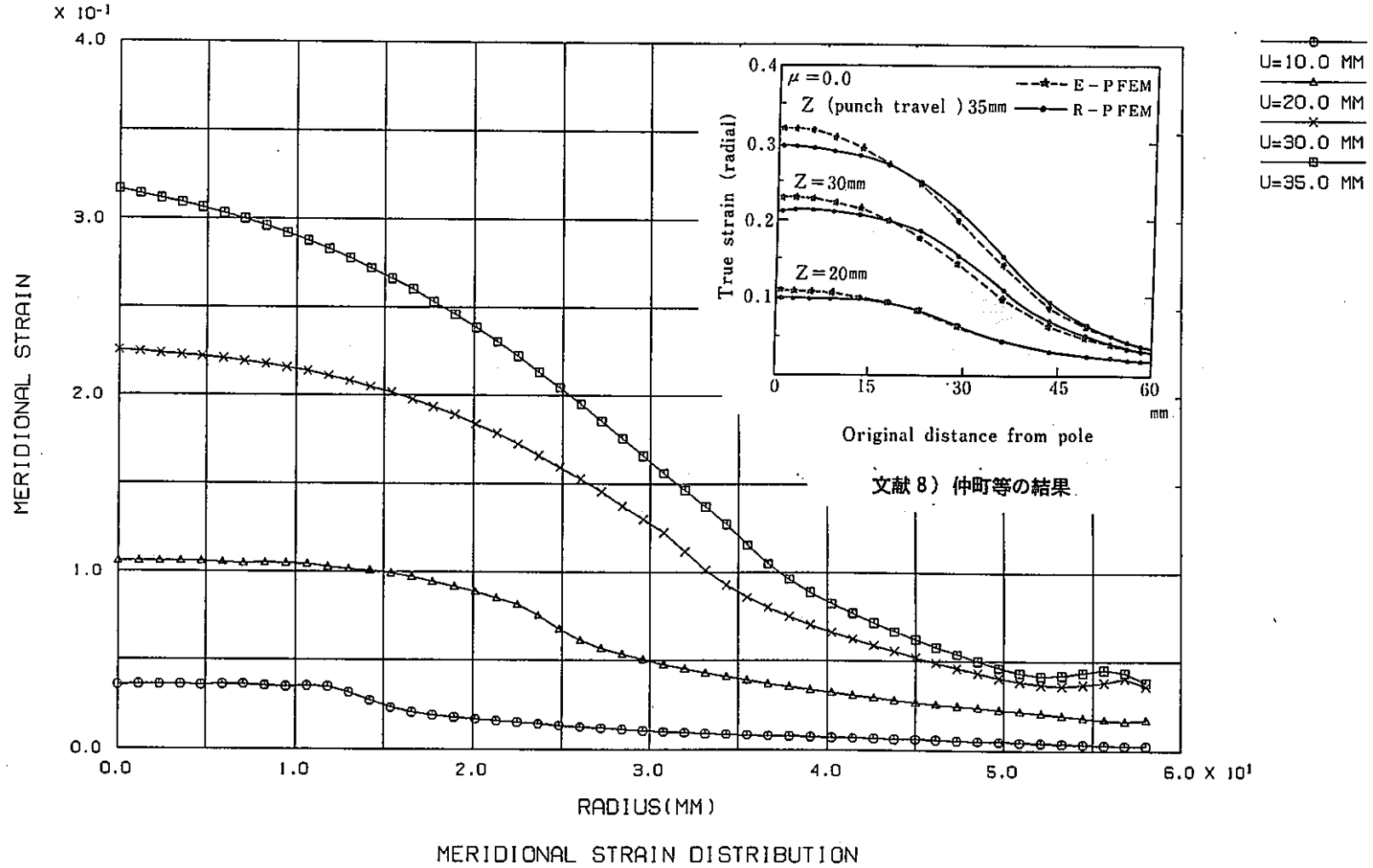


図2-40 子午線方向ひずみ分布図

## (計算例-2)

摩擦接触問題の解析例としてシェル構造の傾面が相互に接触する構造を摩擦接触と完全すべりの2ケースについて解析した例を示す。

### 解析モデル

シェルの箱形形状の2構造が各傾面で接触する。一方をY方向について負の強制変位を与える。摩擦則としてはCoulomb則を用い摩擦係数は零である完全すべりのケースと $\mu=0.4$ とする摩擦すべりのケースを解析する。

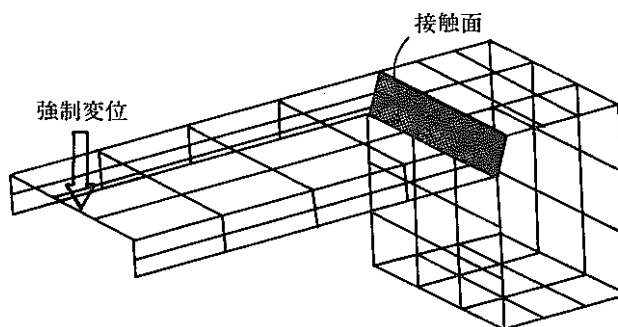


図2-41 構造モデル

### 解析結果

図2-42, 2-43に完全すべりケースでの変形図と摩擦すべり( $\mu=0.4$ )の変形図を示す。

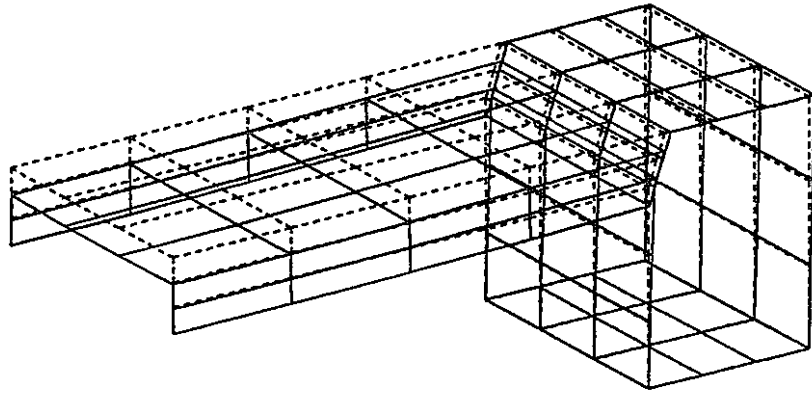


図2-42 完全すべり ( $\mu=0.0$ ) の変形図

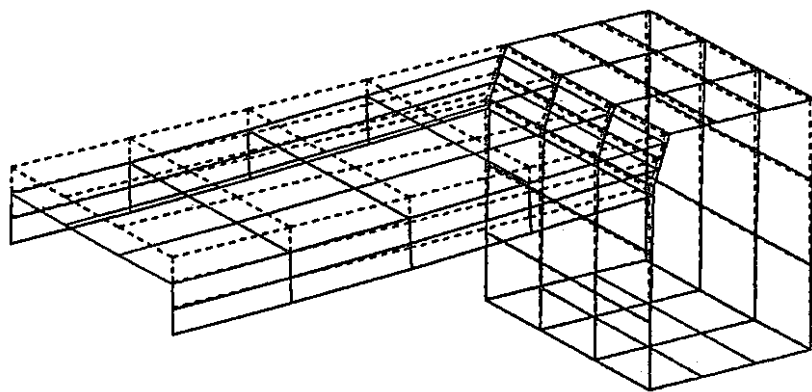


図2-43 摩擦すべり ( $\mu=0.4$ ) の変形図

〔参考文献〕

- 1) N. Okamoto, M. Kakazawa, "Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 14, pp. 337~357 (1979).
- 2) B. Nour-omid, P. Wriggers, "A two level iteration method for solution of contact problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 54, pp. 131~144 (1986).
- 3) K. J. Bathe, A. Chaudhary, "A solution method for planar and axisymmetric contact problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.* vol. 21, pp. 66~88 (1986).
- 4) P. R. Heyliger, J. N. Reddy, "A mixed computational algorithm for plane elastic contact problems -I. formulation", *Comput. Struct.*, vol. 26, pp. 621~634 (1987).
- 5) Zhi-hua-Zhong, L. Nilsson, "A contact searching algorithm for general 3-D contact-impact problems", *Comput. Struct.*, vol. 34, pp. 327~335 (1990).
- 6) J. Böhm, "A comparison of different contact algorithms with applications", *Comput. Struct.*, vol. 26, pp.207-221 (1987).
- 7) S. K. Pascoe, J. E. Mottershead, "Two new finite element contact algorithms", *Comput. Struct.*, vol.32, pp.134-144 (1989).
- 8) 仲町英治, "板材成形", 塑性と加工(日本塑性加工学会誌), vol.3, pp.311-316 (1989).

#### (4) 荷重増分自動決定機能

構造解析の非線形問題としては、材料非線形挙動、構造と荷重の幾何学的非線形挙動、接触問題を含めての境界条件の非線形挙動などが考えられるが、これらの問題を数値計算により解析を行なう場合は、一般的には増分形式による接線剛性法を用いることになる。非線形解析の精度は適切なモデル化と特に増分形での負荷ステップの定義と収束計算による誤差の改善が特に重要であり、非線形問題を簡便に解析する手段として、解析で得られる内部状態量より解析を進めるための荷重増分を自動的に決定し、計算を進める機能が要望されている。

FINASの荷重増分自動決定機能は幾何学非線形問題に応用されている弧長増分法を組み入れている。解析のアルゴリズムとしては荷重-変位空間での弧長を満足するように収束計算の中で荷重修正パラメータに拘束を与え、収束を求める方法を用いている。例えば図2-44のL点で示すように荷重限界点を含む収束計算では弧長拘束より得られる荷重修正パラメータは残差荷重項による変位増分の変動が大きくなり、剛性を反映した符号となることは一義的に成り立つことはない。また、材料非線形問題を弧長増分法で解析する場合でも、収束計算の中で弧長を満足するように荷重レベルを増減するために負荷と除荷をくり返す場合が考えられる。

荷重増分自動決定機能の改良として、収束計算の中での荷重修正パラメータを弧長増分拘束で求め、特に荷重限界点近傍では剛性状態より仮定するように修正した。また荷重ステップを進めるための弧長増分と荷重増分パラメータの推定アルゴリズムを改良した。未収束の解析ステップについては弧長増分と荷重増分パラメータを縮小して再度計算を行うのであるが、この細分化アルゴリズムも改良し、初期値よりの細分化を行うように変更した。図2-45は今回改良を行った荷重増分自動決定機能についてのアルゴリズムを示した。

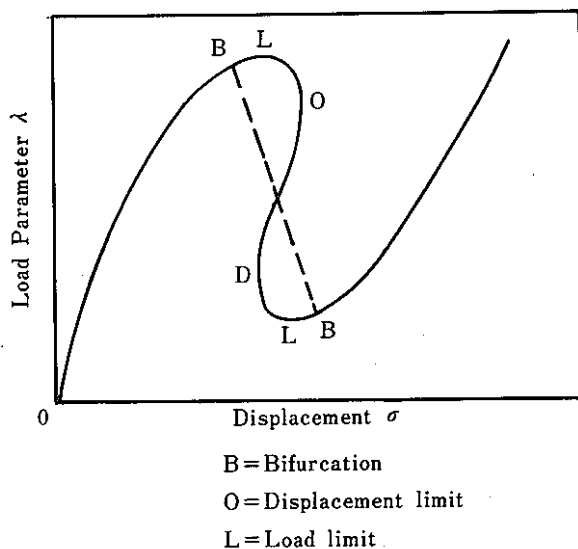


図2-44 構造物の静的荷重経路



START

(初期値)

$$\Delta\lambda_1 = 1/100, \{P\}, i=1$$

(ステップ1)

$$\Delta\lambda^1 = \Delta\lambda_1, \lambda^1 = \Delta\lambda_1$$

$$\Delta\{u\}^1 = [K]^0 \Delta\lambda^1 \{P\}$$

$$\Delta l^1 = (\Delta\{u\}^{1T} \Delta\{u\}^1 + \Delta\lambda'^2)^{1/2}$$

$$\Delta l_{\max} = 10 \Delta l^1, \Delta l_{\min} = 0.5 \Delta l^1$$

(ステップ2のパラメータ)

$$\text{線形挙動: } \Delta l^2 = 2 \Delta l^1, \Delta\lambda_0^2 = 2 \Delta\lambda^1$$

$$\text{非線形挙動: } \Delta l^2 = \Delta l^1, \Delta\lambda_1^2 = \Delta\lambda^1$$

解析ステップ  $i=i+1, \Delta\lambda^i=0, \Delta\{u\}^i=0$

収束計算ステップ  $j=j+1$  (初期ステップの場合  $j=1$ )

(変位増分の計算)

$$\Delta\lambda^i = \Delta\lambda^{i-1} + \Delta\lambda_j^i, \lambda^i = \lambda^{i-1} + \Delta\lambda_j^i$$

$$\Delta\{u\}_j^i = [K]_{j-1}^i (\lambda^i \{P\} - \{R\}_{j-1}^i)$$

$$\Delta\{u\}^i = \Delta\{u\}^{i-1} + \Delta\{u\}_j^i$$

(荷重パラメータ  $\Delta\lambda_{j+1}^i$  の計算)

$$\Delta\lambda_{j+1}^i = (\Delta l^{i2} - \Delta\{u\}^{iT} \Delta\{u\}^i - \Delta\lambda^{i2}) / (\Delta\{u\}^{iT} \Delta\{u\}_j^i / \Delta\lambda_j^i + \Delta\lambda^i)$$

(遷移域の場合)

$$\text{剛性 正} \rightarrow \text{負: } \Delta\lambda_{j+1}^i = -|\Delta\lambda_{j+1}^i|$$

$$\text{剛性 負} \rightarrow \text{正: } \Delta\lambda_{j+1}^i = |\Delta\lambda_{j+1}^i|$$

(荷重パラメータの境界)

$$\lambda^i + \Delta\lambda_{j+1}^i > 1.0 \text{ のとき: } \Delta\lambda_{j+1}^i = 1.0 - \lambda^i$$

C

B

A

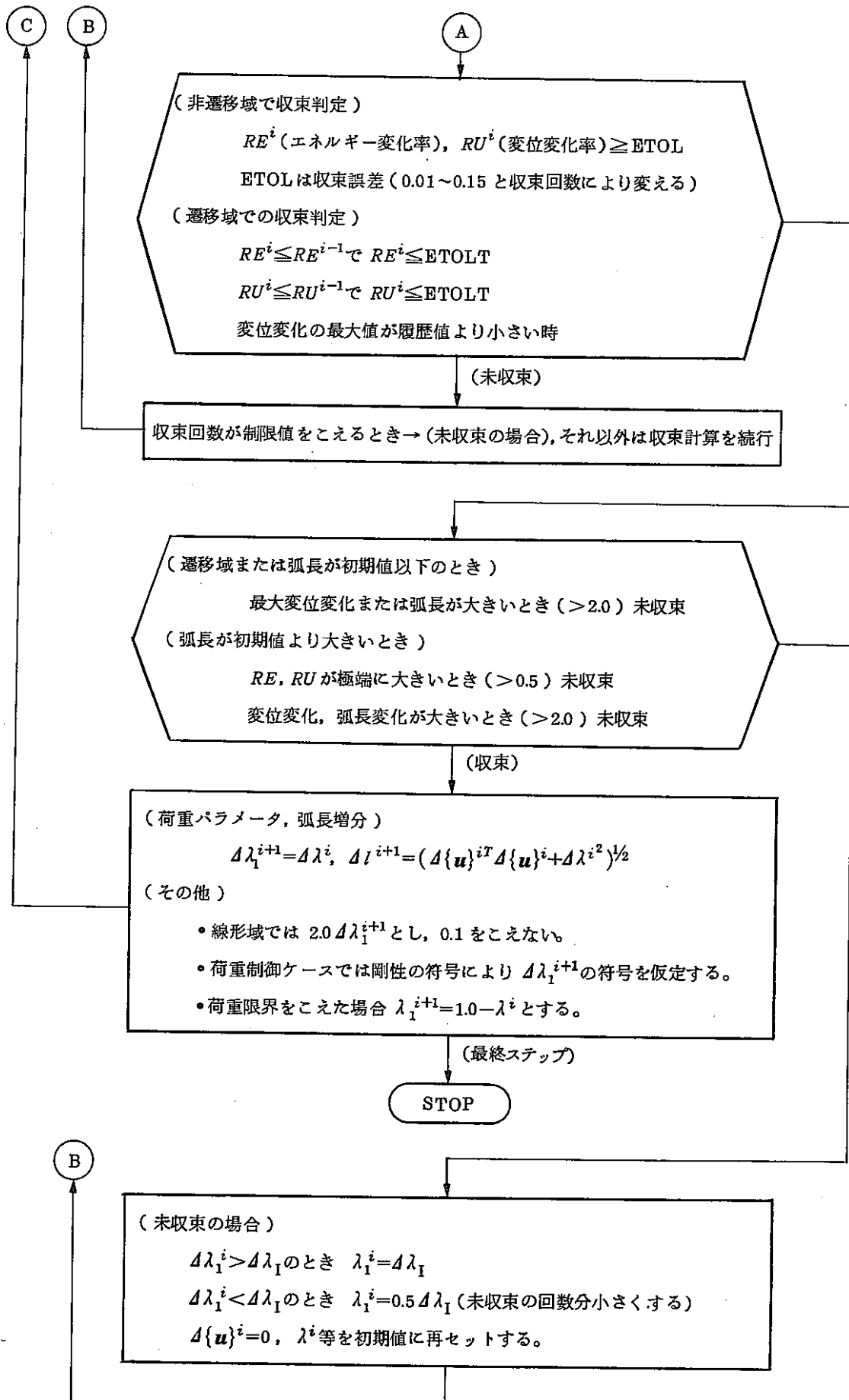


図2-45 荷重増分自動決定機能の流れ

〔参考文献〕

- 1) M. A. Crisfield, " Solution procedures for nonlinear structural problems ", Recent advances in non-linear computational mechanics , Pineridge press , 1982.
- 2) K. L. Bathe and E. N. Drorokin , " On the automatic solution of nonlinear finite element equations ", Comput. structures , 17, 1983.
- 3) P. X. Bellini, A. Chulya, "An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations", Comput. Structures, 26, pp.99-100, 1987.
- 4) C. T. Tsai, A. N. Paladzotto, "A modified Riks approach to composite shell snapping using a high-order shear deformation theory", Comput. Structures, 35, No.3, pp.221-226, 1990.
- 5) M. J. Clarke, G. J. Hancock, "A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis", Int. j. numer. methods engng, 29, 1365-1391 (1990).

### 3. 動的解析

#### (1) 流体の大変位運動解析機能の調査

##### a. ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) 法の混合有限要素定式

FSI 定式にあたり空間領域を  $R_x$ , 物質領域を  $R_X$ , 参照形状を考える参照領域  $R_X$  を導入する。領域  $R_x$  は領域  $R_x$  と  $R_X$  より ALE 的に変換される。もし  $R_X = R_x$  とすれば, Eulerian 表示となる。一方,  $R_X = R_x$  とすれば Lagrangian 表示である。

流体構造連成問題の支配方程式は次のように与えられる。

$$\frac{1}{B} P_{,t[x]} + v_{k,k} = 0 \quad \text{in } R_x \quad (3-1a)$$

$$\rho (v_{i,t[x]} + v_{ij} C_j) = -P_{,i} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i})_j + b_i \quad \text{in } R_x \quad (3-1b)$$

境界条件として,

$$v_i = g_i \quad \text{on } \partial R_x^g \quad (3-1c)$$

$$\tau_{ij} \eta_j = h_i \quad \text{on } \partial R_x^h \quad (3-1d)$$

$$c_j = \hat{v}_j - v_j \quad \text{in } R_x \quad (3-1e)$$

ここで,  $\rho$  は流体密度,  $B$  は体積弾性係数,  $\mu$  は動粘性係数,  $b_i$  は物体力 (これには sloshing 効果が含まれる),  $c_i$  は伝達速度 (convective velocity),  $P$  は圧力,  $\tau_{ij}$  は Cauchy 応力テンソル,  $\eta_i$  は領域  $\partial R_x$  の外向き単位ベクトル,  $g_i$  と  $h_i$  と境界条件として与えられる規定速度と規定表面力である。" $t[x]$ " は形状  $x$  での時間  $t$  についての偏微分を表わしている。",  $i$ " は空間微分  $\partial/\partial x_i$  である。

式 (3.1) の変分式 (弱形式) は次のようになる。

$$\int_{R_x} \frac{1}{B} \delta P P_{,t[x]} dR_x + \int_{R_x} \delta P v_{k,k} dR_x = 0 \quad (3-2a)$$

および

$$\int_{R_x} \rho \delta v_i v_{i,t(x)} dR_x + \int_{R_x} \rho \delta v_i v_{i,j} c_j dR_x - \int_{R_x} \delta v_{i,i} P dR_x + \int_{R_x} 2\mu \delta v_{(i,j)} v_{(i,j)} dR_x - \int_{R_x} \delta v_i b_i dR_x - \int_{\partial R_x^n} \delta v_i h_i d\Gamma_x = 0 \quad (3-2b)$$

式(3-2a)において $\delta \dot{P}$ は試験関数であり、要素内一定と仮定し、要素間では不連続となり、要素は単純な定要素とする。式(3-2b)では試験関数として $\delta v_i$ とし、境界 $\partial R_x^g$ で $\delta v_i = 0$ とする。

式(3-2)のマトリックス式は次のように表わされる。

$$\mathbf{M}^P \mathbf{P}_{n+1}^* + \mathbf{G}^T \mathbf{V}_{n+1} = 0 \quad (3-3a)$$

$$\mathbf{M}^f \mathbf{V}_{n+1}^* + \eta(\tilde{\mathbf{V}}_{n+1}) - \mathbf{G} \mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{K}_\mu \tilde{\mathbf{V}}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}^f = 0 \quad (3-3b)$$

ここで、 $\mathbf{M}^P$ はALE圧力マスマトリックス、 $\mathbf{M}^f$ はALE流体マスマトリックス、 $\mathbf{P}^*$ と $\mathbf{V}^*$ は $\mathbf{P}_{,t(x)}$ 、 $\mathbf{v}_{,t(x)}$ である。 $\eta$ は流体伝達節点慣性力ベクトル、 $\mathbf{K}_\mu$ は流体速度マトリックス(以下では省略する)、 $\mathbf{G}$ は流体域のダイバージェンス(divergence)演算マトリックス、 $\mathbf{f}^f$ は流体に作用する外荷重で、重力波(または sloshing)効果が含まれる。 $\eta$ は式(3-3a)と式(3-3b)では陰解法と陽解法を用い、 $\tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$ は $\mathbf{V}_{n+1}$ を最適に外挿して与える。

構造の運動方程式はLagrange形( $R_x = R_X$ )で表示する。一般的に次のように表わされる。

$$\mathbf{M}^S \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^e - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}} \quad (3-3c)$$

式(3-3c)を式(3-3a)と式(3-3b)へ組み入れFSI式を表わす。流体-構造面では、法線方向の適合条件を考慮する。 $\mathbf{a}_{n+1}$ は $\mathbf{V}_{,t(x)}$ の加速度である。式(3-3b)と式(3-3c)より次のFSI式が得られる。

$$\mathbf{M} \mathbf{V}_{n+1}^* + \eta(\tilde{\mathbf{V}}_{n+1}) + \mathbf{K}_\mu \tilde{\mathbf{V}}_{n+1} - \mathbf{G} \mathbf{P}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \quad (3-3d)$$

ここで、

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^S + \mathbf{M}^f, \quad \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{f}^S + \mathbf{f}^f \quad (3-3e)$$

式(3-3a)の流体の連続方程式は不変であり、式(3-3d)は対角質量マトリックスを仮定する。

#### • 定式化の要点

- (i) 流体-構造連成面は、法線成分の適合条件を与える(通常の有限要素の組立て法で評価する)。
- (ii) 陰解法-陽解法の混合法を式(3-2)を適用し式(3-3)が得られ、 $n$ は時間ステップ番号である。 $\tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$ は $\mathbf{V}_{n+1}$ を最適に外挿して求める。計算過程では、台形則積分と、 $\mathbf{M}$ -ALEマスマトリックスとして対角形を用いる。
- (iii) 式(3-3)の解法として、陰解法-陽解法混合法を用いる。
- (iv) 流体運動が微小とすれば、伝達項 $\eta$ は加速度項に比較して省略可能であり、形状 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{X}$ は一致する。この

仮定で、重力波の効果は perturbation 法 (自由表面での釣合い) で近似できる。

(V) 非圧縮性流体を仮定すると、式 (3.3a) の連続の方程式は  $G^T V_{n+1} = 0$ 、体積弾性係数  $B \rightarrow \infty$  である。

(VI) 線形弾性体では  $f_{n+1}^{\text{int}} = K^S d_{n+1}$  で、 $K_S$  は構造の剛性マトリックスである。

#### b. 陰-陽解法と陰-陰解法

式 (3.3) に予測子修正子 Newmark- $\beta$  法を適用し、次式を得る。

$$B a_{n+1} = \hat{f}_{n+1} + G P_{n+1} \quad (3-4a)$$

ここで、

$$B = M + \beta \Delta t^2 K_S \quad (3-4b)$$

$$\hat{f}_{n+1} = f_{n+1}^{\text{ext}} - f_{n+1}^{\text{int}}(\tilde{d}_{n+1}) - \eta(\tilde{V}_{n+1}) - K_\mu \tilde{V}_n \quad (3-4c)$$

$$\tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta t V_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 a_n \quad (3-4d)$$

$$\tilde{V}_{n+1} = V_n + (1-r) \Delta t a_n \quad (3-4e)$$

$n+1$  ステップは次のように求まる。

$$a_{n+1} = \hat{a}_{n+1} + a_{n+1}^P \quad (3-5a)$$

ここで、

$$\hat{a}_{n+1} = B^{-1} \hat{f}_{n+1} \quad (\text{構造運動, 流体の慣性と外荷重による加速度}) \quad (3-5b)$$

$$a_{n+1}^P = B^{-1} G P_{n+1} \quad (\text{流体圧力による加速度}) \quad (3-5c)$$

$$V_{n+1}^* \text{def} = a_{n+1} \quad (3-5d)$$

$$V_{n+1} = \tilde{V}_{n+1} + r \Delta t a_{n+1}^P \quad (3-5e)$$

$$d_{n+1} = \hat{d}_{n+1} + \beta \Delta t^2 a_{n+1}^P \quad (3-5f)$$

$$\hat{V}_{n+1} = \tilde{V}_{n+1} + r \Delta t \hat{a}_{n+1} \quad (3-5g)$$

$$\hat{d}_{n+1} = \hat{d}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \hat{a}_{n+1} \quad (3-5h)$$

$\mathbf{a}_{n+1}$ ,  $\mathbf{V}_{n+1}$ ,  $\mathbf{d}_{n+1}$  (式3-5a, 3-5e, 3-5f)を更新するために, 式(3-5c)の  $\mathbf{a}_{n+1}^P$  を求める。式(3-5e)を連続式(3.3a)へ代入し次式が得られる。

$$\mathbf{M}^P \mathbf{P}_{n+1}^* + \tau \Delta t \mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^P \quad (3-6a)$$

ここで,

$$\mathbf{f}_{n+1}^P = -\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{V}}_{n+1} \quad (3-6b)$$

式(3-6a)は陰解法または陽解法時間積分アルゴリズムで解くことができる。 $\mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G}$ は流体-構造連成面のフルマトリックス形であるので, 陰解法スキームは利点が小さい。構造に比較して流体の臨界時間ステップは大きくとれるので, 式(3-6a)の時間積分として陽解法スキームが適用できる。また, 構造部分は効率のために陰解法により計算する。

式(3-6a)について Euler 前進時間積分を用いると,  $\tau = \frac{1}{2}$  となり臨界時間ステップは次のように与えられる。

$$\Delta t_{\text{crit}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{l_F}{c_F} \quad (3-7)$$

ここで,  $l_F$  と  $c_F$  は流体要素のメッシュ長さおよび流体の波動速度 ( $c_F = \sqrt{B/\rho_F}$ ) である。

式(3-6a)は一次式であるので, RRK(Rational Runge Kutta)法で積分する。RRK法は陽解法であるが, 放物線型問題では無条件安定で2次の精度である。連成方程式の双曲型特性により, 式(3-3)は放物型であるが, 無条件安定性が失われる。論文の解析例で示されるように,  $1.12 l_F/\rho_F$  程度で安定した解が得られている。これは Euler 臨界ステップ  $0.707 l_F/\rho_F$  の1.6倍の時間ステップである。音波の挙動のために  $l_F/\rho_F$  より小さい時間ステップが要求される。音波伝播の流体-構造連成問題で有効である。

RRK陽解法では時間ステップあたり2段階で応答を評価する。これは冗長であるが, 流体についても構造についてもより安定した解が得られる。RRK法の手順は次のとおり。

$$\mathbf{M}^P \mathbf{P}_1^* + \tau \Delta t \mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P}_n = \mathbf{f}_{n+1}^P \quad (3-8a)$$

$$\mathbf{M}^P \mathbf{P}_2^* + \tau \Delta t \mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \left( \mathbf{P}_n + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{P}_1^* \right) = \mathbf{f}_{n+1}^P \quad (3-8b)$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{P}_1^* - \mathbf{P}_2^* \quad (3-8c)$$

$$\mathbf{e} = 2(\mathbf{P}_1^{*T} \mathbf{b}) \mathbf{P}_1^* - (\mathbf{P}_1^{*T} \mathbf{P}_1^*) \mathbf{b} \quad (3-8d)$$

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n + \Delta t \mathbf{e} / (\mathbf{b}^T \mathbf{b}) \quad (3-8e)$$

式(3-8)より  $\mathbf{P}_{n+1}$  を求め, 式(3-5)により  $\mathbf{a}_{n+1}$ ,  $\mathbf{V}_{n+1}$ ,  $\mathbf{d}_{n+1}$  を更新する。

• 定式化の要点

- (i) 非圧縮性流体では、 $M^P=0$  であるので式 (3-6) は次のように表わされる。

$$r \Delta t G^T B^{-1} G P_{n+1} = f_{n+1}^P \quad (3-9)$$

式 (3-9) のようなポアソン方程式では、CG法のような反復法が有効である。

- (ii) 線形流体の無条件安定時間積分は次のように示すことができる ( $n=K_\mu=0$ )。

- (a)  $a_{n+1}^*$  を次のように求める。

$$a_{n+1}^* = M^{-1} \hat{f}_{n+1} \quad (3-10a)$$

または

$$a_{n+1}^* = B^{-1} \hat{f}_{n+1} \quad (3-10b)$$

ここで、 $\hat{f}_{n+1}$  は式 (3-4c) で与えられる。式 (3-10b) の方が良い精度の解が得られる。しかし、前進消去と後退代入が必要であるので計算コストでは不利である。

- (b)  $\hat{V}_{n+1}$  を求める。

$$\hat{V}_{n+1} = \tilde{V}_{n+1} + r \Delta t a_{n+1}^* \quad (3-10c)$$

- (c) 無条件安定陰解法スキームで  $P_{n+1}$  を求める。

$$M^P P_{n+1} + r \Delta t G^T M^{-1} G P_{n+1} = f_{n+1}^P \quad (3-10d)$$

- (d)  $a_{n+1}$  を求める。 (3-10e)

$$B a_{n+1} = \hat{f}_{n+1} + G P_{n+1}$$

- (e)  $V_{n+1}$  と  $d_{n+1}$  を更新する。

$$V_{n+1} = \tilde{V}_{n+1} + r \Delta t a_{n+1} \quad (3-10f)$$

$$d_{n+1} = \tilde{d}_{n+1} + \beta \Delta t^2 a_{n+1} \quad (3-10g)$$



### c. 解析手順

時刻  $[0, T]$  について、陰解法 - 陽解法の時刻歴積分を行なう。解析手順は次のとおり。

- (1) 初期化,  $n=0, \mathbf{d}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{P}_0$
- (2) 式 (3.4b) の  $\mathbf{B}$  マトリックスの三角化
- (3) 時間ステップループ
- (4) 式 (3-4d) と式 (3-4e) により  $\tilde{\mathbf{d}}_{n+1}, \tilde{\mathbf{V}}_{n+1}$  を求める。
- (5) 式 (3-4c) より  $\hat{\mathbf{f}}_{n+1}$  を求める。
- (6) 式 (3-4b) より  $\hat{\mathbf{a}}_{n+1}$  を求める。
- (7) 式 (3-5g), 式 (3-5h), 式 (3-6b) より  $\hat{\mathbf{V}}_{n+1}, \hat{\mathbf{d}}_{n+1}, \mathbf{f}_{n+1}^P$  を求める。
- (8) 式 (3-6) より  $\mathbf{P}_{n+1}$  を求め, 式 (3-5c) より  $\mathbf{a}_{n+1}^P$  を求める。
- (9) 式 (3-5a), 式 (3-5e), 式 (3-5f) より  $\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{d}_{n+1}$  を更新する。
- (10)  $(n+1)\Delta t < T$  なら  $n \leftarrow n+1$       ステップ(3)へ  
 $(n+1)\Delta t \geq T$  終わり

#### • 定式化の要点

- (i) ステップ 2 において, 有効剛性  $\mathbf{B}$  は流体と構造を含み, 変位自由度に一般化される。ゼロ成分を除く, アクティブカラムソルバーが有効である。構造を陽解法で解くと,  $\mathbf{B}$  は対角マトリックスであり,  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G}$  は対称形バンドマトリックスである。
- (ii)  $\mathbf{a}_{n+1}$  の計算には 2 回の前進消去と後退代入が含まれる。
- (iii) RRK 法では  $\mathbf{P}_{n+1}$  の計算を 2 ステップで行なう。  $\mathbf{G}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P}$  は全体系を組み立てるのではなく,  $\mathbf{q} = \mathbf{G} \mathbf{P}$  を要素単位で求め,  $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{q}$  を求め,  $\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{P}}$  により得られる。よって  $\mathbf{P}_{n+1}$  の計算には 2 回の前進消去と後退代入が必要である。
- (iv) 構造部の無条件安定は,  $r \geq \frac{1}{2}$ ,  $2\beta \geq r$  である。  $r = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$  の陽解法 - RRK 陽解法は 2 次の精度であるが, 陰解法 - Euler 陽解法スキームは 1 次の精度である。
- (v) 陰解法 - 陽解法の安定解析は実施していないが, 次の臨界条件が与えられる。

$$2\beta \geq r \geq \frac{1}{2} \quad (3-11a)$$

$$\Delta t_{\text{cvit}} \leq \frac{1}{2} \frac{l_F}{c_F} \quad \text{Euler 法} \quad (3-12b)$$

$$\Delta t_{\text{cvit}} \leq \frac{l_F}{c_F} \quad \text{RRK 法} \quad (3-13)$$

(参考文献)

- 1) A. Huetra, W. K. Lui, "Viscous flow with large free surface motion", *Comp. Meth. Engng.*, vol. 69, pp.277-324 (1986).
- 2) W. K. Lui, H. Change, J. S. Chen, T. Belytschko, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol.68, pp.259-310 (1988).

## (2) 高精度無条件安定陽解法時間積分アルゴリズムの調査

非定常動的構造問題の無条件安定陽解法時間積分アルゴリズムを提案する。アルゴリズムの安定性のためにエネルギー保存法と連成したもので、精度改善のための収束計算を用いる。

直接積分法は、構造解析、流体力学、熱伝導などの工学問題の時刻歴解析法として広く用いられる。一般的な直接積分法は時間領域離散化問題への有限差分法の適用であり、微分方程式を代数方程式へ変換し数値計算を行なうものである。

動的構造解析は、工業分野では一般的な手法であり、商用有限要素法コードでは直接積分法を用意している。直接時間積分アルゴリズムは陰解法と陽解法の2つのカテゴリー。陽解法は各時間ステップの計算では連立方程式の求解を必要としないが、陰解法アルゴリズムでは必要である。

陽解法は陰解法に比べて数値的利点は明白である。一般的に陽解法は条件安定であるので、時間増分の幅に制約が与えられるので、陰解法より精度が劣るものである。

本調査では、新しいタイプの陽解法時間積分アルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは line search 法や preconditioned conjugate gradients 法 (PCG) などのエネルギー保存法を併用するものである。エネルギー保存法を用いた陽解法アルゴリズムは、時間増分幅の制約を回避するもので無条件安定スキームを与える。

本調査での無条件安定陽解法アルゴリズムは Newton-Raphson 法による繰返しアルゴリズムにより各ステップでの精度を改善している。初めに、直接時間積分法を概観し数値特性を検討する。次に、無条件陽解法アルゴリズムおよび高次陽解法アルゴリズムを説明する。

### a. Newmark- $\beta$ 法系の直接時間積分アルゴリズム

動的構造問題の有限要素法により次のような準離散化基本微分方程式が与えられる。

$$M\mathbf{a}(t) + C\mathbf{v}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3-14)$$

初期条件は次のように仮定される。

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (3-15)$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (3-16)$$

$$\mathbf{a}(0) = M^{-1} \{ \mathbf{F}(0) - C\mathbf{v}_0 - K\mathbf{u}_0 \} \quad (3-17)$$

ここで、 $M$ は質量マトリックス、 $C$ は減衰マトリックス、 $K$ は剛性マトリックス、 $\mathbf{F}(t)$ は時刻歴荷重ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{v}(t)$ 、 $\mathbf{a}(t)$ は節点変位、速度、加速度ベクトルである。

式(3-14)を時間積分するために次のように時間領域へ離散化される。

$$M\mathbf{a}_{n+1} + C\mathbf{v}_{n+1} + K\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (3-18)$$

ここで、 $(n+1)$ は離散化時間を示すもので、 $\mathbf{a}_{n+1}$ 、 $\mathbf{v}_{n+1}$ 、 $\mathbf{u}_{n+1}$ は $\mathbf{a}(t_{n+1})$ 、 $\mathbf{v}(t_{n+1})$ 、 $\mathbf{u}(t_{n+1})$ の近似値であり、 $t_{n+1}=(n+1)\Delta t$ で $\Delta t$ は時間ステップである。

式(3-18)は時間方向の差分式で表わされ、この差分方法により積分アルゴリズムが分類される。動的解析の時間積分法としてはNewmark- $\beta$ 法が一般的であり、次のように表わされる。

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1-2\beta) \mathbf{a}_n + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1} \quad (3-19)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t (1-r) \mathbf{a}_n + r \Delta t \mathbf{a}_{n+1} \quad (3-20)$$

$\beta$ と $r$ は安定化と解析精度のためのパラメータである。文献1)では無条件安定条件として $r \geq \frac{1}{2}$ 、 $\beta \geq (1+r)^2/4$ を与えている。また、 $\beta = \frac{1}{4}$ 、 $r = \frac{1}{2}$ は台形則であり、2次の精度(誤差は $O(\Delta t^2)$ )であり、他の値では1次の誤差オーダーである。

有限要素法プログラムでは、一般的に次のような予測子-修正子法を用いることが多い。

(Predictor phase)

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_n \quad (3-21)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}_n \quad (3-22)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n \quad (3-23)$$

(Solution phase)

$$\mathbf{M}^* \Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}_{n+1} \quad (3-24)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + r \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \quad (3-25)$$

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{M} \tilde{\mathbf{a}}_{n+1} - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (3-26)$$

(Corrector phase)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \Delta \mathbf{a} \quad (3-27)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + r \Delta t \Delta \mathbf{a} \quad (3-28)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a} \quad (3-29)$$

減衰マトリックス  $C$  がゼロで、質量マトリックス  $M$  が集中形であれば、 $\beta=0$  とすれば  $M^*$  は陽解法の場合と一致する。 $\beta=0$ 、 $r=\frac{1}{2}$  であれば条件安定であり、次のような臨界値を満足する必要がある。

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}} \quad (3-30)$$

ここで、 $\omega_{\text{max}}$  は構造の最高次の円固有振動数である。

次に Newmark- $\beta$  法をベースにした新しい直接時間積分アルゴリズムを説明する。これは無条件安定であり陰解法と同様の精度を有する。

#### b. 無条件安定陽解法直接時間積分アルゴリズム

Newmark- $\beta$  法 ( $\beta=\frac{1}{4}$ ,  $r=\frac{1}{2}$ ) を用いた陽解法を次に示す。

(Predictor phase)

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{a}_n \quad (3-31)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{a}_n \quad (3-32)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_{n+1} = \mathbf{a}_n \quad (3-33)$$

(Solution phase)

$$\bar{\mathbf{M}}^* \Delta \mathbf{a} = \mathbf{R}_{n+1} \quad (3-34)$$

$$\bar{\mathbf{M}}^* = \text{diag} \left( \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right) \quad (3-35)$$

(Corrector phase)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \frac{\Delta t^2}{4} \Delta \mathbf{a} \quad (3-36)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \Delta \mathbf{a} \quad (3-37)$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Delta \mathbf{a} \quad (3-38)$$

式(3-34)は  $\mathbf{M}^*$  の近似として  $\bar{\mathbf{M}}^*$  を仮定したものであり、陽解法アルゴリズムとなる。この近似は時間増分  $\Delta t$  について安定化制約を有する。これを解決するために求解過程に Newton-Raphson 法を組み入れる。

$$(1) \Delta \mathbf{a}^0 \leftarrow 0 \quad (3-39)$$

$$(2) i = 0 \quad (3-40)$$

$$(3) \mathbf{R}^i \leftarrow \mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{M}^* \Delta \mathbf{a}^i \quad (3-41)$$

$$(4) \Delta \Delta \mathbf{a} \leftarrow (\overline{\mathbf{M}}^*)^{-1} \mathbf{R} \quad (3-42)$$

$$(5) \Delta \mathbf{a}^{i+1} \leftarrow \Delta \mathbf{a}^i + \Delta \Delta \mathbf{a} \quad (3-43)$$

$$(6) \left| \mathbf{R} \right| / \left| \mathbf{R}_{n+1} \right| \leq \varepsilon \quad \begin{cases} \text{Yes : continue} \\ \text{No : } i \leftarrow i+1, \text{ go to 3} \end{cases} \quad (3-44)$$

line search 法や PCG 法を繰返し計算に用いることにより安定化が保証される。Newton-Raphson 法での line search 法は式 (3-43) を次のように仮定する。

$$(5) \Delta \mathbf{a}^{i+1} \leftarrow \Delta \mathbf{a}^i + S^* \Delta \Delta \mathbf{a} \quad (3-45)$$

ここで、 $S^*$  は次の  $G(S)$  関数をゼロとするものである。

$$G(S) = \Delta \Delta \mathbf{a}^T (\mathbf{R}^i - S \mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a}) \quad (3-46)$$

式 (3-46) より、 $S^*$  は次のように計算される。

$$S^* = (\Delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{R}^i) / (\Delta \Delta \mathbf{a}^T \mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a}) \quad (3-47)$$

もう 1 つの line search 法である残差最小化法はより精度の良いもので  $G(S)$  を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} G(S) &= \mathbf{R}^{i+1}(S)^T \mathbf{R}^{i+1}(S) \\ &= (\mathbf{R}^i - S \mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a})^T (\mathbf{R}^i - S \mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3-48)$$

$G(S)$  の最小値は次のように得られる。

$$\left. \frac{dG(S)}{dS} \right|_{(S=S^*)} = 0 \rightarrow S^* = \frac{(\mathbf{R}^i)^T \mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a}}{(\mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a})^T \mathbf{M}^* \Delta \Delta \mathbf{a}} \quad (3-49)$$

PCG 法のアルゴリズムは次のとおり。

(1) Set

$$m \leftarrow 0$$

$$\Delta \mathbf{a}^0 \leftarrow 0$$

$$\mathbf{R}_0 \leftarrow \mathbf{R}_{n+1}$$

(2) Solve

$$\mathbf{M}^* \mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0$$

$$\mathbf{Z}_0 \leftarrow \mathbf{P}_0$$

$$(\mathbf{R}_0, \mathbf{Z}_0) \leftarrow \mathbf{R}_0^T \mathbf{Z}_0$$

(3) Compute

$$\alpha_m = (\mathbf{R}_m, \mathbf{Z}_m) / (\mathbf{P}_m, \mathbf{M}^* \mathbf{P}_m)$$

(4) Update

$$\Delta \mathbf{a}_{m+1} = \Delta \mathbf{a}_m + \alpha_m \mathbf{P}_m, \quad \mathbf{R}_{m+1} = \mathbf{R}_m - \alpha_m \mathbf{M}^* \mathbf{P}_m$$

(5) Convergence check

$$|\mathbf{R}_{m+1}| / |\mathbf{R}_{n+1}| \leq \varepsilon \quad \begin{cases} \text{Yes} \rightarrow \text{Return} \\ \text{No} \rightarrow \text{Continue} \end{cases}$$

(6) Solve

$$\mathbf{M}^* \mathbf{Z}_{m+1} = \mathbf{R}_{m+1}$$

(7) Compute

$$(\mathbf{R}_{m+1}, \mathbf{Z}_{m+1}) \leftarrow \mathbf{R}_{m+1}^T \mathbf{Z}_{m+1}, \quad \beta_m = (\mathbf{R}_{m+1}, \mathbf{Z}_{m+1}) / (\mathbf{R}_m, \mathbf{Z}_m)$$

(8) Update

$$\mathbf{P}_{m+1} = \mathbf{Z}_{m+1} + \beta_m \mathbf{P}_m$$

(9)  $m \leftarrow m+1$  go to step(3)

本調査での陽解法アルゴリズムは台形則アルゴリズムを陽形式と安定化と精度改善のために収束計算を用いるこ

とである。本定式では質量マトリックスの対角化と減衰マトリックスの省略は必要条件ではない。

収束計算でのPCG法は2次関数(全エネルギー関数)へ適用することで収束性は保証される。収束スキームは台形則の陰解法アルゴリズムの解へ収束する。

次節では高精度な高次陽解法アルゴリズムを示す。

### c. 高次陽解法アルゴリズム

高次陽解法アルゴリズムは実行列の数学的特性より得られる。はじめに近似マトリックス $\bar{M}^*$ の誤差マトリックス $E$ を考察する。

$$E = I - (\bar{M}^*)^{-1} M^* \quad (3-50)$$

ここで、 $I$ は単位マトリックスである。

次に $M^*$ を誤差マトリックス $E$ と $\bar{M}^*$ で次のように表わす。

$$\begin{aligned} (M^*)^{-1} &= (M^*)^{-1} \bar{M}^* (\bar{M}^*)^{-1} \\ &= [(\bar{M}^*)^{-1} M^*]^{-1} (\bar{M}^*)^{-1} \\ &= (I - E)^{-1} (\bar{M}^*)^{-1} \end{aligned} \quad (3-51)$$

式(3-51)はTaylor級数より次のように近似できる。

$$(M^*)^{-1} = [I + E + E^2 + \dots] (\bar{M}^*)^{-1} \quad (3-52)$$

$E$ 誤差マトリックスのノルムが1以下であれば、式(3-52)は収束級数である。高次陽解法スキームは式(3-52)の有限項までで表わす。例えば、式(3-52)の第1項以下の打ち切りより次の1次近似が得られる。

$$[I + E] (\bar{M}^*)^{-1} = [2I - (\bar{M}^*)^{-1} M^*] (\bar{M}^*)^{-1} \doteq (M^*)^{-1} \quad (3-53)$$

$\bar{M}^*$ を $\alpha \bar{M}^*$ 、ここで $1 \leq \alpha \leq 2$ と置くことにより、収束性が改善される。 $\alpha=2$ は安全率の上限であり、特定の問題では $\alpha$ のより小さい値で収束性が良い。 $\alpha$ はアルゴリズムの感度パラメータである。

### (参考文献)

- 1) M. A. Dokainish, K. Subbarai, "A survey of direct time integration methods in computational structural dynamics-I. explicit methods", Comput. & Struct., Vol.32, No.6, pp.1371-1386(1989).
- 2) L. Jiang, R. J. Rogers, "Combined Lagrangian multiplier and penalty function finite element technique for elastic impact analysis", Comput. & Struct., Vol.30, No.6, pp.1219-1229(1988).



### (3) 周波数応答解析機能

昨年度は周波数応答解析に関し、他の汎用構造解析プログラムの調査、理論、定式の調査を基に、FINASの周波数応答解析機能の組み込み仕様が検討された。本年度はこの仕様に沿って周波数応答解析機能が組み込まれ、簡単なモデルで検証が行なわれた。

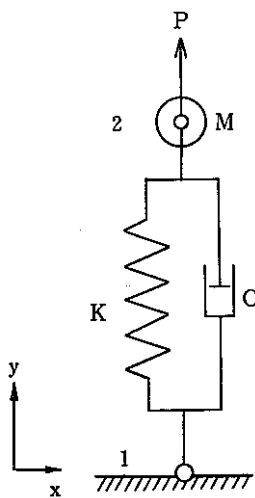
本年度組み込まれた周波数応答解析機能の概要は以下のとおりである。

- ある周期の調和外力が作用している場合に構造各部の調和応答振幅と位相を計算する。
- すべて線形仮定のもとでの解析とする。
- 減衰についてはレイリー減衰、ひずみエネルギー比例減衰、運動エネルギー比例減衰およびバネ減衰要素が考慮できる。
- 基盤加振入力の変位、速度、加速度が可能である。
- 流体・構造連成問題に対しても解析が可能である。
- 複数の調和外力に対する応答が1回の実行で計算できる。
- 出力機能としては、変位、速度、加速度、反力、圧力、自由表面変位、応力、ひずみ、要素力の応答振幅と位相がプリントおよびポストテープに出力される。

#### (計算例)

バネ減衰要素の一端に周期荷重が作用する場合の周波数応答変位を計算し、理論解と比較を行なった。

解析モデル



$P$  : 荷重  
 $K$  : バネ定数  
 $M$  : 質量  
 $C$  : 減衰定数

材料特性

バネ定数  $K=200 \text{ lb/in}$   
 質量  $M=0.5 \text{ lb}\cdot\text{sec}^2/\text{in}$   
 減衰定数  $C=10, 6, 2 \text{ lb}\cdot\text{sec/in}$

境界条件 (解析モデル参照)

節点 1 :  $u_x=u_y=u_z=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$   
 節点 2 :  $u_x=u_z=\theta_x=\theta_y=\theta_z=0$

負荷条件

節点 2 の  $y$  方向に  $P \cdot e^{i\omega t}$  を負荷  
 $P=200 \text{ lb}$   
 $\omega=2\pi f \text{ rad/sec}$   
 $f=3 \text{ Hz}$

解析結果

表3-1  $f=3\text{Hz}$  における応答変位および位相角

	FINASの解		理論解	
	変位(in)	位相角(deg)	変位(in)	位相角(deg)
ケース1 (C=10)	1.05365E+0	-83.2388	1.05365	-83.2388
ケース2 (C=6)	1.73485E+0	-78.8227	1.73485	-78.8227
ケース3 (C=2)	4.56322E+0	-59.3415	4.56362	-59.3415

DISPLACEMENT VECTOR (AMPLITUDE/PHASE (DEGREE))							( FREQ NUM. 7 ) FREQUENCY 2.5000E+00
POINT-ID	D1	D2	D3	D4	D5	D6	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
2	0.0	1.64651E+00	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	-5.08865E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	

DISPLACEMENT VECTOR (AMPLITUDE/PHASE (DEGREE))							( FREQ NUM. 8 ) FREQUENCY 2.7500E+00
POINT-ID	D1	D2	D3	D4	D5	D6	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
2	0.0	1.73287E+00	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	-6.39296E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	

DISPLACEMENT VECTOR (AMPLITUDE/PHASE (DEGREE))							( FREQ NUM. 9 ) FREQUENCY 3.0000E+00
POINT-ID	D1	D2	D3	D4	D5	D6	
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
2	0.0	1.73485E+00	0.0	0.0	0.0	0.0	
	0.0	-7.88227E+01	0.0	0.0	0.0	0.0	

図3-1 変位プリント出力の例(ケース2)

#### (4) 非線形流体・構造連成解析機能

昨年度は流体に関しては微小変位、シェル構造については大変形挙動を仮定した流体・構造連成解析機能が非線形直接積分法で取り扱うことができるように、組み込みATOM（非線形直接積分法用）および出力関連モジュールの拡張、整備が行なわれた。

本年度は、水を満たした円筒タンクに動的荷重が作用する問題に対して非線形流体構造連成解析機能を用いて計算が行なわれた。

##### (計算例)

水を満たした円筒タンクに動的荷重が作用する非線形流体構造連成解析を行ない、線形流体構造連成解析との比較を行なう。

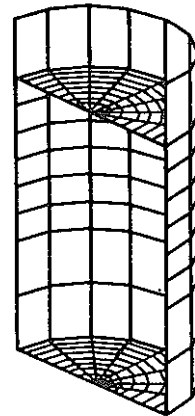
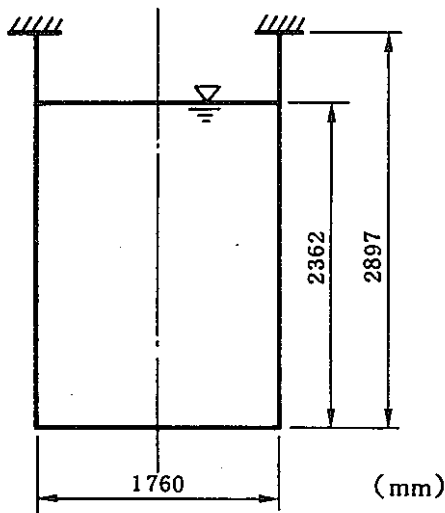
##### ● 解析モデル

半径 $R=880\text{mm}$ 、高さ $H=2362\text{mm}$ の円筒タンクの $\frac{1}{2}$ をモデル化する。

##### ● 有限要素モデル

半径方向 8 分割

高さ方向 8 分割



##### ● 使用要素

LHEX8	8 節点六面体流体要素
SQFAC4	4 節点四辺形自由表面要素
IQFAC4	4 節点四辺形流体構造境界要素
QFLA4R	4 節点四辺形平板シェル要素

##### ● 材料定数

構造部	弾性定数	$E=1.98 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
	ポアソン比	$\nu=0.3$
	質量密度	$\rho=7.551 \times 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{sec}^2/\text{mm}^4$
	板厚	$t=10.0 \text{ mm}$

流体部 質量密度  $\rho=1.019 \times 10^{-10} \text{ kg}\cdot\text{sec}/\text{mm}^4$

• 境界条件 (解析モデル参照)

構造の上端部を完全拘束 (X方向を除く)

構造の対称面に対称条件

• 負荷条件

構造と流体の上端部を完全に固定して固有値解析を行ない、この基本モードの振動数 (周期  $T=0.376 \text{ sec}$ ) を用いて、図3-2に示される正弦波を定義し、応答解析の入力加速度荷重として与えた。なお、負荷位置は構造の上端部である。

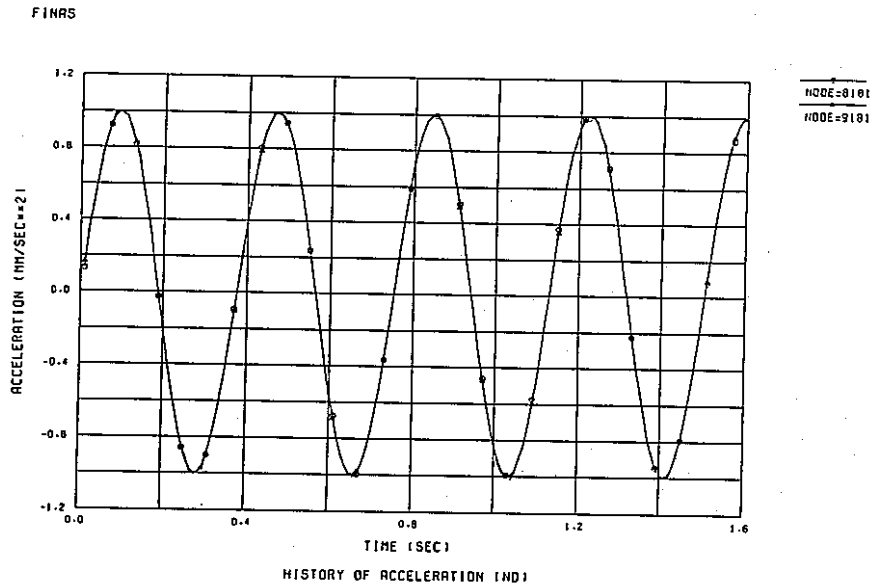
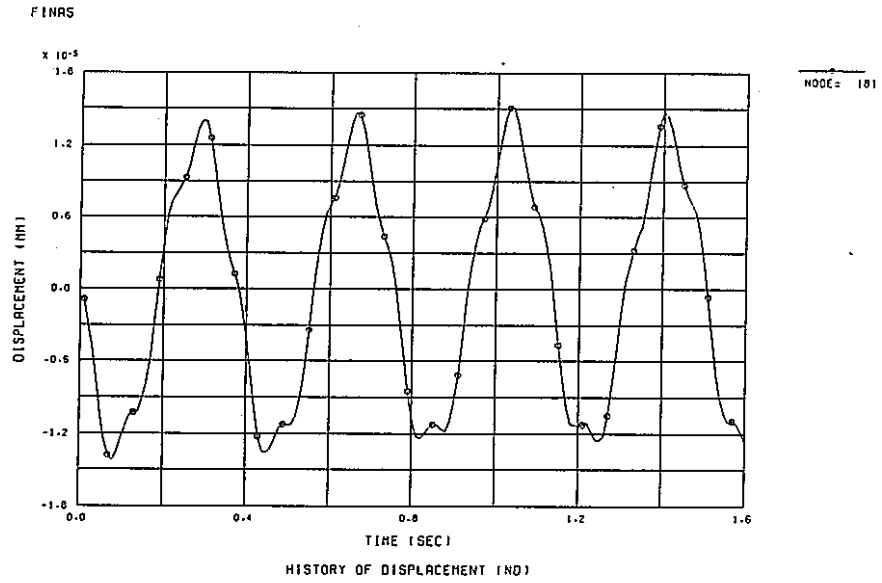


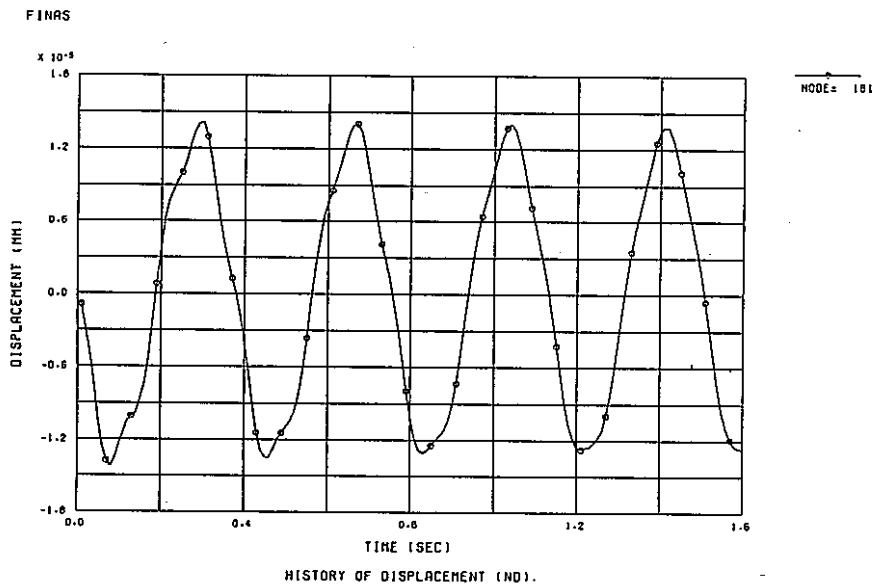
図3-2 入力加速度波

• 解析結果の比較

図3-3(a)と図3-3(b)に、それぞれ大変形が考慮されない場合と考慮される場合の、構造体の下端部にある同一節点の変位の時刻歴図を示す。これらの図から、時間が0.4秒を超えると、大変形を考慮されていない場合と考慮されている場合、変位歴 (特にピーク値の近いところ) が僅かながら (もともと変形が小さい) 違っていることがわかる。



(a) 大変形を考慮しない場合



(b) 大変形を考慮した場合

図3-3 変位の時刻歴図

## 4. 有限要素

FINASの要素ライブラリには応力解析のための要素と熱伝導解析のための要素が登録されており、解析に応じて要素が選択できるようになっている。本年度は2節点円錐台シェル調和級数低減積分要素NCONC2Rの定式化および特性の調査が行なわれた。

表4-1, 図4-1は応力解析のための要素, 表4-2, 図4-2は熱伝導解析のための要素をまとめたものである。表中の次元は要素を構成する節点の自由度を表わし, 1D, 2D, 3Dは1次元, 2次元, 3次元の意味である。また, 節点自由度 $u_i$ は基準座標系の $i$ 方向変位,  $\theta_i$ は $i$ 軸まわりの回転角を表わしている。解析タイプはその要素が行なうことのできる解析の種類を表わし, Eは弾性, Pは塑性, Cはクリープ, Tは熱応力の意味である。表4-3は各要素の解析機能を示したもので, ○印は解析可能であることを示す。

表 4-1 応力解析のための要素

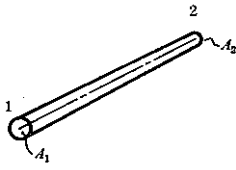
分類	要素名称	要素略称	次元	節点自由度	応力場
棒・梁	3次元棒要素	ROD2	3D	$u_x, u_y, u_z$	単軸応力場
	3次元弾性梁要素	SBEAM2	3D	$u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	梁応力場
	3次元矩形断面梁要素	BEAM2	3D	$u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	梁応力場
平面応力	3節点三角形平面応力要素	TMEM3	2D	$u_x, u_y$	平面応力場
	6節点三角形平面応力要素	TMEM6	3D	$u_x, u_y, u_z$	平面応力場
	4節点四辺形平面応力要素	QMEM4	2D	$u_x, u_y$	平面応力場
	4節点四辺形平面応力低減積分要素	QMEM4R	2D	$u_x, u_y$	平面応力場
	8節点四辺形平面応力要素	QMEM8	3D	$u_x, u_y, u_z$	平面応力場
平面ひずみ	8節点四辺形平面ひずみ要素	QPLAN8	2D	$u_x, u_y$	平面ひずみ場
	9節点四辺形一般化平面ひずみ要素	QPLAN9	2D	節点1~8 $u_x, u_y$ 節点9 $u_z$	平面ひずみ場
板曲げ・シェル	2節点円錐台シェル要素	CONIC2	2D	$u_r, u_z, \beta$	軸対称シェル応力場
	2節点曲線軸対称シェル要素	AXSHEL2	2D	$u_r, u_z, \frac{\partial u_r}{\partial s}, \frac{\partial u_z}{\partial s}$	軸対称シェル応力場
	3節点三角形板曲げ要素	TPLA3	2D	$u_z, \theta_x, \theta_y$	平面応力場
	4節点四辺形板曲げ低減積分要素	QPLA4R	2D	$u_x, \theta_x, \theta_y$	シェル応力場
	3節点三角形平板シェル要素	TFLA3	3D	$u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	平面応力場
	4節点四辺形平板シェル低減積分要素	QFLA4R	3D	$u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	シェル応力場
	4節点四辺形平板薄肉シェル要素	QFLA4S	3D	$u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	シェル応力場
	2節点円錐台シェル調和級数要素	NCONC2	3D	$u_r, u_z, u_\theta, \beta$	軸対称シェル応力場
	4節点四辺形低減積分シェル要素	QFLA4RT	3D	$u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	シェル応力場
	3節点軸対称シェル調和級数要素	NAXSHEL3	3D	$u_r^i, u_z^i, u_\theta^i, \beta^i$	軸対称シェル応力場
軸対称	3節点三角形軸対称要素	TAX3	2D	$u_r, u_z$	軸対称応力場
	6節点三角形軸対称要素	TAX6	2D	$u_r, u_z$	軸対称応力場
	4節点四辺形軸対称要素	QAX4	2D	$u_r, u_z$	軸対称応力場

分類	要素名称	要素略称	次元	節点自由度	応用場
軸 対 称	8節点四辺形軸対称要素	QAX8	2D	$u_R, u_Z$	軸対称応力場
	8節点四辺形軸対称調和級数要素	QNAX8	3D	$u_R, u_Z, u_\theta$	3次元応力場
	6節点三角形軸対称調和級数要素	TNAX6	3D	$u_R, u_Z, u_\theta$	3次元応力場
	4節点四辺形軸対称調和級数要素	QNAX4	3D	$u_R, u_Z, u_\theta$	3次元応力場
	3節点三角形軸対称調和級数要素	TNAX3	3D	$u_R, u_Z, u_\theta$	3次元応力場
立 体	15節点五面体要素	PENT15	3D	$u_X, u_Y, u_Z$	3次元応力場
	8節点六面体要素	HEX8	3D	$u_X, u_Y, u_Z$	3次元応力場
	20節点六面体要素	HEX20	3D	$u_X, u_Y, u_Z$	3次元応力場
配 管	2節点配管要素	PIPE2	3D	$u_X, u_Y, u_Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$	梁応力場
	3節点中空断面配管要素	PIPE3	3D	$u_X, u_Y, u_Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$	梁応力場
	3節点配管低減積分要素	ELBOW3R	3D	エルボ節点 $\Delta u, \Delta \theta, \Delta \phi$ シェル節点 $v, w, \theta_t$	シェル応力場
	6節点配管要素	ELBOW6	3D	エルボ節点 $u_1, \dots, u_{13}, \frac{\partial u_1}{\partial L}, \dots, \frac{\partial u_{13}}{\partial L}$ シェル節点 $v, \frac{\partial v}{\partial l}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial^2 w}{\partial l \partial s}$ $w, \frac{\partial w}{\partial l}, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial^2 w}{\partial l \partial s}$	平面応力場
6節点配管低減積分要素	ELBOW6R	3D	エルボ節点 $u_1, \dots, u_{13}$ シェル節点 $v, w, \theta_t, \theta_s$	シェル応力場	
結 合	3次元バネ減衰要素	LCOMB2	3D	$u_X, u_Y, u_Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$	—
接 触	3次元接触要素	CONT2	3D	$u_X, u_Y, u_Z$	—
	4節点四辺形面接触要素	QCONT2*	3D	$u_X, u_Y, u_Z$	—
	2節点辺接触要素	LCONT2*	3D	$u_X, u_Y, u_Z$	—
流 体	8節点六面体流体要素	LHEX8	3D	$P$	—
	4節点四辺形軸対称調和級数流体要素	LNQAX4	2D	$P$	—
	4節点四辺形流体構造境界要素	IQFAC4	3D	$u_X, u_Y, u_Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z, P$	—
	2節点軸対称調和級数流体構造境界要素	INLAX2	2D	$u_X, u_Y, u_\theta, \beta, P$	—

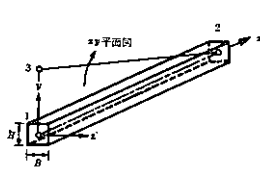
\*本年度新しく組み込まれ、使用可能な要素。



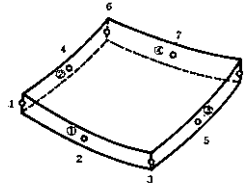
分類	要素名称	要素略称	次元	節点自由度	応力場
流	4節点四辺形自由表面要素	SQFAC4	3D	$P, n$	—
体	2節点軸対称調和級数自由表面要素	SNLAX2	2D	$P, n$	—



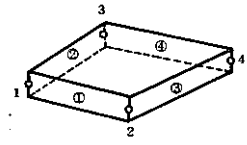
单軸棒要素  
ROD 2



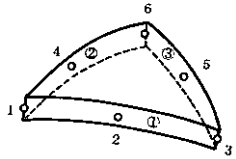
3次元矩形断面梁要素  
BEAM 2



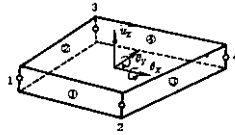
8節点四辺形平面応力要素  
QMEM 8



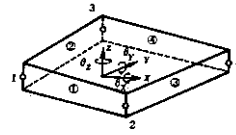
4節点四辺形平面応力  
低減積分要素  
QMEM 4R



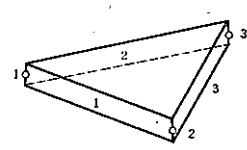
6節点三角形平面応力要素  
TMEM 6



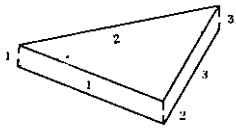
4節点四辺形板曲げ  
低減積分要素  
QPLA 4R



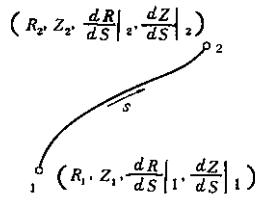
4節点四辺形平面シェル  
低減積分要素  
QFLA 4R



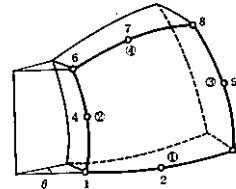
3節点三角形板曲げ要素  
TPLA 3



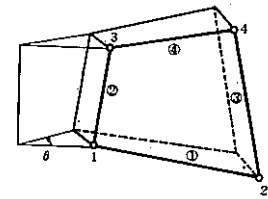
3節点三角形平面  
シェル要素  
TFLA 3



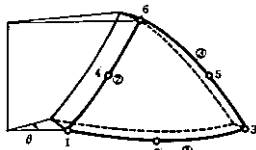
2節点曲線軸対称  
シェル要素  
AXSHEL 2



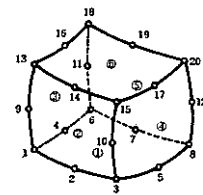
8節点四辺形軸対称要素  
QAX 8



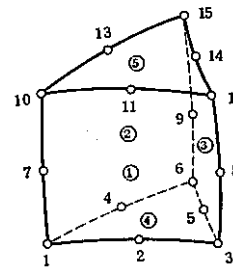
4節点四辺形軸対称要素  
QAX 4



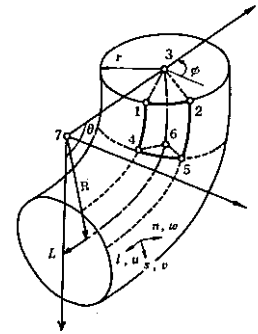
6節点三角形軸対称要素  
TAX 6



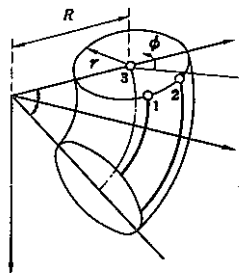
20節点六面体要素  
HEX 20



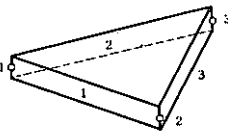
15節点五面体要素  
PENT 15



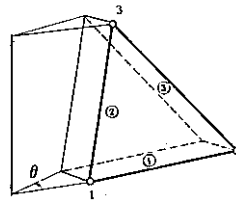
6節点配管要素  
ELBOW 6, ELBOW 6 R



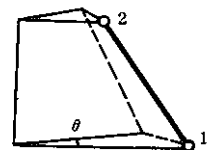
3節点配管低減積分要素  
ELBOW 3R



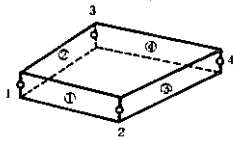
3節点三角形平面応力要素  
TMEM 3



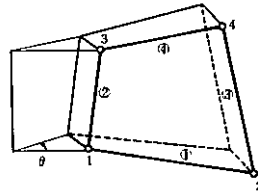
3節点三角形軸対称要素  
TAX 3



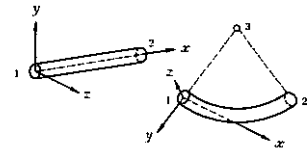
2節点円錐台シェル要素  
CONIC 2



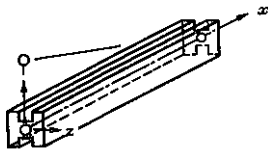
4 節点四辺形平面応力要素  
QMEM 4



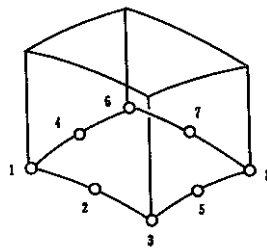
4 節点四辺形軸対称低減積分要素  
QAX4R



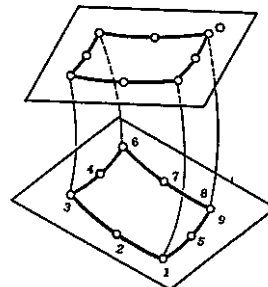
2 節点配管要素  
PIPE 2



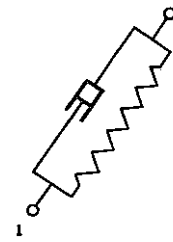
3次元弾性梁要素  
SBEM 2



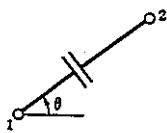
8 節点平面ひずみ要素  
QPLAN 8



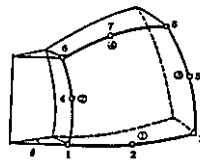
9 節点一般化平面ひずみ要素  
QPLAN 9



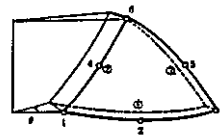
3次元バネ・減衰要素  
LCOB 2



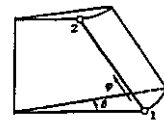
3次元接触要素  
CONT 2



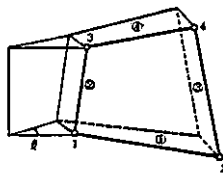
8 節点四辺形軸対称調和級数要素  
QNAX 8



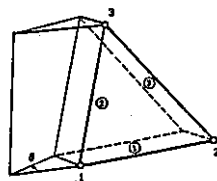
6 節点三角形軸対称調和級数要素  
TNAX 6



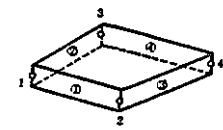
2 節点円錐台軸対称調和級数要素  
NCONC 2



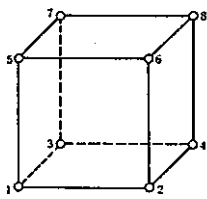
4 節点四辺形軸対称調和級数要素  
QNAX 4



3 節点三角形軸対称調和級数要素  
TNAX 3

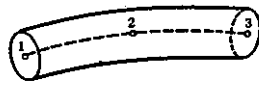


4 節点四辺形平板シェル要素  
QFLA 4S



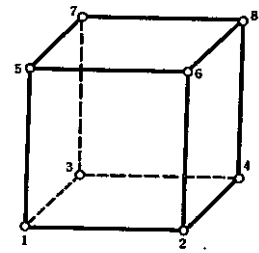
8 節点六面体要素

HEX8



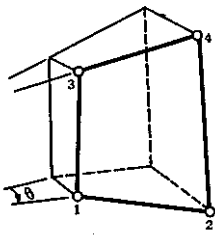
3 節点中空断面配管要素

PIPE3



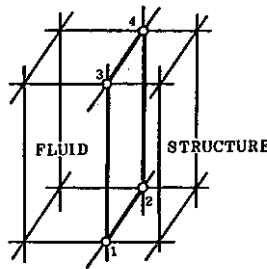
8 節点六面体流体要素

LHEX8



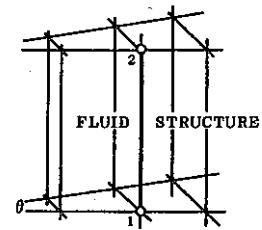
4 節点四辺形軸対称調和級数流体要素

LNQAX4



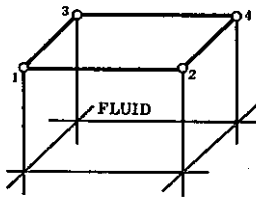
4 節点四辺形流体構造境界要素

IQFAC4



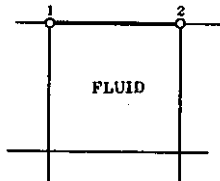
2 節点軸対称調和級数流体構造境界要素

INLAX2



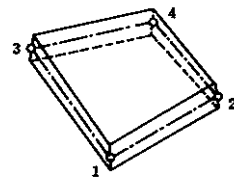
4 節点四辺形自由表面要素

SQFAC4



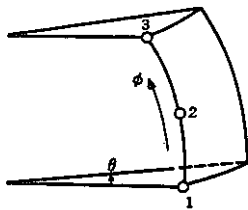
2 節点軸対称調和級数自由表面要素

SNLAX2



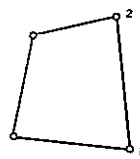
4 節点四辺形低減積分シェル要素

QFLA4RT



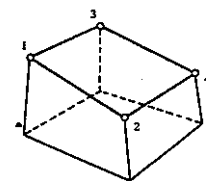
3 節点軸対称シェル調和級数要素

NAXSHEL3



2 節点辺接触要素

LCONT2



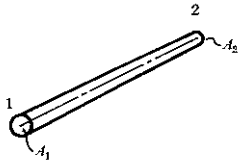
4 節点四辺形面接触要素

QCONT2

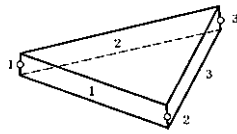
図4-1 応力解析のための要素

表4-2 熱伝導解析のための要素

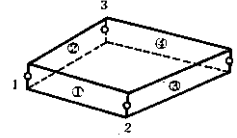
分類	要素名称	略称	次元		
熱伝導	棒	熱伝導棒要素	HROD 2	3D	
	平板	熱伝導3節点三角形平面要素	HTMEM 3	2D	
		熱伝導6節点三角形平面要素	HTMEM 6	3D	
		熱伝導4節点四辺形平面要素	HQMEM 4	2D	
		熱伝導8節点四辺形平面要素	HQMEM 8	3D	
		熱伝導3節点三角形軸対称要素	HTAX 3	2D	
	軸対称	熱伝導6節点三角形軸対称要素	HTAX 6	2D	
		熱伝導4節点四辺形軸対称要素	HTAX 4	2D	
		熱伝導8節点四辺形軸対称要素	HTAX 8	2D	
		熱伝導15節点五面体要素	HPENT 15	3D	
	立体	熱伝導20節点六面体要素	HHEX 20	3D	
		熱伝導8節点六面体要素	HHEX 8	3D	
		熱伝導20節点六面体要素	HHEX 20	3D	
	熱伝達	辺	熱伝達2節点辺要素	FLIN 2	2D
			熱伝達3節点辺要素	FCLIN 3	3D
軸対称		熱伝達2節点軸対称要素	FLAX 2	2D	
		熱伝達3節点軸対称要素	FCAX 3	2D	
面		熱伝達6節点三角形面要素	FTFAC 6	3D	
		熱伝達8節点四辺形面要素	FQFAC 8	3D	
		熱伝達4節点四辺形面要素	FQFAC 4	3D	
熱伝達リンク		棒	熱伝達リンク棒要素	CRLINK 2	3D
		平板	熱伝達リンク4節点四辺形平面要素	CMLINK 4	2D
	熱伝達リンク6節点四辺形平面要素		CMLINK 6	3D	
	軸対称	熱伝達リンク4節点四辺形軸対称要素	CALINK 4	2D	
		熱伝達リンク6節点四辺形軸対称要素	CALINK 6	2D	
	立体	熱伝達リンク8節点六面体要素	CSLINK 8	3D	
		熱伝達リンク12節点五面体要素	CSLINK 12	3D	
		熱伝達リンク16節点六面体要素	CSLINK 16	3D	
輻射リンク	棒	輻射リンク2節点要素	RLINK 2	3D	



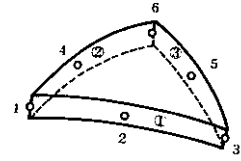
熱伝導棒要素  
HROD 2



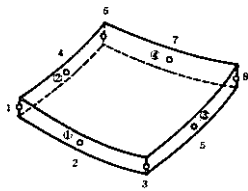
熱伝導3節点三角形平面要素  
HTMEM 3



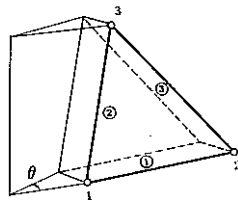
熱伝導4節点四辺形平面要素  
HQMEM 4



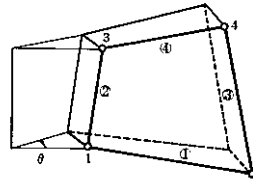
熱伝導6節点三角形平面要素  
HTMEM 6



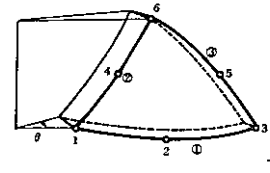
熱伝導8節点四辺形平面要素  
HQMEM 8



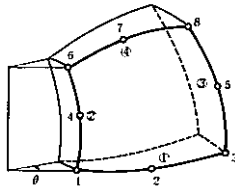
熱伝導3節点三角形軸対称要素  
HTAX 3



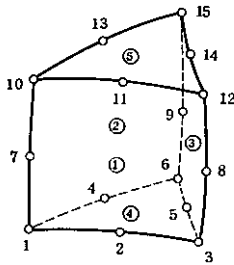
熱伝導4節点四辺形軸対称要素  
HQAX 4



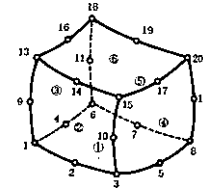
熱伝導6節点三角形軸対称要素  
HTAX 6



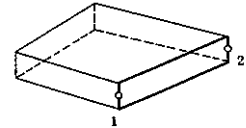
熱伝導8節点四辺形軸対称要素  
HQAX 8



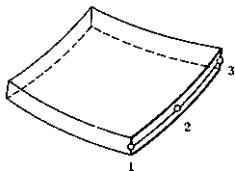
熱伝導15節点五面体要素  
HPENT 15



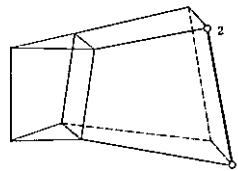
熱伝導20節点六面体要素  
HHEX 20



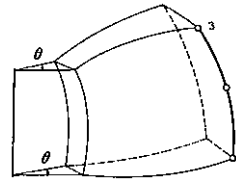
熱伝達2節点辺要素  
FLIN 2



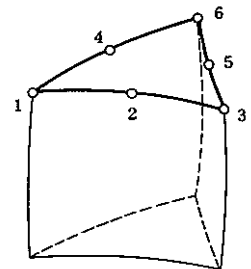
熱伝達3節点辺要素  
FCLIN 3



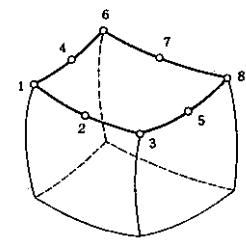
熱伝達2節点軸対称要素  
FLAX 2



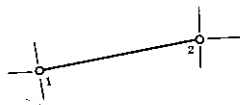
熱伝達3節点軸対称要素  
FCAX 3



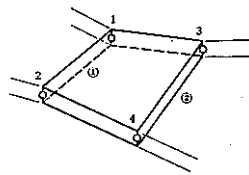
熱伝達6節点三角形面要素  
FTFAC 6



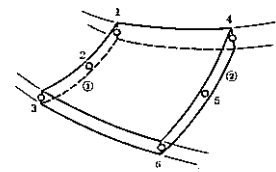
熱伝達 8 節点四辺形面要素  
FQFAC 8



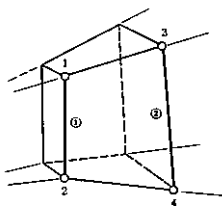
熱伝達リンク棒要素  
CRLINK 2



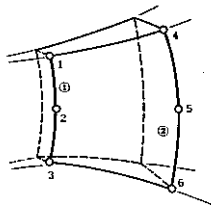
熱伝達リンク 4 節点  
四辺形平面要素  
CMLINK 4



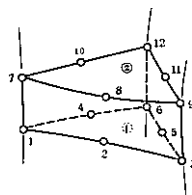
熱伝達リンク 6 節点  
四辺形平面要素  
CMLINK 6



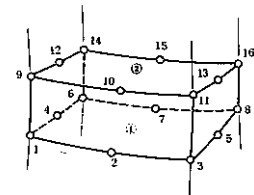
熱伝達リンク 4 節点  
四辺形軸対称要素  
CALINK 4



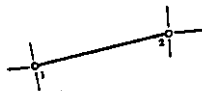
熱伝達リンク 6 節点  
四辺形軸対称要素  
CALINK 6



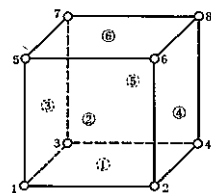
熱伝達リンク 12 節点  
五面体要素  
CSLINK 12



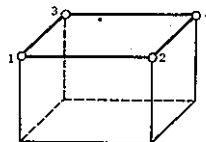
熱伝達リンク 16 節点  
六面体要素  
CSLINK 16



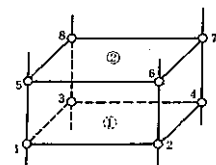
輻射リンク 2 節点要素  
RLINK 2



熱伝導 8 節点六面体要素  
HHEX 8



熱伝達 4 節点  
四辺形面要素  
FQFAC 4



熱伝達リンク 8 節点  
六面体要素  
CSLINK 8

図 4-2 熱伝導解析のための要素

表 4-3 要素別の適用可能機能

○…… 解析可能

		弾 性 解 析 (E)	塑 性 解 析 (P)	ク リ ー プ 解 析 (C)	熱 応 力 解 析 (T)	ス ウ ェ リ ン グ 解 析	T.L. 幾 何 学 的 非 線 形 解 析	U.L. 幾 何 学 的 非 線 形 解 析	座 屈 荷 重 解 析	破 壊 力 学 解 析	動 的 応 答 解 析
棒 梁	ROD2	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	SBEAM2	○			○						○
	BEAM2	○	○	○	○		○	○	○		○
平 面 応 力	TMEM3	○	○	○	○	○					○
	TMEM6	○	○	○	○	○					○
	QMEM4	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	QMEM4 R	○	○	○	○	○					
	QMEM8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
平 ひ ず み 面	QPLAN8	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	QPLAN9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
板 曲 げ ・ シ ェ ル	CONIC2	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	AXSHEL2	○	○	○	○	○					
	TPLA3	○	○	○	○	○					
	QPLA4 R	○	○	○	○	○					
	TFLA3	○	○	○	○	○					○
	QFLA4 S	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	QFLA4	○	○	○	○	○					○
	NCONC2	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	QFLA4 RT	○	○	○	○	○		○	○		○
	NAXSHEL3	○	○	○	○	○		○	○		○
軸 対 称	TAX3	○	○	○	○	○					○
	TAX6	○	○	○	○	○					○
	QAX4	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	QAX8	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	QNAX8	○			○						○
	TNAX6	○			○						○
	QNAX4	○			○						○
	TNAX3	○			○						○



		弾性解析 (E)	塑性解析 (P)	クリープ解析 (C)	熱応力解析 (T)	スウェリング解析	T.L.幾何学的非線形解析	U.L.幾何学的非線形解析	座屈荷重解析	破壊力学解析	動的応答解析
立 体	PENT15	○	○	○	○	○					○
	HEX8	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	HEX20	○	○	○	○	○	○	○	○		○
配 管	PIPE2	○			○						○
	PIPE3	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	ELBOW3R	○	○	○	○		○		○		
	ELBOW6	○	○	○							
	ELBOW6R	○	○	○	○		○		○		
結合	LCOMB2	○									○
接 触	CONT2	○	○	○	○	○	○	○	○		○
	QCONT2	○	○	○	○	○	○	○	○		
	LCONT2	○	○	○	○	○	○	○	○		
流 体	LHEX8										○
	LNQAX4										○
	IQFAC4										○
	INLAX2										○
	SQFAC4										○
	SNLAX2										○

● 本年度、要素に対して適用可能となった解析機能。

(1) NCONC2R要素の開発

シェルやプレートの問題において、Hughes等は1点数値積分法について示し、単純な梁要素に適用してその有効性を示している<sup>1)</sup>。また、Zienkiewicz等により、ほとんど同じ過程で、せん断変形効果を含む2節点直線要素に適用され、軸対称シェル解析に極めて効果的であることが示されている<sup>2)</sup>。

本年度は、この2節点直線要素に着目し、変位と荷重を調和級数展開する2節点円錐台シェル低減積分調和級数要素の定式および特性の調査を行なった。

以下に、第1段階として、軸対称荷重に限定した(調和級数を考慮しない)要素の定式について述べる。

直線シェルの中立軸より厚さ方向に $z$ 離れた点のひずみは、縦せん断ひずみを考慮して、Total Lagrangian定式で表わすと次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_s \\ \Delta \epsilon_\theta \\ r \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{d\Delta u}{ds} - z \frac{d\Delta \beta}{ds} \\ \frac{\cos \phi}{r} \Delta w + \frac{\sin \phi}{r} \Delta u - z \frac{\sin \phi}{r} \Delta \beta \\ \frac{d\Delta w}{ds} - \Delta \beta \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial \Delta w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial \Delta u}{\partial s} \\ \left( \frac{\cos \phi}{r} w + \frac{\sin \phi}{r} u \right) \left( \frac{\cos \phi}{r} \Delta w + \frac{\sin \phi}{r} \Delta u \right) \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial s} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \phi}{r} \Delta w + \frac{\sin \phi}{r} \Delta u \right)^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= \{ \Delta \epsilon^L \} + \{ \Delta \epsilon^U \} + \{ \Delta \epsilon^N \} \tag{4-1}
 \end{aligned}$$

ここで、右辺第1項は微小線形成分、第2項は2次の線形成分、第3項は非線形成分である。

いま、ここで、たわみ $w$ 、軸方向変位 $u$ 、回転角 $\beta$ に次のような独立補間を用いる。

$$u = \begin{Bmatrix} w \\ u \\ \beta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 N_i \hat{u}_i \quad \hat{u}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ u_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}_{i=1 \sim 2} \tag{4-2}$$

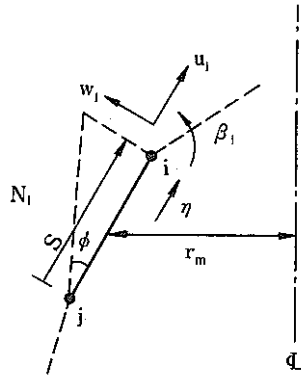


図4-3 2節点軸対称シェル

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1+\eta) \quad (4-3)$$

したがって、式(4-1)に示したひずみのうち、第1項、第2項について、変位ひずみ関係を用いてマトリックス表  
表示すると次式で表わされる。

$$\{\Delta \varepsilon\} = (\{B^L\} + \{B^U\}) \{\hat{\Delta u}\} \quad (4-4)$$

ここで、要素の図心での ( $\eta=0$ ,  $r=r_m$ )  $B^L$ ,  $B^U$  は要素の長さを  $l$  とすると、次のように陽な型に展開することができる。

$$\{B^L\} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{l} & z \frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & -z \frac{1}{l} \\ \frac{\cos \phi}{2r_m} & \frac{\sin \phi}{2r_m} & -z \frac{\sin \phi}{2r_m} & \frac{\cos \phi}{2r_m} & \frac{\sin \phi}{2r_m} & -z \frac{\sin \phi}{2r_m} \\ -\frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

$$\{B^U\} = \begin{bmatrix} -X \frac{1}{l} & -Y \frac{1}{l} & 0 & X \frac{1}{l} & Y \frac{1}{l} & 0 \\ Z \frac{\cos \phi}{2r_m} & Z \frac{\sin \phi}{2r_m} & 0 & Z \frac{\cos \phi}{2r_m} & Z \frac{\sin \phi}{2r_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

ここで、 $X = \frac{\partial w}{\partial S}$ ,  $Y = \frac{\partial u}{\partial S}$ ,  $Z = \left( \frac{\cos \phi}{r_m} w + \frac{\sin \phi}{r_m} u \right)$  とおいた。

以上より、接線剛性マトリックス  $[K^0]$  は面積積分を陽に計算することができるので、次のように厚さ方向に関する積分で与えられる。

$$[K^0] = 2\pi r_m l \int_0^t ([B^L] + [B^U])^T [D] ([B^L] + [B^U]) dt \quad (4-7)$$

次に、式(4-1)に示したひずみの第3項について、変形勾配マトリックスは次式で与えられる。

$$\{\Delta d\} = [B^D] \{\Delta u\} \quad (4-8)$$

ここで、

$$\{\Delta d\}^T = \left[ \frac{d\Delta w}{dS} \quad \frac{d\Delta u}{dS} \quad \frac{\cos\phi}{r} w + \frac{\sin\phi}{r} u \right] \quad (4-9)$$

同様に、図心点における  $[B^D]$  は次のように陽な型に展開できる。

$$[B^D] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 \\ \frac{\cos\phi}{2r_m} & \frac{\sin\phi}{2r_m} & 0 & \frac{\cos\phi}{2r_m} & \frac{\sin\phi}{2r_m} & 0 \end{array} \right] \quad (4-10)$$

また、初期応力マトリックス  $[S]$  と非線形ひずみ  $\{\Delta\epsilon^N\}$  には、次の関係がある。

$$\{\Delta\epsilon^N\} \{\sigma\} = \{\Delta d\}^T [S] \{\Delta d\} \quad (4-11)$$

このとき、

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\theta \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

以上より、幾何学的非線形解析における幾何剛性マトリックス  $[K^S]$  は次のように計算される。

$$[K^S] = 2\pi r_m l \int_0^t [B^D]^T [S] [B^D] dt \quad (4-13)$$

#### (計算例1)

図4-4(a)は、周辺固定の円形プレートに等分布荷重が作用する問題において、メッシュ分割を変化させた場合の解析例である。

図4-4(b), (c)はたわみおよびモーメントの半径方向の分布図である。ともに2要素の値を除いて理論解とよく一致している。

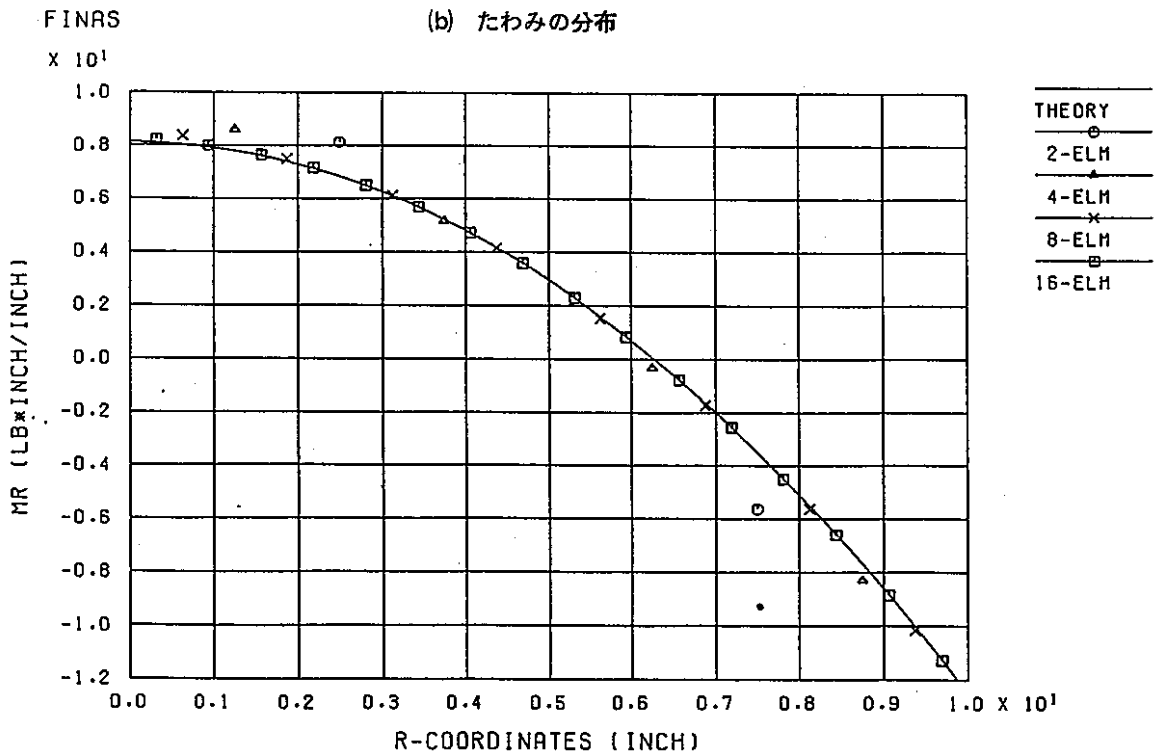
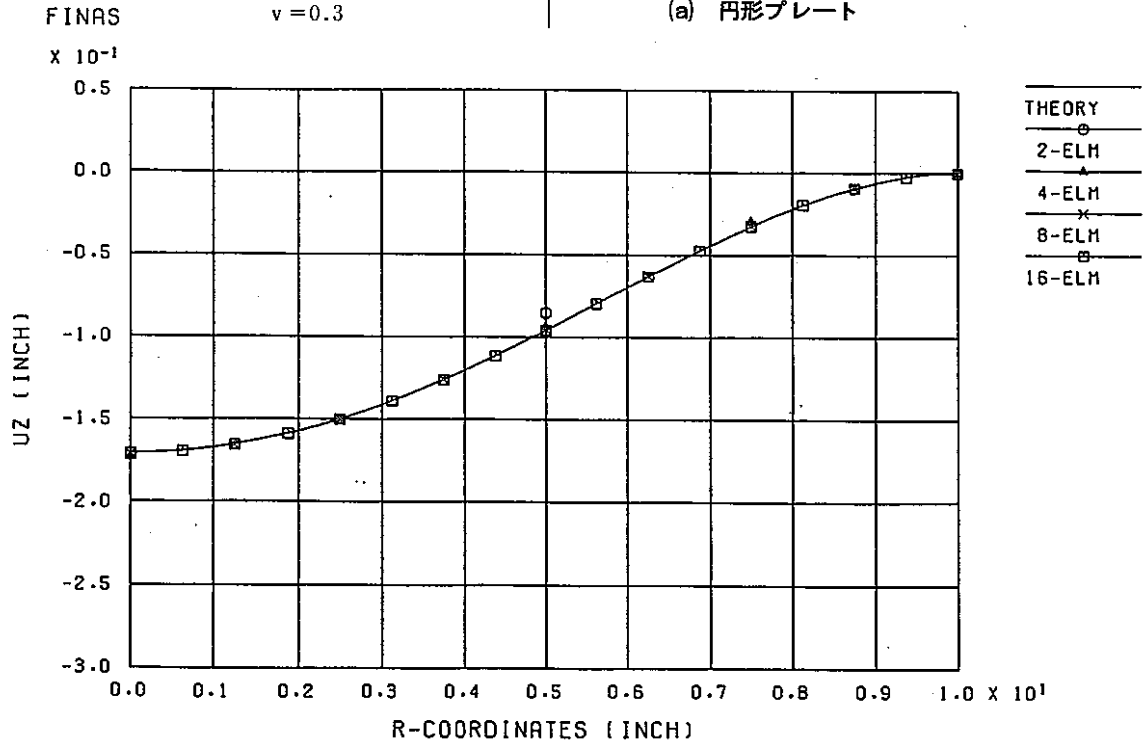
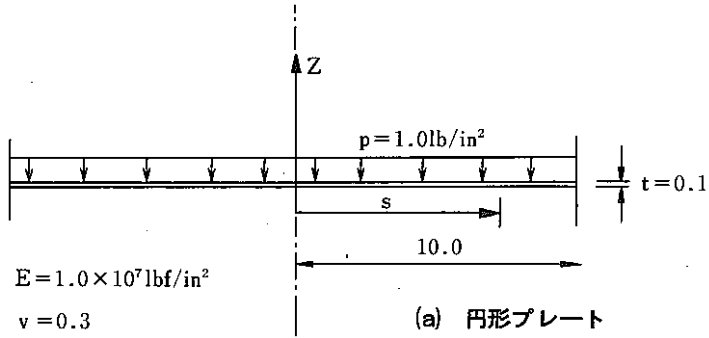


図4-4 周辺固定の円形プレート解析

## (参考文献)

- 1) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, W. Kanoknukulchai, A Simple And Efficient Finite Element For Plate Bending, Int. J. num. Meth. Engng., 11, 1529-1543 (1977).
- 2) O. C. Zienkiewicz, J. Bauer, K. Morgan, E. Onate, A Simple And Efficient Element For Axisymmetric Shells, Int. J. num. Meth. Engng. 11, 1545-1558 (1977).

## (2) 任意要素サブルーチン機能の仕様の検討

多くの汎用有限要素法プログラムでは、様々な問題に対処するため通常いくつかの要素が用意されている。FINASにおいてもこれまでいろいろな種類の要素の組み込みが行なわれ、現在、応用解析のための要素44(動的解析のための要素を含む)、熱伝導解析のための要素28が要素ライブラリとして登録されている。利用者はこの中から問題の種類に応じていくつかの要素を選択して解析を行なえるようになっている。

現在、FINASに新しい要素を組み込む場合には、FINASの入力関連モジュール、解析関連モジュール、出力関連モジュール等について、拡張および新しいルーチンの追加作業を行わなければならない。その作業では、各モジュールの働きやその処理の流れ等についてのある程度の知識が要求される。また、それらの資料の整備も十分なされていないことから、新規に要素を開発できるのはある限られた者のみであった。一方、FINASのユーザーの中に、独自に開発した要素をFINASに組み込んで解析を行ないたいという要望が生じている。

このようなことから、有限要素法の知識があれば誰でも、FINASにユーザ定義の任意の要素の組み込みが容易に行なえるようになることは、汎用性の向上およびFINASユーザの拡大にもつながり、大変便利で意義があると思われる。本年度は、このユーザ定義の任意要素サブルーチン機能についてその仕様の検討を行なった。

### a) 新規要素登録の手続き

FINASに新しい要素を組み込むためには、FINASの入力関連モジュール、解析関連モジュール、出力関連モジュール等について、拡張および新しいルーチンの追加登録等の作業を行わなければならない。以下にこれらの作業に関するモジュールおよびデータブロック等の概要について説明する。

#### 関連モジュール

図4-5および図4-6は静的弾性解析における解析の流れ図、要素に依存するモジュールDBECHA, EMSALL, EMSUPDの構成の概略を示したものである。図4-6に示されるように、各モジュールでは、要素ごとにCHA, P, T, K, Q, S, Eルーチンが登録されている。このため新規に要素を組み込む場合は、これらのルーチンを新たに作成し、同様の登録を行い、さらにその要素の特徴により、他のモジュールの拡張も行なわなければならない。

ここで、図4-6に示す要素に関連するモジュールにおける各ルーチンの内容について簡単に述べる。

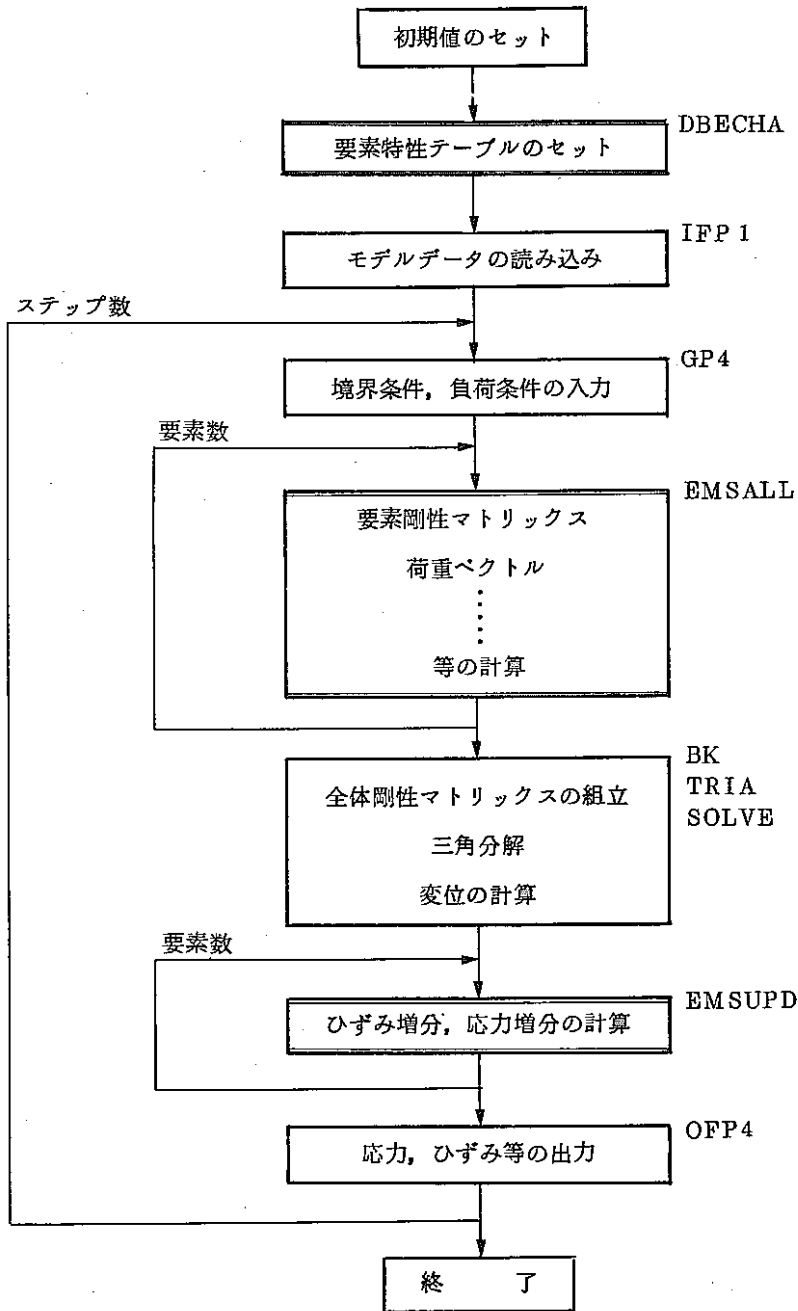
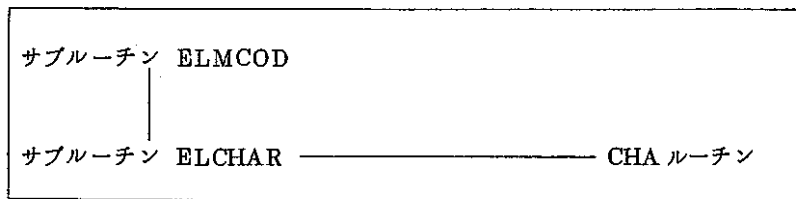


図4-5 解析の流れ

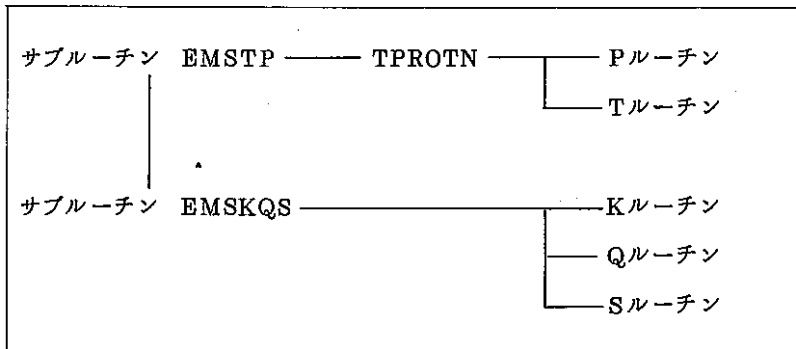
• 入力関連モジュール DBECHA

サブルーチン	内 容
ELMCO D	要素名とコード番号の登録
ELCHAR	CHA ルーチンの登録
CHA ルーチン	要素特性のデータブロック ECHA へのセット

モジュール DBECHA



モジュール EMSALL



モジュール EMSUPD

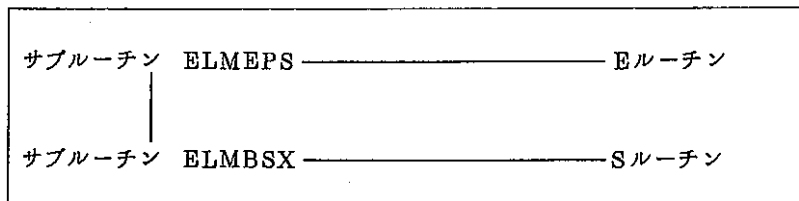


図4-6 要素に依存するモジュール

• 要素剛性関連モジュール EMSALL

サブルーチン	内 容
TPROTN	T, P ルーチンの登録
EMSKQS	K, Q, S ルーチンの登録
T ルーチン	要素節点温度増分の内部点への補間 $\delta T = [N] \delta \{\hat{T}\}$ $\delta T$ 要素間の内部点での温度増分 $[N]$ 補間関数 $\delta \{\hat{T}\}$ 要素節点での温度増分



サブルーチン	内 容
Sルーチン	要素に作用する分布荷重と等価な荷重ベクトルの計算 $\delta\{\hat{P}\} = \int [N]^t [N] dV \delta\{p\}$ $\delta\{\hat{P}\}$ 等価な荷重増分ベクトル $[N]$ 補間関数 $\delta\{p\}$ 分布荷重の増分
Kルーチン	要素剛性マトリックスの計算 $[K] = \int [B]^t [D] [B] dV$ $[K]$ 要素剛性マトリックス $[B]$ ひずみ-変位マトリックス $[D]$ 材料マトリックス
Qルーチン	要素に作用する初期ひずみ増分, 熱ひずみ増分と等価な擬似荷重ベクトルの計算 $\delta\{Q\} = \int [B]^t [D] \delta\{\epsilon\} dV$ $\delta\{Q\}$ 等価な荷重増分ベクトル $[B]$ ひずみ-変位マトリックス $[D]$ 材料マトリックス $\delta\{\epsilon\}$ 要素の内部点でのひずみ増分
Sルーチン	要素に作用する初期応力増分と等価な擬似荷重ベクトルの計算 $\delta\{S\}^i = \int [B]^t \delta\{\sigma\}^i dV$ $\delta\{S\}^i$ 等価な荷重増分ベクトル $[B]$ ひずみ-変位マトリックス $\delta\{\sigma\}^i$ 要素の内部点での初期応力増分

• 応力 / ひずみ関連モジュール EMSUPD

サブルーチン	内 容
ELMEPX	Eルーチンの登録
ELMBSX	Sルーチンの登録
Eルーチン	要素の内部点でのひずみ増分の計算 $\delta\{\epsilon\} = [B] \delta\{\hat{u}\}$ $\delta\{\epsilon\}$ 要素の内部点でのひずみ増分 $[B]$ ひずみ-変位マトリックス $\delta\{\hat{u}\}$ 要素節点での変位増分

サブルーチン	内 容
Sルーチン	要素に作用する応力増分と等価な擬似荷重ベクトルの計算 $\{S\} = \int [B]^t \{\sigma\} dV$ <p> <math>\{S\}</math> 等価な荷重増分ベクトル  <math>[B]</math> ひずみ-変位マトリックス  <math>\{\sigma\}</math> 要素の内部点での応力 </p>

• データブロックおよび専用ローカルコモン

次に、要素に関連するデータブロックおよび専用ローカルコモンについてその内容を説明する。

データブロック	内 容
ECHA	解析に用いるすべての要素タイプについて、それぞれの要素の特性に関する情報を定義するテーブル
EST	要素に関する要約のテーブル
EIV	要素の内部変数（温度、応力、ひずみ等）に則する情報テーブル

ローカルコモン	内 容
ECHACM	解析に用いるすべての要素タイプについて、それぞれの要素の特性に関する情報を定義するテーブル
ESTCOM	要素に関する要約のテーブル
EIVCOM	要素の内部変数（温度、応力、ひずみ等）に関する情報テーブル
DIVCOM	

上記に示したデータブロックおよびローカルコモンは次に示す専用ユーティリティールーチンを用いて互いにデータの交換が行なわれる。要素の拡張および新しい要素の組み込みのときは、必要に応じてこの処理が行なわれる。

サブルーチン	内 容
RDEST	データブロック EST を読み込みコモン ESTCOM に内容をセットする。
RECHAX	データブロックに ECHA を読み込みコモン ECHACM に内容をセットする。
INTEVI	データブロック EIV の積分点における内部変数の内容をコモン EIVCOM にセットする。
INTDVI	
BLDEVI	コモン EIVCOM の積分点における内部変数の内容をデータブロック EIV に書き込む。
BLDDVI	

また、新しい要素の組み込みにおいて、応力場の変更あるいは新しく追加するとき、その応力場に従って修正しなければならないルーチンがいくつかある。ここで、それらのルーチンの内容について簡単に説明する。

サブルーチン	内 容
CPIMAT	弾塑性クリーブ解析において、クリーブと塑性の連成を考慮する場合にクリーブによる材料マトリックス $[E^c]$ を評価する。
DYFDSG	降伏関数 $f(\sigma)$ , $f(\sigma, a)$ が与えられた場合の応力に関する微係数 $\{df/d\sigma\}$ を評価する。
DYFDA	弾塑性解析において材料が温度依存性の場合、降伏関数 $f(\sigma, a)$ に対してオリジンシフト応力に関する微係数 $\{df/d\sigma\}$ を評価する。
ELMATX	弾性材料マトリックス $[E^e]$ を評価する。
EQEPS	相当塑性ひずみ $e^p$ を評価する。
EQSIG	降伏関数 $f(\sigma)$ , $f(\sigma, a)$ が与えられた場合、相当応力 $\sigma$ を評価する。
ESUBT	熱応力解析において、線膨張係数 $\alpha$ が温度依存のとき、ある温度増分 $\delta T$ に対しての熱ひずみ $\delta\{\epsilon^t\}$ を評価する。
GVALUE	クリーブ解析において、ひずみ硬化に応力反転の補助法則を適用した場合、ひずみ原点からの距離 $G$ を評価する。
MFACTR	弾塑性解析において、遷移領域特に降伏時の処理で用いられる弾性部分の比率 $\gamma$ を評価する。
MDFSFT	弾塑性解析において、くり返し組合せ硬化則を使用した場合、オリジンシフト応力の補正量を評価する。
RVLOAD	弾塑性解析において、ORNL 推奨の硬化則を使用した場合、除荷に対する基準を評価する。
SFTSIG	弾塑性解析において、オリジナルシフト応力 $\delta\{a\}$ を評価する。
PLAMAT	弾塑性解析において、塑性に関する材料マトリックス $[E^p]$ を評価する。

#### b) 任意要素サブルーチン機能の仕様案

使用者が作成した任意の要素を FINAS システムとともに用いて容易に解析できるようにするためには、使用者側の負担をできる限り軽減し、簡単にその機能が利用できるような仕様にしなければならない。

しかし現在の FINAS システムに新しい要素を組み込むのは、前で述べたように、静的応力解析に限っても7つのルーチン (CHA, K, Q, S, T, P, E) を別々に所定のフォーマットで作成しなければならず、また各ルーチンが参照している ECHACM, ESTCOM, EIVCOM, DIVCOM などのコモンはかなり複雑なものとなっているため、容易であるとは言い難い。特に、要素の特性テーブルを作成する CHA ルーチンでは、その設定項目の多さや、変数の意味や目的の高度さなどから、ある程度プログラムに精通していることが要求される。更に、組み込む要素に新たな応力場を定義しようとするなら、かなりの経験が要求され、その作業は非常に困難なものとなる。

以上のことから、任意要素サブルーチン機能はある程度制限されたものになることは避けられないことと思われる。

る。

これらのことを踏まえて以下にユーザー定義の任意要素サブルーチン機能の指針を提示する。

- 適用可能な解析範囲は静的応力微小変形問題とする。
- ユーザー定義の応力場は FINAS 既存のものを代用する（新規に応力場を定義する場合は、FINAS 開発者が行なう）。
- 使用者が定義するユーザーサブプログラムは、K, Q, S, T, P, E ルーチンの6つとする（必ず必要なルーチンはK, S, Eであり、Q, T, Pルーチンは必要に応じて定義する）。
- 各ユーザーサブプログラムの子ルーチンは幾つ存在してもよいが、子および孫ルーチン名はYで始まるものにしなければならない。
- ユーザー作成の要素の使用は、ELEMENT TYPE カードで指定する（同時に定義できるのは最大5要素程度とする）。
- 要素の特性（応力場、要素構成節点数、内部点数など）は ELEMENT TYPE カードに新しい書式を設けて定義する。
- 要素の節点数および節点自由度はともに 32 以下でなければならない。また、要素の総自由度数は 250 を超えてはならない。
- 結果のプリントアウト、プロット出力、ポスト出力は可能とする。

次に、ELEMENT TYPE カードの書式例およびユーザー定義のサブプログラムの仕様案を提示する。

ELEMENT TYPE データの書式案

	10	20	30	40	50	60	70	80
A	ELEMENT TY	PE						
B	ietyp	ecode						
C		kfld	nod	nedof	ngeo	nip	nipc	nlod
D		ltyp <sub>1</sub>	ldat <sub>1</sub>	ltyp <sub>2</sub>	ldat <sub>2</sub>	.....	.....	.....> ltyp <sub>nlod</sub> ldat <sub>nlod</sub>
E		dof <sub>1</sub>	dof <sub>2</sub>	.....	.....	.....	.....	.....> dof <sub>nod</sub>

このデータは解析に使用する要素のタイプを定義するデータで、各要素につけられた要素タイプ識別番号を CONNECTIONデータで参照する。

データは識別カードのAカードと要素のタイプを入力するBカードからなり、1つの要素タイプに対しBカード1枚が必要である。使用する要素タイプ数や同一要素タイプの重複定義については制限はない。

また、ユーザー定義の要素サブプログラムを使用する場合、A,Bカードの他に要素の特性を入力するCカード、要素荷重データの特性を入力するDカード、要素構成節点の自由度を入力するEカードを指定しなければならない。FINASの要素ライブラリに登録されている要素を用いる場合はC,D,Eカードは不要。

カードの種類	カラム	タイプ	変数	内 容	無記入の場合
A	1~12	英 字	—	1~12カラムにELEMENT TYPEと記入	*
B	1~5	正整数	<i>ietyp</i>	要素タイプ識別番号	*
	11~20	英数字	<i>ecode</i>	要素の種類を表わすコード ユーザ定義の要素サブプログラムを使用する場合は USER1と記入する。同時に定義できる要素サブプログラムの数は5である。2つ以上の要素サブプログラムを使用する場合はUSER2~USER5と順次記入する。	*
C	11~15	英数字	<i>kfld</i>	ユーザが定義するの要素の応力場の番号。表 参照。	*
	16~20	英数字	<i>nod</i>	要素の構成節点の総数 最大32	*
	21~25	英数字	<i>nedof</i>	要素の自由度の総数 最大250	*
	26~30	英数字	<i>ngeo</i>	要素の幾何データの総数	*
	31~35	英数字	<i>nip</i>	要素の内部点数	*
	36~40	英数字	<i>nipc</i>	要素の内部点の中心点番号	*
	41~45	英数字	<i>nlod</i>	要素荷重データの総数	0
D	11~15	英数字	<i>ltyp</i>	要素荷重データのタイプ番号	*
	16~20	英数字	<i>ldat</i>	その荷重タイプで入力するデータ数 <i>nlod</i> が0であればDカードは不要。	*
E	11~15	英数字	<i>dof</i>	要素構成節点の自由度テーブル <i>nod</i> の数が14を越える場合は次のカードに同様に記入する。	*

表 FINASの応力場

KFLD	応 力 場	応 力 成 分
1	単軸応力場	$\sigma_x$
2	平面応力場	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$
3	3次元応力場	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
4	軸対称応力場	$\sigma_R, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{Rz}$
5	平面ひずみ応力場	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$
6	梁応力場	$\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{zx}$
7	シェル応力場	$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
8	軸対称薄肉シェル応力場	$\sigma_s, \sigma_\theta$
9	シェル応力場 (ELBOW3R)	$\sigma_l, \sigma_s, \tau_{sn}$

要素サブプログラムの仕様案

ユーザ定義の要素サブプログラムは次の6つのプログラムから構成され、それぞれ最大5つまで定義すること

とができる。

XSTIFF1 要素剛性マトリックスの計算(必須)  
XPLOAD1 要素に作用する分布荷重, 物体力と等価な節点力ベクトルの計算(任意)  
XQLOAD1 要素に作用する初期ひずみ, 熱ひずみと等価な節点力ベクトルの計算(任意)  
XSLOAD1 要素に作用する応力と等価な節点力ベクトルの計算(必須)  
XTEMP1 要素の内部点での温度増分の計算(任意)  
KSTRN1 要素の内部点でのひずみ増分の計算(必須)

(1) サブプログラム XSTIFF1

サブプログラム XSTIFF1 は, 全体座標系における要素剛性マトリックスを計算するためのルーチンであり, 必ず作成しなければならない。

• XSTIFF1 のパラメータ

```
SUBROUTINE XSTIFF1 ( IEXN, XN, GDAT, MATN, LSK, ESK )  
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )  
DIMENSION ESK ( 1 )  
REAL GDAT ( 1 ), XN ( 1 )  
INTEGER MATN ( 1 )
```

使用者がコーディング

```
RETURN  
END
```

入力パラメータ

IEXN : 要素番号  
XN : 要素の節点座標データ ( 初期形状での値 )  
GDAT : 要素幾何学データ ( GEOMETRY データで定義されたもの )  
MATN : 要素の材料データ ( MATERIAL データで定義されたもの )

出力パラメータ

LSK : 要素剛性マトリックス ESK の長さ  
ESK : 全体座標系での要素剛性マトリックス ( 上半分のみ )

(2) サブプログラム XPLOAD1

サブプログラム XPLOAD1 は, 要素に作用する分布荷重や物体力と等価な全体座標系における節点力ベクトルの計算, および FORCE データで与えられた初期ひずみの内部点への補間を行なうためのルーチンであり, 負荷が節点に作用する集中荷重の場合や, 初期ひずみがない場合は作成する必要はない。

• XPLOAD1 のパラメータ

```
SUBROUTINE XPLOAD1( IEXN, XN, GDAT, LDAT, LPP, PP, LEPSI, EPSI )
IMPLICIT REAL*8( A-H, O-Z )
DIMENSION PP(1), EPSI(1)
REAL GDAT(1), XN(1)
INTEGER LDAT(1)
```

使用者がコーディング

RETURN

END

入力パラメータ

LEXN : 要素番号  
XN : 要素の節点座標データ (初期形状での値)  
GDAT : 要素幾何学データ (GEOMETRY データで定義されたもの)  
LDAT : 要素に作用する荷重データ (FORCE データで定義されたもの)

出力パラメータ

LPP : 等価節点力ベクトル PP の長さ  
PP : 全体座標系での等価節点力ベクトル  
LEPSI : 要素の内部点における初期ひずみベクトル EPSI の長さ  
EPSI : 要素の内部点における初期ひずみ

(3) サブプログラム XQLOAD1

サブプログラム XQLOAD1 は、要素に作用する初期ひずみや熱ひずみと等価な全体座標系における節点力ベクトルの計算を行うためのルーチンであり、初期ひずみや熱ひずみがない場合は作成する必要はない。

• XQLOAD1 のパラメータ

```
SUBROUTINE XQLOAD1( IEXN, XN, GDAT, MATN, EPS, LQQ, QQ )
IMPLICIT REAL*8( A-H, O-Z )
DIMENSION EPS(1), QQ(1)
REAL GDAT(1), XN(1)
INTEGER MATN(1)
```

使用者がコーディング

RETURN

END

入力パラメータ

IEXN : 要素番号  
XN : 要素の節点座標データ (初期形状での値)  
GDAT : 要素幾何学データ (GEOMETRY データで定義されたもの)  
MATN : 要素の材料データ (MATERIAL データで定義されたもの)  
EPS : 要素の内部点におけるひずみ増分 (XPLOAD1, XTEMP1 でセット)

出力パラメータ

LQQ : 等価節点力ベクトル QQ の長さ  
QQ : 全体座標系での等価節点力ベクトル

(4) サブプログラム XSLOAD1

サブプログラム XSLOAD1 は、要素に作用する応力と等価な全体座標系における節点力ベクトルの計算を行なうためのルーチンであり、必ず作成しなければならない。

• XSLOAD1 のパラメータ

```
SUBROUTINE XSLOAD1 ( IEXN, XN, GDAT, MATN, SIG, LSS, SS )  
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )  
DIMENSION SIG ( 1 ), SS ( 1 )  
REAL GDAT ( 1 ), XN ( 1 )  
INTEGER MATN ( 1 )
```

使用者がコーディング

```
RETURN  
END
```

入力パラメータ

IEXN : 要素番号  
XN : 要素の節点座標データ (初期形状での値)  
GDAT : 要素幾何学データ (GEOMETRY データで定義されたもの)  
MATN : 要素の材料データ (MATERIAL で定義されたもの)  
SIG : 要素の内部点における応力増分

出力パラメータ

LSS : 等価節点力ベクトル SS の長さ  
SS : 全体座標系での等価節点力ベクトル

(5) サブプログラム XTEMP1

サブプログラム XTEMP1 は、節点で与えられた温度増分の要素の内部点への補間を行なうためのルーチン



であり、熱荷重がなければ作成する必要はない。

• XTEMP1 のパラメータ

```
SUBROUTINE XTEMP1 ( IEXN, XN, TNOD, TINT )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION TINT ( 1 )
REAL XN ( 1 ), TNOD ( 1 )
|
| 使用者がコーディング
|
RETURN
END
```

入力パラメータ

IEXN : 要素番号  
XN : 要素の節点座標データ ( 初期形状での値 )  
TNOD : 要素構成節点における温度増分

出力パラメータ

TINT : 要素の内部点の温度増分

(6) サブプログラム XSTRN1

サブプログラム XSTRN1 は、変位増分から要素の内部点でのひずみ増分の計算を行なうためのルーチンであり、必ず作成しなければならない。

• XSTRN1 のパラメータ

```
SUBROUTINE XSTRN1 ( IEXN, XN, GDAT, DUG, EPSLON )
IMPLICIT REAL*8 ( A-H, O-Z )
DIMENSION DUG ( 1 ), EPSLON ( 1 )
REAL GDAT ( 1 ), XN ( 1 )
|
| 使用者がコーディング
|
RETURN
END
```

入力パラメータ

IEXN : 要素番号  
XN : 要素の節点座標データ ( 初期形状での値 )  
GDAT : 要素幾何学データ ( GEOMETRY データで定義されたもの )  
DUG : 要素構成節点における変位増分ベクトル

出力パラメータ

EPSLON : 要素の内部点でのひずみ増分

また、上記のユーザープログラムの作成において、使用者の負担を軽減するため、使用者がその目的に合わせて利用できるユーティリティールーチンを用意する。

• サブルーチン ELMATX

指定した応力場に対応する弾性材料マトリックスのセットを行なう。

CALL ELMATX(0, MATN, DD)

入力パラメータ

MATN : 要素の材料データ (MATERIAL データで定義されたもの)

出力パラメータ

DD : 指定した応力場に対応する弾性材料マトリックス

## 5. 入出力

### (1) データ入力方法の整備

昨年度に引き続き、FINASにおける各解析機能のデータ入力方法および形式の見直し、新しい機能の組み込みや改良に伴う入力データの特性や既存のデータとの整合性の検討が行なわれ、以下に示す各項目についてデータ入力の変更および新しいデータの追加が行なわれた。

#### a) 解析をコントロールするデータ

- 塑性クリープ統一型モデルに対する時間増分自動決定機能のための“AUTO TIME”カードにクリープモデルの時間増分自動決定機能に関するデータが考慮された。
- 仮想き裂進展法における破壊力学パラメータ、き裂の仮想移動量を定義するための“FRACTURE”カードの見直しが行なわれた。
- 面接触解析における接触ペア面、クーロン摩擦係数等を指定するための“PAIR SURF”カードの拡張が行なわれた。

#### b) 静的応力解のためのモデルデータ

- 任意の構成モデルを定義するためのユーザー作成サブプログラムの組み込みに伴い“MATERIAL”データが拡張された。
- 荷重を定義するための“FORCE”データに対して遠心力荷重が取り扱うことができるように拡張された。
- クリープ、塑性クリープ統一型モデルのための時間増分自動決定機能に対して負荷履歴データの見直しが行なわれた。

### (2) 出力機能

#### a) プリント、ポストテープ出力

- 面接触解析機能の組み込みに伴い、接触節点の状態および接触力を出力指示するためのデータ“CFOC”カードが追加された。
- “POST TAPE”カードに汎用プレ/ポストプロセッサ向けのポストフォーマットの指定オプションが追加された。
- 動的解析のポストテープ出力に対し、固有値/刺激係数、モーダル要素応力/ひずみおよびモーダル要素力

の出力指示を与える“EIGEN”カード，“MELM”カード，“MELFO”カードが追加された。

b) XYプロット出力

- XYプロット出力に対して任意の構成モデルで取り扱うスカラー型，ベクトル型の状態変数が考慮できるように拡張された。

## 6. プログラム検証

FINASでは、プログラム開発当初から系統的に検証が進められており、検証目的に応じてその問題は、CP (Check Problem)、EP (Element Problem)、VP (Verification Problem)、DP (Demonstration Problem)と称され、それぞれ次の目的を持っている。

- CP …………… プログラム作成者が各自のモジュール作成の過程でそのチェックのために設定する問題、あるいは既にユーザに供されているプログラムにエラーが発見された時にプログラム修正が正しく行なわれたかどうかを確認する問題。
- EP …………… 新たに開発した要素が仕様書どおり作成されていることを確認し、その要素の特性を調査する問題。
- VP …………… FINASの持つ各種機能が正しく作動するか、スキームが与える解が数学的に正解であり、かつ物理的に妥当であるかの検証を行なう問題。
- DP …………… FINASの解析能力の総合評価と実際的な問題への応用を目的とし、ベンチマーク問題として既に解析が行なわれているもの、あるいは高速増殖炉の設計にあたり実際に出合う問題。

平成元年度に解析した検証問題は、VPが14題であり、表6-1に示す。VPの内容と結果については第Ⅲ編を参照されたい。

表6-1 平成元年度に解析したVP

No	タイトル	目的
VP-178	2曲面繰返し塑性モデルを用いたサイクリック弾塑性問題(2)	2曲面繰返し塑性モデルを用いて単軸引張り、圧縮のサイクリック弾塑性解析を行ない、ADMODELによる解と比較する。
VP-179	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(1)	中央き裂を有する平板の弾性解析を行ない、仮想き裂進展法による $J$ 積分値の計算が正しく行なわれることを確認し、その有効性を検討を行なう。
VP-180	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(2)	WilsonとYuによる端部き裂を有する平板の平面ひずみき裂問題の熱弾塑性解析を行ない $\hat{J}$ 積分値を求め、SHIH等の解と比較する。
VP-181	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(3)	中央にき裂のある帯板の一樣引張問題を高次要素、低次要素を用いた場合について $J$ 積分値を求め理論解と比較する。
VP-182	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(4)	埋没円き裂を有する無限体に引張荷重を負荷し、高次要素、低次要素を用いた場合について $J$ 積分値を求め比較する。
VP-183	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(5)	埋没円き裂を有する無限体に温度が作用する熱弾塑性解析を行ない、仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値を計算し、渡辺等の解と比較し有効性の検討を行なう。
VP-184	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(6)	中央き裂を有する平板の除荷を含まない弾塑性解析を行ない、仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値を求め、岸本等の解と比較する。
VP-185	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(7)	除荷過程を含む任意の履歴を持つ荷重に対して、中央き裂を持つ平板の弾塑性解析を行ない、仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値の検証を行なう。
VP-186	統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題(1)	統一型構成モデルの1つであるRobinsonモデルを適用し、内圧を受ける円管の問題を解析し、Robinson等の解との比較を行なう。
VP-187	統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題(2)	統一型構成モデルの1つであるRobinsonモデルを適用し、内圧を受ける円管の問題を解析し、Y. Chang等の解との比較を行なう。

No	タイトル	目的
VP-188	時間増分自動決定機能を用いた2本棒の熱ラチェット問題	統一型構成モデルの1つである Robinson モデルに対し Kumar の時間増分自動決定機能を適用し、2本棒の熱ラチェット問題を解析し、Robinson 等の解と比較する。
VP-189	面接触機能を用いた円板塑性加工問題	円板材成形シミュレーション問題を解析し、大変形弾塑性面接触解析機能の妥当性を確認する。
VP-190	使用者作成のサブプログラムによる組合せ硬化モデルの組み込み	使用者作成サブプログラムによる組合せ硬化モデルの組み込みを行ない計算し、ADMODELとの解と比較する。
VP-745	減衰のある1自由度系の周波数応答問題	バネ減衰要素の一端に周期荷重が作用する場合の周波数応答変位を求め、理論解との比較を行なう。

## 7. プログラムの設置・更新

### (1) 大洗工学センタ

FINASの動燃事業団大洗工学センターへの最初の設置は55年4月に行なわれ、以後更新が続けられている。プログラムの更新は年2回が原則であるが、エラーの発生、プログラムの改良あるいは拡張など緊急を要する事態が生じた場合には、その都度対処を行なってプログラムの更新を実施し、大洗工学センターにおいて最新のバージョンが利用できるように図っている。

元年度におけるプログラムの更新は表7-1に示されるように1回行なわれている。なお、FINASは大洗工学センターのFACOM M200/VP-100 およびM780の両機種に設置されている。

表7-1 大洗工学センタでのFINAS更新履歴

更 新 日	バ ー ジ ョ ン
平成2年7月1日	V11.0/ED05

### (2) 外部機関

FINASはFBRの設計・建設の過程で発生する諸問題を解析する目的で開発され、主として動燃事業団の内部で利用されてきた。解析プログラムは数多く、また広く使用され、実績を積み上げていくことによって、その性能と信頼性に対する評価が高まっていくのが常である。

このような見地から、FINASは動燃事業団ばかりでなく、製造メーカー等の外部機関においても利用できる道が開かれている。FBRメーカーによるFINAS利用に関しては昭和57年頃からの貸与あるいは動燃事業団の計算センターにおける利用という形態で相当量が使われてきた。外部設置に関して本年度は三菱重工業㈱神戸造船所のHP-9000へバージョン10.0/ED99のインストールが行なわれた。



### (3) エラー・要望対策

FINASでは開発当初から系統的にプログラムの検証を実施し、エラーの発生を未然に防ぐ努力を続けている。しかしながら、FINASのような汎用プログラムのすべてにわたって検証を行なうことはむずかしく、実際の解析中にエラーの発見されることがままある。また、エラーではないが、このように改良あるいは拡張をして欲しいという要望も解析作業を通じて起きてくる。この種の問題に対処するために「FINAS COMMUNICATION LETTER」を用意し、各種エラーと要望事項に対する処理を行なっている。エラーが発見された場合には、この書類に基づいて対策が講じられ、プログラムが修正される。そしてこのエラーの修正が正しく行なわれていることを確認するためにCP (Check Problem: 6章参照)の作成と解析が行なわれ、エラーの回復が認められた時点で、FINASのマスターテープが更新される。同時に大洗工学センターのプログラム更新も行なわれる。この一連の作業は緊急メンテナンスと呼ばれ、定期的な年2回のプログラム更新の他に実施される。

なお、平成元年度にFINAS COMMUNICATION LETTERに沿って処理された作業は3件であり、大洗工学センターに対して緊急メンテナンスを行なった。

主な要望事項に対する処理の内容と処理を行なったバージョンを表7-2に示す。

表 7-2 主な要望事項に対する処理

№	主 要 望 事 項 の 内 容	処理バージョン
83-11	動的解析にひずみエネルギー比例減衰機能を追加した方がよい。	V11.0/ED05
85-22 (89-1)	遠心力荷重を NASTRAN の R-FORCE 程度のカードで載荷できるように。	V11.0/ED05
89-6	POST TAPE への固有応力・ひずみの出力	V11.0/ED05

### (4) FINAS ニュース

FINAS 拡張・整備計画に従い、新たな解析機能や要素の追加あるいは既存の機能に対する改良、拡張が進められている。そして、FINAS を多くの人々に使用してもらうためには、プログラムの現状を利用者に把握してもらうことが大切である。そこで、改良、拡張された機能を利用者に提供することができるようになった場合には、FINAS ニュースによりその旨をFINASの利用者に連絡している。FINAS ニュースには要素や解析機能に関するニュースのほか、ジョブコントロールカード、FINASの使用上の注意、使用説明書の改訂などFINASを使用する上で必要となる情報が掲載されている。

## 第II編 FINASにおける解析の理論と方法

# 序

本編では、FINAS システムの背景となる力学的理論、数値解法について説明する。第1章では有限要素法に基づく静的応力解析、動的応力解析および熱伝導解析の理論とアルゴリズムについて論ずる。第2章は数値解法に関する部分であり、現在、プログラムに組み込まれている連立一次方程式の解法および固有値問題の解法について述べる。

# 1. 有限要素解析の理論

## 1.1 はじめに

FINASシステムは、高速炉開発において生じる構造問題を解決するために、開発されている有限要素法の理論に基づく汎用構造解析プログラムであり、本章ではその理論について説明する。1.2節は基礎理論である微小変形解析の理論を要約したものであり、1.3節では非弾性解析の構成方程式、システムに準備されている材料データライブラリおよび非弾性解析のアルゴリズムを説明する。幾何学的非線形解析については1.4節で大変形解析、1.5節で座屈荷重解析について理論とアルゴリズムを説明する。1.6節は破壊力学解析であり、1.7節が動的解析、1.8節が熱伝導解析である。1.9節は静的解析における荷重増分自動決定機能、1.10節は流体構造物連成解析、1.11節は動的解析における時間増分自動決定機能、1.12節は周波数応答解析機能、1.13節は面接触解析機能であり、他の節と同様に理論と解法のアルゴリズムについて記述する。

## 1.2 微小変形解析

ここでは FINAS システムの基本となっている有限要素法理論について説明する。1.2.1 節では連続体構造物と対応する有限要素モデルの考え方について説明し、1.2.2 節では基礎方程式、1.2.3 節では全体方程式を導く。本章で説明する事項は基礎的なものであり、変位法による有限要素解析の手引きとして準備されたものである。

### 1.2.1 連続体と離散化有限要素モデル

FINAS では解析すべき構造について、有限要素 (finite element) の集まりからなる近似的離散化モデルを考え (図 1.2-1 参照)、このモデルについて数値解析を行なう。それぞれの有限要素は、それを構成する節点 (node) において結合している。なお、ここでは有限要素の結合によって組み立てられる近似モデルを全体モデルと呼ぶ。

全体モデルを構成するすべての節点の座標  $\{\hat{X}\}$  とし、 $m$  番目の有限要素を構成するすべての節点の座標を  $\{\hat{x}\}_m$  とすると、次の関係が成立する。

$$\{\hat{x}\}_m = [A]_m \{\hat{X}\} \quad (1.2-1)$$

式 (1.2-1) は全体モデルから 1 つの要素の形状を認識するための関係であり、 $[A]$  は要素  $m$  の節点結合状態を表わすマトリックスと解釈できる。この関係は変位についても同様であり、全体モデルの節点変位を  $\{\hat{U}\}$  とし、有限要素を構成する節点の変位  $\{\hat{u}\}_m$  とすると次の関係式が成立する。

$$\{\hat{u}\}_m = [A]_m \{\hat{U}\} \quad (1.2-2)$$

式 (1.2-2) は全体モデルの変位から個々の要素の変位を認識するための関係である。

離散化した全体モデルの平衡を表わす仮想仕事の原理は、次のように内部仕事と外部仕事が等価であるとして次式のように表わすことができる。

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (1.2-3)$$

$\delta W_{\text{int}}$  は内部仮想ひずみエネルギー、 $\delta W_{\text{ext}}$  は外力による仮想仕事である。

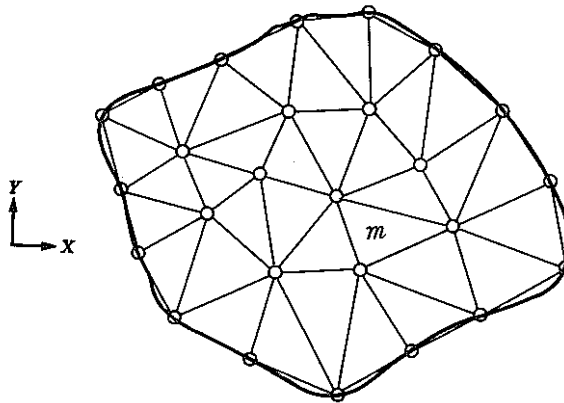


図 1.2-1 連続体と有限要素モデル

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \delta \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv \quad (1.2-4)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \delta \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{P}^B\} dv + \int_S \delta \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{P}^S\} ds \quad (1.2-5)$$

ここで、 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  と  $\{\boldsymbol{\sigma}\}$  は応力とひずみを表わし、 $\delta$  は変分を示している。 $\{\mathbf{u}\}$  は物体点の変位、 $\{\mathbf{P}^B\}$  と  $\{\mathbf{P}^S\}$  は物体力と表面力を表わす。 $V$  と  $S$  は離散化した全体モデルの体積と表面積を表わす。

式(1.2-4)と式(1.2-5)は全体モデルについての積分を意味するが、個々の要素の寄与を総和することにより、次式のように表わすことができる。

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_m \delta W_{\text{int},m} \quad (1.2-6)$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_m \delta W_{\text{ext},m} \quad (1.2-7)$$

ここで、添字  $m$  は  $m$  番目の要素の意味である。

$$\delta W_{\text{int},m} = \int_{V_m} \delta \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_m dv \quad (1.2-8)$$

$$\delta W_{\text{ext},m} = \int_{V_m} \delta \{\mathbf{u}\}_m^T \{\mathbf{P}^B\}_m dv + \int_{S_m} \delta \{\mathbf{u}\}_m^T \{\mathbf{P}^S\}_m ds \quad (1.2-9)$$

式(1.2-8)と式(1.2-9)において  $V_m$  は要素  $m$  の体積を表わし、 $S_m$  は要素  $m$  が表面  $S$  の一部を構成する場合の表面積を意味している。

## 1.2.2 有限要素に関する定式

1.2.1節では、連続体を離散化した有限要素モデルと仮想仕事式について考察した。ここでは1つの要素に着目し、その力学的関係について考える。

要素  $m$  の状態が  $\{\mathbf{u}\}_m^0$ 、 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_m^0$ 、 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^0$  から  $\{\mathbf{u}\}_m$ 、 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_m$ 、 $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m$  に変化したときの増分を考える。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}\}_m &= \{\mathbf{u}\}_m^0 + \Delta \{\mathbf{u}\}_m \\ \{\boldsymbol{\sigma}\}_m &= \{\boldsymbol{\sigma}\}_m^0 + \Delta \{\boldsymbol{\sigma}\}_m \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m &= \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^0 + \Delta \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m \end{aligned} \quad (1.2-10)$$

ここで、 $\Delta$  は増分を表わしている。要素  $m$  の内部点の変位増分  $\Delta \{\mathbf{u}\}_m$  は、要素を構成する節点の変位増分  $\Delta \{\hat{\mathbf{u}}\}_m$  より次のように計算される。

$$\Delta \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]_m \Delta \{\hat{\mathbf{u}}\}_m \quad (1.2-11)$$

ここで、 $[\mathbf{N}]_m$  は要素  $m$  の変位関数 (displacement function) と呼ばれる補間関数である。また、要素内の座標についても同様に節点の座標より補間する。

変位増分よりひずみ増分を求める微分関係は次のようにマトリックス形で表わすことができる。

$$\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m = [\mathbf{L}]_m \Delta\{\mathbf{u}\}_m \quad (1.2-12)$$

式(1.2-12)に式(1.2-11)を代入することにより、要素内部のひずみが要素節点の変位と次のように関係づけられる。

$$\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m = [\mathbf{L}]_m [\mathbf{N}]_m \Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m = [\mathbf{B}]_m \Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m \quad (1.2-13)$$

$[\mathbf{B}]_m$  は微分演算子から成る変位ひずみ変換マトリックスである。また、応力とひずみの関係を表わす構成方程式は次のように表わされるものと仮定する。

$$\Delta\{\boldsymbol{\sigma}\}_m = [\mathbf{D}]_m (\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m - \Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^I) \quad (1.2-14)$$

$\Delta\{\boldsymbol{\sigma}\}_m$  は応力増分、 $\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^I$  は熱ひずみ等の初期ひずみ増分を表わしている。 $[\mathbf{D}]_m$  は構成関係を表わす材料マトリックスである。

要素  $m$  の仮想ひずみエネルギーは式(1.2-8)に与えられているので、式(1.2-8)に式(1.2-10)、式(1.2-13)、式(1.2-14)を代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int},m} &= \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T \left( \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_m^0 dv + \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T \Delta\{\boldsymbol{\sigma}\}_m dv \right) \\ &= \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T \left( \{\hat{\mathbf{r}}\}_m + \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_m (\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m - \Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^I) dv \right) \\ &= \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T \left( \{\hat{\mathbf{r}}\}_m + \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_m [\mathbf{B}]_m dv \Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m - \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_m \Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^I dv \right) \\ &= \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T ([\mathbf{K}]_m \Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m - \Delta\{\hat{\mathbf{P}}\}_m^I + \{\hat{\mathbf{r}}\}_m) \end{aligned} \quad (1.2-15)$$

ここで、

$$[\mathbf{K}]_m = \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_m [\mathbf{B}]_m dv \quad (1.2-16)$$

$$\Delta\{\hat{\mathbf{P}}\}_m^I = \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_m \Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_m^I dv \quad (1.2-17)$$

$$\{\hat{\mathbf{r}}\}_m = \int_{V_m} [\mathbf{B}]_m^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_m^0 dv \quad (1.2-18)$$

$[\mathbf{K}]_m$  は要素  $m$  の剛性マトリックス、 $\Delta\{\hat{\mathbf{P}}\}_m^I$  は初期ひずみと等価な節点力ベクトル、 $\{\hat{\mathbf{r}}\}_m$  は応力分布と等価な節点力ベクトルである。

次に、外力による仮想仕事について考える。外力についても次のように増分形で表わす。

$$\{\mathbf{P}^B\}_m = \{\mathbf{P}^B\}_m^0 + \Delta\{\mathbf{P}^B\}_m \quad (1.2-19)$$

$$\{\mathbf{P}^S\}_m = \{\mathbf{P}^S\}_m^0 + \Delta\{\mathbf{P}^S\}_m \quad (1.2-20)$$

式(1.2-9)は式(1.2-11)を考慮して次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{ext},m} &= \delta \{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T \left( \int_{V_m} [\mathbf{N}]_m^T (\{\mathbf{P}^B\}_m^0 + \Delta\{\mathbf{P}^B\}_m) dv + \int_{S_m} [\mathbf{N}]_m^T (\{\mathbf{P}^S\}_m^0 + \Delta\{\mathbf{P}^S\}_m) ds \right) \\ &= \delta \{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T (\{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m^0 + \Delta\{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m + \{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m^0 + \Delta\{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m)\end{aligned}\quad (1.2-21)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m^0 &= \int_{V_m} [\mathbf{N}]_m^T \{\mathbf{P}^B\}_m^0 dv \\ \Delta\{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m &= \int_{V_m} [\mathbf{N}]_m^T \Delta\{\mathbf{P}^B\}_m dv \\ \{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m^0 &= \int_{S_m} [\mathbf{N}]_m^T \{\mathbf{P}^S\}_m^0 ds \\ \Delta\{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m &= \int_{S_m} [\mathbf{N}]_m^T \Delta\{\mathbf{P}^S\}_m ds\end{aligned}\quad (1.2-22)$$

### 1.2.3 全体モデルの支配方程式

前節では1つの有限要素に着目し、仮想ひずみエネルギーと外力のなす仮想仕事を導いたが、ここでは各要素から組み立てられる全体モデルの支配方程式を導く。式(1.2-6)と式(1.2-7)より全体系の仮想仕事式は次のようになる。

$$\sum_m \delta W_{\text{int},m} = \sum_m \delta W_{\text{ext},m} \quad (1.2-23)$$

式(1.2-23)に式(1.2-15)と式(1.2-21)を代入すると、次式が得られる。

$$\sum_m \delta \{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T [\mathbf{K}]_m \Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}_m = \sum_m \delta \{\hat{\mathbf{u}}\}_m^T (\Delta\{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m + \Delta\{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m + \Delta\{\hat{\mathbf{P}}\}_m^I + \{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m^0 + \{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m^0 - \{\hat{\mathbf{r}}\}_m) \quad (1.2-24)$$

ここで式(1.2-24)に式(1.2-2)を代入して全体系での仮想式が得られる。

$$\begin{aligned}\delta \{\hat{\mathbf{U}}\}^T \left( \sum_m [\bar{\mathbf{A}}]_m^T [\mathbf{K}]_m [\bar{\mathbf{A}}]_m \right) \Delta\{\hat{\mathbf{U}}\} \\ = \delta \{\hat{\mathbf{U}}\}^T \sum_m [\bar{\mathbf{A}}]_m^T (\Delta\{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m + \Delta\{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m + \Delta\{\hat{\mathbf{P}}\}_m^I + \{\hat{\mathbf{P}}^B\}_m^0 + \{\hat{\mathbf{P}}^S\}_m^0 - \{\hat{\mathbf{r}}\}_m)\end{aligned}\quad (1.2-25)$$

$\delta\{\hat{\mathbf{U}}\}$  は任意の仮想変位であるので、次の増分形支配方程式が得られる。

$$[\mathbf{K}] \Delta\{\hat{\mathbf{U}}\} = \Delta\{\hat{\mathbf{P}}\} + \{\hat{\mathbf{R}}\} \quad (1.2-26)$$

ただし,



$$\{K\} = \sum_m \{\bar{A}\}_m^T \{K\}_m \{\bar{A}\}_m$$

$$A\{\hat{P}\} = \sum_m \{\bar{A}\}_m^T (A\{\hat{P}^B\}_m + A\{\hat{P}^S\}_m + A\{\hat{P}\}_m^I) \quad (1.2-27)$$

$$\{\hat{R}\} = \sum_m \{\bar{A}\}_m^T (\{\hat{P}^B\}_m^0 + \{\hat{P}^S\}_m^0 - \{\hat{r}\}_m)$$

〔参考文献〕

- 1) O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 1977.
- 2) O. C. Zienkiewicz and K. Morgan, "FINITE ELEMENTS AND APPROXIMATION", John Wiley & Sons, 1983.
- 3) G. Strang and G. J. Fix, "AN ANALYSIS OF THE FINITE ELEMENT METHOD", Prentice-Hall, 1973.

### 1.3 非弾性解析

原子炉コンポーネントの設計などにおいては、その環境としての温度の影響を無視できない場合が多い。このような構造物の解析は過去においては簡易解析法が中心であったが、有限要素法の発展と材料データの収集および設計コードの推移などにより、有限要素法を用いた詳細解析法も広く用いられるようになってきた。<sup>1), 2)</sup> 現在までに、このような問題に対する有限要素法の理論も数多く発表されており、<sup>3), 4)</sup> さらに各種プログラムに用いられ、<sup>8)</sup> 種々の問題が解析されている。一方、解析に用いられる材料データ収集のための実験も進み、それによって構成方程式も検討されている。<sup>6)~11)</sup>

ここでは、現在までに確立されている理論について応用面から、1.3.1節で熱弾塑性領域における構成方程式について、1.3.2節でクリープ領域における構成方程式について整理し説明する。そして1.3.3節でFINASに内蔵されている材料データライブラリについて説明する。

#### 1.3.1 熱弾塑性解析における構成方程式

##### (1) 一般理論<sup>4), 11)</sup>

###### a) ひずみの分解

全ひずみは、次式に示すような成分に分解できるものとする。

$$\Delta\{\epsilon\} = \Delta\{\epsilon^e\} + \Delta\{\epsilon^p\} + \Delta\{\epsilon^C\} + \Delta\{\epsilon^S\} + \Delta\{\epsilon^T\} + \Delta\{\epsilon^I\} \quad (1.3-1)$$

ただし、添字 $e$ は“弾性”， $p$ は“塑性”， $C$ は“クリープ”， $S$ は“スウェリング”， $T$ は“温度”， $I$ は“初期”を意味し、 $\Delta$ は増分を表わす。

ここで、個々の成分は、次式によって表わされるものとする。

$$\Delta\{\epsilon^p\} = \Delta\lambda^p \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-2)$$

$$\Delta\{\epsilon^T\} = \int_T^{T+\Delta T} \alpha dT \cdot \{e_3\} \quad (1.3-3)$$

$$\Delta\{\epsilon^C\} = \Delta\lambda^C \left\{ \frac{\partial \phi^C}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-4)$$

$$\Delta\{\epsilon^S\} = \Delta\lambda^S \{e_3\} \quad (1.3-5)$$

ここで、 $\phi^p$ は塑性ポテンシャル、 $\phi^C$ はクリープポテンシャル、 $\alpha$ は熱膨張係数である。また、

$$\{e_3\}^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0] \quad (1.3-6)$$

であり、右肩の  $T$  は転置を表わす。なお、クリープおよびスウェリングについては、多くの構成方程式が提案されており、弾塑性挙動に比較して多様性があるので、ここでは次のように表わされるものとする。<sup>11), 12)</sup>

$$\begin{aligned}\Delta \lambda^C &= \Delta \bar{\varepsilon}^C (\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^C, T, \Delta T, \dots\dots) \\ \Delta \lambda^S &= \Delta \bar{\varepsilon}^S (\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^S, T, \Delta T, \dots\dots)\end{aligned}\quad (1.3-7)$$

b) 熱弾性領域における構成方程式<sup>4), 12), 13)</sup>

熱弾性領域では、次の Hooke の法則が成立するものとする。

$$\{\sigma\} = [E^e] \{\varepsilon^e\} \quad (1.3-8)$$

ここで、 $[E^e]$  は材料の弾性挙動を表わす定数であり、温度  $T$  の関数とする。

式(1.3-8)を増分形にすることにより、次式を得る。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e] \Delta\{\varepsilon^e\} + \{\Psi_T^e\} \Delta T \quad (1.3-9)$$

ただし、

$$\{\Psi_T^e\} = \frac{\partial [E^e]}{\partial T} \{\varepsilon^e\} = [\dot{E}^e] \{\varepsilon^e\} \quad (1.3-10)$$

であり、 $\dot{\phantom{x}}$  は温度に関する微分を表わす。ここで、弾塑性ひずみを次の形で定義する。

$$\Delta\{\varepsilon^{ep}\} = \Delta\{\varepsilon^e\} + \Delta\{\varepsilon^p\} \quad (1.3-11)$$

式(1.3-11)を考慮して、式(1.3-9)を次のように書き換える。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e] (\Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \Delta\{\varepsilon^p\}) + \{\Psi_T^e\} \Delta T \quad (1.3-12)$$

c) 熱弾塑性領域における構成方程式<sup>4), 12), 13)</sup>

ここでは降伏関数を特別な形に限定せず、一般的な形のまま取り扱う。なお、降伏関数としては、次式を仮定する。

$$f^*(\sigma, \varepsilon^p, T, \xi_k) = 0 \quad (1.3-13)$$

ただし、 $\xi_k$  は降伏面に関する付加的パラメータであり、また、associated な流れ則は non-associated な流れ則の特別な場合とも考えられるので、ここでは non-associated な場合のまま式を展開し、終りに associated な流れ則の場合を示す。負荷状態では、

$$\Delta f^* = \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \Delta\{\sigma\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \Delta\{\varepsilon^p\} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial f^*}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k = 0 \quad (1.3-14)$$

式(1.3-14)に式(1.3-12)を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \Delta \{ \epsilon^{ep} \} - \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] - \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \right) \Delta \{ \epsilon^p \} \\ & + \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Psi_T^e \} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \right) \Delta T + \frac{\partial f^*}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k = 0 \end{aligned} \quad (1.3-15)$$

流れ則式(1.3-2)を式(1.3-15)に代入し、 $\Delta \lambda^p$ について解くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \lambda^p = & \frac{\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \Delta \{ \epsilon^{ep} \}}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \\ & + \frac{\left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Psi_T^e \} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \right) \Delta T + \frac{\partial f^*}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \end{aligned} \quad (1.3-16)$$

式(1.3-16)、(1.3-2)を式(1.3-12)に代入して整理すると、次式が得られる。

$$\Delta \{ \sigma \} = [E^{ep}] \Delta \{ \epsilon^{ep} \} + \{ \Psi_T^{ep} \} \Delta T + \{ g_k^p \} \Delta \xi_k \quad (1.3-17)$$

ここで、

$$[E^{ep}] = [E^e] + [E^p] \quad (1.3-18)$$

$$\{ \Psi_T^{ep} \} = \{ \Psi_T^e \} + \{ \Psi_T^p \}$$

であり、 $\{ \Psi_T^{ep} \}$ は材料定数の温度依存性から導かれるものである。

式(1.3-18)の個々のマトリックスは、次のとおりである。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-19)$$

$$\{ \Psi_T^p \} = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \{ \Psi_T^e \} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \right)}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-20)$$

$$\{ g_k^p \} = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \frac{\partial f^*}{\partial \xi_k}}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-21)$$

associated な流れ則の場合,  $\phi^p = f^*$  であり, たとえば,  $[E^p]$  は次のようになる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-22)$$

(2) 等方硬化理論 4), 11)

ここでは, 塑性ポテンシャル, 降伏条件とも von Mises の関数を用いた場合について,  $[E^e]$  および  $\{\Psi_T^p\}$  を整理する。

等方硬化の場合, 降伏関数は次のように表わせる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\sigma) - \kappa(\varepsilon^p, T) = 0 \quad (1.3-23)$$

したがって,

$$\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} \right\} \quad (1.3-24)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial T} = - \frac{\partial \kappa}{\partial T}$$

と表わせるから, 式(1.3-2)を考慮に入れると,

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{\Delta \lambda^p} \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} \right\} \Delta \{\varepsilon^p\} = \frac{\Delta \kappa}{\Delta \lambda^p} \quad (1.3-25)$$

ここで, 次式に定義する塑性仕事  $\Delta W^p$  を導入する。

$$\Delta W^p = \{\sigma\}^T \Delta \{\varepsilon^p\} = \Delta \lambda^p \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} = \Delta \lambda^p \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (1.3-26)$$

式(1.3-25)に式(1.3-26)で求めた  $\Delta \lambda^p = \Delta \bar{\varepsilon}^p$  の関数を代入する。

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = H' \quad (1.3-27)$$

したがって, 次式が得られる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{H' + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-28)$$

$$\{\Psi_T^p\} = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left( \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Psi_T^e\} - \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right)}{H' + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-29)$$

(3) 移動硬化理論<sup>4), 11)</sup>

塑性ポテンシャル, 降伏条件とも von Mises の関数を用いた場合について,  $[E^p]$  および  $\{\Psi_T^p\}$  を整理する。

移動硬化の場合, 降伏関数は次のように表わせる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\sigma, \mathbf{a}) - \kappa(T) = 0 \quad (1.3-30)$$

ここで,  $\mathbf{a}$  は降伏面の移動を表わし, 塑性ひずみおよび温度の関数とする。したがって, この場合,

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} &= \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\} &= \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \right\} \end{aligned} \quad (1.3-31)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial T} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial \kappa}{\partial T}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Delta \{\mathbf{a}\} &= [C] \Delta \{\varepsilon^p\} \\ [C] &= [C]^T \end{aligned} \quad (1.3-32)$$

なるマトリックス  $[C]$  が定められるならば,

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \right\} = \left[ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \varepsilon^p} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}} \right\} = - [C] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-33)$$

となるから,

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-34)$$

である。したがって, 次式が得られる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} [E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-35)$$

$$\{\Psi_T^p\} = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left( \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right)}{\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [C] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-36)$$

Prager の移動硬化理論の場合,

$$\Delta \{a\} = C \Delta \{\varepsilon^p\} \quad (1.3-37)$$

となるから,

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = C \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} = \frac{3}{2} C \quad (1.3-38)$$

が得られるので,  $\{E^p\}$  は次のようになる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{\frac{3}{2} C + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-39)$$

一方, Ziegler の移動硬化理論の場合は, 次のように表わせる。<sup>4), 6), 7)</sup>

$$\Delta \{a'\} = C \Delta \{\varepsilon^p\} \quad (1.3-40)$$

ここで,  $\{a'\}$  は  $\{a\}$  の偏差成分を表わし,

$$\{a'\} = \{a\} - \frac{1}{3} \{e_3\} \{e_3\}^T \{a\} = \left[ \frac{\partial a'}{\partial a} \right] \{a\} \quad (1.3-41)$$

また,  $\{\sigma'\}$  についても同様に,

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \frac{1}{3} \{e_3\} \{e_3\}^T \{\sigma\} = \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] \{\sigma\} \quad (1.3-42)$$

である。したがって, 式(1.3-41), (1.3-42)より, 次のようになる。

$$\left[ \frac{\partial a'}{\partial a} \right] = \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] = \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] \quad (1.3-43)$$

Ziegler の移動硬化理論の場合を Prager の場合と比較するために, 式(1.3-38)に対応する計算を行なうと, 次のようになる。

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = - \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \varepsilon^p} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}'} \right\} \right)^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \\
&= -C \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}'} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \\
&= -C \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}'} \right\}^T \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma'} \right\} \\
&= -C \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}'} \right\}^T \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] \left[ \frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma'} \right\} \\
&= -C \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial \sigma} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{a}'} \right\} \right)^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \\
&= -C \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \\
&= -C \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} = -\frac{3}{2}C \tag{1.3-44}
\end{aligned}$$

式(1.3-38), (1.3-44)を比較することにより,  $[E^p]$  は Prager 説の場合も Ziegler 説の場合も同一であることがわかる。

(4) 組み合わせ硬化理論<sup>4), 11)</sup>

移動硬化と等方硬化を組み合わせた場合の降伏関数は, 次のようになる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\sigma, \mathbf{a}) - \kappa(\varepsilon^p, T) = 0 \tag{1.3-45}$$

この場合, 移動硬化の場合と異なるのは,

$$\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \right\} - \left\{ \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} \right\} \tag{1.3-46}$$

となることである。したがって,

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = H' + \frac{3}{2}C \tag{1.3-47}$$

この関係を式(1.3-22)に代入することにより, 次式が求められる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{H' + \frac{3}{2}C + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \tag{1.3-48}$$



(5) ORNL 形式の硬化理論<sup>5), 6)</sup>

ORNL 形式の硬化理論の場合、1回目の降伏時における  $\{E^p\}$  は移動硬化理論の式 (1.3-43) で表わし、2回目以降の降伏判定においては降伏応力に  $\sigma_Y^{10}$  を用い、移動硬化理論の  $C$  を  $C_{10}$  に置き換える。したがって、 $\{E^p\}$  は次のように表わされる。

1回目のとき、

$$\{E^p\} = - \frac{\{E^e\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{E^e\}}{\frac{3}{2} C + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{E^e\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-49)$$

2回目以降、

$$\{E^p\} = - \frac{\{E^e\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{E^e\}}{\frac{3}{2} C_{10} + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{E^e\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-50)$$

ここで、 $\sigma_Y^{10}$ 、 $C_{10}$  は ORNL が推奨しているところの 10 サイクル後の降伏応力と移動硬化係数である。

(6) 繰返し組み合わせ硬化理論<sup>11)</sup>

ここでは、降伏曲面の大きさが塑性仕事あるいは累積塑性ひずみに依存する繰返し組み合わせ硬化理論について説明する。 $\{E^p\}$  および  $\{W^p\}$  は移動硬化理論における式 (1.3-35)、式 (1.3-36) が適用され、降伏曲面の大きさ  $\kappa$  は次式で表わされる。

$$\kappa = (1-\omega) \kappa(W^p, T) + \omega \kappa(\tilde{\epsilon}^p, T) \quad (1.3-51)$$

ここで、 $W^p$  は塑性仕事、 $\tilde{\epsilon}^p$  は累積相当塑性ひずみであり、それぞれ次式で表わされ、 $\omega$  は 0 か 1 のいずれかの値をとる。

$$\begin{aligned} W^p &= \int dW^p = \int \{\sigma'\}^T d\{e^p\} \\ \tilde{\epsilon}^p &= \int d\tilde{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta\{e^p\}^T \Delta\{e^p\}} \end{aligned} \quad (1.3-52)$$

ただし、 $\{\sigma'\}$  は偏差応力である。したがって、繰返し組み合わせ硬化理論では、負荷の各段階での連続的な降伏面の移動とともに、式 (1.3-51) から降伏面の膨張も考慮する。また、ORNL の推奨する方法では、塑性負荷の増分間では降伏面の大きさを変化させないで増分終了後にこれを変化させる近似手法を適用している。そのため式 (1.3-32) の代わりに次式を用いて  $\Delta\{a\}$  を求めている。

$$\Delta\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{C}] \Delta\{\mathbf{e}^p\} - \frac{\Delta\kappa}{\kappa} \{\mathbf{S}\} \quad (1.3-53)$$

ここで、 $\{\mathbf{S}\}$ 、 $\Delta\kappa$  はそれぞれ次式で表わされるものである。

$$\{\mathbf{S}\} = \{\sigma\} - \{\mathbf{a}\}$$

$$\Delta\kappa = (1-\omega) \left[ \frac{\partial\kappa}{\partial\tilde{\epsilon}^p} \Delta\tilde{\epsilon}^p + \frac{\partial\kappa}{\partial T} \Delta T \right] + \omega \left[ \frac{\partial\kappa}{\partial W^p} \Delta W^p + \frac{\partial\kappa}{\partial T} \Delta T \right] \quad (1.3-54)$$

### (7) $\alpha$ リセット法を考慮した移動硬化論

2直線移動硬化モデルにおける降伏曲面の移動は、本来、全移動量に関して制限がないために、繰返し荷重の多い解析では、しばしば異常な予測結果が得られることがある。ひずみを増加させながらあるひずみ範囲を繰返す簡単な単軸のケースに対しては、2直線移動硬化モデルは平均応力の連続的上昇を予測するが、これに対して既存のデータはあまり顕著な平均応力の増加を示さず飽和の傾向を示す。このような挙動を修正するための $\alpha$ リセット法について述べる。

$\alpha$ リセット法は負荷反転時に降伏曲面の移動 $\{\mathbf{a}\}$ の値を設定し直すものである。単軸の場合には通常、点1から除荷が起きるとすぐ弾性応力範囲は $2\sqrt{3}\kappa$ に採られ、繰返しサイクルでは図1.3-1(a)の挙動となる。一方、 $\alpha$ リセット法を考慮すると負荷反転時に $\{\mathbf{a}\}$ が設定し直され、図1.3-1(b)のように点1からの除荷後の降伏が $\sqrt{3}\kappa^\alpha$ の応力レベルで生じる。以下に多軸応力場における $\alpha$ リセット法について説明する。

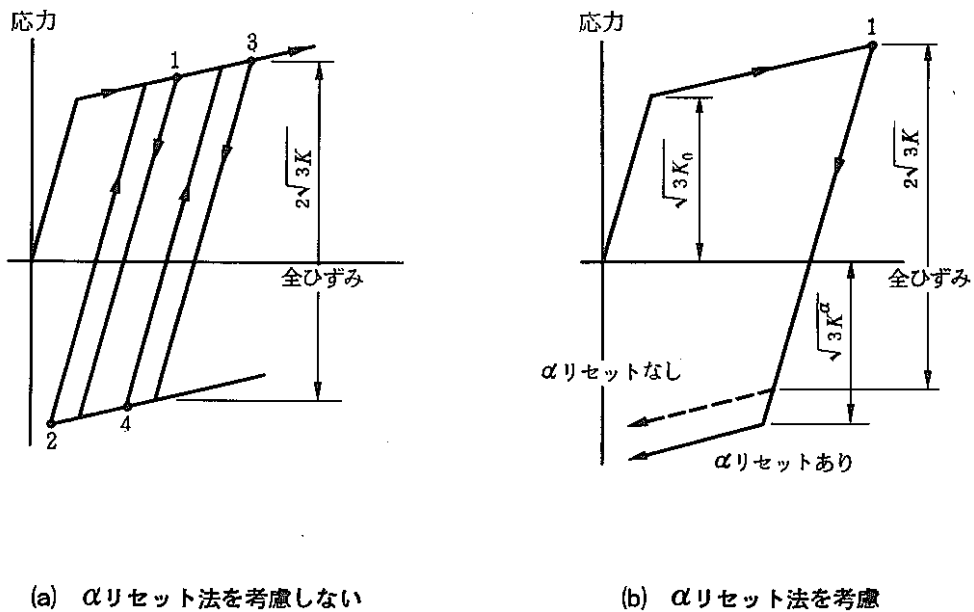


図 1.3-1 単軸応力場での降伏曲面の挙動

材料要素の現在の塑性状態が偏差 $\pi$ 平面で図 1.3-2 (a)に示されるものとする。すなわち、現在の状態が $K^{\alpha}$ および応力 $\{\sigma'\}$ で与えられるとする。次に、後続の負荷あるいは時間増分により新しい応力状態 $\{\sigma''\}$ になったとする(図 1.3-2 (b))。この新しい応力 $\{\sigma''\}$ が降伏曲面上にあるか曲面内にあるかを調べ、 $\{\sigma''\}$ が降伏曲面上にある場合には $\{\alpha\}$ をリセットするための処理は行わない。 $\{\sigma''\}$ が降伏曲面内にある場合には除荷が生じたかを調べ $\{\alpha\}$ の移動を行なう。 $\{\alpha\}$ の移動の大きさを決めるために $\{\sigma''\}$ から $(\{\sigma''\}+\{\alpha\})$ に直線を引き、図 1.3-2 (b)に示されるように現在の降伏曲面との交点 $\{\hat{\sigma}''\}$ を求め、次の量を計算する。

$$h = \frac{|\{\hat{\sigma}''\}-\{\sigma''\}|}{|(\{\sigma''\}+\{\alpha\})-\{\sigma''\}|} \quad (1.3-55)$$

式(1.3-55)の $h$ は $\{\sigma''\}$ から $(\{\sigma''\}+\{\alpha\})$ までの線分が降伏曲面と交点を持つ位置の距離的な割合である。ここで $h$ は1より大きい場合あるいは小さい場合がある。次に $\{\alpha\}$ は次式によりリセットされる。

$$\{\alpha^{\text{new}}\} = \{\alpha^{\text{old}}\} [1 - \min(1, h)] \quad (1.3-56)$$

前で述べた処理は応力 $\{\sigma\}$ が再び降伏曲面上にのるか、あるいは $\{\alpha\}=\{0\}$ となるまで $\{\alpha\}$ を応力の原点方向に移動させる。

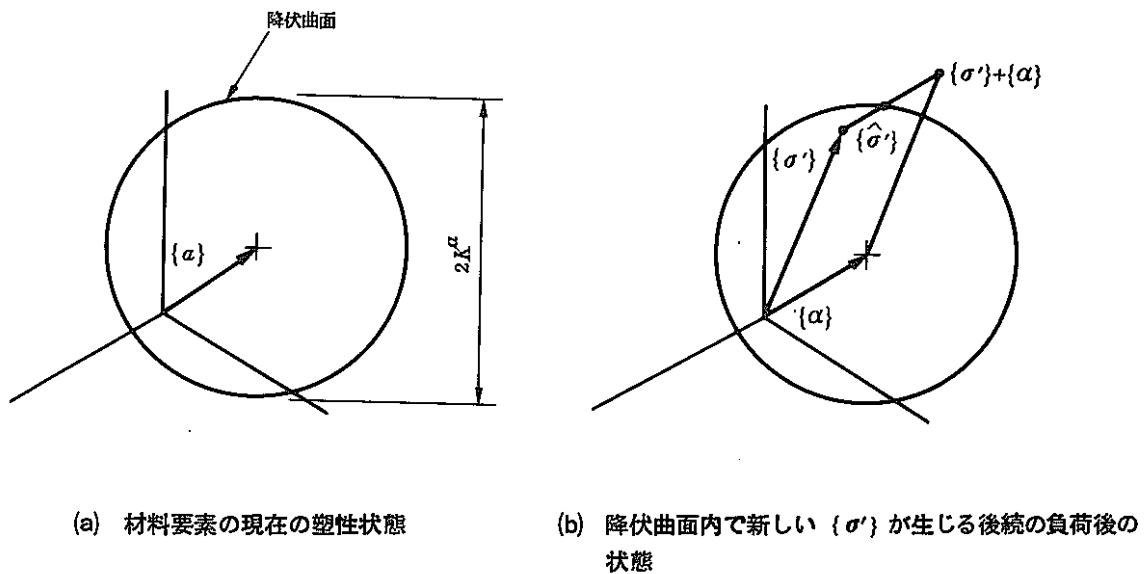


図 1.3-2 多軸応力場における $\alpha$ リセット法

(8) 非線形繰返し非硬化領域モデル<sup>14), 15)</sup>

非線形繰返し非硬化領域モデルは、応力空間内に降伏面のほかに限界面を導入する二曲面塑性モデルに、繰返し非硬化領域を組み入れたもので、材料の繰返し硬化に加えて、非線形硬化を記述できる塑性構成式である。

二曲面塑性モデルは、応力空間内で降伏面の外側に限界面を仮定する。初期降伏後あるいは逆負荷による再降伏後、降伏面は図 1.3-3 の  $S^*$  点で限界面に内接するような方向へ移動し膨張する。すなわち、図 1.3-3 で降伏面の中心  $\eta$  は、偏差応力  $S$  が限界応力  $S^*$  へ近づく方向に移動する。このような降伏面の移動は  $S$  と  $S^*$  が離れているほど、塑性変形の硬化係数が大きくなり、一方、 $S$  が  $S^*$  に近づくときと限界面が降伏面の役割をするようになり、塑性変形の硬化係数が小さくなる。換言すれば、限界面内部における降伏面の移動が過渡的材料硬化を表わし、限界面の変化が過渡的材料硬化が消失した状態での応力-ひずみ曲線を示している。

一方、繰返し非硬化領域モデルは、塑性変形によって材料の繰返し硬化が進行しないようなひずみ範囲（繰返し非硬化領域）を規定することにより、繰返し負荷をうける材料要素の塑性変形挙動を精度よく表わしている。

以上のような2つのモデルを組み合わせた大野らが提案している非線形繰返し非硬化領域モデルの定式化について説明を行なう。

繰返し非硬化領域は式 (1.3-57) に示されるような塑性ひずみ空間内の球で近似される（図 1.3-4）。

$$g = \frac{2}{3} (\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}) (\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}) - \rho^2 \leq 0 \quad (1.3-57)$$

ここで、 $\epsilon_{ij}^p$  は塑性ひずみを示し、また  $\alpha_{ij}$  と  $\rho$  はこの球の中心と半径を表わす。

式 (1.3-57) の領域  $g$  が膨張および移動するのは  $\epsilon_{ij}^p$  が面  $g=0$  上で、塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_{ij}$  が面  $g=0$  の外向き法線成分を持つときだけであると仮定する。さらに領域  $g$  の移動は、面  $g=0$  に立てた法線の方向へ生じるとする。このとき、適応条件  $\dot{g}=0$  から、 $\rho$  と  $\alpha_{ij}$  は次式などで表わされる。

$$\dot{\rho} = c \Gamma \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (1.3-58)$$

$$\alpha_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} (1-c) \Gamma \dot{\bar{\epsilon}}^p (\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}) [(\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}) (\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij})]^{1/2} \quad (1.3-59)$$

ここで、 $\dot{\bar{\epsilon}}^p = (2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p / 3)^{1/2}$  は相当塑性ひずみ速度である。また  $c$  は領域  $g$  の発達の速さを表わす定数である。 $\Gamma$  は、 $\epsilon_{ij}^p$  が面  $g=0$  上において外側へ動くときだけ値を持ち、その値は  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  が外向き法線ベクトル  $\partial g / \partial \epsilon_{ij}^p$  となす角の余弦に等しく、式 (1.3-60) で定義される。

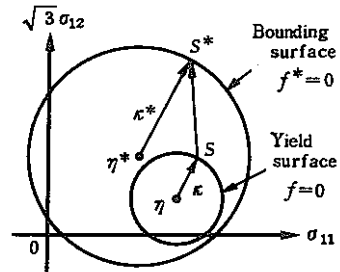


図 1.3-3 降伏面と限界面

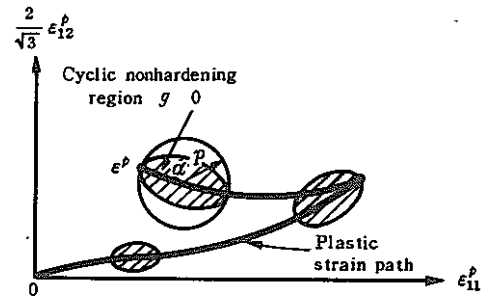


図 1.3-4 繰返し非硬化領域の発達

$$\Gamma = \begin{cases} (\epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}^p) \dot{\epsilon}_{ij}^p [( \epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}^p ) ( \epsilon_{ij}^p - \alpha_{ij}^p )]^{1/2} \dot{\epsilon}^p & (g=0 \text{ かつ } (\partial g / \partial \dot{\epsilon}_{ij}^p) \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0) \\ 0 & (g=0 \text{ あるいは } (\partial g / \partial \dot{\epsilon}_{ij}^p) \dot{\epsilon}_{ij}^p \leq 0) \end{cases} \quad (1.3-60)$$

ただし、 $\Gamma$ は  $0 \leq \Gamma \leq 1$  を満足する。

次に降伏面と限界面をそれぞれ  $f=0$  および  $f^*=0$  と表わし、 $f$  と  $f^*$  が次のように与えられる場合を考える。

$$f = \frac{3}{2} (S_{ij} - \eta_{ij})(S_{ij} - \eta_{ij}) - \kappa^2, \quad \kappa = \kappa_0 \quad (1.3-61)$$

$$f^* = \frac{3}{2} (S_{ij}^* - \eta_{ij}^*)(S_{ij}^* - \eta_{ij}^*) - \kappa^{*2} \quad (1.3-62)$$

ここで、 $S_{ij}$  は偏差応力を表わし、 $\eta_{ij}$  と  $\kappa$  はそれぞれ降伏面の中心と大きさを示す。また、 $S_{ij}^*$ 、 $\eta_{ij}^*$  および  $\kappa^*$  はそれぞれ限界面上の偏差応力、限界面の中心と大きさである。なお、降伏面の大きさ  $\kappa$  は変化しないと仮定する。

いま、降伏面の移動を次式で与える。

$$\dot{\eta}_{ij} = A (S_{ij}^* - S_{ij}) \dot{\epsilon}^p \quad (1.3-63)$$

ここで、 $A$  は材料定数である。また、限界応力  $S_{ij}^*$  は  $\partial f^* / \partial S_{ij}^*$  が  $\partial f / \partial S_{ij}$  と同方向となるように取られ、式 (1.3-64) で表わされる。

$$S_{ij}^* = \eta_{ij}^* + (S_{ij} - \eta_{ij}) \kappa^* / \kappa \quad (1.3-64)$$

したがって、式 (1.3-63) より降伏面は限界面に内接する方向へ移動し、このとき  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  の降伏面への垂直性を仮定し、適応条件  $\dot{f}^*=0$  と式 (1.3-63) を用いると、次式が得られる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2A} \cdot \frac{(S_{ij} - \eta_{ij})(S_{kl} - \eta_{kl}) \dot{S}_{kl}}{\kappa (S_{mn} - \eta_{mn})(S_{mn}^* - S_{mn})} \quad (1.3-65)$$

次に限界面の発達、すなわち式 (1.3-62) の  $\eta_{ij}^*$  と  $\kappa^*$  の変化を繰返し非硬化領域の概念に基づいて定式化する。限界面  $f^*=0$  は  $\epsilon_{ij}^p$  が式 (1.3-57) の繰返し非硬化領域  $g$  の内部にある場合には膨張（等方硬化）せず、移動だけをする。このとき、塑性ひずみの増加に伴う材料の硬化は限界面の移動として表現され、この結果限界面の移動速度  $\dot{\eta}_{ij}^*$  は大きくなる。このような限界面の変化は式 (1.3-60) の  $\Gamma$  を用いて次のように書ける。

$$\kappa^* = \kappa^*(q), \quad \dot{q} = \Gamma \dot{\epsilon}^p \quad (1.3-66)$$

$$\dot{\eta}_{ij}^* = (2/3) [H_1 + (1-\Gamma)H_2] \dot{\epsilon}_{ij}^p - \kappa_r \eta_{ij}^* \dot{\epsilon}^p \quad (1.3-67)$$

ここで、 $q$  は限界面の膨張を表わす等方硬化変数であり、 $H_1$  と  $H_2$  は温度非依存の材料定数である。また、(1.3-67) の最後の項は、塑性変形の進行に伴う回復を表わし、繰返し塑性変形における平均応力の緩和を記述する。

最後に上で述べてきた構成式から限界応力  $S_{ij}^*$  の消去を行なう 式(1.3-64)と(1.3-65)から次式などが得られる。

$$S_{ij}^* - S_{ij} = \eta_{ij}^* - \eta_{ij} + (S_{ij} - \eta_{ij})(\kappa^* - \kappa) / \kappa \quad (1.3-68)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p / \dot{\bar{\epsilon}}^p = (3/2)(S_{ij} - \eta_{ij}) / \kappa \quad (1.3-69)$$

したがって、式(1.3-63)は次のように表わされる。

$$\dot{\eta}_{ij} = A \left[ (2/3)(\kappa^* - \kappa) \dot{\epsilon}_{ij}^p - (\eta_{ij} - \eta_{ij}^*) \dot{\bar{\epsilon}}^p \right] \quad (1.3-70)$$

また、温度変動による影響を考慮すると式(1.3-70)は次のようになる。

$$\dot{\eta}_{ij} = A \left[ (2/3)(\kappa^* - \kappa) \dot{\epsilon}_{ij}^p - (\eta_{ij} - \eta_{ij}^*) \dot{\bar{\epsilon}}^p \right] + \frac{\partial \kappa^* / \partial T - \partial \kappa / \partial T}{\kappa^* - \kappa} \dot{T} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^*) \quad (1.3-71)$$

次に式(1.3-65)は式(1.3-68)を用いて次のように書き換えることができる。

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2A} \cdot \frac{(S_{ij} - \eta_{ij})(S_{kl} - \eta_{kl}) \dot{S}_{kl}}{\kappa H} \quad (1.3-72)$$

$$H = (2/3) \kappa (\kappa^* - \kappa) + (S_{ij} - \eta_{ij})(\eta_{ij}^* - \eta_{ij})$$

以上から非線形繰返し非硬化領域モデルは、繰返し非硬化領域の関係式(1.3-57)~(1.3-60)、降伏条件(1.3-61)、塑性ひずみと応力の増分関係式(1.3-72)、降伏面と限界面の発展式(1.3-70)、(1.3-71)および(1.3-67)によって構成される。

### (9) マルチレイヤーモデル<sup>3), 15)~18)</sup>

このモデルは White や Besseling によって提案されたもので、材料の体積要素  $dV$  は図 1.3-5 に示されるような  $N$  個の平行した部分要素、すなわち同じ全ひずみを示す部分要素の集合体からなり、各部分要素  $\kappa$  は異なった降伏応力を有するものと仮定される。各部分要素  $\kappa$  の体積割合を  $\psi^\kappa$  とすると式(1.3-73)の条件を満足する。

$$\sum_{\kappa=1}^N \psi^\kappa = 1 \quad (1.3-73)$$

体積要素  $dV$  の塑性ひずみ増分  $\Delta\{\epsilon^p\}$  と応力増分  $\Delta\{\sigma\}$  は次式などで表わされる。

$$\Delta\{\epsilon^p\} = \sum_{\kappa=1}^N \psi^\kappa \Delta\{\epsilon^p\}_\kappa \quad (1.3-74)$$

$$\Delta\{\sigma\} = \sum_{\kappa=1}^N \psi^\kappa \Delta\{\sigma\}_\kappa = \sum_{\kappa=1}^N \psi^\kappa [E^e] (\Delta\{\epsilon\} - \Delta\{\epsilon^p\}_\kappa) \quad (1.3-75)$$

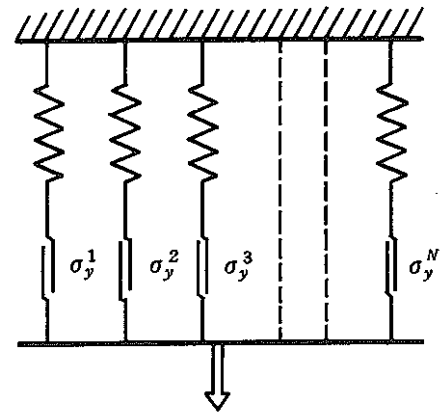


図 1.3-5 弾塑性問題に対するマルチレイヤーモデル

ここで、 $\Delta\{\varepsilon\}$  と  $\Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa$  は全ひずみ増分と部分要素 $\kappa$ の塑性ひずみ増分であり、 $[E^e]$  は材料の弾性特性マトリックスである。

部分要素 $\kappa$ のせん断弾性ポテンシャルエネルギー  $\phi_d^\kappa$  は式(1.3-76)で表わされる。

$$\phi_d^\kappa = \frac{1}{2} \{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa^t [E_d^e] \{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa \quad (1.3-76)$$

ここで、マトリックス  $[E_d^e]$  はせん断弾性係数 $G$ を用いて次のように表わされる。また右肩上の添字 $t$ は転置を意味する。

$$[E_d^e] = G \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & & & & & & \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & & & \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \quad (1.3-77)$$

各部分要素の降伏応力を  $\sigma_Y^\kappa$  とすると Mises の降伏条件は次式で表わされる。

$$\phi_d^\kappa - \frac{1}{6} \cdot \frac{(\sigma_Y^\kappa)^2}{G} = 0 \quad (1.3-78)$$

式(1.3-78)の状態に達している完全弾塑性部分要素 $\kappa$ の塑性ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa$  は式(1.3-79)で表わされる。

$$[E^e] \Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa = \lambda \left\{ \frac{\partial \phi_d^\kappa}{\partial \varepsilon} \right\} \quad (1.3-79)$$

一方、全ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon\}$  と塑性ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon^p\}$  に対して次の関係式が成り立つ。

$$\delta \phi_d^\kappa = \left\{ \frac{\partial \phi_d^\kappa}{\partial \varepsilon} \right\}^t (\Delta\{\varepsilon\} - \Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa) = 0 \quad (1.3-80)$$

式(1.3-79)に  $\left\{ \frac{\partial \phi_d^\kappa}{\partial \varepsilon} \right\}^t [E^e]^{-1}$  を乗じて式(1.3-80)を考慮すると式(1.3-79)の係数 $\lambda$ が得られる。

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial \phi_d^\kappa}{\partial \varepsilon} \right\}^t \Delta\{\varepsilon\}}{\left\{ \frac{\partial \phi_d^\kappa}{\partial \varepsilon} \right\}^t [E^e]^{-1} \left\{ \frac{\partial \phi_d^\kappa}{\partial \varepsilon} \right\}} = \frac{\{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa [E_d^e] \Delta\{\varepsilon\}}{\{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa^t [E_d^e] [E^e]^{-1} [E_d^e] \{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa} \quad (1.3-81)$$

式(1.3-81)を式(1.3-79)に適用すると、塑性ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa$  と全ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon\}$  の関係が求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa &= [E^e]^{-1} [E^p]_\kappa \Delta\{\varepsilon\} ; \quad \phi_d^\kappa = \frac{1}{6} \cdot \frac{(\sigma_Y^\kappa)^2}{G} \\ \Delta\{\varepsilon^p\}_\kappa &= 0 ; \quad \phi_d^\kappa < \frac{1}{6} \cdot \frac{(\sigma_Y^\kappa)^2}{G} \end{aligned} \quad (1.3-82)$$

ここで、 $[E^p]_\kappa$  は次式で表わされる。

$$[E^p]_\kappa = \frac{[E_d^e] \{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa \{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa^t [E_d^e]}{\{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa^t [E_d^e] [E^e]^{-1} [E_d^e] \{ \varepsilon - \varepsilon^p \}_\kappa} \quad (1.3-83)$$

式(1.3-75)に式(1.3-82), (1.3-83)を適用すると, 応分増分  $\Delta\{\sigma\}$  と全ひずみ増分  $\Delta\{\epsilon\}$  の関係式が得られる。

$$\Delta\{\sigma\} = \sum_{\kappa=1}^N \psi^{\kappa} [E^{ep}]_{\kappa} \Delta\{\epsilon\} \quad (1.3-84)$$

ここで,  $[E^{ep}]_{\kappa}$  は弾塑性特性マトリックスを意味し, 式(1.3-85)で表わされる。

$$[E^{ep}]_{\kappa} = [E^e] - [E^p]_{\kappa} \quad (1.3-85)$$

#### (10) 各種塑性降伏条件

##### a) Drucker-Prager 降伏条件

この条件は, Drucker と Prager により Mohr-Coulomb 降伏条件の近似したものとして提案され, 土や岩盤などを対象にしている。これは Mises の条件式に対して平均垂直応力あるいは静水圧力の影響を考慮した等方性の降伏条件である。

$$f = \alpha J_1 + \sqrt{J_2'} = k \quad (1.3-86)$$

ここで,  $J_1$  は応力の第1次不変量,  $J_2'$  は偏差応力で表わした第2次不変量である。また,  $\alpha$  および  $k$  は次式らで表わされる。

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (1.3-87)$$

$$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \quad (1.3-88)$$

ここで,  $c$  と  $\phi$  は材料の粘着力および内部摩擦角である。

##### b) Tresca 降伏条件

この条件は, 等方性材料に適用され, 静水圧力の影響のない降伏条件である。

$$f = 2 \cos \theta (J_2')^{1/2} = \sigma_Y \quad (1.3-89)$$

ここで,  $\sigma_Y$  は降伏応力であり,  $\theta$  は次式から得られる。

$$\sin 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{(J_2')^{3/2}} \quad (1.3-90)$$

ここで,  $J_3$  は応力の第3次不変量である。

##### c) Mohr-Coulomb 降伏条件

この条件は, 平面ひずみ場における土や岩盤の降伏に対して適用される降伏条件で, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{3} \sin \phi J_1 + (J_2')^{1/2} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) \\ &= c \cos \phi \end{aligned} \quad (1.3-91)$$

ここで,  $c$ ,  $\phi$  は材料の粘着力および内部摩擦角であり,  $\theta$  は式(1.3-90)から得られる。



d) Hill の異方性降伏条件

この条件は、Mises の降伏条件を直交異方性の金属塑性材料に拡張した 2 次形式の降伏条件であり、次式で与えられる。

$$f = \sqrt{\frac{3}{2(F+G+H)} \left[ F(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + G(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + H(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2L\tau_{xy}^2 + 2M\tau_{yz}^2 + 2N\tau_{zx}^2 \right]} = \bar{\sigma} \quad (1.3-92)$$

ここで、 $F, G, H, L, M$  および  $N$  は異方性パラメータである。

(ii) 2 曲面繰返し塑性モデル (モデル開発者: 動燃事業団・岩田)

このモデルは、降伏曲面と限界曲面よりなる 2 曲面モデルを基礎にした単純でかつ高精度の新しい繰返し塑性モデルである。このモデルでは降伏曲面は応力空間内を拡大しながら移動する。限界曲面は過去の最大の応力状態を表わすもので、応力履歴に応じて等方的に拡大する。降伏曲面と限界曲面の間の塑性硬化特性は単調および繰返し応力・ひずみ関係式と整合性のとれた関数形により表現されている。このために、繰返し硬化挙動を精度よくシミュレートすることができ、繰返し硬化材ばかりでなく軟化材にも応用できる。

以下に本モデルの定式を述べる。

• 降伏曲面および限界曲面

降伏曲面は、その大きさを変えながら偏差応力空間内を移動できると仮定し、Mises 型の降伏関数を用いると、降伏条件は次のように表すことができる。

$$f = \frac{3}{2} (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) - Y^2 = 0 \quad (1.3-93)$$

ここで、 $\mathbf{S}$  は偏差応力テンソル、 $\boldsymbol{\alpha}$  は降伏曲面の中心の移動量 (背応力) テンソル、および  $Y$  は降伏応力を表わす。記号  $:$  はスカラー積を意味する。

一方、限界曲面は過去に受けた応力履歴によって形成され発展し、等方的に拡大するものとして次式で表わす。

$$F = \frac{3}{2} \mathbf{S}^* : \mathbf{S}^* - Y^{*2} = 0 \quad (1.3-94)$$

ここで、 $\mathbf{S}^*$  は限界曲面上の偏差応力テンソル、 $Y^*$  は限界曲面の大きさを表わす。

限界曲面は最初は初期降伏曲面に一致し、以後最大の応力状態を通るように等方的に拡大する。降伏曲面が限界曲面に内接し、さらに塑性負荷が進む場合、限界曲面は降伏曲面に内接したまま拡大する。限界曲面は応力とその内側にある限り変化しない。式 (1.3-94) の限界曲面の大きさ  $Y^*$  は Mises の相当応力の履歴の最大を表わし、次式で与えられる。

$$Y^* = \text{Max} \left( \frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2} \quad (1.3-95)$$

• 流れ則

塑性ひずみは  $f$  を塑性ポテンシャルとして、次の流れ則に従って生じる。

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} = 3\lambda(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.3-96)$$

ただし、塑性ひずみは  $f=0$  かつ  $(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\mathbf{S}} > 0$  の場合にのみ生じる。その他の場合には  $\dot{\epsilon}^p = 0$  となる。

相当塑性ひずみ速度を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \bar{\dot{\epsilon}}^p &= \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \right)^{1/2} \\ &= \left\{ 6\lambda^2 (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) \right\}^{1/2} \\ &= 2\lambda Y \end{aligned} \quad (1.3-97)$$

また、塑性ひずみ速度は次式であらわされる。

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{3\bar{\dot{\epsilon}}^p}{2Y} (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.3-98)$$

• 硬化則

降伏曲面は移動しながら拡大あるいは縮小するものと仮定し、降伏曲面の中心の移動則は、降伏条件に関する適合条件から一般に次式で表わされる。

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\mathbf{S}} (2/3) Y \dot{Y}}{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\nu} \quad (1.3-99)$$

ここで、 $\boldsymbol{\nu}$  は応力空間における移動方向の単位ベクトルであり、 $\boldsymbol{\nu} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} / \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}\|$  で表わされる。

降伏曲面が限界曲面の内部にあり、接していない場合の移動則としては Mroz または Tseng-Lee の移動則に従うものとする。

(i) Mroz の移動則

図 1.3-6 に示されるように、 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  は降伏曲面上にある現在の応力点  $P$  から、それに対応する限界曲面上の応力点  $P^*$  に向かう方向にとる。すなわち、

$$\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{S}^* - \mathbf{S}) / \|\mathbf{S}^* - \mathbf{S}\| \quad (1.3-100)$$

ここで、 $\mathbf{S}^*$  は応力空間上で限界曲面の中心から  $(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha})$  に平行に延ばした直線が限界曲面と交わる応力点  $P^*$  の応力であり、次式で表わされる。

$$\mathbf{S}^* = (Y^*/Y) (\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.3-101)$$

このようにして、Mroz の移動則は次のようになる。

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mu_M (\mathbf{S}^* - \mathbf{S}) \quad (1.3-102)$$

ここで、

$$\mu_M = \frac{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\mathbf{S}} - (2/3) Y \dot{Y}}{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{S}^* - \boldsymbol{\alpha})} \quad (1.3-103)$$

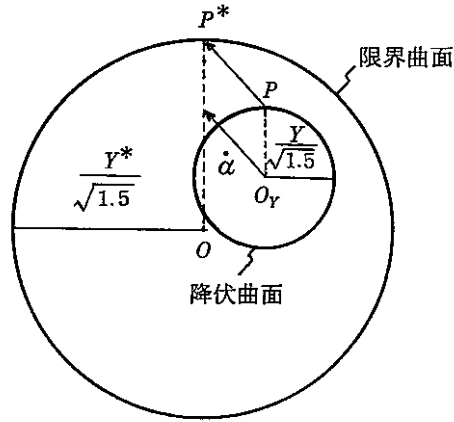


図 1.3-6 降伏曲面に対する Mroz の移動則

(ii) Tseng-Lee の移動則

図 1.3-7 に示すように、降伏曲面が現在の応力点から応力速度  $\dot{\mathbf{S}}$  の方向に延ばした直線と限界曲面との交点  $P^*$  において限界曲面と内接する関係になるように移動すると仮定する。すなわち、

$$\mathbf{v} = \left\{ (2/3)^{1/2} (Y^* - Y) \mathbf{n}^* - \boldsymbol{\alpha} \right\} / \left\| (2/3)^{1/2} (Y^* - Y) \mathbf{n}^* - \boldsymbol{\alpha} \right\| \quad (1.3-104)$$

ここで、 $\mathbf{n}^*$  は  $\mathbf{S}^*$  において限界曲面に外向きに立てた単位法線ベクトルであり次式で表わされる。

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{S}^* / \left\| \mathbf{S}^* \right\| = (3/2)^{1/2} \mathbf{S}^* / Y^* \quad (1.3-105)$$

$\mathbf{S}^*$  は次式から求める。

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S} + r \mathbf{l} \quad (1.3-106)$$

ここで、

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{S}} / \left\| \dot{\mathbf{S}} \right\| \quad (1.3-107)$$

$$r = -(\mathbf{S} : \mathbf{l}) + \left[ (\mathbf{S} : \mathbf{l})^2 - \left\{ (\mathbf{S} : \mathbf{S}) - (2/3) Y^{*2} \right\} \right]^{1/2} \quad (1.3-108)$$

このようにして、次式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mu_{TL} \left\{ (2/3)^{1/2} (Y^* - Y) \mathbf{n}^* - \boldsymbol{\alpha} \right\} \quad (1.3-109)$$

ここで、

$$\mu_{TL} = \frac{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : \dot{\mathbf{S}} - (2/3) Y \dot{Y}}{(\mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}) : \left\{ (2/3)^{1/2} (Y^* - Y) \mathbf{n}^* - \boldsymbol{\alpha} \right\}} \quad (1.3-110)$$

Tseng-Lee の移動則では、降伏曲面の移動方向はほぼ応力速度の方向にとられるとともに、2 曲面は、

Mroz の移動則と同様に互いに交差することなく接することが保証される。

現在の応力が限界曲面上にあるときは、降伏曲面と限界曲面はその点で接しており、降伏曲面の移動則は次項の Ziegler 則に従うものとする。

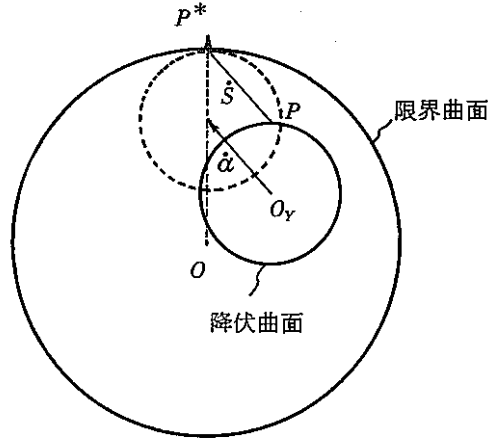


図 1.3-7 降伏曲面に対する Tseng-Lee の移動則

(iii) Ziegler の移動則

降伏曲面の移動の方向が  $(S - \alpha)$  の方向に一致するとする。すなわち、

$$\nu = (S - \alpha) / \|S - \alpha\| \quad (1.3-111)$$

このとき、移動則は次式で与えられる。

$$\dot{\alpha} = \mu_z (S - \alpha) \quad (1.3-112)$$

ここで、

$$\mu_z = \frac{(S - \alpha) : \dot{S} - (2/3) Y \dot{Y}}{(2/3) Y^2} \quad (1.3-113)$$

• 弾塑性応力・ひずみ関係式

全体のひずみが弾性ひずみと塑性ひずみの和であるとする。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (1.3-114)$$

応力とひずみの関係は次式で表わされる。

$$\dot{\sigma} = E^e \dot{\epsilon}^e = E^e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (1.3-115)$$

ここで、 $E^e$  は弾性係数テンソルであり、等方弾性体を仮定すると、次式で表わされる。

$$E_{ijkl}^e = 2G \delta_{ik} \delta_{jl} + \{2G\nu / (1-2\nu)\} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (1.3-116)$$

ただし、 $G$  および  $\nu$  は、それぞれせん断弾性係数およびポアソン比である。

さて、塑性負荷継続中には次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : \dot{\mathbf{S}} &= (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\
 &= (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{E}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\
 &\quad - \frac{3 \bar{\varepsilon}^p}{2Y} (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : \{ \mathbf{E}^e (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) \} \\
 &= YH \bar{\varepsilon}^p
 \end{aligned} \tag{1.3-117}$$

ここで、 $H$ は一般化した塑性硬化係数である。

塑性硬化係数は単軸の場合を考えると明らかになる。すなわち、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : \dot{\mathbf{S}} &= (2/3)(\sigma_{11}-\alpha_{11}) \dot{\sigma}_{11} \\
 &= (2/3) Y \dot{\sigma}_{11} \\
 &= YH \bar{\varepsilon}^p
 \end{aligned} \tag{1.3-118}$$

式(1.3-118)から、通常の塑性硬化係数  $H' = \dot{\sigma}_{11} / \dot{\varepsilon}_{11}^p$  と  $H$  の関係が次のようになる。

$$H = \frac{2}{3} H' \tag{1.3-119}$$

式(1.3-114), (1.3-115), (1.3-117), (1.3-119) から次式が得られる。

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{(\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{E}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\frac{2}{3} YH' + \frac{3}{2Y} (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : \{ \mathbf{E}^e (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) \}} \tag{1.3-120}$$

最終的に次のような構成式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[ \mathbf{E}^e - \frac{\{ \mathbf{E}^e (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) \} \{ (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{E}^e \}}{\frac{4}{9} Y^2 H' + (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) : \{ \mathbf{E}^e (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha}) \}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{1.3-121}$$

また、式(1.3-121)を簡略化した表示で、次のように書くことができる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}^{ep} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{1.3-122}$$

ここで、 $\mathbf{E}^{ep}$  は弾塑性係数テンソルであり、具体的には次のように表わされる。

$$\mathbf{E}^{ep} = \mathbf{E}^e - \frac{9G^2}{(H' + 3G)Y^2} (\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{S}-\boldsymbol{\alpha})^T \tag{1.3-123}$$

• 塑性硬化係数とモデル定数

塑性硬化係数  $H'$  は、限界応力  $Y^*$ 、降伏曲面上の応力点  $S$  から限界曲面上の対応する応力点  $S^*$  までの距離  $\delta$ 、 $\delta_{in}$ 、累積塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  の関数として、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} H' &= H'(Y^*, \delta, \delta_{in}, \bar{\epsilon}^p) \\ &= H'^*(Y^*) \cdot \phi(Y^*, \delta, \delta_{in}, \bar{\epsilon}^p) \end{aligned} \quad (1.3-124)$$

ここで、 $H'^*(Y^*)$  は単軸の単調応力・ひずみ関係から定まる塑性硬化係数 ( $= d\sigma/d\epsilon^p$ )、 $\phi(Y^*, \delta, \delta_{in}, \bar{\epsilon}^p)$  は繰返し負荷中の塑性硬化係数の変化を表わす関数であり、塑性硬化成長関数と呼ぶ。

偏差応力空間上の距離  $\delta$  は、降伏曲面上の現在の応力点  $S$  から限界曲面上の対応する応力点  $S^*$  までの距離であり、次式より求められる。

$$\delta = -(\mathbf{S} : \boldsymbol{\nu}) + [(\mathbf{S} : \boldsymbol{\nu})^2 - \{(\mathbf{S} : \mathbf{S}) - (2/3)Y^{*2}\}]^{1/2} \quad (1.3-125)$$

ただし、 $\boldsymbol{\nu}$  は  $S$  から  $S^*$  へ向かう単位ベクトルであり、 $\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{S}^* - \mathbf{S}) / \|\mathbf{S}^* - \mathbf{S}\|$  である。また、 $S^*$  は前記の Mroz の移動則により規定される限界曲面上の応力である。 $\delta_{in}$  は直前の塑性負荷開始時点の  $\delta$  の値である。

累積塑性ひずみ  $\bar{\epsilon}^p$  は次式で定義する。

$$\bar{\epsilon}^p = \int \frac{2}{3} (\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p) dt \quad (1.3-126)$$

ここで、 $t$  は時間を表わす。

次に、単調および繰返し応力ひずみ関係に特定の表示式を用いて、 $H'^*(Y^*)$  および  $\phi(Y^*, \delta, \delta_{in}, \bar{\epsilon}^p)$  の特別化を行なう。以下では、多くの金属材料の応力・ひずみ関係を良好に記述できる Ludwik の式を用いることにする。

単調の応力・ひずみ関係に対する Ludwik の式は次のように表わされる。

$$\epsilon^p = \left[ \frac{\sigma - Y_0}{K} \right]^{1/m} \quad (1.3-127)$$

ここで、 $Y_0$  は比例限界応力、 $K$  と  $m$  は材料定数である。このとき、 $H'^*(Y^*)$  は次のようになる。

$$H'^*(Y^*) = Km \left[ \frac{K}{Y^* - Y_0} \right]^{(1-m)/m} \quad (1.3-128)$$

本モデルでは、応力  $\sigma$  は限界応力に置き換えて用いられる。

繰返し負荷中の応力・ひずみ関係も、単調負荷時と類似のなめらかな曲線となることから、 $\phi(Y^*, \delta, \delta_{in}, \bar{\epsilon}^p)$  は次の関数で表わす。

$$\phi(Y^*, \delta, \delta_{in}, \bar{\varepsilon}^p) = h(Y^*, \bar{\varepsilon}^p) \cdot \left[ \frac{\delta_{in}}{\delta_{in} - \delta} \right]^{(1-m^*)/m^*} \quad (1.3-129)$$

ここで、 $h(Y^*, \bar{\varepsilon}^p)$  は繰返し負荷中の塑性ひずみの累積による硬化の増加を表わす関数である。また、 $m^*$  は応力・ひずみ曲線の形状を規定する指数であり、単調の Ludwik の式の定数  $m$  に相当する定数である。

単軸の完全両振りの定ひずみ範囲  $\Delta\varepsilon$  の繰返しによる定常の応力・ひずみヒステリシス曲線は、単軸の場合と類似の Ludwik タイプの式で良好に表わされることが知られており、圧縮側から引張側に向う曲線の式は次のように表わすことができる。

$$\varepsilon^{p*} = \left[ \frac{\sigma^* - 2Y_0}{K^*} \right]^{1/m^*} \quad (1.3-130)$$

ここで、 $\varepsilon^{p*}$  と  $\sigma^*$  はそれぞれ圧縮側のピーク点を基準（原点）として測った塑性ひずみと応力である。式 (1.3-129) の関数形は式 (1.3-130) と整合するよう選ばれた。

定常状態での応力範囲  $\Delta\sigma$  と塑性ひずみ範囲  $\Delta\varepsilon^p$  の関係は次式で表わされるとする。

$$\Delta\varepsilon^p = \left[ \frac{\Delta\sigma - 2Y_0}{K'} \right]^{1/m'} \quad (1.3-131)$$

ここで、 $K'$  と  $m'$  は材料定数である。式 (1.3-130) のヒステリシス曲線の応力範囲とひずみ範囲は式 (1.3-131) を満足する必要がある、このことから次の関係が成り立つ。

$$K^* = K'^{m'm^*} (\Delta\sigma - 2Y_0)^{(1-m')m^*} \quad (1.3-132)$$

定数  $m^*$  は与えられたひずみ範囲に応じて定まる。

式 (1.3-129) の関数  $h(Y^*, \bar{\varepsilon}^p)$  は、単調負荷の間は 1 であり、繰返し硬化とともに次のように変化すると仮定する。

$$h(Y^*, \bar{\varepsilon}^p) = h_s(Y^*) + [(1 - h_s(Y^*)) \cdot \exp\{-\frac{(\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_m)}{Q}\}]^n \quad (1.3-133)$$

ここで、 $Q$ 、 $n$  は繰返し硬化の進展速度を表わす材料定数である。 $h_s(Y^*)$  は  $h$  の飽和値であり、限界応力  $Y^*$  の関数である。 $\varepsilon_m$  は  $\delta_{in} = 0$  すなわち単調負荷中の累積塑性ひずみであり、次式で与えられる。

$$\varepsilon_m = \int_{\delta_{in}=0} d\bar{\varepsilon}^p dt \quad (1.3-134)$$

関数  $h_s(Y^*)$  は、定ひずみ範囲の繰返しにおける定常ヒステリシス曲線の式 (1.3-130) と厳密に一致するように決める。したがって、 $h_s(Y^*)$  は次のようになる。

$$h_s(Y^*) = (1/2)^{(1-m)/m} \frac{m^*}{mK^{1/m}} K'^{m'} (2Y^* - 2Y_0)^{1/m-m'} \quad (1.3-135)$$

式 (1.3-135) の定数  $m^*$  は本来ひずみ範囲に依存するものであるが、定常状態の  $(Y^* - Y_0)$  に応じて決め

ることでもできる。この性質を利用して次式を用いる。

$$m^* = m_s^* + (m - m_s^*) \exp \left[ - \left\{ (\bar{\epsilon}^p - \epsilon_m) / Q \right\}^n \right] \quad (1.3-136)$$

$$m_s^* = \exp \left( - \frac{Y^* - Y_0}{C} \right) + D \quad (1.3-137)$$

ここで、 $C$ 、 $D$ は材料定数である。

### 1.3.2 クリープ領域における構成方程式

#### (1) クリープ構成方程式の定式化

金属のクリープ挙動は、その理論的な取扱いを容易にするために、弾塑性挙動とは独立に定式化されるのが普通である。このことは負荷が複雑でない場合には、実際の挙動とそれほど矛盾することはない。これに対して最近では、塑性とクリープの挙動を区別しないで統一的に非弾性挙動を記述する理論 (unified theory) がいろいろと提案され、その有効性が示されてきている。しかし現時点で、どのモデルが優れているのかの一般的判断を下すことは、裏付けデータが少ないだけに非常に難しいといえる。このような現状から、FINAS のクリープ解析の定式化では、弾塑性挙動との連成を考慮しないで、通常の状態方程式 (state equation) による方法を用いることにする。

#### a) クリープの流れ則

クリープ挙動の解析的表示にあたって、次の仮定をする。<sup>19)</sup>

- i) 材料の等方性
- ii) クリープひずみについて非圧縮
- iii) クリープひずみは静水圧応力に無関係
- iv) クリープひずみ速度は偏差応力に比例

このような条件のもとで、クリープ構成方程式は次のように表示される。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \lambda \sigma'_{ij} \quad (1.3-138)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}^c$  はクリープひずみ速度テンソル、 $\sigma'_{ij}$  は偏差応力テンソルである。比例係数  $\lambda$  は一般に偏差応力の不変量、クリープひずみの不変量、時間  $t$ 、温度  $T$  などのスカラー関数によって表わされるものである。相当応力  $\bar{\sigma}$  は  $\sigma'_{ij}$  の第 2 不変量に比例し、相当クリープひずみ  $\bar{\epsilon}^c$  は  $\epsilon_{ij}^c$  の第 2 不変量に比例する。すなわち、

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (1.3-139)$$

$$\bar{\epsilon}^c = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij}^c \epsilon_{ij}^c}$$

こうして、 $\lambda$  は  $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\epsilon}^c$ 、 $t$  および  $T$  によって表わすことができる。また、多軸に対する式が、単軸応力場に対しても適用されなければならないという条件から、次式が得られる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^c}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (1.3-140)$$



ここで、 $\dot{\epsilon}^c$  は単軸定応力クリープ則を相当応力と相当クリープひずみで置き換えたものを微分して求められる。要するに状態方程式タイプの構成方程式は式(1.3-140)で表わされる。ただし、式中の $\dot{\epsilon}^c$ の決定には単軸クリープ則を必要とする。

b) 単軸クリープ則

単軸クリープ則は一般に、クリープひずみを単軸定応力、時間および温度の関数として数学的に表示した形で与えられる。1次クリープおよび2次クリープを考慮すると、

$$\epsilon^c = f(t, \sigma, T) = \epsilon_1(t, \sigma, T) + \dot{\epsilon}_s(\sigma, T)t \quad (1.3-141)$$

ここで、 $\epsilon_1(t, \sigma, T)$  は1次クリープひずみ成分、 $\dot{\epsilon}_s(\sigma, T)t$  は2次クリープひずみ成分を示す。ただし、 $\dot{\epsilon}_s(\sigma, T)$  は定常クリープひずみ速度である。式(1.3-141)は一定温度における定応力クリープ試験を基礎として決定されるのが普通であるが、従来から多数の表示の形式が提案されている。

c) クリープ硬化則

単軸クリープ則よりクリープひずみ速度を定める場合に、何らかの硬化則が必要となる。過渡的な温度、応力状態に適用する硬化則として、次のような時間硬化説とひずみ硬化説の2つの代表的な定式がある。<sup>19)</sup>

●時間硬化説

この説はクリープひずみ速度が、対象とする時点の応力、温度およびクリープ開始からの時間(クリープ時間ともいう)に依存すると仮定するもので(図1.3-8参照)、次のような状態方程式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}^c = f(t, \sigma, T) \quad (1.3-142)$$

●ひずみ硬化説

この説はクリープひずみ速度が、対象とする時点の応力、温度および累積クリープひずみに依存すると仮定し(図1.3-8参照)、次のような状態方程式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}^c = f(\epsilon^c, \sigma, T) \quad (1.3-143)$$

ひずみ硬化説に基づくクリープひずみ速度の表示式(1.3-143)は、通常、式(1.3-141)と(1.3-142)から時間 $t$ を消去して求められる。たとえば、 $\epsilon^c$ が次のような $t$ のべき乗型で与えられるとすると、

$$\epsilon^c = f(\sigma, T)t^n \quad (1.3-144)$$

時間硬化説の式は、

$$\dot{\epsilon}^c = f(\sigma, T)nt^{n-1} \quad (1.3-145)$$

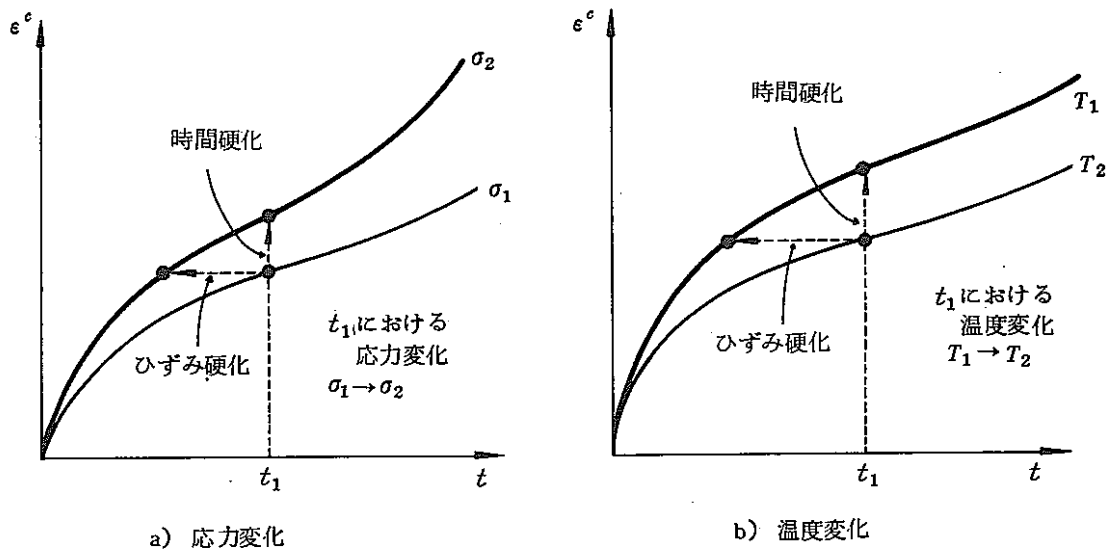


図 1.3-8 時間硬化説とひずみ硬化説

ひずみ硬化説の式は、式 (1.3-144) と式 (1.3-145) から  $t$  を消去して、

$$\dot{\epsilon}^c = n \{ f(\sigma, T) \}^{\frac{1}{n}} (\epsilon^c)^{\frac{n-1}{n}} \quad (1.3-146)$$

となる。基本的なこの2つの硬化説の相違は、応力あるいは温度が変動する場合に生じるものであって、定温定応力のもとでは同一現象の異なった表現にすぎない。また、定常クリープだけを考える場合〔式(1.3-144)~(1.3-146)において $n=1$ 〕には、式(1.3-146)と式(1.3-145)は同等となり、変動する応力や温度のもとにおいても2つの硬化説による差は生じない。図1.3-8は応力と温度が変化した場合のそれぞれについて、時間硬化とひずみ硬化の両説の相違を示したものである。実験事実はひずみ硬化説に比較的近いといわれているが、この説では解析的取扱い(時間 $t$ を消去して $\dot{\epsilon}^c$ を求める操作)が複雑となることが多く、そのため、適用の簡単な時間硬化説がとられることもある。

#### d) 応力反転に対する硬化の補助法則

前述のひずみ硬化則は、応力の符号が反転するような荷重変動に対しては、不都合な結果が生じるために、ORNLでは補助法則(Auxiliary Rule)なるものを設けて、これを適用している。<sup>?)</sup>ここでその補助法則について述べる。

##### ●単軸応力場

応力反転に対する補助法則の考え方を説明するために、まず応力反転のある単軸の場合を考えてみる(図1.3-9参照)。ここで、クリープひずみ速度は次式で表わされるものとする。

$$\dot{\epsilon}^c = f(\epsilon^H, \sigma, T) \quad (1.3-147)$$

ここで、 $\epsilon^H$ は現時点のクリープひずみ硬化量であり、次のステップにより求められる。

- (i) 図1.3-10に示すように任意の時間において、クリープひずみの2つの基準原点 $\epsilon^+$ 、 $\epsilon^-$ を考える。
- (ii) 初めに、処女材料に対して、 $\epsilon^+ = \epsilon^- = 0$ と仮定する。
- (iii) 引張応力、圧縮応力に対して式(1.3-147)のクリープひずみ速度を決定するために $\epsilon^H$ を次のよ

うにおく。

$$\epsilon^H = \epsilon - \epsilon^+ \quad (1.3-148)$$

$$\epsilon^H = \epsilon - \epsilon^- \quad (1.3-149)$$

ここで、 $\epsilon$ は現時点でのクリープひずみで、用いるひずみ硬化の方法により1次クリープひずみまたは全クリープひずみとなる。

(iv)  $i$ 回目の応力反転が生じた時の $\epsilon$ を $\epsilon_i$ とおくと、 $n$ 回目の応力反転後の原点は、次式で決定される。ただし、 $\epsilon_0 = 0$ である。

$$\epsilon^+ = \min_{i=0, \dots, n} \epsilon_i \quad (1.3-150)$$

$$\epsilon^- = \max_{i=0, \dots, n} \epsilon_i$$

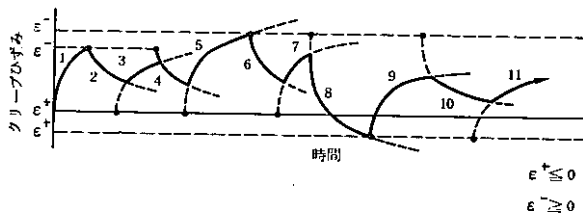


図 1.3-10 応力反転に対応するクリープ応答

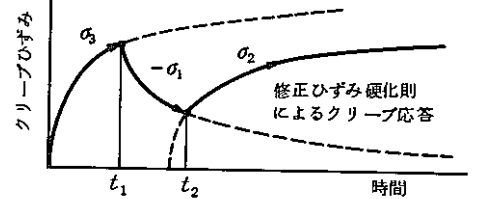
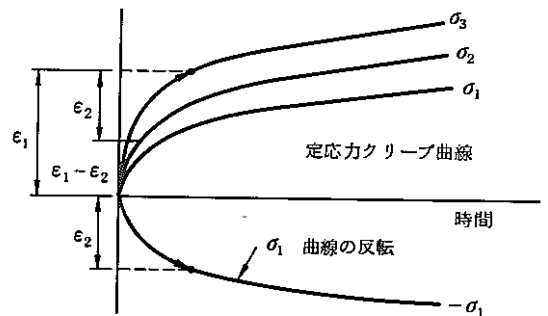
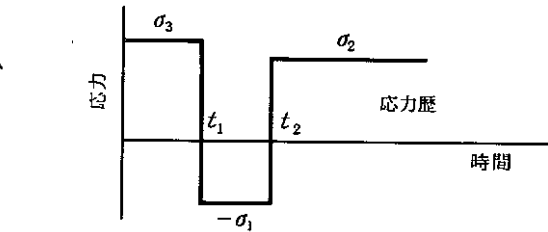


図 1.3-9 補助法則を用いたクリープ応答

### ●多軸応力場

多軸応力場に対して補助法則を考慮した構成方程式は、式(1.3-147)に対応して、次式で表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^c(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^H, T)}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (1.3-151)$$

多軸応力に対するひずみ硬化量 $\bar{\epsilon}^H$ 等は、次のように決定される。

#### (i) 記号の定義

多軸応力場におけるひずみ硬化量は $\bar{\epsilon}^H$ で表わすものとし、次のとおりである。

$$\text{ひずみ硬化量 } \bar{\epsilon}^H = \begin{cases} \text{全クリープひずみによる硬化則のときは } \epsilon_{ij}^c \text{ に基づく} \\ \text{1次クリープひずみによる硬化則のときは } \epsilon_{ij}^I \text{ に基づく} \end{cases}$$

ここで、右肩の $c$ は全クリープひずみ、 $I$ は1次クリープひずみを表わす。また、現在のひずみを

$\epsilon_{ij}^I$  で表わす。

$$\text{現在のひずみ } \epsilon_{ij}^I = \begin{cases} \epsilon_{ij}^c & (\text{全クリープひずみによる硬化則のとき}) \\ \epsilon_{ij}^t & (\text{1次クリープひずみによる硬化則のとき}) \end{cases}$$

ひずみの原点は  $\epsilon_{ij}^+$ ,  $\epsilon_{ij}^-$  で表わし, これはクリープひずみ空間 ( $\epsilon_{ij}^c$  または  $\epsilon_{ij}^t$ ) におけるひずみの原点である。

なお, ひずみ原点間の距離  $\hat{\epsilon}$  は, 2つのひずみ原点間の相当ひずみ距離であり, 次式で計算される。

$$\hat{\epsilon} = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_{ij}^+ - \epsilon_{ij}^-) (\epsilon_{ij}^+ - \epsilon_{ij}^-) \right]^{1/2} \quad (1.3-152)$$

ひずみ原点からの距離  $G^+$ ,  $G^-$  は, 現在のひずみ  $\epsilon_{ij}^I$  と基準ひずみ原点間の相当ひずみの距離であり, 次式で求められる。

$$G^+ = G (\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^+) = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^+) (\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^+) \right]^{1/2} \quad (1.3-153)$$

$$G^- = G (\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^-) = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^-) (\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^-) \right]^{1/2} \quad (1.3-154)$$

## (ii) 応力反転の定義

多軸応力状態では, 応力の反転は, 現在のひずみ原点 ( $\epsilon_{ij}^+$  または  $\epsilon_{ij}^-$ ) から測った相当クリープひずみが減少しはじめた時に起こるものとする。クリープひずみ速度やクリープひずみ増分は偏差応力と平行であるから, 応力反転の条件は偏差応力が現存の原点の方向へ向くことを意味する。

現在の原点が  $\epsilon_{ij}^+$  である場合, 応力の反転が生じるための条件は, 次のとおりである。

$$(\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^+) \sigma_{ij}' < 0 \quad (1.3-155)$$

クリープ変形では体積変化が起らないので,  $\epsilon_{kk}^I = 0$  であり, 式 (1.3-155) は, 次式のように書き直すことができる。

$$(\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^+) \sigma_{ij} < 0 \quad (1.3-156)$$

同様に, 現在の原点が  $\epsilon_{ij}^-$  である場合, 応力の反転が生じるための条件は, 次のとおりである。

$$(\epsilon_{ij}^I - \epsilon_{ij}^-) \sigma_{ij} < 0 \quad (1.3-157)$$

時間増分の始めに応力が反転している場合は, 原点を変えてからクリープひずみ増分の計算を行う。

## (iii) 初期無応力状態

初期の無応力状態に対しては, 次のようにおく。

$$\epsilon_{ij}^+ = \epsilon_{ij}^- = \hat{\epsilon} = 0 \quad (1.3-158)$$

なお, 最初の応力反転が生じるまでの式 (1.3-151) のひずみ硬化量  $\bar{\epsilon}^H$  は, 次式で計算する。

$$\bar{\varepsilon}^H = G(\varepsilon_{ij}^I) \quad (1.3-159)$$

(IV) 応力反転の検証と  $\bar{\varepsilon}^H$  を決定する一般の手順

a. ひずみ原点が  $\varepsilon_{ij}^+$  の場合

応力反転を式 (1.3-156) で評価し、次に正のひずみ原点からの距離  $G^+$  が ひずみ原点間の距離  $\hat{\varepsilon}$  より大きいかを調べる。すなわち、

$$G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^+) > \hat{\varepsilon} \quad (1.3-160)$$

ならば、 $\varepsilon_{ij}^+$  は変化させず、 $\varepsilon_{ij}^-$  を再定義する。

$$\varepsilon_{ij}^- = \varepsilon_{ij}^I, \quad \hat{\varepsilon} = G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^+) \quad (1.3-161)$$

逆に、式 (1.3-160) が満足されないならば、 $\varepsilon_{ij}^+$ 、 $\varepsilon_{ij}^-$  および  $\hat{\varepsilon}$  はそのままである。ただし、応力反転に対応して、原点を  $\varepsilon_{ij}^+$  から  $\varepsilon_{ij}^-$  へ変化させて、次式で  $\bar{\varepsilon}^H$  を求める。

$$\bar{\varepsilon}^H = G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^-) \quad (1.3-162)$$

b. ひずみ原点が  $\varepsilon_{ij}^-$  の場合

応力反転を式 (1.3-157) で評価し、次に負のひずみ原点からの距離  $G$  が ひずみ原点間の距離  $\hat{\varepsilon}$  より大きいかを調べる。すなわち、

$$G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^-) > \hat{\varepsilon} \quad (1.3-163)$$

ならば、 $\varepsilon_{ij}^-$  は変化させず、 $\varepsilon_{ij}^+$  を再定義する。

$$\varepsilon_{ij}^+ = \varepsilon_{ij}^I, \quad \hat{\varepsilon} = G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^-) \quad (1.3-164)$$

逆に、式 (1.3-163) が満足されないならば、 $\varepsilon_{ij}^+$ 、 $\varepsilon_{ij}^-$  および  $\hat{\varepsilon}$  はそのままである。ただし、応力反転に対応して原点を  $\varepsilon_{ij}^-$  から  $\varepsilon_{ij}^+$  へ変化させて、次式で  $\bar{\varepsilon}^H$  を求める。

$$\bar{\varepsilon}^H = G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^+) \quad (1.3-165)$$

(V) クリープひずみが原点  $\varepsilon_{ij}^+$  と  $\varepsilon_{ij}^-$  に近づく場合

一般にクリープひずみは通常、現在のひずみ原点から離れる方向を向くが、図 1.3-11 に示すように、両方のひずみ原点に近づく場合が存在する。このような場合には、次式が成立する。

$$(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^-) \sigma_{ij} < 0 \quad \text{かつ} \quad (\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^+) \sigma_{ij} < 0 \quad (1.3-166)$$

したがって、ここでは、現在のひずみを  $\varepsilon_{ij}^I$  から最も離れている原点の方を、その時点のひずみ原点とする。もし、

$$G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^+) \geq G(\varepsilon_{ij}^I - \varepsilon_{ij}^-) \quad (1.3-167)$$

ならば、 $\varepsilon_{ij}^+$  をその時点のひずみ原点として、 $\bar{\varepsilon}^H$  は式 (1.3-165) で求める。また、式 (1.3-167) が成立しないならば、 $\varepsilon_{ij}^-$  をその時点のひずみ原点として  $\bar{\varepsilon}^H$  は式 (1.3-162) で求める。

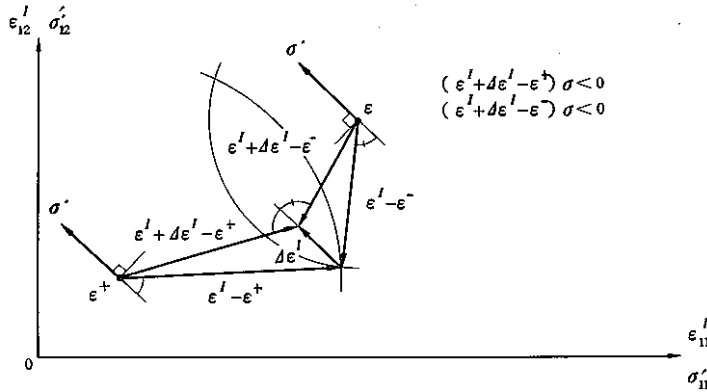


図 1.3-11 クリープひずみが両方の原点に近づく場合

e) 村上・大野のクリープひずみ硬化理論<sup>20), 21)</sup>

応力方向の反転があるクリープひずみ硬化理論に対し、ORNL が提案する補助法則に関して d) で述べたが、ORNL の理論は、単軸応力状態と同じく 2 個のひずみ原点を多軸応力状態に対しても仮定し、これを基準にしてクリープ硬化量と応力反転を定義しているために、多軸応力状態への拡張にはいくつかの問題がある。すなわち、ORNL の理論は、このような理由から解析的な形に表現することができず、数理的取り扱いが簡単でない。さらに、クリープ変形の進行に伴って上述のひずみ原点を設定するとき、過去のクリープ履歴あるいは応力変化のわずかな違いによって、新しく定められるひずみ原点の位置が不連続に変化し、この結果、一意的な解析結果を与えないことがある。

ここでは、ひずみ硬化理論を一般の多軸応力状態に対して拡張することにより、ORNL の理論のような困難さを持たない村上の提案するクリープひずみ硬化論について述べる。

● 単軸応力場

等方硬化を仮定したひずみ硬化理論は単軸クリープに対して次式らで表わされる。

$$\dot{\epsilon}^C = f(\epsilon^H, \sigma) \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (1.3-168)$$

$$\dot{\epsilon}^H = |\dot{\epsilon}^C| \quad (1.3-169)$$

ここで、 $\epsilon^C$ 、 $\sigma$  はそれぞれクリープひずみと応力を示し、 $(\dot{\quad})$  は時間に関する微分を表わす。さらに、 $\operatorname{sgn}[\quad]$  は  $[\quad]$  内の引数の符号を意味する。また式 (1.3-169) によって規定される硬化量  $\epsilon^H$  は応力が反転しても、クリープの進行とともに単調に増加し、材料の単調な硬化を表現している。そのために、応力符号の反転によって生じる過渡的な材料の軟化を考慮することができず、等方硬化を仮定したひずみ硬化理論では応力反転を伴うクリープを精度よく表現することはできない。

一般にクリープが進行すると、転位は可動性を失い材料は硬化する。不動化した転位は応力反転によって、可動性を回復する可逆的な部分と、それを回復せず不可逆的な転位構造を形成する部分からなる。このため応力の符号が反転すると、転位の可逆的な部分の再可動化により応力反転後に大きなクリープ速度が生じ材料が軟化する。そして再可動化した転位はそれまで不動化していた方向とは逆の方向へ運動する。したがって、応力反転後のあるひずみ範囲では、可逆的な転位の不可逆的な転位の移行は顕著でないと仮定できる。しかし、再可動化した転位は、応力反転後のクリープの進行とともに再び不動化し、このひずみ範囲を越え

ると不可逆的な転位構造の形成に寄与するようになる。

従って、上述のような可逆的な転位の再配列だけをもたらすひずみ範囲，すなわちクリープ硬化が回復可能なひずみ範囲を以下のように仮定する。

図 1.3-12(a)のように，一定応力  $\sigma_1$  によってクリープひずみ  $\epsilon^c$  が進行する場合，この回復可能なひずみ範囲は図 1.3-12(b)の曲線 OA，OD で囲まれた部分のように変化する。いま時間  $t$  におけるこのひずみ範囲は次式で表わされる。

$$g = |\epsilon^c - \alpha| - \rho \leq 0 \quad (1.3-170)$$

ここで， $\alpha$  はひずみ範囲の中心の座標で， $2\rho$  はその範囲の大きさを示す。

前述の仮定から，転位構造の不可逆的な変化が生じるのは，クリープひずみ  $\epsilon^c$  が式 (1.3-170) のひずみ範囲の境界上にあつて，かつその外側に向つて増加するときである。 $g=0$  で定義されるひずみ境界を回復可能なクリープ硬化の境界（あるいは簡単にクリープ硬化境界）と呼ぶ。

次に時間  $t_1$  で応力が  $\sigma_1$  から  $-\sigma_2$  へ反転するとする。式 (1.3-170) のひずみ範囲では転位構造の不可逆な変化は生じないと仮定したから，時間  $t_1 \leq t \leq t_2$  では回復可能なクリープ硬化の境界は変化せず，したがつてそれは，図 1.3-12(b)の直線 AB，DE で与えられる。ここで， $t_2$  は応力反転後クリープひずみが反対側のクリープ境界 E に達したときの時間を示す。

時間  $t \geq t_2$  では，クリープひずみがクリープ硬化境界上にあつて外側に向つて動くから，クリープ硬化境界は図 1.3-12(b)の曲線 BC，EF のように変化する。このように，クリープ硬化が回復可能なひずみ範囲はクリープひずみがクリープ硬化境界上にあつて外側に向つて動くときだけ大きくなる。したがつて  $\dot{\rho}$  は次式で表わすことができる。

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \lambda |\dot{\epsilon}^c| & g=0 \text{ かつ } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^c}\right) \dot{\epsilon}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^c}\right) \dot{\epsilon}^c < 0 \end{cases} \quad (1.3-171)$$

ここで， $\lambda$  は  $\rho$  の発達の割合を示す材料定数である。さらに  $g=0$  かつ  $(\partial g / \partial \epsilon^c) \dot{\epsilon}^c > 0$  のとき， $dg=0$  が成立しなければならない。この条件に式 (1.3-171) を代入すると， $\dot{\rho}$  は次のように求められる。

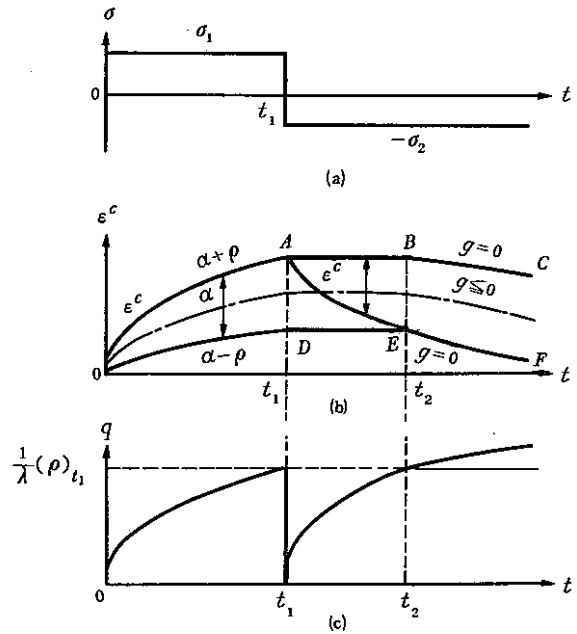


図 1.3-12 回復可能なクリープ硬化範囲と  
クリープ硬化変数の変化

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} (1-\lambda) \dot{\epsilon}^C & g=0 \text{ かつ } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^C}\right) \dot{\epsilon}^C > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^C}\right) \dot{\epsilon}^C < 0 \end{cases} \quad (1.3-173)$$

$$(1.3-174)$$

次に硬化量  $\epsilon^H$  の変化について考える。図 1.3-12(a) の OA 上では応力反転が生じないから、通常のひずみ硬化理論が成り立つと仮定すれば、式 (1.3-169) と式 (1.3-171) から次式が得られる。

$$\epsilon^H = |\epsilon^C| = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \rho \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (1.3-175)$$

時間  $t_1$  から  $-\sigma_2$  へ反転する場合を考える。いま、応力反転により再可動化する転位密度が十分に大きく、したがって応力反転直後の  $\dot{\epsilon}^C$  は式 (1.3-168) において  $\epsilon^H=0$  としたときの  $\dot{\epsilon}^C$  で近似できると仮定する。このとき  $\epsilon^H$  は図 1.3-12(e) に示すように時間  $t_1$  で瞬間的に 0 に減少した後、クリープの進行に伴って再び増加する。時間  $t_1 \leq t \leq t_2$  では不可逆な転位の再配列は生じないと仮定したから、図 1.3-12(c) のように  $t=t_2$  での硬化状態は応力反転直前の硬化状態に等しくなる。このとき、回復可能なクリープ硬化範囲での  $\epsilon^H$  のこのような増加が  $\epsilon^C$  の変化に比例すると仮定すれば、 $\epsilon^H$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \epsilon^H &= \left(\frac{1}{2\lambda}\right) \{(\alpha + \rho) - \epsilon^C\} \\ &= \left(\frac{1}{2\lambda}\right) \rho - \left(\frac{1}{2\lambda}\right) (\epsilon^C - \alpha) \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \end{aligned} \quad (1.3-176)$$

最後に、時間  $t \geq t_2$  では  $\epsilon^C$  がクリープ硬化境界上にあつて外側に動くので、 $\epsilon^C$  が OA 上にあるときと同様に通常のひずみ硬化理論を仮定すると  $\epsilon^H$  は次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \epsilon^H &= |\epsilon^C(t_1)| + |\epsilon^C(t) - \epsilon^C(t_2)| \\ &= \left(\frac{1}{\lambda}\right) \rho \quad (t_2 \leq t) \end{aligned} \quad (1.3-177)$$

式 (1.3-175), (1.3-176) および (1.3-177) は次のことを注意すれば、一つの式にまとめることができる。すなわち、時間  $0 \leq t \leq t_1$  および  $t_2 \leq t$  では  $g=0$  が成立すると同時に  $\sigma$  と  $(\epsilon^C - \alpha)$  は同符号である。一方、時間  $t_1 \leq t \leq t_2$  では  $\epsilon^C$  がひずみ範囲  $g \leq 0$  の中心を通過するまでは  $\sigma$  と  $(\epsilon^C - \alpha)$  は異符号であり、それ以後において同符号となる。したがって、式 (1.3-175), (1.3-176), (1.3-177) は次式で統一的に表わすことができる。

$$\epsilon^H = \left(\frac{1}{2\lambda}\right) \rho + \left(\frac{1}{2\lambda}\right) \operatorname{sgn}[\sigma(\epsilon^C - \alpha)] |\epsilon^C - \alpha| \quad (1.3-178)$$

以上から、単軸応力状態において、クリープ硬化が回復可能なひずみ範囲を仮定することにより、材料の過渡的な軟化を考慮できる村上のクリープひずみ硬化理論が次のように整理できる。



$$\dot{\epsilon}^c = f(\epsilon^H, \sigma) \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (1.3-179)$$

$$\epsilon^H = \left(\frac{1}{2\lambda}\right) \rho + \left(\frac{1}{2\lambda}\right) \operatorname{sgn}(\sigma(\epsilon^c - \alpha)) |\epsilon^c - \alpha| \quad (1.3-180)$$

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \lambda |\dot{\epsilon}^c| & g=0 \text{ かつ } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^c}\right) \dot{\epsilon}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^c}\right) \dot{\epsilon}^c < 0 \end{cases} \quad (1.3-181)$$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} (1-\lambda) \dot{\epsilon}^c & g=0 \text{ かつ } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^c}\right) \dot{\epsilon}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left(\frac{\partial g}{\partial \epsilon^c}\right) \dot{\epsilon}^c < 0 \end{cases} \quad (1.3-182)$$

$$g = |\epsilon^c - \alpha| - \rho \quad (1.3-183)$$

#### ●多軸応力場

前述の村上のクリープひずみ硬化理論を多軸状態へ拡張する。

初めに、式(1.3-170)で表わされる回復可能なひずみ範囲を図1.3-13の実線で示される中心 $\alpha_{ij}$ 、半径 $\rho$ の球、すなわち式(1.3-184)で近似する。ただし、考える負荷履歴は、逆負荷あるいは比例負荷からの偏りが著しくないとする。

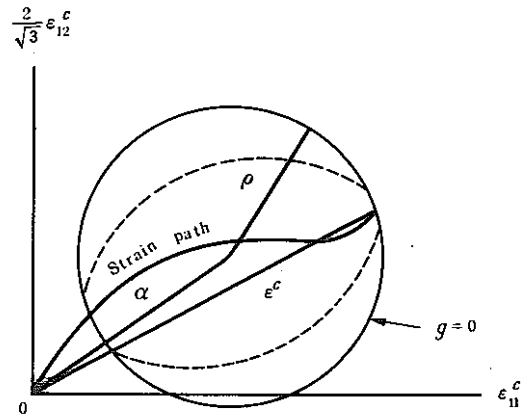


図 1.3-13 多軸応力状態でのクリープ硬化面

$$g = \left[ \frac{2}{3} (\epsilon_{ij}^c - \alpha_{ij}) (\epsilon_{ij}^c - \alpha_{ij}) \right]^{1/2} - \rho \leq 0 \quad (1.3-184)$$

ここで、 $\alpha_{ij}$  は 2 階の対称の偏差テンソルである。

式(1.3-184)で定義される回復可能なひずみ範囲が、膨張および移動するのは、クリープひずみ $\epsilon_{ij}^c$ が面 $g=0$ (この面をクリープ硬化面と呼ぶ)上にあって、しかもクリープ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ が外向き法線成分を持つときだけである。

したがって、単軸状態での式(1.3-171)、(1.3-172)、(1.3-173)、(1.3-174)で示される $\dot{\rho}$ と $\dot{\alpha}_{ij}$ は次のように書くことができる。

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_{ij}^c n_{ij} & g=0 \text{ かつ } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \varepsilon_{ij}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \varepsilon_{ij}^c \leq 0 \end{cases} \quad (1.3-185)$$

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_{ij}^c n_{ij} & g=0 \text{ かつ } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \varepsilon_{ij}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \varepsilon_{ij}^c \leq 0 \end{cases} \quad (1.3-186)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = \begin{cases} (1-\lambda) \dot{\varepsilon}_{kl}^c n_{kl} n_{ij} & g=0 \text{ かつ } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^c \leq 0 \end{cases} \quad (1.3-187)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = \begin{cases} (1-\lambda) \dot{\varepsilon}_{kl}^c n_{kl} n_{ij} & g=0 \text{ かつ } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^c > 0 \\ 0 & g < 0 \text{ あるいは } \left( \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^c} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^c \leq 0 \end{cases} \quad (1.3-188)$$

ここで,  $n_{ij}$  は次式で定義される。

$$n_{ij} = \frac{(\varepsilon_{ij}^c - \alpha_{ij})}{[(\varepsilon_{kl}^c - \alpha_{kl})(\varepsilon_{kl}^c - \alpha_{kl})]^{1/2}} \quad (1.3-189)$$

$g=0$  のとき,  $n_{ij}$  はクリープ硬化面に対する単位外向き法線を示す。

次に, 硬化量  $\varepsilon^H$  について考える。  $q$  は単軸状態では転位の再可動化の効果により, 応力反転とともに 0 に瞬間的に減少した。多軸状態では主応力方向の変化とともに活動すべり面が変化するため, このような材料の軟化によっても  $q$  は減少する。村上のクリープひずみ硬化理論では, クリープ硬化の方向性をクリープひずみ  $\varepsilon_{ij}^c$  とクリープ硬化面の中心  $\alpha_{ij}$  との差  $(\varepsilon_{ij}^c - \alpha_{ij})$  によって表わしている。したがって, 硬化量  $\varepsilon^H$  におけるひずみ履歴依存項は, 偏差応力テンソル  $S_{ij}$  の方向への  $(\varepsilon_{ij}^c - \alpha_{ij})$  の射影, すなわち,  $(\varepsilon_{ij}^c - \alpha_{ij}) S_{ij} / \bar{\sigma}$  に依存すると仮定できる。このとき式 (1.3-187) は多軸状態に対して次のように拡張される。

$$\varepsilon^H = \left( \frac{1}{2\lambda} \right) \rho + \left( \frac{1}{2\lambda} \right) (\varepsilon_{ij}^c - \alpha_{ij}) S_{ij} / \bar{\sigma} \quad (1.3-190)$$

ここで,  $\bar{\sigma}$  は次式で表わされる。

$$\bar{\sigma} = \left[ \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right]^{1/2} \quad (1.3-191)$$

最後に式 (1.3-168) は, クリープ速度テンソルと偏差応力テンソルの非共軸性を無視し, これらのテンソル間の共線性を仮定すれば, 多軸状態に対して次式で表わすことができる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} f(\varepsilon^H, \bar{\sigma}) S_{ij} / \bar{\sigma} \quad (1.3-192)$$

(2) FINAS におけるクリープ則

FINAS においては、使用者はクリープ則の使用に際して、次の3つの選択が可能である。

- i) 内部に用意されている特定形式のクリープ則のパラメータの値を入力して使用する。
- ii) 使用者が指定の形式に従ってサブプログラムを作成する。
- iii) 特定材料について、内部に組み込まれている材料データライブラリを使用する。

以下では、内部に用意されている各クリープ則〔上記の i)〕について説明を行なう。なお、材料データライブラリ〔上記の iii)〕については本編 1.3.5 節を参照されたい。

a) 1次クリープ表示式

1次クリープ表示式としては、べき乗表示と指数表示が利用できる。これらはクリープひずみ増分の形で与えられているため、それぞれについて時間硬化説による式とひずみ硬化による式が用意されている。すなわち、以下に示すとおりである。

● べき乗表示

$$\epsilon_t = \beta(\sigma, T) t^{m(\sigma, T)} = A_1 \sigma^{A_2} \exp\left(-\frac{A_3}{T}\right) t^{A_4} \quad (1.3-193)$$

時間硬化説では、

$$\Delta \epsilon_t = \beta \{ (t + \Delta t)^{A_4} - t^{A_4} \} \quad (1.3-194)$$

ひずみ硬化説では、

$$\Delta \epsilon_t = \beta(\sigma, T) (\bar{t} + \Delta t)^{A_4} - \epsilon_t \quad (1.3-195)$$

ここで、 $\bar{t} = (\epsilon_t / \beta)^{1/A_4}$  は仮想的な時間。

● 指数表示

$$\epsilon_t = \sum_{k=1}^n \epsilon_{tk} = \sum_{k=1}^n A_2 \{ 1 - e^{-\tau_k(\sigma, T)t} \} \quad (1.3-196)$$

ここで、 $\tau_1(\sigma, T) = A_3 \{ \sinh(A_4 \sigma) \}^{A_5} \exp\left(-\frac{A_6}{T}\right)$

時間硬化説では、

$$\Delta \epsilon_t = \sum_{k=1}^n \Delta \epsilon_{tk} = - \sum_{k=1}^n A_2 \{ e^{-\tau_k(t+dt)} - e^{-\tau_k t} \} \quad (1.3-197)$$

ひずみ硬化説では、

$$\Delta \epsilon_t = \sum_{k=1}^n \Delta \epsilon_{tk} = \sum_{k=1}^n \left[ A_2 \{ 1 - e^{-\tau_k(\bar{t} + dt)} \} - \epsilon_{tk} \right] \quad (1.3-198)$$

$$\text{ここで, } \bar{\epsilon}_k = \frac{1}{\gamma_k} \ln \left( 1 - \epsilon_{tk}/A_2 \right)$$

ここでのひずみ硬化は簡易的に  $\bar{\epsilon}_k$  を定めている。

#### b) 2次クリープ表示式

2次クリープひずみは, 式(1.3-141)の右辺第2項で表わされるので, 2次クリープひずみ増分は次式で与えられる。

$$\Delta \epsilon_s = \dot{\epsilon}_s(\sigma, T) \Delta t \quad (1.3-199)$$

$\dot{\epsilon}_s$  の具体的な表示式には, 次のものが含まれている。

$$\dot{\epsilon}_s = A_{16} \exp\left(\frac{\sigma}{A_{17}}\right) \exp\left(-\frac{A_{18}}{T}\right) \quad (1.3-200)$$

$$\dot{\epsilon}_s = A_{16} \sigma^{A_{17}} \exp\left(-\frac{A_{18}}{T}\right) \quad (1.3-201)$$

$$\dot{\epsilon}_s = A_{16} \left\{ \sinh\left(\frac{A_{17}}{T} \exp\left(-\frac{A_{18}}{T}\right)\right) \right\}^{A_{19}} \exp\left(-\frac{A_{20}}{T}\right) \quad (1.3-202)$$

$$\dot{\epsilon}_s = A_{16} \{ \sinh(A_{17}\sigma) \}^{A_{18}} \exp\left(-\frac{A_{19}}{T}\right) \quad (1.3-203)$$

$$\dot{\epsilon}_s = A_{16} \exp(A_{17}T) \{ \sinh(A_{18}\sigma) \}^{A_{19}} \exp\left(-\frac{A_{20}}{T}\right) \quad (1.3-204)$$

### 1.3.3 塑性とクリープの連成

#### (1) 塑性クリープ連成モデルの構成方程式

非弾性構成方程式では通常, 非時間依存の弾塑性挙動と時間依存のクリープ挙動に対して別個の取扱いがなされるが, ここでは部分的ではあるが, クリープの塑性に及ぼす影響を考慮に入れたモデルに関する構成方程式について述べる。熱弾性領域において, 次の Hooke の法則が成立するものとする。

$$\{\sigma\} = [E^e] \{\epsilon^e\} \quad (1.3-205)$$

ここで,  $\{\sigma\}$  は応力,  $\{\epsilon^e\}$  は弾性ひずみであり,  $[E^e]$  は温度  $T$  に依存する材料の弾性挙動を表すマトリックスである。式(1.3-205)を増分形にすることにより次式を得る。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e] \Delta\{\epsilon^e\} + \{\phi_T^e\} \Delta T \quad (1.3-206)$$

ただし,

$$\{\Psi_T^e\} = \frac{\partial [E^e]}{\partial T} \{\varepsilon^e\} \quad (1.3-207)$$

また、弾塑性ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon^{ep}\}$  を次の形で定義する。

$$\Delta\{\varepsilon^{ep}\} = \Delta\{\varepsilon^e\} + \Delta\{\varepsilon^p\} \quad (1.3-208)$$

ただし、塑性ひずみ増分  $\Delta\{\varepsilon^p\}$  は塑性ポテンシャルを  $\Phi^p$  とすると、次のように表わされるものとする。

$$\Delta\{\varepsilon^p\} = \Delta\lambda^p \left\{ \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-209)$$

式 (1.3-208) を考慮して式 (1.3-206) を次式のように書き換える。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e] (\Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \Delta\{\varepsilon^p\}) + \{\Psi_T^e\} \Delta T \quad (1.3-210)$$

いま、降伏関数を特別な形に限定せず、一般的な形のまま取り扱うものとし、降伏関数として、クリープひずみを考慮して次式を仮定する。

$$f^*(\sigma, \varepsilon^p, \varepsilon^c, T) = 0 \quad (1.3-211)$$

負荷状態では次式が成立する。

$$\Delta f = \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \Delta\{\sigma\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \Delta\{\varepsilon^p\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c} \right\}^T \Delta\{\varepsilon^c\} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \Delta T \quad (1.3-212)$$

式 (1.3-212) に式 (1.3-211) を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] - \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \right) \Delta\{\varepsilon^p\} \\ & + \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \right) \Delta T + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c} \right\}^T \Delta\{\varepsilon^c\} = 0 \end{aligned} \quad (1.3-213)$$

ここで、流れ則の式 (1.3-209) を式 (1.3-213) に代入し、 $\Delta\lambda^p$  について解くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^p = & \frac{\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \Delta\{\varepsilon^{ep}\}}{-\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \\ & + \frac{\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c} \right\}^T \Delta\{\varepsilon^c\} + \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \right) \Delta T}{-\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \end{aligned} \quad (1.3-214)$$

式 (1.3-214), 式 (1.3-209) を式 (1.3-210) に代入し整理すると次式が得られる。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^{ep}] \Delta\{\epsilon^{ep}\} + [E^c] \Delta\{\epsilon^c\} + \{\Psi_T^{ep}\} \Delta T \quad (1.3-215)$$

ここで,

$$[E^{ep}] = [E^e] + [E^p] \quad (1.3-216)$$

$$\{\Psi_T^{ep}\} = \{\Psi_T^e\} + \{\Psi_T^p\} \quad (1.3-217)$$

であり,  $\{\Psi_T^{ep}\}$  は材料定数の温度依存性から導かれるものである。式 (1.3-216), 式 (1.3-217) の個々のマトリックスは以下ようになる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-218)$$

$$\{\Psi_T^p\} = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \left( \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T} \right)}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-219)$$

また, 式 (1.3-215) に示されているクリープひずみを考慮した場合に生じるマトリックス  $[E^c]$  は次式で表わされる。

$$[E^c] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^c} \right\}^T}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-220)$$

associated な流れ則の場合,  $\phi^p = f^*$  であり, たとえば,  $[E^p]$  は次のようになる。

$$[E^p] = - \frac{[E^e] \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e]}{- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}^T [E^e] \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-221)$$

## (2) 塑性クリープ連成を考慮した移動硬化モデル<sup>11), 22)</sup>

塑性ポテンシャル, 降伏条件とも Mises の関数を用いるとすると, 塑性クリープの連成を考慮した移動硬化モデルの降伏関数は次のように表わされる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\sigma, \alpha) - \kappa(T) = 0 \quad (1.3-222)$$

ここで,  $\alpha$  は降伏面の移動を表わし, 塑性ひずみ, クリープひずみおよび温度の関数として, 次式で塑性とクリープ

の連成効果を評価するものとする。

$$\Delta\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{C}]\Delta\{\mathbf{e}^p\} + [\mathbf{H}]\Delta\{\mathbf{e}^c\} \quad (1.3-223)$$

$$\text{ただし, } [\mathbf{C}] = [\mathbf{C}]^T, \quad [\mathbf{H}] = [\mathbf{H}]^T$$

ここで,  $[\mathbf{C}]$  は移動硬化係数のマトリックスであり,  $[\mathbf{H}]$  はクリープ変形に応じて降伏面の移動を考慮する材料特性パラメータのマトリックスである。 $[\mathbf{H}]$  は相当オリジシフト応力 $\bar{\alpha}$ の値により次のように与えられる。

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2} \{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{a}\}} \leq A\kappa \quad \text{のとき, } [\mathbf{H}] = [\mathbf{C}] \quad (1.3-224)$$

$$\bar{\alpha} > A\kappa \quad \text{のとき, } [\mathbf{H}] = [\mathbf{0}]$$

ただし,  $A$  は温度, 履歴, 材料に依存するものである。式 (1.3-222), 式 (1.3-223) から次式が成立する。

$$\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} = - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha} \quad (1.3-225)$$

$$\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{e}^p} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{e}^p} \right\} \quad (1.3-226)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial T} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial \kappa}{\partial T} \quad (1.3-227)$$

$$\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{e}^p} \right\} = \left[ \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{e}^p} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha} \right\} = -[\mathbf{C}] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-228)$$

式 (1.3-225) と式 (1.3-226) より次式が得られる。

$$- \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{e}^p} \right\}^T \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{C}] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \quad (1.3-229)$$

したがって,  $\{\mathbf{E}^p\}$ ,  $\{\Psi_T^p\}$  は次のように表わされる。

$$\{\mathbf{E}^p\} = - \frac{[\mathbf{E}^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{E}^e]}{\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{C}] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{E}^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-230)$$

$$\{\Psi_T^p\} = - \frac{[\mathbf{E}^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} \left( \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right)}{\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{C}] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}^T [\mathbf{E}^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} \right\}} \quad (1.3-231)$$

一方, 式 (1.3-220) の右辺の分子における  $\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{e}^c} \right\}$  は式 (1.3-225) を考慮すると次式で表わされる。

$$\left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^c} \right\} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^c} \right] \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{a}} \right\} = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^c} \right] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\} = -[\boldsymbol{H}] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\} \quad (1.3-232)$$

式(1.3-232)から式(1.3-220)の右辺の分子は次のようになる。

$$[\boldsymbol{E}^e] \left\{ \frac{\partial \phi^p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^c} \right\}^T = -[\boldsymbol{E}^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\} \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\}^T [\boldsymbol{H}] = -\frac{3}{2} [\boldsymbol{E}^e] [\boldsymbol{H}] \quad (1.3-233)$$

したがって、 $[\boldsymbol{E}^c]$ は次式で表わされる。

$$[\boldsymbol{E}^c] = \frac{\frac{3}{2} [\boldsymbol{E}^e] [\boldsymbol{H}]}{\left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\}^T [\boldsymbol{C}] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\} + \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\}^T [\boldsymbol{E}^e] \left\{ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}} \right\}} \quad (1.3-234)$$

### (3) 塑性・クリープ連成を考慮した繰返し組み合わせ硬化モデル<sup>11), 22)</sup>

ここでは、塑性クリープの連成を考慮した場合の繰返し組み合わせ硬化モデルについて説明する。Misesの降伏条件を使用する場合、初期降伏面および後続の降伏面は一般に次式で表わされる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{a}) - \kappa = 0 \quad (1.3-235)$$

ここで、 $\boldsymbol{a}$ は降伏面の移動を表わし、クリープと塑性の連成を考慮して次式で与えられる。

$$\Delta \{\boldsymbol{a}\} = [\boldsymbol{C}] \Delta \{\boldsymbol{\varepsilon}^p\} + [\boldsymbol{H}] \Delta \{\boldsymbol{\varepsilon}^c\} \quad (1.3-236)$$

$$\text{ただし, } [\boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{C}]^T, [\boldsymbol{H}] = [\boldsymbol{H}]^T$$

ここで、 $[\boldsymbol{C}]$ は移動硬化係数マトリックスであり、 $[\boldsymbol{H}]$ はクリープ変形に応じて降伏面の移動を考慮する材料特性パラメータのマトリックスである。 $[\boldsymbol{H}]$ は相当オリジシフト応力 $\bar{a}$ の値により次のように与えられる。

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{3}{2} \{\boldsymbol{a}\}^T \{\boldsymbol{a}\}} \leq A\kappa \quad \text{のとき, } [\boldsymbol{H}] = [\boldsymbol{C}] \quad (1.3-237)$$

$$\bar{a} > A\kappa \quad \text{のとき, } [\boldsymbol{H}] = [\mathbf{0}]$$

ただし、 $A$ は温度、履歴、材料に依存するものである。また、 $\kappa$ は塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 、温度 $T$ に依存して次式で表わされる。

$$\kappa = \kappa(\boldsymbol{\varepsilon}^p, T) \quad (1.3-238)$$

繰返し組み合わせ硬化モデルでは、降伏曲面の大きさを塑性仕事あるいは累積塑性ひずみの関数とする二つの考え方があり、この両者を同時に扱うために次式を考える。



$$\kappa = (1-\omega)\kappa(W^p, T) + \omega\kappa(\tilde{\epsilon}^p, T) \quad (1.3-239)$$

ここで、 $W^p$  は塑性仕事、 $\tilde{\epsilon}^p$  は累積相当塑性ひずみであり、それぞれ次式で表わされる。ただし、 $\omega$  は 0 か 1 のいずれかの値をとる。

$$W^p = \int \Delta W^p = \int \{\sigma'\}^T \Delta\{\epsilon^p\} \quad (1.3-240)$$

$$\tilde{\epsilon}^p = \int d\tilde{\epsilon}^p = \int \sqrt{\frac{2}{3} \Delta\{\epsilon^p\}^T \Delta\{\epsilon^p\}} \quad (1.3-241)$$

ただし、 $\{\sigma'\}$  は偏差応力である。したがって、負荷の各段階での連続的な降伏面の移動と膨張を式 (1.3-240)、式 (1.3-239) に基づいて表わし、材料の硬化あるいは軟化特性を考慮することができる。一方、ORNL の推奨する方法では、塑性負荷の増分間では降伏面の大きさを変化させないで増分終了後にこれを変化させる近似手法を適用している。そのために式 (1.3-236) の代りに次式を用いている。

$$\Delta\{\alpha\} = [C] \Delta\{\epsilon^p\} + [H] \Delta\{\epsilon^c\} - \frac{\Delta\kappa}{\kappa} \{S\} \quad (1.3-242)$$

ここで、 $\{S\}$ 、 $\Delta\kappa$  はそれぞれ次式で表わされるものである。

$$\{S\} = \{\sigma'\} - \{\alpha\} \quad (1.3-243)$$

$$\Delta\kappa = (1-\omega) \left[ \frac{\partial\kappa}{\partial\tilde{\epsilon}^p} \Delta\tilde{\epsilon}^p + \frac{\partial\kappa}{\partial T} \Delta T \right] + \omega \left[ \frac{\partial\kappa}{\partial W^p} \Delta W^p + \frac{\partial\kappa}{\partial T} \Delta T \right] \quad (1.3-244)$$

### 1.3.4 スウェリング

#### (1) 照射スウェリングの基礎

スウェリングは中性子照射を受ける材料が膨張する現象であり、高度に放射線を浴びる環境にある材料にとってはこれを考慮した設計が必要となることがある。通常、スウェリングひずみは中性子束流、温度および時間の関数として次の一般式で表わされている。

$$\bar{\epsilon}^s = f(\phi, T, t) \quad (1.3-245)$$

ここで、 $\phi$  は中性子束流、 $T$  は温度、 $t$  は時間を意味する。しかし、最近 J.F. Bates 等<sup>23)</sup> は応力依存性を考慮した式を提案している。これを一般式で表わすと次のとおりである。

$$\bar{\epsilon}^s = g(\phi, T, t, \sigma_H) \quad (\sigma_H: \text{静水圧応力}) \quad (1.3-246)$$

一方、等方性材料において、スウェリングひずみ成分はクロネッカのデルタ  $\delta_{ij}$  を用いて次式のように表わされる。

$$\epsilon_{ij}^s = \delta_{ij} \bar{\epsilon}^s \quad (1.3-247)$$

また、異方性を考慮すると式 (1.3-247) は次式に書き換えることができる。

$$\varepsilon_{ij}^s = \delta_{ij} \bar{\varepsilon}_{(k)}^s \quad (k=1, 2, 3) \quad (1.3-248)$$

これに伴い、式 (1.3-245)、式 (1.3-246) はそれぞれ次のように書き換えることができる。

$$\bar{\varepsilon}_{(i)}^s = f^*(i, \phi, T, t) \quad (1.3-249)$$

$$\bar{\varepsilon}_{(i)}^s = g^*(i, \phi, T, t, \sigma_{ij}) \quad (1.3-250)$$

ただし、 $i$  は座標軸、 $\sigma_{ij}$  は応力成分を表わす。

## (2) 有限要素法における定式

スウェリングひずみベクトルの増分を  $\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}^s\}$  で表わすと、要素に対するスウェリングひずみ荷重ベクトルの増分  $\Delta\{\boldsymbol{p}_e^s\}$  は次式で表わされる。

$$\Delta\{\boldsymbol{p}_e^s\} = \int_{\text{vol}} [\boldsymbol{B}]^T [\boldsymbol{D}] \Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}^s\} dV \quad (1.3-251)$$

ここで、 $[\boldsymbol{B}]$  はひずみ・変位マトリックス、 $[\boldsymbol{D}]$  は応力・ひずみマトリックスである。また、構造全体においてスウェリングひずみ増分による荷重ベクトル増分  $\Delta\{\boldsymbol{P}^s\}$  は、 $N$  を要素数とすると次式で示される。

$$\Delta\{\boldsymbol{P}^s\} = \sum_{e=1}^N \Delta\{\boldsymbol{p}_e^s\} \quad (1.3-252)$$

構造全体の変位と荷重の関係は次のように表わされる。

$$[\boldsymbol{K}] \Delta\{\boldsymbol{U}\} = \Delta\{\boldsymbol{P}\} + \Delta\{\boldsymbol{P}^s\} \quad (1.3-253)$$

ここで、 $[\boldsymbol{K}]$  は剛性マトリックス、 $\Delta\{\boldsymbol{U}\}$  は変位ベクトル増分、 $\Delta\{\boldsymbol{P}\}$  はスウェリングひずみ以外の荷重ベクトル増分である。

## (3) FINAS におけるスウェリング

FINAS ではスウェリング解析のために、次の 2 つの方法を用意している。

I) FINAS に組み込まれているスウェリングひずみ式のパラメータの値を入力する。

II) ユーザが指定の形式にしたがって、スウェリングひずみ式をサブルーチンで作成する。

以下では内部に用意されている各スウェリングひずみ式について説明を行なう。

### a) 組込みのスウェリングひずみ表示式

$$\bar{\varepsilon}^s = c_1 (\phi t)^{c_2} (c_3 + c_4 T + c_5 T^2 + c_6 T^3) \quad (1.3-254)$$

ただし、 $c_i$  ( $i=1 \sim 6$ ) は入力データ、 $\phi$  は中性子束、 $t$  は時間、 $T$  は温度 (絶対温度) である。

$$\bullet \bar{\epsilon}^s = c_1 \left[ \frac{e^A}{1+e^A} \right] \left[ \frac{c_2}{1+e^B} + \frac{c_3}{1+e^C} \right] \left( \frac{\phi t}{10^{22}} \right)^N \quad (1.3-255)$$

$$N = \frac{2+3e^D}{1+e^D} \quad (1.3-256)$$

$$A = c_4 (T - c_5) \quad (1.3-257)$$

$$B = c_6 (T - c_7) \quad (1.3-258)$$

$$C = c_8 (T - c_9) \quad (1.3-259)$$

$$D = c_{10} (T - c_{11}) \quad (1.3-260)$$

ただし,  $c_i$  ( $i = 1 \sim 11$ ) は入力データ,  $\phi$  は中性子束,  $t$  は時間,  $T$  は温度 (絶対温度) である。

$$\bullet \bar{\epsilon}^s = A \left( \frac{\phi t}{10^{22}} \right)^B e^C \quad (1.3-261)$$

$$A = c_1 + c_2 \ln \left( \frac{\phi t}{10^{22}} \right) \quad (1.3-262)$$

$$B = c_3 + \frac{c_4}{T} + c_5 \left( \frac{\phi t}{10^{22}} \right) \quad (1.3-263)$$

$$C = c_6 + \frac{c_7}{T} + \frac{c_8}{T^2} \quad (1.3-264)$$

ただし,  $c_i$  ( $i = 1 \sim 8$ ) は入力データ,  $\phi$  は中性子束,  $t$  は時間,  $T$  は温度 (絶対温度) である。

$$\bullet \bar{\epsilon}^s = A \left( \frac{\phi t}{10^{22}} \right)^B e^C \quad (1.3-265)$$

$$A = c_1 (T - c_2) \quad (1.3-266)$$

$$B = c_3 + \frac{c_5}{T - c_4} + \frac{c_7}{(T - c_6)^2} \quad (1.3-267)$$

$$C = c_8 + c_9 T + \frac{c_{10}}{T} \quad (1.3-268)$$

ただし,  $c_i$  ( $i = 1 \sim 10$ ) は入力データ,  $\phi$  は中性子束,  $t$  は時間,  $T$  は温度 (絶対温度) である。

$$\bullet \bar{\epsilon}^s = \dot{\epsilon}^s (1.0 + c_1 \sigma_R) \quad (1.3-269)$$

$$\dot{\epsilon}^s = c_2 e^A \left[ \frac{\phi t}{c_3} + \frac{1}{B} \ln \left[ \frac{e^{B(C - \phi t / c_3)}}{1 + e^{BC}} \right] \right] \quad (1.3-270)$$

$$A = c_5 + c_6 (T + c_4) + c_7 (T + c_4)^2 + c_8 (T + c_4)^3 + c_9 (T + c_4)^4 \quad (1.3-271)$$

$$B = c_{10} + c_{11} (T + c_4) \quad (1.3-272)$$

$$C = \exp \{ c_{12} + c_{13} (T + c_4) + c_{14} (T + c_4)^2 + c_{15} (T + c_4)^3 + c_{16} (T + c_4)^4 \} \quad (1.3-273)$$

ただし,  $c_i$  ( $i = 1 \sim 16$ ) は入力データ,  $\phi$  は中性子束,  $t$  は時間,  $T$  は温度 (絶対温度) である。

### 1.3.5 FINAS 材料データライブラリ

#### (1) オーステナイトステンレス鋼 SUS 304

材料データライブラリでのヤング係数およびポアソン比は EPICC データ集<sup>18)</sup>、線膨張係数、降伏応力、加工硬化係数およびクリープ特性は動燃事業団による文献<sup>11)</sup>から引用され登録されている。

ヤング係数、ポアソン比、線膨張係数については 20℃～650℃の範囲で表 1.3-1 の値が用いられ、降伏応力、加工硬化係数は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～650℃の範囲で表 1.3-2 の値が用いられる。各温度間は線形に補間し、この範囲外の温度では外挿を行なっている。さらに表 1.3-3 に示される単調応力-ひずみ関係式を使用することも可能である。また非弾性解析における塑性ポテンシャル、降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。なお、FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を  $\frac{2}{3}$  倍したものとしている。

クリープひずみは 425℃～650℃の範囲において、使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い表 1.3-4 の SUS 304 クリープひずみ式より計算する。なお、クリープひずみ式の応力適用範囲は  $38.0 \text{ kg/mm}^2$  以下である。

表 1.3-1 SUS 304 鋼のヤング係数、ポアソン比、線膨張係数

温 度 (°C)	ヤング係数 ( $\text{kg/mm}^2$ )	ポアソン比	線膨張係数 ( $1/^\circ\text{C}$ )
20	$1.98 \times 10^4$	0.266	$15.15 \times 10^{-6}$
50	$1.96 \times 10^4$	0.268	$15.65 \times 10^{-6}$
100	$1.94 \times 10^4$	0.272	$16.48 \times 10^{-6}$
150	$1.91 \times 10^4$	0.275	$17.22 \times 10^{-6}$
200	$1.88 \times 10^4$	0.279	$17.85 \times 10^{-6}$
250	$1.84 \times 10^4$	0.283	$18.36 \times 10^{-6}$
300	$1.80 \times 10^4$	0.287	$18.79 \times 10^{-6}$
350	$1.76 \times 10^4$	0.291	$19.19 \times 10^{-6}$
400	$1.72 \times 10^4$	0.295	$19.57 \times 10^{-6}$
450	$1.67 \times 10^4$	0.298	$19.93 \times 10^{-6}$
500	$1.62 \times 10^4$	0.302	$20.28 \times 10^{-6}$
550	$1.57 \times 10^4$	0.306	$20.60 \times 10^{-6}$
600	$1.52 \times 10^4$	0.310	$20.87 \times 10^{-6}$
650	$1.47 \times 10^4$	0.314	$21.09 \times 10^{-6}$

表 1.3-2 SUS 304 鋼の降伏応力, 加工硬化係数

材 料 特 性	最大想定ひずみ (%)	温 度 (°C)						
		350	400	450	500	550	600	650
降 伏 応 力 (kg/mm <sup>2</sup> )	0.2	12.43	12.10	11.84	11.61	11.33	10.97	10.46
	0.3	12.92	12.57	12.30	12.04	11.75	11.36	10.83
	0.4	13.29	12.92	12.63	12.36	12.05	11.65	11.11
	0.5	13.58	13.20	12.90	12.62	12.30	11.89	11.34
	0.6	13.83	13.44	13.13	12.84	12.51	12.09	11.53
	0.7	14.04	13.65	13.33	13.03	12.69	12.27	11.70
	0.8	14.24	13.84	13.51	13.20	12.86	12.43	11.85
	0.9	14.42	14.01	13.67	13.36	13.01	12.57	11.99
	1.0	14.58	14.16	13.82	13.50	13.15	12.70	12.11
	1.1	14.73	14.31	13.96	13.64	13.28	12.83	12.23
	1.2	14.87	14.44	14.09	13.76	13.40	12.94	12.34
	1.3	15.00	14.57	14.22	13.88	13.51	13.05	12.45
	1.4	15.13	14.69	14.33	13.99	13.62	13.15	12.54
	1.5	15.25	14.81	14.44	14.10	13.72	13.25	12.64
	1.6	15.36	14.92	14.55	14.20	13.82	13.35	12.73
	1.7	15.47	15.02	14.65	14.30	13.91	13.43	12.81
	1.8	15.57	15.12	14.74	14.39	14.00	13.52	12.90
	1.9	15.67	15.22	14.84	14.48	14.09	13.60	12.97
	2.0	15.77	15.31	14.93	14.56	14.17	13.68	13.05
	2.1	15.86	15.40	15.01	14.65	14.25	13.76	13.12
2.2	15.95	15.48	15.09	14.73	14.33	13.83	13.20	
2.3	16.04	15.57	15.18	14.80	14.40	13.90	13.27	
2.4	16.12	15.65	15.25	14.88	14.47	13.97	13.33	
2.5	16.20	15.73	15.33	14.95	14.54	14.04	13.40	
3.0	16.57	16.09	15.68	15.29	14.87	14.35	13.70	
3.5	16.91	16.41	15.99	15.59	15.16	14.63	13.97	
4.0	17.21	16.70	16.27	15.86	15.42	14.89	14.21	
4.5	17.48	16.96	16.53	16.11	15.66	15.12	14.43	
5.0	17.74	17.21	16.76	16.34	15.88	15.33	14.64	
定常降伏応力 (kg/mm <sup>2</sup> )	0.2		13.65	13.65	13.65	13.48	13.06	12.55
	0.3		16.95	16.95	16.95	16.45	15.61	14.80
	0.4		20.01	20.01	20.01	19.26	18.01	16.85
	0.5		22.75	22.75	22.75	21.76	20.13	18.59
	0.6		25.24	25.24	25.24	24.01	22.01	20.10
	0.7		27.50	27.50	27.50	26.05	23.69	21.44
	0.8		29.58	29.58	29.58	27.92	25.23	22.63
	0.9		31.50	31.50	31.50	29.64	26.63	23.71
	1.0		33.30	33.30	33.30	31.24	27.93	24.70
	1.1		34.98	34.98	34.98	32.74	29.14	25.60
	1.2		36.57	36.57	36.57	34.14	30.27	26.45
	1.3		38.06	38.06	38.06	35.47	31.33	27.23
	1.4		39.49	39.49	39.49	36.73	32.33	27.97
	1.5		40.84	40.84	40.84	37.93	33.28	28.66
	1.6		42.14	42.14	42.14	39.07	34.19	29.32
	1.7		43.38	43.38	43.38	40.16	35.05	29.94
	1.8		44.56	44.56	44.56	41.20	35.87	30.53
	1.9		45.71	45.71	45.71	42.21	36.66	31.09
	2.0		46.81	46.81	46.81	43.17	37.42	31.63
	2.1		47.88	47.88	47.88	44.11	38.15	32.05
2.2		48.90	48.90	48.90	45.01	38.85	32.46	
2.3		49.90	49.90	49.90	45.88	39.53	32.86	
2.4		50.87	50.87	50.87	46.72	40.19	33.25	
2.5		51.80	51.80	51.80	47.54	40.83	33.62	
3.0		56.13	56.13	56.13	51.30	43.74	35.35	
3.5		59.97	59.97	59.97	54.63	46.21	36.90	
4.0		63.44	63.44	63.44	57.63	48.37	38.30	
4.5		66.61	66.61	66.61	60.36	50.38	39.59	
5.0		69.54	69.54	69.54	62.88	52.24	40.78	

材 料 特 性	最大想定ひずみ (%)	温 度 (°C)						
		350	400	450	500	550	600	650
加工硬化係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	0.2	2043.3	1962.2	1887.7	1816.1	1744.0	1668.0	1585.3
	0.3	1352.7	1302.0	1254.2	1207.7	1161.3	1113.8	1064.0
	0.4	1042.8	1005.3	969.3	934.3	899.4	864.0	827.6
	0.5	862.3	832.2	803.1	774.7	746.5	718.0	688.9
	0.6	742.4	717.1	692.6	668.5	644.6	620.6	596.2
	0.7	656.2	634.3	613.0	592.0	571.2	550.3	529.2
	0.8	590.3	571.4	552.5	533.9	515.4	496.9	478.2
	0.9	539.2	521.8	504.8	488.0	471.3	454.6	437.8
	1.0	497.3	481.5	466.0	450.7	435.5	420.3	404.9
	1.1	462.6	448.0	433.8	419.7	405.7	391.7	377.6
	1.2	433.2	419.7	406.5	393.4	380.4	367.4	354.4
	1.3	407.9	395.4	383.0	370.8	358.7	346.6	334.4
	1.4	386.0	374.2	362.7	351.2	339.8	328.4	317.0
	1.5	366.7	355.6	344.7	333.9	323.2	312.5	301.7
	1.6	349.6	339.1	328.8	318.6	308.5	298.3	288.1
	1.7	334.3	324.4	314.6	304.9	295.3	285.6	275.9
	1.8	320.5	311.1	301.8	292.6	283.4	274.2	265.0
	1.9	308.1	299.1	290.2	281.4	272.6	263.8	255.0
	2.0	296.7	288.2	279.7	271.2	262.8	254.4	245.9
	2.1	286.4	278.1	270.0	261.9	253.8	245.7	237.6
2.2	276.8	268.9	261.1	253.3	245.5	237.8	230.0	
2.3	268.0	260.4	252.9	245.4	237.9	230.4	222.9	
2.4	259.9	252.6	245.3	238.0	230.8	223.6	216.4	
2.5	252.3	245.2	238.2	231.2	224.2	217.3	210.3	
3.0	221.2	215.2	209.2	203.2	197.2	191.2	185.2	
3.5	198.1	192.8	187.5	182.2	177.0	171.7	166.4	
4.0	180.0	175.3	170.6	165.9	161.2	156.5	151.8	
4.5	165.6	161.3	157.0	152.8	148.5	144.2	139.9	
5.0	153.6	149.7	145.8	141.9	138.0	134.1	130.2	
定常 加工硬化係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	0.2		10216.3	10216.3	10216.3	8950.0	7260.4	6364.3
	0.3		5134.4	5134.4	5134.4	4384.6	3442.5	2828.1
	0.4		3211.4	3211.4	3211.4	2689.5	2060.1	1618.9
	0.5		2240.8	2240.8	2240.8	1844.0	1381.2	1045.7
	0.6		1670.9	1670.9	1670.9	1352.3	991.3	725.0
	0.7		1303.5	1303.5	1303.5	1037.8	744.6	526.4
	0.8		1051.0	1051.0	1051.0	823.3	577.9	394.7
	0.9		869.1	869.1	869.1	669.8	459.8	303.0
	1.0		733.2	733.2	733.2	556.0	372.9	236.7
	1.1		628.9	628.9	628.9	469.2	307.3	187.3
	1.2		546.9	546.9	546.9	401.4	256.5	149.6
	1.3		481.3	481.3	481.3	347.5	216.5	120.4
	1.4		427.9	427.9	427.9	304.0	184.4	97.3
	1.5		383.9	383.9	383.9	268.3	158.3	78.8
	1.6		347.1	347.1	347.1	238.7	136.9	63.9
	1.7		316.2	316.2	316.2	213.9	119.2	51.7
	1.8		289.8	289.8	289.8	193.0	104.4	41.7
	1.9		267.2	267.2	267.2	175.2	91.9	33.3
	2.0		247.7	247.7	247.7	160.0	81.2	26.4
	2.1		230.7	230.7	230.7	146.8	72.2	25.1
2.2		215.9	215.9	215.9	135.4	64.4	24.3	
2.3		202.9	202.9	202.9	125.4	57.7	23.6	
2.4		191.3	191.3	191.3	116.7	51.9	22.9	
2.5		181.1	181.1	181.1	109.0	46.8	22.2	
3.0		144.0	144.0	144.0	81.8	29.7	19.6	
3.5		121.5	121.5	121.5	66.0	23.5	17.6	
4.0		106.9	106.9	106.9	56.4	21.6	16.0	
4.5		97.1	97.1	97.1	50.4	20.1	14.8	
5.0		90.1	90.1	90.1	46.4	18.8	13.8	

表 1.3-3 SUS 304 鋼の単調応力-ひずみ関係式

<p>(1) <math>\sigma \leq \sigma_P</math> のとき</p> $\epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ $\epsilon_p = 0$ <p>(2) <math>\sigma &gt; \sigma_P</math> のとき</p> $\epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ $\epsilon_p = \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{K} \right)^{\frac{1}{m}}$ <p>&lt;使用単位&gt;</p> <p style="text-align: center;"><math>\epsilon_e</math> (mm/mm),    <math>\epsilon_p</math> (mm/mm),    <math>\sigma</math> (kg/mm<sup>2</sup>)</p> <p>&lt;適用限界&gt;</p> <p style="text-align: center;">最大ひずみ (<math>\epsilon_e + \epsilon_p</math>)<sub>max</sub> ≤ 0.03 (mm/mm)</p>	
温度 (°C) パラメータ	$315 \leq T \leq 650$
$E$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$315 \leq T < 400$ $E = 2.040 \times 10^4 - 8.000 T$ $400 \leq T \leq 650$ $E = 2.126 \times 10^4 - 10.125 T$
$\sigma_P$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_Y - K (0.002)^m$
$\sigma_Y$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$(25.5655 - 5.58937 \times 10^{-2} T + 1.04384 \times 10^{-4} T^2 - 7.42535 \times 10^{-8} T^3) / \alpha_Y$
$K$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$44.3068 - 1.78933 \times 10^{-2} T$
$m$	$0.279395 + 7.749 \times 10^{-5} T$
$\alpha_Y$	MATERIAL データ B <sub>11</sub> カードで指定した値。B <sub>11</sub> カードの $\alpha_Y$ が無記入の場合は 1.0

表 1.3-4 SUS 304 鋼のクリープひずみ式

$$\epsilon^c = c_1 \{ 1 - \exp(-r_1 t) \} + c_2 \{ 1 - \exp(-r_2 t) \} + \dot{\epsilon}_m t$$

ここで,

$$r_1 = 103.37 t_R^{-0.72607}, \quad r_2 = 17.255 t_R^{-0.86775}$$

$$c_1 = 1.2692 \dot{\epsilon}_m^{0.74491} / r_1, \quad c_2 = 0.48449 \dot{\epsilon}_m^{0.81155} / r_2$$

$$\dot{\epsilon}_m = F t_R^{-1.1335}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10} \sigma + B_2 (\log_{10} \sigma)^2 & (0.1 \leq \sigma \leq 38.0 \text{ のとき}) \\ \{ B_0 - B_2 (\log_{10} 0.1)^2 \} + (B_1 + 2 B_2 \log_{10} 0.1) \log_{10} \sigma & (0.01 \leq \sigma < 0.1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし,  $0 \leq \sigma < 0.01$  に対しては,  $r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\epsilon}_m = 0$

< 使用単位 >  $\epsilon^c$  (mm/mm),  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $t$  (hr),  $T$  (°C)

温度 パラメータ	425 ≤ T ≤ 650
F	62.416 exp { - $\frac{40812}{8.31(T+273.15)}$ }
B <sub>0</sub>	-17.54301 + 26248.54 / (T + 273.15)
B <sub>1</sub>	-6104.579 / (T + 273.15)
B <sub>2</sub>	-425.0012 / (T + 273.15)
α <sub>R</sub>	MATERIAL データ B <sub>12</sub> カードで指定した値。B <sub>12</sub> カードの α <sub>R</sub> が無記入の場合は 1.0



(2) オーステナイトステンレス鋼 SUS 316

動燃事業団推奨データ<sup>24)</sup>より引用され、弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表 1.3-5 は SUS 316 の 20℃～650℃の温度におけるヤング係数、ポアソン比、線膨張係数を示し、表 1.3-6 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～650℃の温度における降伏応力、加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し、範囲外の温度について外挿を行なう。また、表 1.3-7 は単調応力-ひずみ関係式を示したものである。なお、塑性解析での塑性ポテンシャル、降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また、FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を  $\frac{2}{3}$  倍したもとしている。

クリープひずみは 425℃～650℃の温度において、使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い、表 1.3-8 の SUS 316 クリープひずみ式より計算する。なお、クリープひずみ式の応力適用範囲は 38.0 kg/mm<sup>2</sup> 以下である。

表 1.3-5 SUS 316 鋼のヤング係数、ポアソン比、線膨張係数

温 度 (°C)	ヤング係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比	線膨張係数 (1/°C)
20	1.98 × 10 <sup>4</sup>	0.266	15.15 × 10 <sup>-6</sup>
50	1.96 × 10 <sup>4</sup>	0.268	15.65 × 10 <sup>-6</sup>
100	1.94 × 10 <sup>4</sup>	0.272	16.48 × 10 <sup>-6</sup>
150	1.91 × 10 <sup>4</sup>	0.275	17.22 × 10 <sup>-6</sup>
200	1.88 × 10 <sup>4</sup>	0.279	17.85 × 10 <sup>-6</sup>
250	1.84 × 10 <sup>4</sup>	0.283	18.36 × 10 <sup>-6</sup>
300	1.80 × 10 <sup>4</sup>	0.287	18.79 × 10 <sup>-6</sup>
350	1.76 × 10 <sup>4</sup>	0.291	19.19 × 10 <sup>-6</sup>
400	1.72 × 10 <sup>4</sup>	0.295	19.57 × 10 <sup>-6</sup>
450	1.67 × 10 <sup>4</sup>	0.298	19.93 × 10 <sup>-6</sup>
500	1.62 × 10 <sup>4</sup>	0.302	20.28 × 10 <sup>-6</sup>
550	1.57 × 10 <sup>4</sup>	0.306	20.60 × 10 <sup>-6</sup>
600	1.52 × 10 <sup>4</sup>	0.310	20.87 × 10 <sup>-6</sup>
650	1.47 × 10 <sup>4</sup>	0.314	21.09 × 10 <sup>-6</sup>

表 1.3-6 SUS316鋼の降伏応力, 加工硬化係数

材料特性	最大想定 ひずみレベル (%)	温 度 (°C)						
		350	400	450	500	550	600	650
降伏応力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	14.12	13.61	13.19	12.82	12.47	12.10	11.67
	.30	14.52	14.00	13.56	13.18	12.82	12.44	12.00
	.40	14.82	14.28	13.84	13.45	13.08	12.69	12.24
	.50	15.05	14.51	14.06	13.66	13.29	12.89	12.43
	.60	15.25	14.71	14.25	13.85	13.47	13.06	12.60
	.70	15.43	14.88	14.42	14.01	13.62	13.22	12.75
	.80	15.59	15.03	14.57	14.16	13.77	13.36	12.89
	.90	15.74	15.17	14.71	14.29	13.90	13.48	13.01
	1.00	15.87	15.31	14.83	14.42	14.02	13.60	13.12
	1.10	16.00	15.43	14.95	14.53	14.13	13.71	13.23
	1.20	16.11	15.54	15.06	14.64	14.24	13.81	13.33
	1.30	16.22	15.65	15.17	14.74	14.33	13.91	13.42
	1.40	16.33	15.75	15.27	14.84	14.43	14.00	13.51
1.50	16.43	15.85	15.36	14.93	14.52	14.09	13.60	
定常降伏応力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20			18.64	18.64	18.64	18.40	
	.30			22.27	22.27	22.27	21.50	
	.40			25.36	25.36	25.36	24.10	
	.50			28.06	28.06	28.06	26.34	
	.60			30.59	30.59	30.59	28.42	
	.70			32.79	32.79	32.79	30.21	
	.80			34.72	34.72	34.72	31.76	
	.90			36.56	36.56	36.56	33.22	
	1.00			38.23	38.23	38.23	34.53	
	1.10			39.83	39.83	39.83	35.79	
	1.20			41.17	41.17	41.17	36.83	
	1.30			42.46	42.46	42.46	37.81	
	1.40			43.70	43.70	43.70	38.75	
1.50			44.83	44.83	44.83	39.61		
加工硬化係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	1826.6	1767.2	1714.8	1667.0	1621.2	1575.3	1526.9
	.30	1188.6	1155.1	1124.2	1095.0	1066.8	1038.7	1009.9
	.40	915.1	891.2	868.7	847.2	826.3	805.6	784.5
	.50	758.2	739.5	721.6	704.4	687.6	670.9	654.0
	.60	654.8	639.2	624.3	609.8	595.7	581.6	567.4
	.70	580.7	567.3	554.4	541.8	529.5	517.3	505.1
	.80	524.5	512.7	501.3	490.2	479.3	468.5	457.6
	.90	480.2	469.6	459.4	449.4	439.6	429.8	420.1
	1.00	444.2	434.6	425.3	416.3	407.3	398.4	389.5
	1.10	414.3	405.5	397.0	388.7	380.4	372.2	364.0
	1.20	389.0	380.9	373.0	365.3	357.6	350.0	342.4
	1.30	367.2	359.7	352.4	345.1	338.0	330.9	323.8
	1.40	348.3	341.3	334.4	327.6	320.9	314.2	307.6
1.50	331.6	325.0	318.5	312.2	305.8	299.6	293.3	

表 1.3-7 SUS 316 鋼の単調応力-ひずみ関係式

<p>(1) <math>\sigma \leq \sigma_P</math> のとき</p> $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ $\varepsilon_p = 0$ <p>(2) <math>\sigma &gt; \sigma_P</math> のとき</p> $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ $\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{K} \right)^{\frac{1}{m}}$ <p>&lt;使用単位&gt;</p> <p style="text-align: center;"><math>\varepsilon_e</math> (mm/mm),    <math>\varepsilon_p</math> (mm/mm),    <math>\sigma</math> (kg/mm<sup>2</sup>)</p> <p>&lt;適用限界&gt;</p> <p style="text-align: center;">最大ひずみ <math>(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{\max} \leq 0.03</math> (mm/mm)</p>	
温度 (°C) パラメータ	$315 \leq T \leq 650$
$E$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$315 \leq T < 400$ $E = 2.040 \times 10^4 - 8.000 T$ $400 \leq T \leq 650$ $E = 2.126 \times 10^4 - 10.125 T$
$\sigma_P$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_Y - K (0.002)^m$
$\sigma_Y$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$(26.8073 - 5.04547 \times 10^{-2} T + 8.03901 \times 10^{-5} T^2 - 5.11282 \times 10^{-8} T^3) / \alpha_Y$
$K$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$40.0909 - 9.69990 \times 10^{-3} T$
$m$	$0.326245 + 6.13276 \times 10^{-5} T$
$\alpha_Y$	MATERIAL データ B <sub>11</sub> カードで指定した値。 B <sub>11</sub> カードの $\alpha_Y$ が無記入の場合は 1.0

表 1.3-8 SUS 316 鋼のクリープひずみ式

$$\epsilon^c = c_1 \{ 1 - \exp(-r_1 t) \} + c_2 \{ 1 - \exp(-r_2 t) \} + \dot{\epsilon}_m t$$

ここで,

$$r_1 = 103.37 t_R^{-0.72607}, \quad r_2 = 17.255 t_R^{-0.86775}$$

$$c_1 = 1.2692 \dot{\epsilon}_m^{0.74491} / r_1, \quad c_2 = 0.48449 \dot{\epsilon}_m^{0.81155} / r_2$$

$$\dot{\epsilon}_m = F t_R^{-1.1126}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10} \sigma + B_2 (\log_{10} \sigma)^2 & (0.7 \leq \sigma \leq 38.0 \text{ のとき}) \\ \{ B_0 - B_2 (\log_{10} 0.7)^2 \} + (B_1 + 2 B_2 \log_{10} 0.7) \log_{10} \sigma & (0.01 \leq \sigma < 0.7 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし,  $0 \leq \sigma < 0.01$  に対しては,  $r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\epsilon}_m = 0$

〈使用単位〉  $\epsilon^c$  (mm/mm),  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $t$  (hr),  $T$  (°C)

パラメータ	温度 $425 \leq T \leq 650$
$F$	$59119.0 \exp \left\{ -\frac{93475.0}{8.31(T+273.15)} \right\}$
$B_0$	$-17.37762 + 22983.2 / (T + 273.15)$
$B_1$	$-798.521 / (T + 273.15)$
$B_2$	$-2163.93 / (T + 273.15)$
$\alpha_R$	MATERIAL データ $B_{12}$ カードで指定した値。 $B_{12}$ カードの $\alpha_R$ が無記入の場合は 1.0

(3) オーステナイトステンレス鋼 SUS 321 伝熱管

動燃事業団推奨データ<sup>24)</sup>より引用され、弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表 1.3-9 は SUS 321 の 20℃～650℃の温度におけるヤング係数，ポアソン比，線膨張係数を示し，表 1.3-10 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～650℃の温度における降伏応力，加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し，範囲外の温度について外挿を行なう。また，表 1.3-11 は単調応力-ひずみ関係式を示したものである。なお，塑性解析での塑性ポテンシャル，降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また，FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を 2/3 倍したものとしている。

クリープひずみは 425℃～650℃の温度において，使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い，表 1.3-12 の SUS 321 クリープひずみ式より計算する。なお，クリープひずみ式の応力適用範囲は 46.0 kg/mm<sup>2</sup> 以下である。

表 1.3-9 SUS 321 鋼伝熱管のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数

温 度 (°C)	ヤング係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比	線膨張係数 (1/°C)
20	1.98×10 <sup>4</sup>	0.266	15.15×10 <sup>-6</sup>
50	1.96×10 <sup>4</sup>	0.268	15.65×10 <sup>-6</sup>
100	1.94×10 <sup>4</sup>	0.272	16.48×10 <sup>-6</sup>
150	1.91×10 <sup>4</sup>	0.275	17.22×10 <sup>-6</sup>
200	1.88×10 <sup>4</sup>	0.279	17.85×10 <sup>-6</sup>
250	1.84×10 <sup>4</sup>	0.283	18.36×10 <sup>-6</sup>
300	1.80×10 <sup>4</sup>	0.287	18.79×10 <sup>-6</sup>
350	1.76×10 <sup>4</sup>	0.291	19.19×10 <sup>-6</sup>
400	1.72×10 <sup>4</sup>	0.295	19.57×10 <sup>-6</sup>
450	1.67×10 <sup>4</sup>	0.298	19.93×10 <sup>-6</sup>
500	1.62×10 <sup>4</sup>	0.302	20.28×10 <sup>-6</sup>
550	1.57×10 <sup>4</sup>	0.306	20.60×10 <sup>-6</sup>
600	1.52×10 <sup>4</sup>	0.310	20.87×10 <sup>-6</sup>
650	1.47×10 <sup>4</sup>	0.314	21.09×10 <sup>-6</sup>

表 1.3-10 SUS321鋼伝熱管の降伏応力, 加工硬化係数

材 料 特 性	最 大 想 定 ひずみレベル (%)	温 度 (°C)						
		350	400	450	500	550	600	650
降 伏 応 力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	12.39	12.06	11.79	11.55	11.31	11.04	10.72
	.30	13.13	12.77	12.48	12.22	11.97	11.68	11.34
	.40	13.65	13.28	12.98	12.71	12.44	12.14	11.79
	.50	14.07	13.69	13.38	13.09	12.81	12.50	12.14
	.60	14.42	14.03	13.71	13.42	13.13	12.81	12.44
	.70	14.72	14.33	14.00	13.70	13.40	13.08	12.69
	.80	15.00	14.59	14.25	13.95	13.64	13.31	12.92
	.90	15.24	14.83	14.49	14.17	13.86	13.53	13.13
	1.00	15.47	15.05	14.70	14.38	14.07	13.72	13.32
	1.10	15.68	15.26	14.90	14.57	14.25	13.90	13.49
	1.20	15.87	15.45	15.08	14.75	14.43	14.07	13.66
	1.30	16.05	15.62	15.26	14.92	14.59	14.23	13.81
	1.40	16.23	15.79	15.42	15.08	14.74	14.38	13.96
	1.50	16.39	15.95	15.57	15.23	14.89	14.52	14.09
定 常 降 伏 応 力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20			14.32	14.32	14.32	14.32	
	.30			17.26	17.26	17.26	17.26	
	.40			19.77	19.77	19.77	19.77	
	.50			21.93	21.93	21.93	21.93	
	.60			23.90	23.90	23.90	23.90	
	.70			25.71	25.71	25.71	25.71	
	.80			27.31	27.31	27.31	27.31	
	.90			28.76	28.76	28.76	28.76	
	1.00			30.08	30.08	30.08	30.08	
	1.10			31.27	31.27	31.27	31.27	
	1.20			32.41	32.41	32.41	32.41	
	1.30			33.43	33.43	33.43	33.43	
	1.40			34.40	34.40	34.40	34.40	
	1.50			35.34	35.34	35.34	35.34	
加 工 硬 化 係 数 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	3279.4	3193.3	3114.9	3040.7	2966.9	2889.8	2805.4
	.30	2048.9	1994.7	1943.1	1892.8	1842.7	1791.4	1737.7
	.40	1536.1	1495.3	1455.8	1417.1	1378.3	1339.1	1298.5
	.50	1248.9	1215.6	1183.2	1151.2	1119.2	1086.9	1053.9
	.60	1062.8	1034.5	1006.7	979.2	951.8	924.1	895.9
	.70	931.4	906.5	882.1	857.9	833.7	809.3	784.5
	.80	833.0	810.7	788.8	767.1	745.3	723.4	701.3
	.90	756.2	736.0	716.1	696.2	676.4	656.5	636.4
	1.00	694.4	675.9	657.5	639.3	621.0	602.7	584.2
	1.10	643.4	626.3	609.2	592.3	575.4	558.4	541.2
	1.20	600.6	584.6	568.7	552.8	537.0	521.1	505.1
	1.30	564.0	549.0	534.0	519.1	504.2	489.3	474.2
	1.40	532.4	518.1	504.0	489.9	475.9	461.8	447.6
	1.50	504.7	491.2	477.8	464.4	451.1	437.7	424.2

表 1.3-11 SUS 321 鋼伝熱管の単調応力-ひずみ関係式

(1)  $\sigma \leq \sigma_P$  のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)  $\sigma > \sigma_P$  のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{K} \right)^{\frac{1}{m}}$$

<使用単位>

$\varepsilon_e$  (mm/mm),  $\varepsilon_p$  (mm/mm),  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>)

<適用限界>

最大ひずみ  $(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{\max} \leq 0.03$  (mm/mm)

パラメータ \ 温度 (°C)	315 ≤ T ≤ 650	
E (kg/mm <sup>2</sup> )	315 ≤ T < 400 400 ≤ T ≤ 650	E = 2.040 × 10 <sup>4</sup> - 8.000T E = 2.126 × 10 <sup>4</sup> - 10.125T
σ <sub>P</sub> (kg/mm <sup>2</sup> )	σ <sub>Y</sub> - K (0.002) <sup>m</sup>	
σ <sub>Y</sub> (kg/mm <sup>2</sup> )	(24.4905 - 3.80298 × 10 <sup>-2</sup> T + 6.15139 × 10 <sup>-5</sup> T <sup>2</sup> - 4.06897 × 10 <sup>-8</sup> T <sup>3</sup> ) / α <sub>Y</sub>	
K (kg/mm <sup>2</sup> )	59.517 - 2.6872 × 10 <sup>-2</sup> T	
m	0.3	
α <sub>Y</sub>	MATERIAL データ B <sub>11</sub> カードで指定した値。B <sub>11</sub> カードの α <sub>Y</sub> が無記入の場合は 1.0	

表 1.3-12 SUS 321 伝熱管のクリープひずみ式

$$\epsilon^c = c_1 \{ 1 - \exp(-r_1 t) \} + c_2 \{ 1 - \exp(-r_2 t) \} + \dot{\epsilon}_m t$$

ここで,

$$r_1 = 103.37 t_R^{-0.72607}, \quad r_2 = 17.255 t_R^{-0.86775}$$

$$c_1 = 1.2692 \dot{\epsilon}_m^{0.74491} / r_1, \quad c_2 = 0.48449 \dot{\epsilon}_m^{0.81155} / r_2$$

$$\dot{\epsilon}_m = F t_R^{-1.1104}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10} \sigma + B_2 (\log_{10} \sigma)^2 & (2.2 \leq \sigma \leq 46.0 \text{ のとき}) \\ \{ B_0 - B_2 (\log_{10} 2.2)^2 \} + (B_1 + 2 B_2 \log_{10} 2.2) \log_{10} \sigma & (0.1 \leq \sigma < 2.2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし,  $0 \leq \sigma < 0.01$  に対しては,  $r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\epsilon}_m = 0$

<使用単位>  $\epsilon^c$  (mm/mm),  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $t$  (hr),  $T$  (°C)

パラメータ	温度 425 ≤ T ≤ 650
F	$0.044758 \exp \left\{ -\frac{4439.8}{8.31 (T + 273.15)} \right\}$
B <sub>0</sub>	$-16.46258 + 20089.0 / (T + 273.15)$
B <sub>1</sub>	$1953.03 / (T + 273.15)$
B <sub>2</sub>	$-2954.61 / (T + 273.15)$
α <sub>R</sub>	MATERIAL データ B <sub>12</sub> カードで指定した値。B <sub>12</sub> カードの α <sub>R</sub> が無記入の場合は 1.0



(4)  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 板

動燃事業団推奨データ<sup>24)</sup>より引用され、弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表 1.3-13 は  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 板の 20℃~600℃ の温度におけるヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数を示し, 表 1.3-14 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃~550℃ の温度における降伏応力, 加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し, 範囲外の温度について外挿を行なう。また, 表 1.3-15 は単調応力-ひずみ関係式を示したものである。なお, 塑性解析での塑性ポテンシャル, 降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また, FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を  $\frac{2}{3}$  倍したもとのとしている。

クリープひずみは 375℃~550℃ の温度において, 使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い, 表 1.3-16 の  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 板のクリープひずみ式より計算する。なお, クリープひずみ式の応力適用範囲は  $35.0\text{ kg/mm}^2$  以下である。

表 1.3-13  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 板のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数

温 度 (°C)	ヤング係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比	線膨張係数 (1/°C)
20	$2.10 \times 10^4$	0.26	$11.63 \times 10^{-6}$
50	$2.09 \times 10^4$	0.28	$12.05 \times 10^{-6}$
100	$2.07 \times 10^4$	0.28	$12.68 \times 10^{-6}$
150	$2.04 \times 10^4$	0.29	$13.24 \times 10^{-6}$
200	$2.01 \times 10^4$	0.30	$13.73 \times 10^{-6}$
250	$1.98 \times 10^4$	0.30	$14.14 \times 10^{-6}$
300	$1.94 \times 10^4$	0.30	$14.49 \times 10^{-6}$
350	$1.89 \times 10^4$	0.30	$14.75 \times 10^{-6}$
400	$1.84 \times 10^4$	0.30	$15.00 \times 10^{-6}$
450	$1.77 \times 10^4$	0.30	$15.20 \times 10^{-6}$
500	$1.69 \times 10^4$	0.30	$15.36 \times 10^{-6}$
550	$1.58 \times 10^4$	0.29	$15.49 \times 10^{-6}$
600	$1.39 \times 10^4$	0.28	—

表 1.3-14 2¼Cr-1Mo鋼(NT材)板の降伏応力, 加工硬化係数

材料特性	最大想定 ひずみレベル (%)	温 度 (°C)				
		350	400	450	500	550
降 伏 応 力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	28.22	26.64	24.66	22.07	18.81
	.30	30.51	29.47	28.18	26.49	24.32
	.40	31.62	30.68	29.50	27.89	25.75
	.50	32.38	31.48	30.33	28.73	26.55
	.60	32.97	32.09	30.94	29.33	27.12
	.70	33.46	32.58	31.43	29.80	27.56
	.80	33.88	33.00	31.85	30.20	27.92
	.90	34.23	33.37	32.21	30.54	28.23
	1.00	34.57	33.69	32.52	30.84	28.50
	1.10	34.87	33.99	32.81	31.11	28.74
	1.20	35.14	34.26	33.07	31.35	28.95
	1.30	35.40	34.50	33.30	31.57	29.15
	1.40	35.63	34.73	33.52	31.77	29.33
	1.50	35.85	34.95	33.73	31.96	29.58
定常降伏応力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20			15.82	14.64	
	.30			18.19	16.68	
	.40			20.16	18.38	
	.50			21.89	19.85	
	.60			23.37	21.11	
	.70			24.78	22.31	
	.80			26.02	23.35	
	.90			27.07	24.24	
	1.00			28.01	25.02	
	1.10			28.76	25.63	
	1.20			29.52	26.26	
	1.30			30.06	26.69	
	1.40			30.56	27.09	
	1.50			31.03	27.47	
加工硬化係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	17787.9	24447.9	32767.5	42419.1	49881.4
	.30	4683.4	5040.4	5327.6	5423.2	5172.1
	.40	2761.9	2814.9	2814.5	2712.8	2473.0
	.50	1998.4	1986.4	1936.3	1821.7	1628.4
	.60	1585.0	1551.6	1489.5	1381.3	1220.2
	.70	1323.7	1282.3	1217.9	1118.3	979.8
	.80	1142.6	1098.2	1034.8	943.1	821.1
	.90	1009.1	963.9	902.5	817.7	708.3
	1.00	906.5	861.3	802.3	723.3	624.0
	1.10	824.8	780.2	723.5	649.6	558.4
	1.20	758.0	714.4	659.9	590.4	505.9
	1.30	702.4	659.8	607.5	541.7	462.9
	1.40	655.3	613.7	563.3	501.0	427.0
	1.50	614.8	574.2	525.7	466.3	396.5

表 1.3-15  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 板の単調応力-ひずみ関係式

<p>(1) <math>\sigma \leq \sigma_P</math> のとき</p> $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ $\varepsilon_p = 0$ <p>(2) <math>\sigma &gt; \sigma_P</math> のとき</p> $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ $\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{K} \right)^{\frac{1}{m}}$ <p>&lt;使用単位&gt;</p> $\varepsilon_e$ (mm/mm), $\varepsilon_p$ (mm/mm), $\sigma$ (kg/mm <sup>2</sup> ) <p>&lt;適用限界&gt;</p> 最大ひずみ $(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{\max} \leq 0.03$ (mm/mm)	
パラメータ 温度 (°C)	$300 \leq T \leq 550$
$E$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$300 \leq T \leq 375$ $E = 2.267 \times 10^4 - 10.8000 T$ $375 < T < 450$ $E = 2.010 \times 10^4 - 4.000 T$ $450 \leq T \leq 550$ $E = 0.2164011 \times 10^5 - 0.7060216 \times 10^1 T$ $+ 0.3684193 \times 10^{-2} T^2 - 0.1014639 \times 10^{-4} T^3$
$\sigma_P$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$\sigma_Y - K (0.002)^m$
$\sigma_Y$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$(42.9566 - 4.59888 \times 10^{-2} T + 1.47316 \times 10^{-4} T^2$ $- 1.93388 \times 10^{-7} T^3) / \alpha_Y$
$K$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$83.0 - 8.75 \times 10^{-2} T$
$m$	$0.417 - 5.125 \times 10^{-4} T$
$\alpha_Y$	MATERIAL データ B <sub>11</sub> カードで指定した値。 B <sub>11</sub> カードの $\alpha_Y$ が無記入の場合は 1.0

表 1.3-16  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 板のクリープひずみ式

$$\epsilon^c = c_1 \{1 - \exp(-r_1 t)\} + c_2 \{1 - \exp(-r_2 t)\} + \dot{\epsilon}_m t$$

ここで,

$$r_1 = 45.2986 t_R^{-0.56858}, \quad r_2 = 14.3245 t_R^{-0.82278}$$

$$c_1 = 0.30546 \dot{\epsilon}_m^{0.59235} / r_1, \quad c_2 = 0.26505 \dot{\epsilon}_m^{0.81657} / r_2$$

$$\dot{\epsilon}_m = F t_R^{-1.09319}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10} \sigma + B_2 (\log_{10} \sigma)^2 & (1.4 \leq \sigma \leq 35.0 \text{ のとき}) \\ \{B_0 - B_2 (\log_{10} 1.4)^2\} + (B_1 + 2 B_2 \log_{10} 1.4) \log_{10} \sigma & (0.01 \leq \sigma < 1.4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし,  $0 \leq \sigma < 0.01$  に対しては,  $r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\epsilon}_m = 0$

<使用単位>  $\epsilon^c$  (mm/mm),  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $t$  (hr),  $T$  (°C)

パラメータ	温度 $375 \leq T \leq 550$
$F$	$13.5699 \exp \left\{ -\frac{33435.0}{8.31(T+273.15)} \right\}$
$B_0$	$-15.956105 + 18600.626/(T+273.15)$
$B_1$	$659.76676 / (T+273.15)$
$B_2$	$-2655.7865 / (T+273.15)$
$\alpha_R$	MATERIAL データ $B_{12}$ カードで指定した値。 $B_{12}$ カードの $\alpha_R$ が無記入の場合は 1.0

(5)  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 伝熱管

動燃事業団推奨データ<sup>24)</sup>より引用され、弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表 1.3-17 は  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 伝熱管の 20℃~600℃ の温度におけるヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数を示し, 表 1.3-18 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃~550℃ の温度における降伏応力, 加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し, 範囲外の温度について外挿を行なう。また, 表 1.3-19 は単調応力-ひずみ関係式を示したものである。なお, 塑性解析での塑性ポテンシャル, 降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を 2/3 倍したものとしている。

クリープひずみは 375℃~550℃ の温度において, 使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い, 表 1.3-20 の  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 伝熱管のクリープひずみ式より計算する。なお, クリープひずみ式の応力適用範囲は 35.0 kg/mm<sup>2</sup> 以下である。

表 1.3-17.  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 伝熱管のヤング係数, ポアソン比, 線膨張係数

温 度 (°C)	ヤング係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比	線膨張係数 (1/°C)
20	$2.10 \times 10^4$	0.26	$11.63 \times 10^{-6}$
50	$2.09 \times 10^4$	0.28	$12.05 \times 10^{-6}$
100	$2.07 \times 10^4$	0.28	$12.68 \times 10^{-6}$
150	$2.04 \times 10^4$	0.29	$13.24 \times 10^{-6}$
200	$2.01 \times 10^4$	0.30	$13.73 \times 10^{-6}$
250	$1.98 \times 10^4$	0.30	$14.14 \times 10^{-6}$
300	$1.94 \times 10^4$	0.30	$14.49 \times 10^{-6}$
350	$1.89 \times 10^4$	0.30	$14.75 \times 10^{-6}$
400	$1.84 \times 10^4$	0.30	$15.00 \times 10^{-6}$
450	$1.77 \times 10^4$	0.30	$15.20 \times 10^{-6}$
500	$1.69 \times 10^4$	0.30	$15.36 \times 10^{-6}$
550	$1.58 \times 10^4$	0.29	$15.49 \times 10^{-6}$
600	$1.39 \times 10^4$	0.28	—

表 1.3-18 2½Cr-1Mo鋼(NT材)伝熱管の降伏応力, 加工硬化係数

材 料 特 性	最大想定 ひずみレベル (%)	温 度 (°C)				
		350	400	450	500	550
降 伏 応 力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	28.22	26.64	24.66	22.07	18.81
	.30	30.51	29.47	28.18	26.49	24.32
	.40	31.62	30.68	29.50	27.89	25.75
	.50	32.38	31.48	30.33	28.73	26.55
	.60	32.97	32.09	30.94	29.33	27.12
	.70	33.46	32.58	31.43	29.80	27.56
	.80	33.88	33.00	31.85	30.20	27.92
	.90	34.23	33.37	32.21	30.54	28.23
	1.00	34.57	33.69	32.52	30.84	28.50
	1.10	34.87	33.99	32.81	31.11	28.74
	1.20	35.14	34.26	33.07	31.35	28.95
	1.30	35.40	34.50	33.30	31.57	29.15
	1.40	35.63	34.73	33.52	31.77	29.33
	1.50	35.85	34.95	33.73	31.96	29.58
定常降伏応力 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20			15.82	14.64	
	.30			18.19	16.68	
	.40			20.16	18.38	
	.50			21.89	19.85	
	.60			23.37	21.11	
	.70			24.78	22.31	
	.80			26.02	23.35	
	.90			27.07	24.24	
	1.00			28.01	25.02	
	1.10			28.76	25.63	
	1.20			29.52	26.26	
	1.30			30.06	26.69	
	1.40			30.56	27.09	
	1.50			31.03	27.47	
加工硬化係数 (kg/mm <sup>2</sup> )	.20	17787.9	24447.9	32767.5	42419.1	49881.4
	.30	4683.4	5040.4	5327.6	5423.2	5172.1
	.40	2761.9	2814.9	2814.5	2712.8	2473.0
	.50	1998.4	1986.4	1936.3	1821.7	1628.4
	.60	1585.0	1551.6	1489.5	1381.3	1220.2
	.70	1323.7	1282.3	1217.9	1118.3	979.8
	.80	1142.6	1098.2	1034.8	943.1	821.1
	.90	1009.1	963.9	902.5	817.7	708.3
	1.00	906.5	861.3	802.3	723.3	624.0
	1.10	824.8	780.2	723.5	649.6	558.4
	1.20	758.0	714.4	659.9	590.4	505.9
	1.30	702.4	659.8	607.5	541.7	462.9
	1.40	655.3	613.7	563.3	501.0	427.0
	1.50	614.8	574.2	525.7	466.3	396.5

表 1.3-19  $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$  鋼 (NT材) 伝熱管の単調応力-ひずみ関係式

(1)  $\sigma \leq \sigma_P$  のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)  $\sigma > \sigma_P$  のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma - \sigma_P}{K} \right)^{\frac{1}{m}}$$

<使用単位>

$$\varepsilon_e \text{ (mm/mm)}, \quad \varepsilon_p \text{ (mm/mm)}, \quad \sigma \text{ (kg/mm}^2\text{)}$$

<適用限界>

$$\text{最大ひずみ } (\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{\max} \leq 0.03 \text{ (mm/mm)}$$

パラメータ	温度 (°C)	$300 \leq T \leq 550$
$E$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$300 \leq T \leq 375$ $375 < T < 450$ $450 \leq T \leq 550$	$E = 2.267 \times 10^4 - 10.8000 T$ $E = 2.010 \times 10^4 - 4.000 T$ $E = 0.2164011 \times 10^5 - 0.7060216 \times 10^1 T$ $+ 0.3684193 \times 10^{-2} T^2 - 0.1014639 \times 10^{-4} T^3$
$\sigma_P$ (kg/mm <sup>2</sup> )		$\sigma_Y - K (0.002)^m$
$\sigma_Y$ (kg/mm <sup>2</sup> )		$(35.1902 - 3.29051 \times 10^{-2} T + 6.01783 \times 10^{-5} T^2$ $- 6.32459 \times 10^{-8} T^3) / \alpha_Y$
$K$ (kg/mm <sup>2</sup> )		$83.0 - 8.75 \times 10^{-2} T$
$m$		$0.417 - 5.125 \times 10^{-4} T$
$\alpha_Y$		MATERIAL データ B <sub>11</sub> カードで指定した値。B <sub>11</sub> カードの $\alpha_Y$ が無記入の場合は 1.0

表 1.3-20  $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) 伝熱管のクリープひずみ式

$$\epsilon^c = c_1 \{1 - \exp(-r_1 t)\} + c_2 \{1 - \exp(-r_2 t)\} + \dot{\epsilon}_m t$$

ここで,

$$r_1 = 45.2986 t_R^{-0.56858}, \quad r_2 = 14.3245 t_R^{-0.82278}$$

$$c_1 = 0.30546 \dot{\epsilon}_m^{0.59235} / r_1, \quad c_2 = 0.26505 \dot{\epsilon}_m^{0.81657} / r_2$$

$$\dot{\epsilon}_m = F t_R^{-1.09319}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10} \sigma + B_2 (\log_{10} \sigma)^2 & (1.4 \leq \sigma \leq 35.0 \text{ のとき}) \\ \{B_0 - B_2 (\log_{10} 1.4)^2\} + (B_1 + 2 B_2 \log_{10} 1.4) \log_{10} \sigma & (0.01 \leq \sigma < 1.4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし,  $0 \leq \sigma < 0.01$  に対しては,  $r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\epsilon}_m = 0$

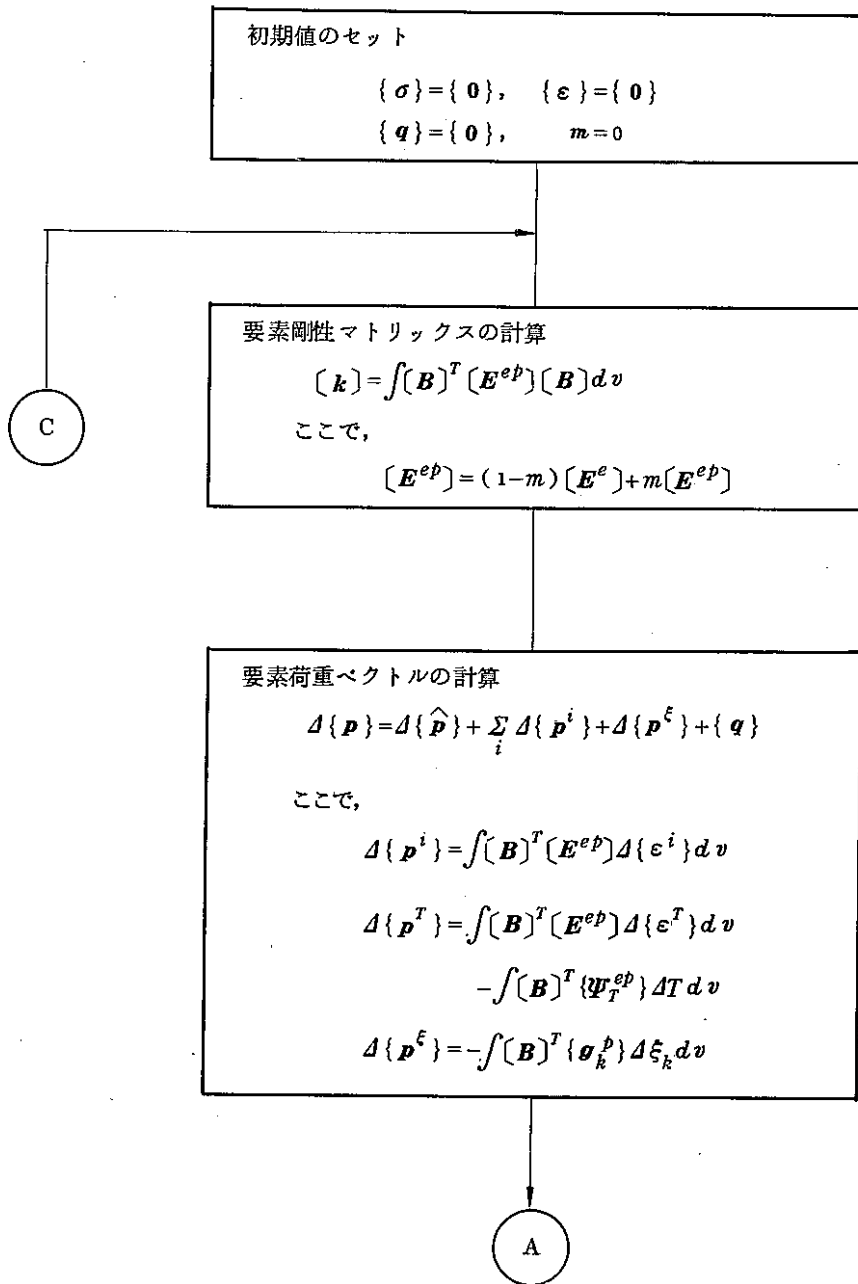
〈使用単位〉  $\epsilon^c$  (mm/mm),  $\sigma$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $t$  (hr),  $T$  (°C)

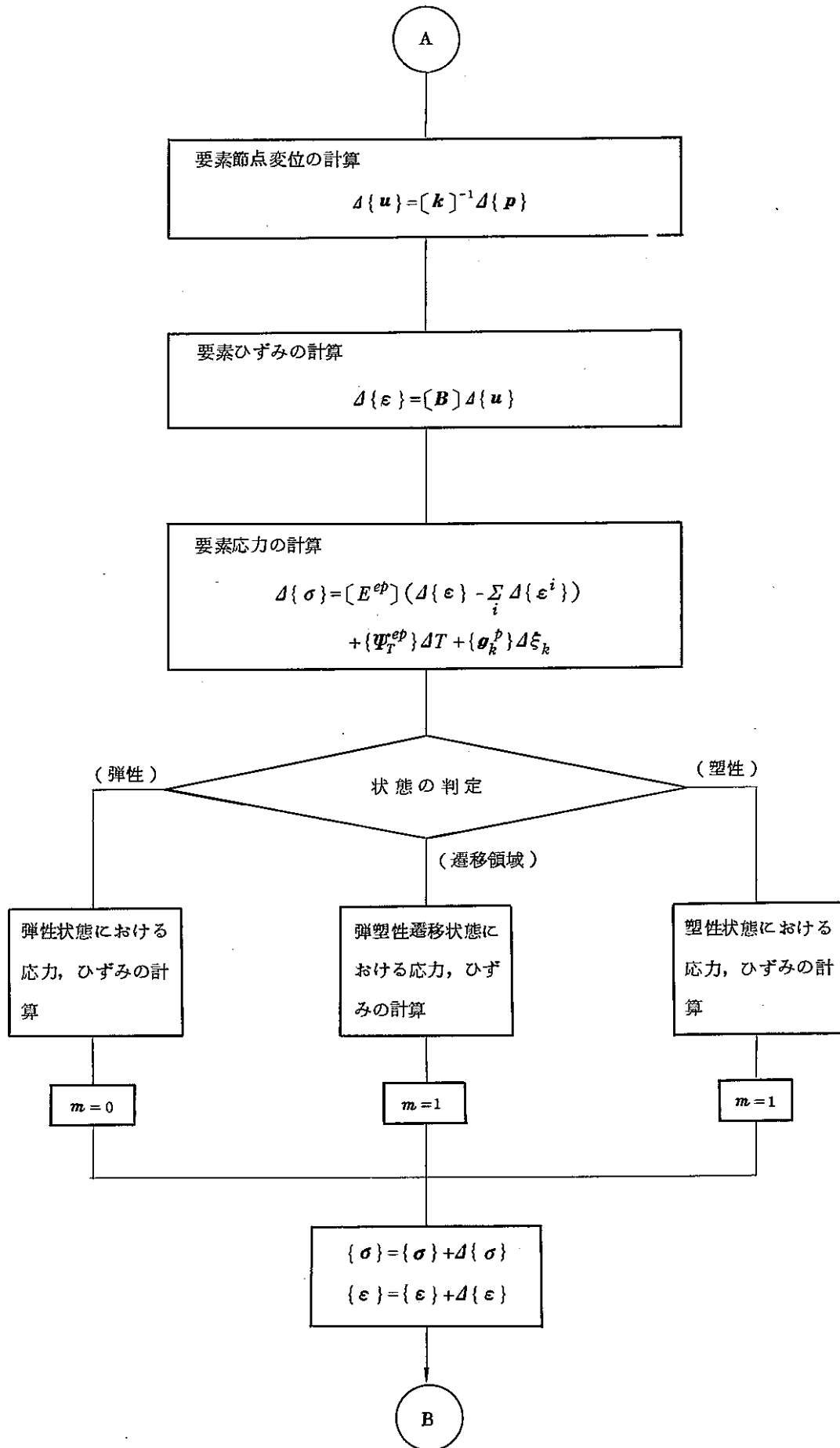
パラメータ	温度 375 ≤ T ≤ 550
F	$13.5699 \exp \left\{ -\frac{33435.0}{8.31 (T + 273.15)} \right\}$
B <sub>0</sub>	$-15.956105 + 18600.626 / (T + 273.15)$
B <sub>1</sub>	$659.76676 / (T + 273.15)$
B <sub>2</sub>	$-2655.7865 / (T + 273.15)$
α <sub>R</sub>	MATERIAL データ B <sub>12</sub> カードで指定した値。B <sub>12</sub> カードの α <sub>R</sub> が無記入の場合は 1.0

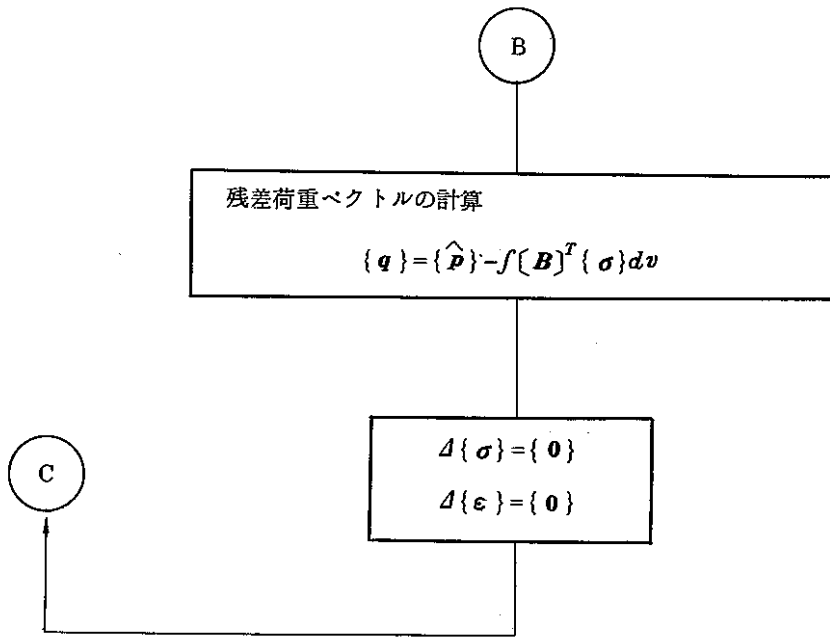


### 1.3.6 非弾性解析のアルゴリズム

(1) 解析の全体の流れ







(2) 遷移領域の取扱い

弾塑性解析において FINAS が行なっている 遷移領域の取扱い, すなわち, 降伏時, 除荷時の取扱いについて説明する。

a) 降伏時の取扱い

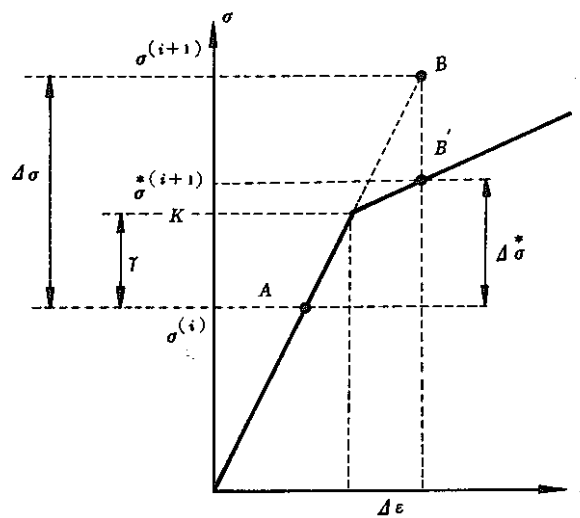


図1.3-14 降伏時

ステップ  $i$  ( $A$ ) の応力  $\sigma^{(i)}$  が応力増分  $\Delta\sigma$  によって、 $\sigma^{(i+1)}$  ( $=\sigma^{(i)}+\Delta\sigma$ ) になり、応力が降伏応力  $\kappa$  を超えた場合には、弾性部分の比率  $\gamma$  を計算する。そして  $B$  から  $B'$  に強制的に移し、 $B-B'$  に相当する応力を残差荷重としてとりあつかう。すなわち、 $\gamma$  により全ひずみの増分  $\Delta\varepsilon$  を弾性ひずみ増分  $\Delta\tilde{\varepsilon}^e$  と弾塑性ひずみ増分  $\Delta\tilde{\varepsilon}^{ep}$  に分け、次の式で計算する。

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^e = \gamma \Delta\varepsilon \quad (1.3-274)$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{ep} = (1-\gamma)\Delta\varepsilon \quad (1.3-275)$$

式 (1.3-274), (1.3-275) から応力増分を修正する。

$$\Delta\sigma^* = [E^e(T)]\Delta\tilde{\varepsilon}^e + [E^{ep}(T, \sigma, \varepsilon^p, \dots)]\Delta\tilde{\varepsilon}^{ep} \quad (1.3-276)$$

次に、式 (1.3-276) の応力増分から弾性ひずみ増分  $\Delta\tilde{\varepsilon}^{e*}$ 、塑性ひずみ増分  $\Delta\tilde{\varepsilon}^{p*}$  を再計算する。

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{e*} = [E^e(T)]^{-1} \Delta\sigma^* \quad (1.3-277)$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{p*} = \Delta\varepsilon - \Delta\tilde{\varepsilon}^{e*} \quad (1.3-278)$$

したがって、ステップ  $i+1$  の応力  $\sigma^{(i+1)}$  は  $\sigma^{*(i+1)}$  に強制的に修正される。

$$\Delta\sigma^{(i+1)} = \sigma^{(i)} + \Delta\sigma^* \quad (1.3-279)$$

## b) 除荷時の取扱い

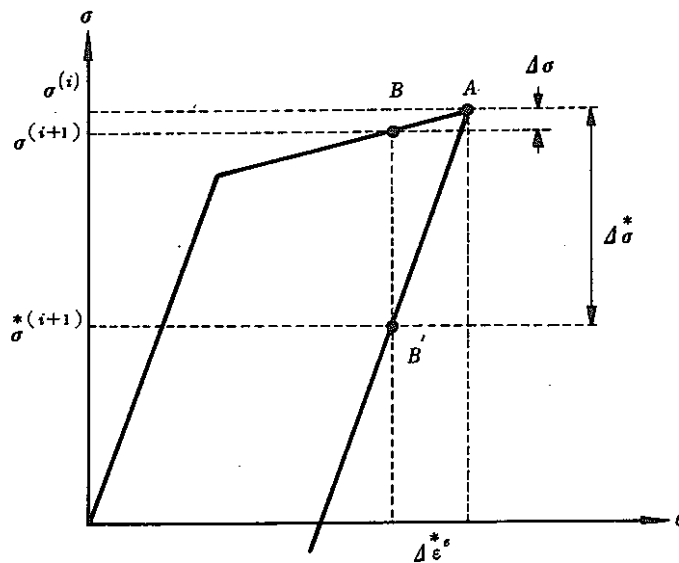


図 1.3-15 除荷時

ステップ  $i$  ( $A$ ) において除荷が起きて応力が  $\Delta\sigma$  下がったときに、応力増分を修正して強制的に  $B$  から  $B'$  に移し、 $B-B'$  を残差荷重修正で取り扱う。すなわち、ステップ  $i$  ( $A$ ) からステップ  $i+1$  ( $B$ ) に移った時に計算された弾性ひずみ増分  $\Delta\varepsilon^e$ 、塑性ひずみ増分  $\Delta\varepsilon^p$  から次式のような弾性ひずみ増分を計算する。

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^e = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \quad (1.3-280)$$

次に、式 (1.3-280) を用いて応力増分を修正する。

$$\Delta\sigma^* = [E^e(T)]\Delta\tilde{\varepsilon}^e \quad (1.3-281)$$

そして弾性ひずみ増分、塑性ひずみ増分を再計算する。

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^e = \Delta\varepsilon^e \quad (1.3-282)$$

$$\Delta\varepsilon^p = 0 \quad (1.3-283)$$

したがって、ステップ  $i+1$  に応力  $\sigma^{(i+1)}$  は  $\sigma^{(i+1)}$  に強制的に修正される。

$$\sigma^{(i+1)} = \sigma^{(i)} + \Delta\sigma^* \quad (1.3-284)$$

### (3) 比率 $\gamma$ の計算

ステップ  $i$  の応力状態を  $\sigma_{ij}^{(i)}$  として応力増分  $\Delta\sigma_{ij}^{(i)}$  により降伏応力  $\kappa$  を超えるときに、 $\sigma_{ij}^{(i)} + \gamma\Delta\sigma_{ij}$  ステージでの相当応力が  $\kappa$  であるとする、次式が成り立つ。

$$\frac{2}{3}\kappa^2 = (S_{ij}^{(i)} + \gamma\Delta S_{ij})(S_{ij}^{(i)} + \gamma\Delta S_{ij}) \quad (1.3-285)$$

ここで、 $S_{ij}^{(i)}$  はステップ  $i$  での偏差応力で  $\Delta S_{ij}$  はその増分である。

$$S_{ij}^{(i)} = \sigma_{ij}^{(i)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{mm}^{(i)} \quad (1.3-286)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  はクロネッカのデルタである。

式 (1.3-286) を式 (1.3-285) に代入して整理すると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\gamma^2\Delta S_{ij}\Delta S_{ij} + 2\gamma S_{ij}^{(i)}\Delta S_{ij} \\ &+ \Delta S_{ij}^{(i)}S_{ij}^{(i)} - \frac{2}{3}\kappa^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.3-287)$$

この式 (1.3-287) から  $\gamma$  を計算する。なお、ここでの式の表示は総和規約を用いている。

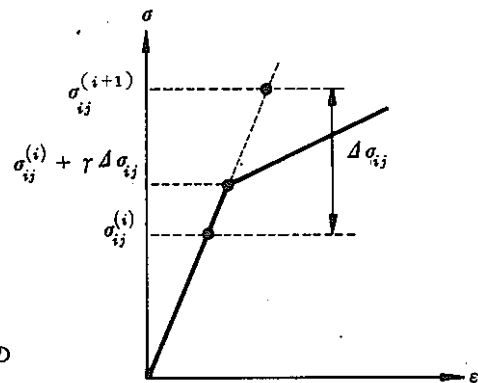


図 1.3-16 比率  $\gamma$  の計算

(4) 遷移領域の処理の改良

平面応力場の単軸引張り弾塑性解析を行なった場合に(2)で説明されている遷移領域の処理を行なうと、応力およびひずみに無視できない程度の数値誤差が生じる。すなわち、ポアソン比  $\nu=0$  と仮定した単軸問題では、式(1.3-274)あるいは式(1.3-275)の  $\Delta \epsilon$  は単軸状態にあり、式(1.3-276)の右辺第1項目は単軸状態になる。ところが式(1.3-276)の右辺第2項目は  $[E^{ep}]$  より多軸状態になり、遷移領域では無視できない応力、ひずみが生じる。

ここでは、以上のような点を改善するための遷移領域の処理の改良について説明する。式(1.3-270)の代りに次式を用いて  $\Delta \tilde{\epsilon}^{ep}$  を計算する。

$$\Delta \tilde{\epsilon}^{ep} = \beta(1-\gamma) \Delta \hat{\epsilon} \quad (1.3-288)$$

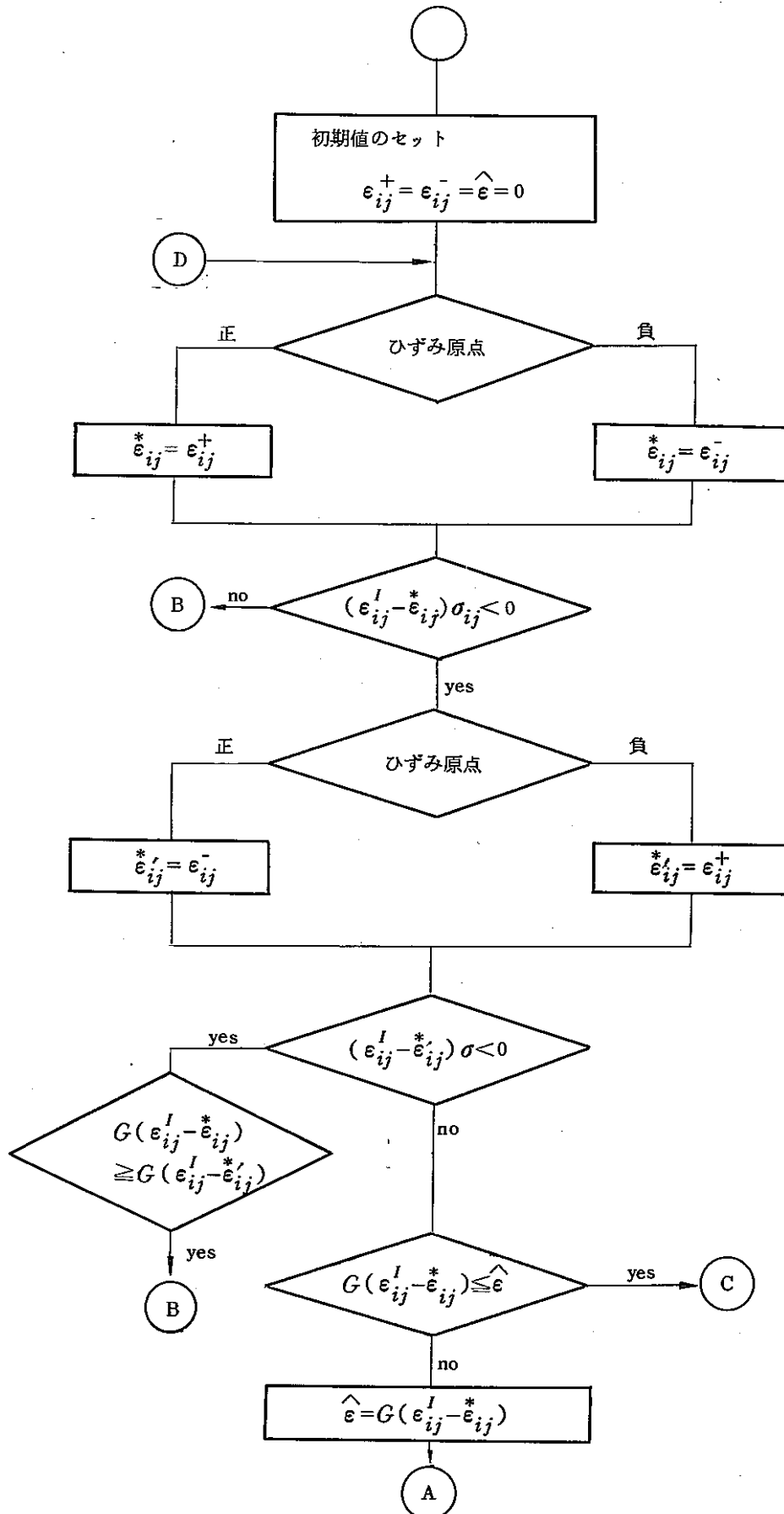
ここで、 $\Delta \hat{\epsilon}$  および  $\beta$  は次式などで与えられる。

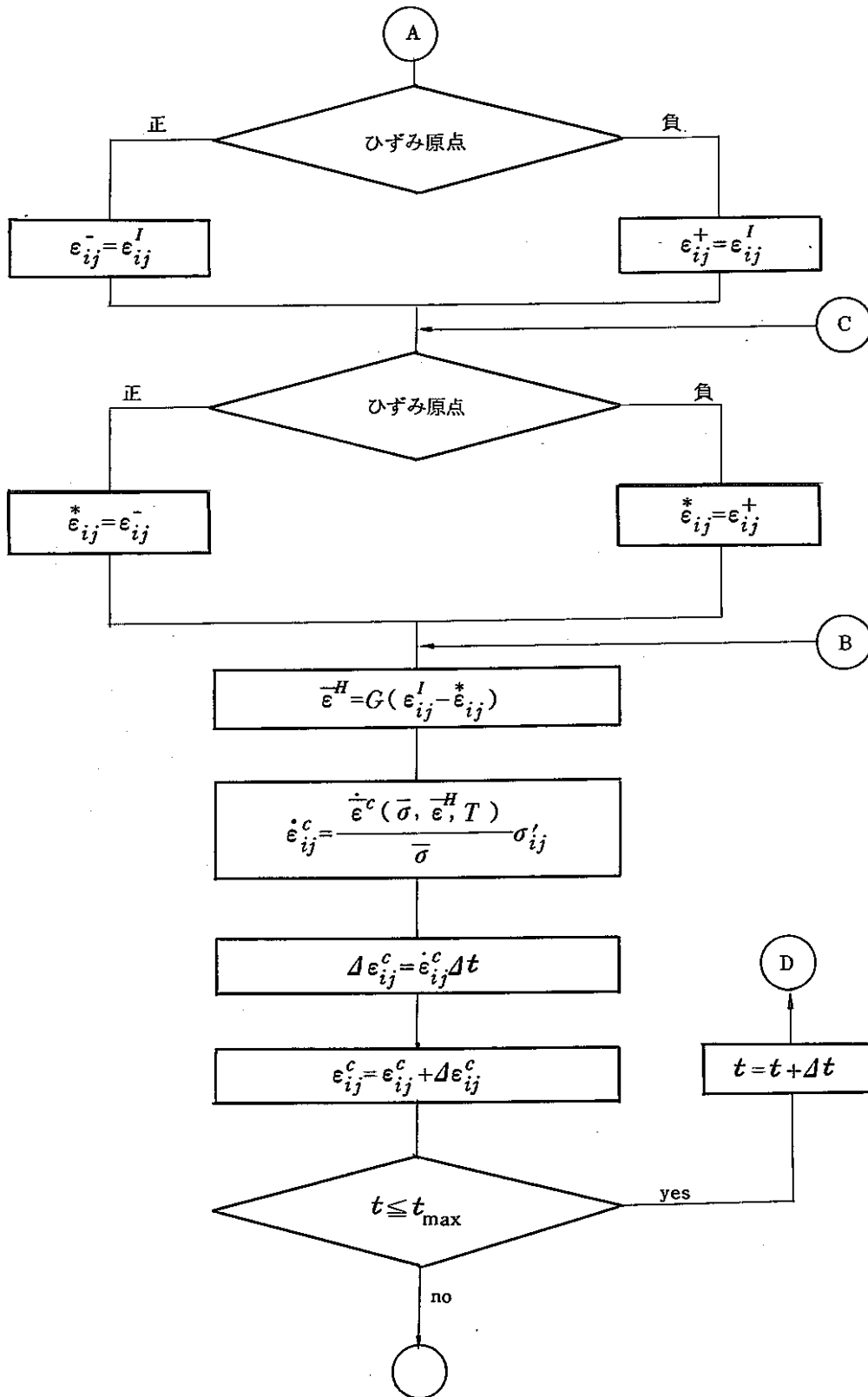
$$\Delta \hat{\epsilon} = [E^{ep}(T, \sigma, \epsilon^p, \dots)]^{-1} \Delta \sigma \quad (1.3-289)$$

$$\beta = EQ \Delta \epsilon / EQ \Delta \hat{\epsilon} \quad (1.3-290)$$

式(1.3-290)での  $EQ$  は Mises 型の相当ひずみを求めるオペレータを表わす。ただし、相当ひずみは全ひずみ増分について計算するものとする。式(1.3-288)より得られた弾塑性ひずみ増分  $\Delta \tilde{\epsilon}^{ep}$  を用いて、従来通りの方法により応力増分  $\Delta \sigma^*$ 、弾性ひずみ増分  $\Delta \epsilon^{*e}$ 、塑性ひずみ増分  $\Delta \epsilon^p$  を求める。この改良された方法では単軸引張りにおいて、 $\Delta \hat{\epsilon}$  は多軸成分をもつが、 $\Delta \sigma^*$  は単軸成分しかもたない。

(5) 応力反転に対する ORNL の補助法則の流れ

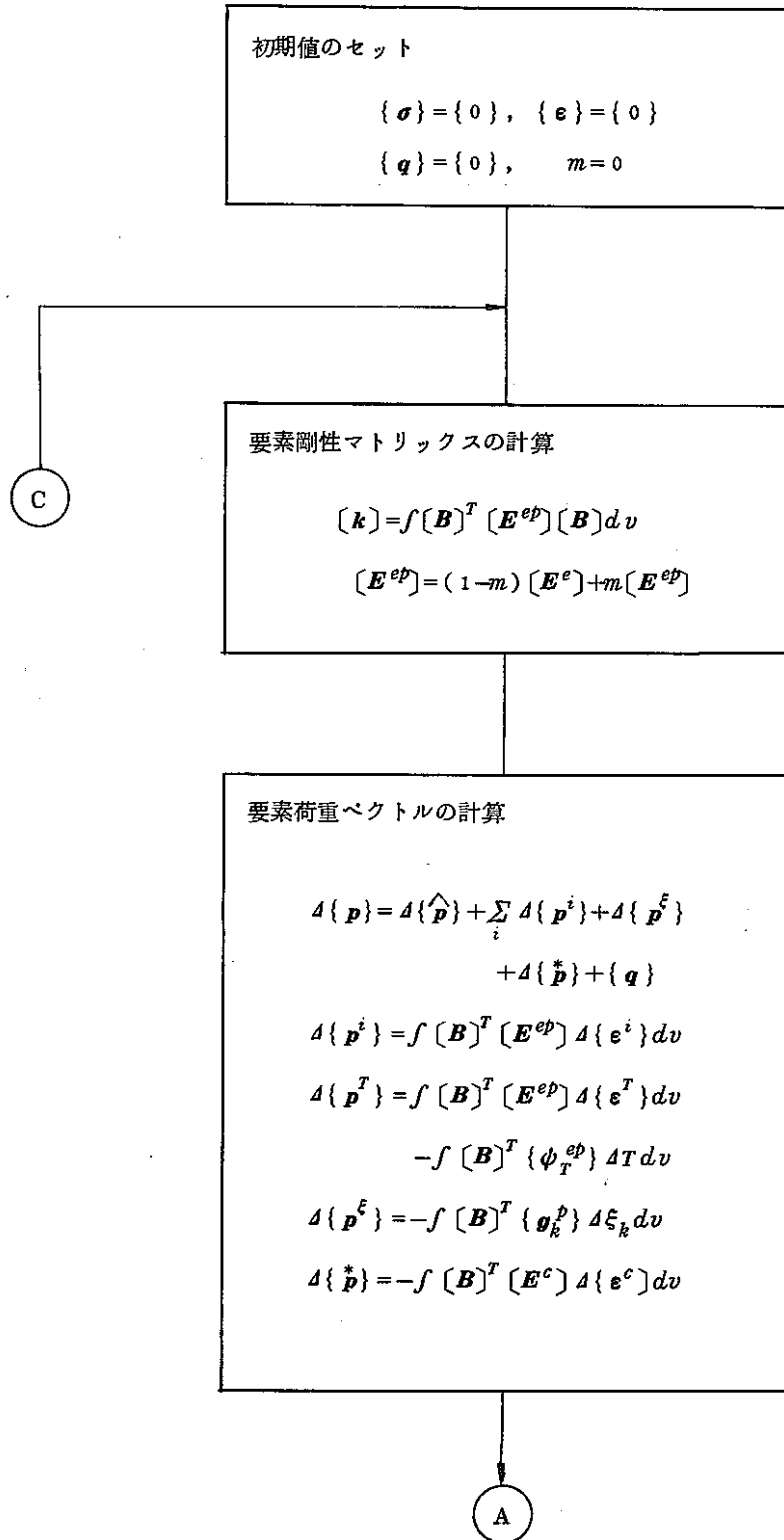






(6) 塑性とクリープの連成のアルゴリズム

a) 全体的な流れ



A

要素節点変位の計算  

$$\Delta\{u\} = [k]^{-1} \Delta\{p\}$$

要素ひずみの計算  

$$\Delta\{e\} = [B] \Delta\{u\}$$

要素応力の計算  

$$\Delta\{\sigma\} = [E^{ep}] (\Delta\{e\} - \sum_i \Delta\{e^i\})$$

$$+ \{\phi_T^{ep}\} \Delta T + \{\sigma_k^p\} \Delta \xi_k + [E^c] \Delta\{e^c\}$$

(弾性)

状態の判定

(塑性)

(遷移領域)

弾性状態における応力, ひずみの計算

弾塑性遷移状態における応力, ひずみの計算

塑性状態における応力, ひずみの計算

$m=0$

$m=1$

$m=1$

$$\{\sigma\} = \{\sigma\} + \Delta\{\sigma\}$$

$$\{e\} = \{e\} + \Delta\{e\}$$

残差荷重ベクトルの計算  

$$\{q\} = \{\hat{p}\} - \int [B]^T \{\sigma\} dv$$

C

b) 遷移領域の取り扱い

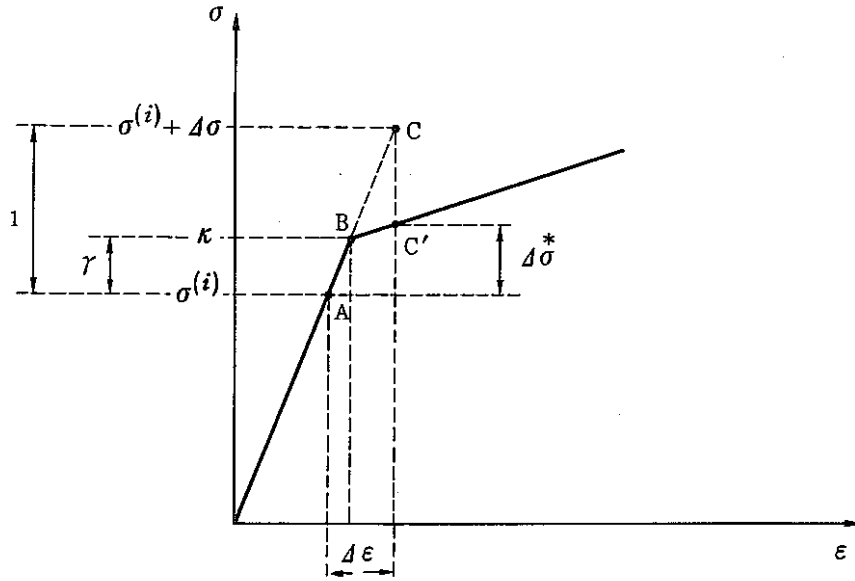


図 1.3-17 遷移領域の処理

塑性とクリープの連成モデルにおいては、弾性状態である場合でもクリープひずみによる降伏曲面の移動を考慮しなければならないし、ステップの応力  $\{\sigma\}^{(i)}$  が応力増分  $\Delta\{\sigma\}$  によって降伏曲面の大きさ  $\kappa$  を超えるときには遷移領域に対して次のような取り扱いをする。

はじめに次式を満足するような比率  $\gamma$  を用意する。

$$\overline{\sigma}(\{\sigma\}^{(i)} + \gamma \Delta\{\sigma\}, \{\mathbf{a}\} + \gamma \Delta\{\mathbf{a}\}) = \kappa \quad (1.3-291)$$

ここで、 $\overline{\sigma}$  は降伏関数である。また、オリジンシフト応力増分  $\Delta\{\mathbf{a}\}$  は次式で与えられる。

$$\Delta\{\mathbf{a}\} = H \Delta\{\mathbf{e}^c\} \quad (1.3-292)$$

ただし、 $H$  はクリープ変形に応じて降伏曲面を移動させることにより、塑性状態におけるクリープの連成作用を近似的に考慮する材料特性のパラメータである。これは相当オリジンシフト応力  $\overline{\sigma}$  の値により次のように与えられる。

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \{\mathbf{a}\}^T \{\mathbf{a}\}} \leq A \kappa \quad \text{のとき,} \quad H = C \quad (1.3-293)$$

$$\overline{\sigma} > A \kappa \quad \text{のとき,} \quad H = 0$$

ここで、 $C$  は移動硬化係数、 $A$  は温度、履歴、材料に依存するものであり、入力データとして定義されるものである。

式 (1.3-291) を解いて  $\gamma$  を求め、図 1.3-17 の AB 部分における弾性ひずみ増分  $\Delta\{\mathbf{e}^{*e}\}$  を次式で仮定する。

$$\Delta\{\mathbf{e}^{*e}\} = [E^e]^{-1} \gamma \Delta\{\sigma\} \quad (1.3-294)$$

ここで、 $[E^e]$  は材料の弾性係数マトリックスである。

次に図1.3-17のBC部分における弾塑性ひずみ増分  $\Delta\{\epsilon^{ep}\}$  を次式で仮定する。ただし、 $\Delta\{\epsilon\}$  は全ひずみ増分である。

$$\Delta\{\epsilon^{ep}\} = \Delta\{\epsilon\} - \Delta\{\epsilon^e\} - \Delta\{\epsilon^c\} \quad (1.3-295)$$

したがって、式(1.3-291)、式(1.3-292)より応力増分  $\Delta\{\sigma^*\}$  が次のように計算される。図1.3-17において応力がCよりC'へ移ることになる。

$$\Delta\{\sigma^*\} = [E^e] \Delta\{\epsilon^e\} + [E^{ep}] \Delta\{\epsilon^{ep}\} + [E^c] \gamma \Delta\{\epsilon^c\} \quad (1.3-296)$$

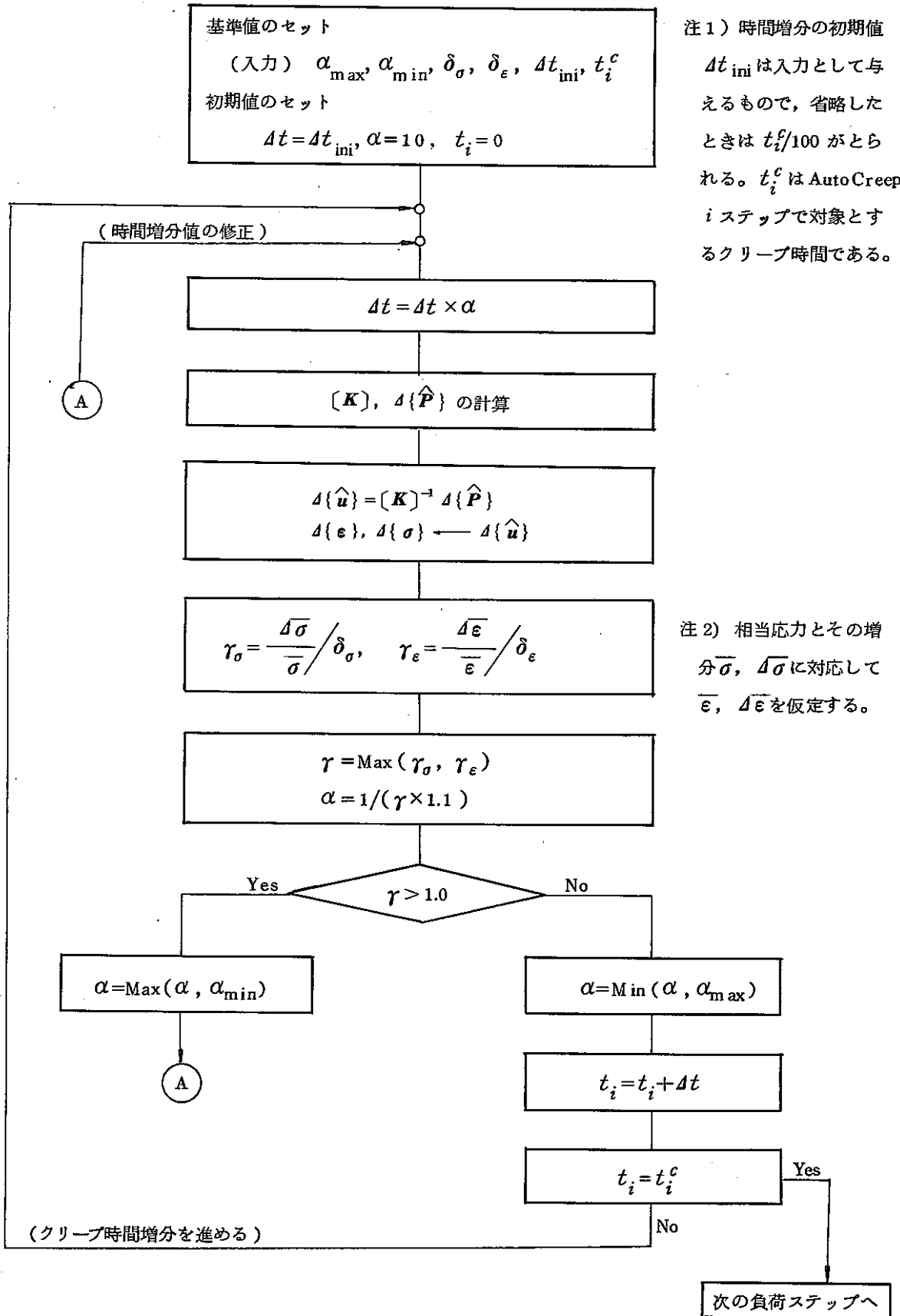
ここで、 $[E^{ep}]$  は材料の弾塑性係数マトリックスで、 $[E^c]$  はクリープと塑性の連成を考慮した場合の弾塑性クリープ係数マトリックスである。そして式(1.3-296)の  $\Delta\{\sigma^*\}$  により、新しい弾性ひずみ増分  $\Delta\{\epsilon^e\}$ 、塑性ひずみ増分  $\Delta\{\epsilon^p\}$  が次のように計算できる。

$$\Delta\{\epsilon^p\} = [E^e]^{-1} \Delta\{\sigma^*\} \quad (1.3-297)$$

$$\Delta\{\epsilon^p\} = \Delta\{\epsilon\} - \Delta\{\epsilon^e\} - \Delta\{\epsilon^c\} \quad (1.3-298)$$

また、C-C'に相当する応力は不釣り合い応力として残差荷重項で処理する。

(7) クリープ時間増分ジェネレート機能のアルゴリズム



### 1.3.7 塑性クリープ統一型構成式

高温機器では金属材料の非弾性方程式は通常、非弾性変形を時間に依存しない塑性変形と時間に依存するクリープ変形に分けて別個に取り扱っている。1.3.3節では、部分的ではあるが、クリープの塑性挙動に及ぼす影響を考慮に入れた塑性クリープ連成モデルの構成方程式が述べられている。しかし、このモデルは実際の非弾性挙動に対して、高温変動下における材料挙動を精度良く記述することはできない。

ここでは、塑性ひずみとクリープひずみを1つの非弾性ひずみ(粘塑性ひずみ)として取り扱う塑性・クリープ統一型構成式モデルの1つであるRobinsonモデルについて説明を行なう。

#### (1) Robinsonの統一型モデル

ポテンシャル関数として、外部応力  $\sigma_{ij}$  および内部応力  $\alpha_{ij}$  からなるものを考える。

$$\Omega = \Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) \quad (1.3-299)$$

静水圧応力は非弾性挙動に全く影響を与えないので、応力の依存性は式(1.3-300)、式(1.3-301)で示される  $\sigma_{ij}$ 、 $\alpha_{ij}$  の偏差成分により考慮される。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (1.3-300)$$

$$a_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk} \quad (1.3-301)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタを表わす。

ポテンシャル関数を用いて、流れ則および発展則は次式らで表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.3-302)$$

$$-\dot{\alpha}_{ij}/h = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij}} \quad (1.3-303)$$

ここで、 $(\dot{\quad})$  は時間微分を意味し、 $\dot{\epsilon}_{ij}$  は非弾性ひずみ速度を表わし、 $h$  は内部応力のスカラー関数である。Robinsonモデルのポテンシャル関数は次式で書き表わすことができる。

$$\Omega = \kappa^2 \left( \int \frac{1}{2\mu} f(F) dF + \int \frac{R}{H} g(G) dG \right) \quad (1.3-304)$$

式(1.3-304)のスカラー関数  $F$ 、 $G$  は応力に依存したものととして考慮される。

$$F = F(\Sigma_{ij}), \quad G = G(a_{ij}) \quad (1.3-305)$$

ここで、 $\Sigma_{ij}$  は次式で表わされる。

$$\Sigma_{ij} = S_{ij} - a_{ij} \quad (1.3-306)$$

また、関数  $f$ ,  $g$  および材料パラメータ  $K$ ,  $\mu$ ,  $R$ ,  $H$  は状態に応じて仮定される。

完全な等方性モデルにおいて、式 (1.3-305) の関数  $F$ ,  $G$  は、式 (1.3-307) および式 (1.3-308) で与えられる主応力の不変量に依存して表わされる。

$$J_2 = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \Sigma_{ij}, \quad J_3 = \frac{1}{3} \Sigma_{ij} \Sigma_{jk} \Sigma_{ki} \quad (1.3-307)$$

$$j_2 = \frac{1}{2} a_{ij} a_{ij}, \quad j_3 = \frac{1}{3} a_{ij} a_{jk} a_{ki} \quad (1.3-308)$$

いま、Mises タイプを考慮すれば、第 2 次不変量  $J_2$ ,  $j_2$  だけが残され、関数  $F$  と  $G$  は次式らで表わされる。

$$F = \frac{J_2}{K^2} - 1 \quad (1.3-309)$$

$$G = \frac{j_2}{K^2} - 1 \quad (1.3-310)$$

ここで、式 (1.3-309), (1.3-310) の  $K$  は Bingham の降伏条件である。 $K$  は一般的にはスカラー状態変数として取り扱う。

$F > 0$  の場合に、非弾性ひずみが生じ、式 (1.3-304) から式 (1.3-310) を考慮することにより、式 (1.3-302) の流れ則および式 (1.3-303) の発展則は、それぞれ式 (1.3-311) および式 (1.3-312) で表わすことができる。

$$2 \mu \dot{\epsilon}_{ij} = f(F) \Sigma_{ij} \quad (1.3-311)$$

$$\dot{a}_{ij} = \frac{H}{g_h(G)} \dot{\epsilon}_{ij} - R g_r(G) a_{ij} \quad (1.3-312)$$

なお、式 (1.3-303) の  $h$  は次式のように表わされる。

$$h = \frac{H}{g_h(G)} \quad (1.3-313)$$

式 (1.3-312) の  $g_r(G)$  は次式で表わされる。

$$g_r(G) = \frac{g(G)}{g_h(G)} \quad (1.3-314)$$

以上が、等方性材料および等温条件に対する Robinson 統一型モデルの定式である。

この理論の適用例として  $f$  は、Mittra, Mclean 等の実験結果から次式らが仮定される。

$$f(F) = F^n \quad \text{あるいは} \quad f(F) = (\sin h F)^n \quad (1.3-315)$$

また,  $g$  および  $g_h$  は次式らを仮定する。

$$g(G) = G^m \quad (1.3-316)$$

$$g_h(G) = \frac{1}{G^\beta} \quad (1.3-317)$$

したがって, 式 (1.3-314) から  $g_r$  は次式のように表わされる。

$$g_r(G) = G^{m-\beta} \quad (1.3-318)$$

式 (1.3-315), (1.3-316) および (1.3-317) での  $n$ ,  $m$ ,  $\beta$  は定数である。

#### • Chaboche 統一型モデル

このモデルは他の統一型構成式モデルに見られるように, 流れ則として超過応力のべき乗則を用い, 背応力 (back stress) および抗応力 (drag stress) の発散則については弾塑性モデルと同様な微分方程式型を採用している。

材料が Mises の降伏条件に従う等方性材料であるから, 流れ則は式 (1.3-274) で定義される。

$$\dot{\epsilon}^I = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J(\sigma - \sum \alpha_i) - R - k}{K} \right\rangle^n \frac{S - \sum \alpha_i}{J(\sigma - \sum \alpha_i)} \quad (1.3-319)$$

$$J(\sigma - \sum \alpha_i) = \left[ \frac{3}{2} (S - \sum \alpha_i)(S - \sum \alpha_i) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.3-320)$$

ここで,  $\epsilon^I$  は非弾性ひずみテンソル,  $\sigma$  は応力テンソル,  $\alpha_i$  は背応力  $i$  番成分テンソル,  $S$  は偏差応力テンソル,  $R$  は抗応力,  $k$  は初期降伏曲面の大きさを表わす。

また, 式 (1.3-319) の  $\langle \quad \rangle$  は次式を意味する。

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases} \quad (1.3-321)$$

次に, 抗応力および背応力の発展則はそれぞれ式 (1.3-322) および (1.3-323) で与えられる。

$$\dot{R} = b(Q - R) \dot{\epsilon}^I \quad (1.3-322)$$

$$\dot{\alpha}_j = c_j \left( \frac{2}{3} a_j \dot{\epsilon}^I - \alpha_j \dot{\epsilon}^I \right) \quad (1.3-323)$$

ここで,  $b$  は等方硬化の非線形性を表わす定数,  $Q$  は定常状態における等方硬化量,  $c_j$  は移動硬化の非線形性を表わす定数の  $j$  成分,  $a_j$  は定常状態における移動硬化量を表わす。また相当非弾性ひずみ増分  $\dot{\epsilon}^I$  は次式で定義される。

$$\dot{\epsilon}^I = \left( \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^I \dot{\epsilon}^I \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3-324)$$



なお、上式らにおける  $K, n, b, Q, c_j, a_j$  は材料パラメータであり、状態に応じて仮定される。

• Bodner 統一型モデル

このモデルは降伏や負荷、除荷の判定を行なわない最初の統一型構成式モデルであり、多次元の連続体の挙動を解析的な方法で解くことができるように考慮されている。構成式は等方硬化、移動硬化、流れ則の温度依存性および損傷の挙動を含んでいる。

ここでは損傷の項を含まない Bodner モデルの定式について述べる。

流れ則は次式らで表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.3-325)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda S_{ij} ; \quad \dot{\epsilon}_{kk}^p = 0 \quad (1.3-326)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  はそれぞれ全ひずみ速度テンソル、弾性ひずみ速度テンソル、塑性ひずみテンソルであり、 $S_{ij}$  は偏差応力テンソルを示す。

運動方程式 (kinetic equation) は次式で与えられる。

$$D_2^p = D_0^2 \exp \left\{ - \left[ \frac{Z^2}{3J_2} \right]^n \right\} \quad (1.3-327)$$

ここで、

$$Z = Z^I + Z^D \quad (1.3-328)$$

$$D_2^p = \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.3-329)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad (1.3-330)$$

$$\lambda^2 = D_2^p / J_2 \quad (1.3-331)$$

次に、内部変数の発展則は等方硬化および移動硬化の項からなっている。等方硬化は次式らで表わされる。

$$\dot{Z}^I = m_1 [Z_1 + \alpha Z_3 - Z^I] \dot{W}_p - A_1 Z_1 \left[ \frac{Z^I - Z_2}{Z_1} \right]^{r_1} \quad (1.3-332)$$

ここで、

$$\dot{\alpha} = m_2 (\alpha_1 - \alpha) \dot{W}_p \sin \theta \quad (1.3-333)$$

$$\theta = \cos^{-1} (V_{ij} \bar{V}_{ij}) \quad \text{あるいは} \quad \theta = \cos^{-1} (u_{ij} \bar{u}_{ij}) \quad (1.3-334)$$

$$V_{ij} = \beta_{ij} / (\beta_{kl} \beta_{kl})^{1/2}, \quad \bar{V}_{ij} = \dot{\beta}_{ij} / (\dot{\beta}_{kl} \dot{\beta}_{kl})^{1/2} \quad (1.3-335)$$

$$u_{ij} = \sigma_{ij} / (\sigma_{kl} \sigma_{kl})^{1/2}, \quad \bar{u}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} / (\dot{\sigma}_{kl} \dot{\sigma}_{kl})^{1/2} \quad (1.3-336)$$

ただし、

$$Z^I(0) = Z_0 ; \dot{W}_P = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^b ; W_P(0) = 0 ; \alpha(0) = 0 \quad (1.3-337)$$

また、移動硬化は次式で表わされる。

$$\dot{\beta}_{ij} = m_2 (Z_3 u_{ij} - \beta_{ij}) \dot{W}_P - A_2 Z_1 \left[ \frac{(\beta_{kl} \beta_{kl})}{Z_1} \right]^{r_2} v_{ij} \quad (1.3-338)$$

ただし、

$$Z^D = \beta_{ij} u_{ij} ; Z^D(0) = 0 , \beta_{ij}(0) = 0 \quad (1.3-339)$$

上式らの  $D_0, Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, m_1, m_2, \alpha_1, A_1, A_2, r_1, r_2, n$  は材料パラメータであり、実際の材料では次式が成立する。

$$r_1 = r_2 , A_1 = A_2 , Z_0 = Z_2 \quad (1.3-340)$$

ここで、 $D_0$  は限界せん断ひずみ速度、 $Z_0$  は等方硬化変数の初期値、 $Z_1$  は  $Z^I$  の最大値、 $Z_2$  は  $Z^I$  の回復最小値、 $Z_3$  は  $Z^D$  の最大値、 $m_1$  は  $Z^I$  の硬化速度係数、 $m_2$  は  $Z^D$  の硬化速度係数、 $n$  は運動パラメータ、 $A_1$  は  $Z^D$  の回復係数、 $r_1$  は  $Z^I$  の回復指数、 $r_2$  は  $Z^D$  の回復指数、 $\alpha_1$  は非比例硬化のための限界係数を意味する。

また、Bodner モデルにおいて異方硬化および非比例硬化の項を無視し、式 (1.3-327) の指数に  $n+1/n$  をつけると次式らが得られる。

$$D_2^P = D_0^2 \exp \left\{ - \frac{n+1}{n} \left[ \frac{Z^2}{3J_2} \right]^n \right\} \quad (1.3-341)$$

$$\dot{Z} = m_1 (Z_1 - Z) \dot{W}_P - A_1 Z_1 \left( \frac{Z - Z_2}{Z_1} \right)^{r_1} \quad (1.3-342)$$

#### • Walker 統一型モデル

このモデルは粘塑性挙動を2つの内部変数、すなわち背応力  $\Omega_{ij}$  と抗応力  $K$  を用いて表現している。背応力  $\Omega_{ij}$  は繰返し負荷における移動硬化と Bauschinger 効果をモデル化している。抗応力  $K$  は等方硬化と繰返し硬化あるいは軟化の効果を示すのに用いられている。

非弾性ひずみ速度 (粘塑性ひずみ速度)  $\dot{\epsilon}_{ij}^I$  は次式で与えられる。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^I = \left[ \frac{X}{K} \right]^n \frac{\left[ \frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right]}{X} \quad (1.3-343)$$

ここで、

$$X = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ \frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right] \left[ \frac{3}{2} S_{ij} - \Omega_{ij} \right]} \quad (1.3-344)$$

$S_{ij}$  は偏差応力を表わす。また、背応力  $\Omega_{ij}$  および抗応力  $K$  は次式らで表わされる。

$$\dot{\Omega}_{ij} = (n_1 + n_2) \dot{\epsilon}_{ij}^I + \epsilon_{ij}^I \frac{\partial n_1}{\partial T} \dot{T} - (\Omega_{ij} - \Omega_{ij}^0 - n_1 \epsilon_{ij}^I) \left( \dot{C} - \frac{1}{n_2} \frac{\partial n_2}{\partial T} \dot{T} \right) \quad (1.3-345)$$

$$K = K_1 - K_2 e^{-n_2 R} \quad (1.3-346)$$

ここで,

$$G = (n_3 + n_4 e^{-n_5 R}) \dot{R} + n_6 \left( \frac{2}{3} \Omega_{ij} \Omega_{ij} \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad (1.3-347)$$

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^I \dot{\epsilon}_{ij}^I} \quad (1.3-348)$$

$\dot{R}$  は相当非弾性ひずみ速度,  $T$  は温度を表わす.  $n$ ,  $n_i$  ( $i=1\sim 7$ ),  $K_i$  ( $i=1, 2$ ) および  $m$  は材料パラメータである. 抗応力は累積された非弾性ひずみの関数であり, 背応力の発展式は静的および動的の両方の回復項をもっている.

#### [ 参考文献 ]

- 1) 非弾性構造解析プログラムの調査と試用 (I), (山田編), 日本機械学会, 1973.
- 2) 非弾性構造解析プログラムの調査と試用 (II), (山田編), 日本機械学会, 1975.
- 3) 山田, 塑性・粘弾性, 有限要素法の基礎と応用シリーズ6, 培風館, 1980.
- 4) 山田・岩田, “弾塑性クリープ解析法の理論的基礎”, 文献2.
- 5) 武田, “弾塑性クリープ解析法と汎用プログラム”, 文献2.
- 6) Pugh, C. E., Corum, J. M., Liu, K. C. and Greenstreet, W. L., “Currently Recommended Constitutive Equations for Inelastic Analysis of FFTF Components”, ORNL-TM-3602, Oak Ridge National Laboratory, 1972.
- 7) Corum, J. M., Greenstreet, W. L., Liu, K. C. and Pugh, C. E., “Interim Guidelines for Detailed Inelastic Analysis of High-Temperature Reactor System Components”, ORNL-5014, Oak Ridge National Laboratory, 1974.
- 8) Zudans, Z. et al, “Elastic-Plastic Creep Analysis of High Temperature Nuclear Reactor Components”, Nucl. Eng. Des., Vol. 28, 1974.
- 9) 非弾性解析の設計への適用方法に関する研究 (I), (山田編), 日本機械学会, 1980.
- 10) 非弾性解析の設計への適用方法に関する研究 (II), (山田編), 日本機械学会, 1981.
- 11) 高速炉機器の非弾性解析に関する指針, PNC SN 9410 86-132, 動力炉核燃料開発事業団, 1986.
- 12) Inoue, T. and Tanaka, K., “An Elastic-Plastic Stress Analysis of Quenching When Considering a Transformation”, Int. J. mech. Sci., 1975.
- 13) Ueda, Y. and Yamakawa, T. “Thermal Nonlinear Behavior of Structure”, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, UAH Press, 1972.
- 14) 大野, “非硬化ひずみ領域を考慮した繰返し塑性構成式”, 機論, 48-434, A (昭57), 1342.
- 15) 大野, 加智, 村上, “非線形硬化材料の繰返し塑性構成式”, 機論, 51-470, A (昭60.10), 2349.
- 16) Besseling, J. F., “A Theory of Elastic, Plastic and Creep Deformation of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, 1958, pp. 529-536.
- 17) P. Meijers, F. Roode, “Experimental Verification of Constitutive Equations for Creep and Plasti-

- city Based on Overlay Models", Journal of Pressure Vessel Technology, Aug. 1983, Vol.105/277.
- 18) 非弾性構造解析法の実用化に関する研究 (I), (山田編), 日本機械学会, 1977.
  - 19) 非弾性構造解析法の実用化に関する研究 (II), (山田編), 日本機械学会, 1978.
  - 20) Odqvist, F.K.G. and Halt, J. "Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Springer", 1962 ;  
村上訳 "クリープ強さの理論", 培風館, 昭和42年.
  - 21) 村上, 大野, "回復可能なクリープ硬化範囲を規定した多軸変動応力クリープ構成式", 日本機械学会論文集 (A編), 48巻428号, 昭和57年, pp.431-438.
  - 22) Murakami, S. and Ohno, N., "A Constitutive Equation of Creep based on the Concept of A Creep-Hardening Surface", Int. J. Solids Structures, Vol.18, No.7, 1982, pp.597-609.
  - 23) Pugh, C. E., "Progress in Developing Constitutive Equations for Inelastic Design Analysis", Inelastic Analysis and Life Prediction in Elevated Temperature Design (ed Baylac, G.), PVP-Vol.52, ASME, 1982, pp.57-66. および Trans ASME, J. of Pressure Vessel Technology, Vol.105, 1983, pp.273-276.
  - 24) Bates, J. F. and Gilbert, E. R. "Effect of Stress on Swelling in Reactor Fuel Cladding", Vol. C, SMiRT, 1977.
  - 25) 動力炉核燃料開発事業団推奨データ, 1984.
  - 26) D. N. Robinson, "Constitutive Relationships for Anisotropic High-Temperature Alloys", Nuclear Engineering and Design, Vol.83, No.3, pp.389-396, 1984.
  - 27) J. L. Chaboche, G. Rousselier, "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations —— Part I : Rules Developed with Internal Variable Concept", Journal of Pressure Vessel Technology, 1983, Vol.105, pp.153~158.
  - 28) J. L. Chaboche, G. Rousselier, "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations —— Part II : Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steel", Journal of Pressure Vessel Technology, 1983, Vol.105, pp.159~164.

## 1.4 大変形解析

### 1.4.1 連続体の増分形平衡方程式

ここでは大変形解析に関する基本的事項ならびに、大変形、大回転、大ひずみ等の幾何学的非線形性および材料非線形性を併せて考慮した、FINASにおける大変形定式を説明する。対象とする現象は本質的に非線形の問題であるが、増分形の仮想仕事の原理を用いることにより区間線形問題を解くことに帰着する。

#### (1) 連続体の変形と参照する形状

材料非線形性や幾何学的非線形性などを取り扱う問題では、増分形定式が用いられることが多い。物体の運動を記述するために、次の3つの形状を考える。

- (i) 初期形状 (initial configuration)  $C_0$
- (ii) 現在の形状 (current configuration)  $C_t$
- (iii) 未知形状 (unknown configuration)  $C_{t+\Delta t}$

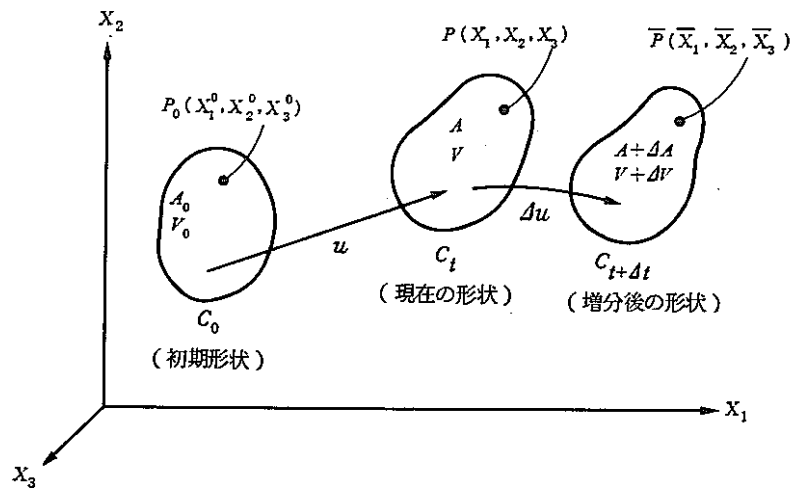


図 1.4-1 固定した座標系での物体の運動

初期形状とは、変形前の物体形状であり、体積を  $V_0$ 、表面積を  $A_0$  とする。現在の形状とは最新の既知形状であり、その体積を  $V$ 、表面積を  $A$  とする。増分後の形状とは、これから決定されるべき増分後の未知形状である。

初期形状での物体点  $P_0(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$  は、現在の形状では点  $P(X_1, X_2, X_3)$  に移動し、次のような関係が成り立つ。

$$X_i = X_i^0 + u_i \quad (1.4-1)$$

ここで、 $u_i$  は物体点  $P_0$  の現在の位置  $P$  までの変位成分を示す。増分後の形状では物体点  $P_0$  は点  $\bar{P}(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$

に移動し、次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= X_i + \Delta u_i \\ &= X_i^0 + u_i + \Delta u_i\end{aligned}\quad (1.4-2)$$

ここで、 $\Delta u_i$  は現在の形状からの増分変位成分を表わす。

## (2) 応力とひずみ

これまで特に断らないで用いてきた応力は真応力のことである。現在の物体上に仮想面  $ds$  を考え、その面に立てた外向き法線ベクトルを  $n$  とし、その面に外力ベクトル  $dT$  が作用しているとすると、面の内側の真応力  $\sigma_{ij}$  は次式で定義される。

$$dT_i = \sigma_{ji} n_j ds \quad (1.4-3)$$

ここで、 $\sigma_{ji}$  は  $j$  面に働く、 $i$  方向の応力を示す。式 (1.4-3) で表わされる応力は真応力または Euler の応力あるいは Cauchy の応力と呼ばれる対称テンソルである。

応力を変形前の形状を基準にして定義する方法は、工学的にしばしば用いられる。その代表なもの1つが、公称応力、見かけの応力、Lagrange の応力あるいは第一種 Piola-kirchhoff の応力と呼ばれるもので、次式で定義される。

$$dT_i = S_{ji} n_j ds_0 \quad (1.4-4)$$

ここで、 $S_{ji}$  は公称応力、 $ds_0$  は変形前の微小面積である。公称応力は単軸引張り試験にかける作用荷重を変形前の断面積で除した応力に相当する。この応力は非対称テンソルである。

変形前の形状を基準とする別の応力の定義に第2種 Piola-kirchhoff の応力（以下、Kirchhoff の応力と呼ぶ）があり、次式で定義される。

$$dT_i = t_{jk} n_j \frac{\partial X_i}{\partial X_k^0} ds_0 \quad (1.4-5)$$

ここで、 $t_{jk}$  は Kirchhoff の応力であり、対称テンソルである。Kirchhoff の応力と真応力および公称応力の関係式は、次のように表わされる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} \frac{\partial X_j}{\partial X_l^0} t_{kl} \quad (1.4-6)$$

$$S_{ij} = t_{ik} \frac{\partial X_j}{\partial X_k^0} \quad (1.4-7)$$

ここで、 $\rho/\rho_0$  は変形前後の質量密度比であり、次式で表わすことができる。

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det \left[ \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} \right] \quad (1.4-8)$$

ただし、 $\det \left[ \frac{\partial X_i}{\partial X_j^0} \right]$  は変形勾配の行列式である。

以上で述べた公称応力および Kirchhoff の応力は、変形前の形状（初期形状）を基準にして定義したが、現在の形状を基準にして定義することも可能である。この場合、現在の応力としては、各種応力の定義における区別はなくなり、 $\sigma_{ij} = t_{ij} = S_{ij}$  とおくことができる。しかし、現在の形状に隣接する増分後の未知形状での応力を論ずる場合には、前述の定義に類似した方法を用いる必要がある。

剛体回転を含む大変形大ひずみの解析では、材料特性の記述、すなわち構成方程式において、座標系の変化に関する客観性のある応力変化率がしばしば用いられる。代表的なものに Jaumann の共回転応力変化率があり、例えば真応力の増分量に関しては、次式で定義される。

$$\Delta \sigma_{ij}^J = \Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \Delta \omega_{kj} - \sigma_{jk} \Delta \omega_{ki} \quad (1.4-9)$$

ここで、 $\Delta \sigma_{ij}$  は真応力増分、 $\Delta \sigma_{ij}^J$  は真応力の Jaumann の応力増分、 $\Delta \omega_{ij}$  はスピントensorであり、次式で定義される。

$$\Delta \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.4-10)$$

次にひずみの定義について述べる。初期形状を基準とするひずみの定義としては、Green のひずみがあり、次式で表わされる。

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i^0} \frac{\partial u_k}{\partial X_j^0} \right) \quad (1.4-11)$$

Green のひずみは、初期形状を基準にした Kirchhoff の応力と対にして用いられる。

一方、変形途中の現在の形状を基準にする増分形の定式では、次の Euler のひずみ増分（真ひずみ増分ということもある）が使われる。

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right) \quad (1.4-12)$$

これは形式的には微小ひずみの定義と同じであるが、刻々変化する形状を基準にして定義しているところに違いがある。式(1.4-12)を積分したひずみは、単軸引張りの場合の対数ひずみ（真ひずみ）となる。

増分的に刻々変化する形状を基準にして、次のような Green のひずみ増分が定義されることもある。

$$\begin{aligned} \Delta e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \right) \\ &= \Delta \epsilon_{ij} + \Delta \eta_{ij} \end{aligned} \quad (1.4-13)$$

ここで、

$$\Delta\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \quad (1.4-14)$$

式(1.4-13)は前述の Green ひずみ  $\lambda_{ij}$  の単なる増分ではない。

### (3) 仮想仕事の原理

非線形解析での連続体の平衡方程式は、一般に増分法によって解かれる。ここでは図1.4-1のように空間に固定した直交座標系での仮想仕事の原理を考える。この場合、定式化は初期形状から未知形状までの変形を物体点に着目して記述する Lagrange 流の表記が用いられるが、基本となる定式化に関しては、次の2通りの方法が多く用いられる。

#### I) 初期形状を基準とする定式化

通常の Lagrange 型定式化であるが、物理量等はすべて一貫して初期形状を自準にして定義されるので total Lagrangian formulation と呼ばれることも多い。

#### II) 刻々の既知形状を基準とする定式化

変形途中の既知の形状ならびに応力状態を基準にして増分後の状態を求める増分定式である。増分ごとに形状の座標値を更新するので更新 Lagrange 型定式 (updated Lagrangian formulation) と呼ばれることが多い。また、この方法では物体点の座標を増分ごとに改めるので、Euler 型定式化 (ただし、増分間は Lagrange 流に記述するので正確には混合法)、あるいは移動座標による定式化 (moving coordinates approach) といった呼び方がされることもある。

FINASにおいては、上記の2つの定式化による解析機能が備えられているが、普通II)の定式化の方が適用性が広いと考えられている。

初期形状を基準とする Lagrange 流の定式化では、次の仮想仕事式を基本とする。

$$\int_{V_0} t_{ij}^0 \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv = \int_{V_0} q_i^0 \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} p_i^0 \delta \Delta u_i ds \quad (1.4-15)$$

ここで、 $t_{ij}^0$  は初期形状を基準として定義される Kirchhoff の応力、 $p_i^0$  は  $s_0$  上に作用する表面力、 $q_i^0$  は初期単位体積あたりの物体力である。また、 $\Delta \lambda_{ij}^{0*}$  は初期形状を基準として Green ひずみの増分である。

$$\Delta \lambda_{ij}^{0*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j^0} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j^0} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i^0} \right) \quad (1.4-16)$$

式(1.4-15)を増分法で解く場合には、以下のように増分形の表示に変換する必要がある。

$$\int_{V_0} (t_{ij}^0 + \Delta t_{ij}^0) \delta \Delta \lambda_{ij}^0 dv = \int_{V_0} (q_i^0 + \Delta q_i^0) \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} (p_i^0 + \Delta p_i^0) \delta \Delta u_i ds \quad (1.4-17)$$

ここで、

$$\Delta \lambda_{ij} = \Delta \lambda_{ij}^{0*} + \Delta \eta_{ij} \quad (1.4-18)$$



$$\Delta\eta_{ij}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j^0} \quad (1.4-19)$$

式(1.4-17)を整理し、微小項を省略して、次の増分形仮想仕事式が得られる。

$$\int_{V_0} \Delta t_{ij}^0 \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv + \int_{V_0} t_{ij}^0 \delta \Delta \eta_{ij}^0 dv = \int_{V_0} \Delta q_i^0 \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} \Delta p_i^0 \delta \Delta u_i ds + \delta R^0 \quad (1.4-20)$$

ただし、

$$\delta R^0 = \int_{V_0} q_i^0 \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} p_i^0 \delta \Delta u_i ds - \int_{V_0} t_{ij}^0 \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv \quad (1.4-21)$$

式(1.4-20)において  $\delta R^0$  は残差修正荷重による仮想仕事であり、増分前に平衡条件が満たされる場合には、 $\delta R^0 = 0$  となるものである。

次に更新 Lagrange 型定式による仮想仕事の原理について説明する。平衡状態にある連続体については、現在の既知形状に関して、次の仮想仕事式が成り立つ。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv = \int_V q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S p_i \delta \Delta u_i ds \quad (1.4-22)$$

ここで、 $p_i$  は  $s$  上に作用する表面力、 $q_i$  は単位体積あたりの物体力である。現在の既知形状からの増分変形を求めるための仮想仕事の原理は、公称応力増分を用いて、次のように表わされる。

$$\int_V (\sigma_{ij} + \Delta s_{ij}) \delta \Delta \epsilon_{ij} dv = \int_V (q_i + \Delta q_i) \delta \Delta u_i dv + \int_S (p_i + \Delta p_i) \delta \Delta u_i ds \quad (1.4-23)$$

よって、次のような増分形での仮想仕事式が得られる。

$$\int_V \Delta s_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_V \Delta q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S \Delta p_i \delta \Delta u_i ds + \delta R \quad (1.4-24)$$

ただし、

$$\delta R = \int_V q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S p_i \delta \Delta u_i ds - \int_V \sigma_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv \quad (1.4-25)$$

材料の構成方程式は真応力増分  $\Delta \sigma_{ij}$  で表示するのが適当であり、次の変換により  $\Delta s_{ij}$  を  $\Delta \sigma_{ij}$  で表示する。

$$\Delta s_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_k} - \sigma_{ij} \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad (1.4-26)$$

このようにして真応力で表わした増分形の仮想仕事の原理が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \Delta \sigma_{ij} - \sigma_{ik} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_k} - \sigma_{ij} \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \delta \Delta \varepsilon_{ij} dv \\ & = \int_V \Delta q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S \Delta p_i \delta \Delta u_i ds \end{aligned} \quad (1.4-27)$$

更新 Lagrange 型定式において、現在の形状を基準にした Kirchhoff の応力増分を用いた増分形の仮想仕事の原理を用いると、はりおよび板殻構造物の解析には都合がよい。ひずみが微小であるとすれば、真応力  $\sigma_{ij}$  と Kirchhoff の応力  $t_{ij}$  は等しいと近似できるので、 $t_{ij}$  は物体に埋め込まれた座標系に関する真応力とみなすことができる。よって仮想仕事式は、次のようになる。

$$\int_V \Delta t_{ij} \delta \Delta \lambda_{ij} dv + \int_V t_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} dv = \int_V \Delta q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S \Delta p_i \delta \Delta u_i ds + \delta R \quad (1.4-28)$$

更新 Lagrange 型の解法では、刻々の真応力を評価しながら構造物の応答を求めるのであるが、式(1.4-28)では増分間のみで定義する Kirchhoff の応力増分が用いられる。

#### 1.4.2 Lagrange 型有限要素定式

大変形などの幾何学的非線形挙動の解析において、一貫して物体の初期形状を基準にする Lagrange 型の有限要素定式化について述べる。この方法では物体の応力とひずみはそれぞれ Kirchhoff の応力と Green のひずみで表現される。平衡方程式をステップバイステップに解くために、次のような増分形の仮想仕事式が用いられる。

$$\int_{V_0} \Delta t_{ij}^0 \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv + \int_{V_0} t_{ij}^0 \delta \Delta \eta_{ij}^0 dv = \int_{V_0} \Delta q_i^0 \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} \Delta p_i^0 \delta \Delta u_i ds + \delta R^0 \quad (1.4-20)$$

ここで、

$$\delta R^0 = \int_{V_0} q_i^0 \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} p_i^0 \delta \Delta u_i ds - \int_{V_0} t_{ij}^0 \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv \quad (1.4-21)$$

$$\Delta \lambda_{ij}^{0*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j^0} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i^0} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j^0} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i^0} \right) \quad (1.4-16)$$

$$\Delta \eta_{ij}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i^0} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j^0} \quad (1.4-19)$$

材料の構成方程式として、次のような Kirchhoff の応力増分と Green のひずみ増分の関係式を用いるとする。

$$\Delta t_{ij}^0 = D_{ijkl} \Delta \lambda_{kl}^{0*} + \Delta t_{ij}^0 \quad (1.4-29)$$

ここで、 $D_{ijkl}$  は応力ひずみ接線係数テンソル、 $\Delta t_{ij}^0$  は熱膨張、クリープ等に起因する見かけの応力増分テンソルである。

構成方程式を式(1.4-20)に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} D_{ijkl} \Delta \lambda_{kl}^{0*} \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv + \int_{V_0} t_{ij}^0 \delta \Delta \eta_{ij}^0 dv \\ &= \int_{V_0} \Delta q_i \delta \Delta u_i dv + \int_{S_0} \Delta p_i \delta \Delta u_i ds - \int_{V_0} \Delta t_{ij}^0 \delta \Delta \lambda_{ij}^{0*} dv + \delta R^0 \end{aligned} \quad (1.4-30)$$

上記の仮想仕事の原理を用いて、有限要素の平衡方程式を導くと、次式が得られる。

$$([\mathbf{K}^L] + [\mathbf{K}^U] + [\mathbf{K}^S]) \Delta \{\hat{\mathbf{u}}\} = \Delta \{\hat{\mathbf{P}}\} + \{\hat{\mathbf{R}}\} + \Delta \{\hat{\mathbf{P}}_1\} \quad (1.4-31)$$

ここで、 $[\mathbf{K}^L]$  は通常の微小変形剛性マトリックス、 $[\mathbf{K}^U]$  は初期変位剛性マトリックス、 $[\mathbf{K}^S]$  は初期応力剛性マトリックス、 $\Delta \{\hat{\mathbf{u}}\}$  は節点変位増分ベクトル、 $\Delta \{\hat{\mathbf{P}}\}$  は外荷重増分ベクトル、 $\{\hat{\mathbf{R}}\}$  は残差荷重ベクトル、 $\Delta \{\hat{\mathbf{P}}_1\}$  は熱膨張、クリープ等に起因する見かけの荷重増分ベクトルであり、それぞれは以下の式で与えられる。

$$[\mathbf{K}^L] = \int_{V_0} [\mathbf{B}^{L_0}]^T [\mathbf{D}^{EP}] [\mathbf{B}^{L_0}] dv \quad (1.4-32)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}^U] &= \int_{V_0} [\mathbf{B}^U]^T [\mathbf{D}^{EP}] [\mathbf{B}^{L_0}] dv + \int_{V_0} [\mathbf{B}^{L_0}]^T [\mathbf{D}^{EP}] [\mathbf{B}^U] dv \\ &+ \int_{V_0} [\mathbf{B}^U]^T [\mathbf{D}^{EP}] [\mathbf{B}^U] dv \end{aligned} \quad (1.4-33)$$

$$[\mathbf{K}^S] = \int_{V_0} [\mathbf{B}^{D_0}]^T [\mathbf{S}] [\mathbf{B}^{D_0}] dv \quad (1.4-34)$$

$$\Delta \{\hat{\mathbf{P}}\} = \int_{V_0} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \Delta \{\hat{\mathbf{q}}\} dv + \int_{S_0} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \Delta \{\hat{\mathbf{P}}\} ds \quad (1.4-35)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{R}\} &= \int_{V_0} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\hat{\mathbf{q}}\} dv + \int_{S_0} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\hat{\mathbf{P}}\} ds \\ &- \int_{V_0} ([\mathbf{B}^{L_0}] + [\mathbf{B}^U]) \{t^0\} dv \end{aligned} \quad (1.4-36)$$

ここで、 $[\mathbf{N}]$  は変位及び形状の補間関数マトリックス、 $[\mathbf{B}^{L_0}]$  と  $[\mathbf{B}^U]$  は Green のひずみベクトル  $\Delta \{\lambda^{0*}\}$  を関係づけるマトリックスである。

$$\Delta\{u\} = [N]\Delta\{\hat{u}\} \quad (1.4-37)$$

$$\Delta\{\lambda^{0*}\} = [B]\Delta\{\hat{u}\} = ([B^{L_0}] + [B^U])\Delta\{\hat{u}\} \quad (1.4-38)$$

また、 $[B^D]$  は変形勾配ベクトル  $\Delta\{d^0\} = \left\{ \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j^0} \right\}$  と要素節点変位ベクトル  $\Delta\{\hat{u}\}$  を関係づけるマトリックスであり、次式で定義される。

$$\Delta\{d^0\} = [B^D]\Delta\{\hat{u}\} \quad (1.4-39)$$

また、 $[S]$  マトリックスは Kirchhoff の応力マトリックス、 $[D^{EP}]$  は弾塑性接線材料マトリックスである。

### 1.4.3 更新 Lagrange 型有限要素定式

この方法は本質的に増分理論に立脚するものである。応力としては真応力が用いられ、ひずみは Euler のひずみ速度（あるいは増分）を時間的に積分したものが用いられるのが普通である。ただし、連続体での真応力は空間に固定した座標系で定義されるが、梁や板殻構造物では、要素座標系が便利であるので刻々に変化する座標系で定義される。

増分形の仮想仕事の原理を再記すると、

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \Delta\sigma_{ij} - \sigma_{ik} \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_k} - \sigma_{ij} \frac{\Delta\rho}{\rho} \right) \delta\Delta\varepsilon_{ij} dv \\ &= \int_V \Delta q_i \delta\Delta u_i dv + \int_S \Delta p_i \delta\Delta u_i ds + \delta R \end{aligned} \quad (1.4-27)$$

構成方程式は、次のように共回転変化率である Jaumann の応力変化率と Euler のひずみ速度との関係式で表わされるものとする。

$$\Delta\sigma_{ij}^J = D_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} + \Delta\sigma_{1ij} \quad (1.4-40)$$

式(1.4-9)と式(1.4-40)により次式が得られる。

$$\Delta\sigma_{ij} = D_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} + \Delta\sigma_{1ij} + \sigma_{ik} \Delta\omega_{kj} + \sigma_{jm} \Delta\omega_{mi} \quad (1.4-41)$$

式(1.4-41)を式(1.4-27)へ代入する。

$$\int_V D_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} \delta\Delta\varepsilon_{ij} dv + \int_V \left( \sigma_{ik} \Delta\omega_{kj} - \Delta\varepsilon_{ik} \sigma_{kj} - \frac{\Delta\rho}{\rho} \sigma_{ij} \right) \delta\Delta\varepsilon_{ij} dv$$

$$= \int_V \Delta q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S \Delta p_i \delta \Delta u_i ds - \int_V \Delta \sigma_{1ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv + \delta R \quad (1.4-42)$$

上式の左辺第2項を整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_V D_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv + \int_V \sigma_{ij} \delta \Delta \eta_{ij} dv - \int_V (\sigma_{ik} \Delta \epsilon_{ki} + \Delta \epsilon_{ik} \sigma_{kj}) \delta \Delta \epsilon_{ij} dv \\ & \quad - \int_V \Delta \epsilon_{kh} \sigma_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv \\ & = \int_V \Delta q_i \delta \Delta u_i dv + \int_S \Delta p_i \delta \Delta u_i ds - \int_V \Delta \sigma_{1ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} dv + \delta R \end{aligned} \quad (1.4-43)$$

ここで、

$$\Delta n_{ij} = \frac{1}{2} \Delta d_{ik} \Delta d_{jk} \quad (1.4-44)$$

$$\Delta d_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} \quad (1.4-45)$$

式(1.4-43)の増分形の仮想仕事の原理から導かれる有限要素のつり合い方程式は以下になる。

$$([\mathbf{K}^L] + [\mathbf{K}^S]) \Delta \{\hat{\mathbf{u}}\} = \Delta \{\hat{\mathbf{P}}\} + \{\hat{\mathbf{R}}\} + \Delta \{\hat{\mathbf{P}}_1\} \quad (1.4-46)$$

ここで、 $[\mathbf{K}^L]$ は式(1.4-43)の左辺第1項より導かれる微小変形剛性マトリックス、 $[\mathbf{K}^S]$ は左辺の第2項、第3項より導かれる初期応力による剛性マトリックスである。ここでは増分間での密度変化を表わす式(1.4-43)の左辺第4項を省略し、対称形の剛性マトリックスとしている。この項を無視した影響は残差修正項で考慮される。式(1.4-46)の各マトリックスは、次のように表わされる。

$$[\mathbf{K}^L] = \int_V [\mathbf{B}^L]^T [\mathbf{D}^{EP}] [\mathbf{B}^L] dv \quad (1.4-47)$$

$$[\mathbf{K}^S] = \int_V [\mathbf{B}^D]^T ([\mathbf{S}_1] + [\mathbf{S}_2]) [\mathbf{B}^D] dv \quad (1.4-48)$$

$$\Delta \{\hat{\mathbf{P}}\} = \int_V [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \Delta \{\hat{\mathbf{q}}\} dv + \int_S [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \Delta \{\hat{\mathbf{P}}\} ds \quad (1.4-49)$$

$$\{\hat{\mathbf{R}}\} = \int_V [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\hat{\mathbf{q}}\} dv + \int_S [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \{\hat{\mathbf{P}}\} ds - \int_V [\mathbf{B}^L]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv \quad (1.4-50)$$

$$\Delta\{\hat{P}_1\} = \int_V \{B^L\}^T \Delta\{\sigma_1\} dv$$

ここで、 $\{B^L\}$  と  $\{B^D\}$  はそれぞれひずみ増分および変形勾配と節点変位を結びつけるストリックスである。

$$\Delta\{\epsilon\} = \{B^L\} \Delta\{\hat{u}\} \quad (1.4-51)$$

$$\Delta\{d\} = \{B^D\} \Delta\{\hat{u}\} \quad (1.4-52)$$

なお、 $\{S_1\}$  と  $\{S_2\}$  は真応力  $\sigma_{ij}$  から成る対称マトリックスである。

〔参考文献〕

- 1) 山田, "塑性・粘弾性", 有限要素法の基礎と応用シリーズ6, 培風館, 1980.
- 2) Y. Yamada, "Incremental formulation for problems with geometric and material nonlinearities", *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, 2nd US.-Japan Seminar Matrix Meth. Struct. Analysis Design, Univ. of Alabama Press, 325~355, 1972.*
- 3) Y. Yamada, K. Takatsuka and K. Iwata, "Nonlinear analysis by the finite element method and some expository examples, *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, University of Tokyo Press, pp.125~138, 1973.*
- 4) K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Second Edition, Pergamon Press, 1975.*
- 5) 岩田, 非線形連続体力学に関する技術資料(未発表), 1975.
- 6) 有限要素法ハンドブック I (鷺津ほか編), 培風館, 1980.
- 7) R. Hill, "Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time", *J. Mech. Phys. Solids, 7, 209, 1959.*
- 8) H. D. Hibbitt, P. V. Marcal and J. R. Rice, "Finite element formulation for problems of large strain and large displacements", *Int. J. Solids Struct., 6, 1069~1086, 1970.*
- 9) S. Yaghmai and E. P. Popov, "Incremental analysis of large deflections of shells of revolution. *Int. J. Solids Struct., 7, 1375~1397, 1971.*
- 10) R. M. McMeeking and J. R. Rice, "Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation", *Int. J. Solids Struct., 11, 601~616, 1975.*
- 11) K. J. Bathe, E. Ramm and E. L. Wilson, "Finite element formulations for large deformation dynamic analysis", *Int. J. Num. Methods in Engng., vol.9, pp.353~386, 1975.*
- 12) Y. C. Fung, 固体の力学(大橋ほか2名訳), 培風館, 1970.
- 13) K. J. Bathe, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, 1982.

## 1.5 座屈荷重解析

### 1.5.1 非線形座屈荷重解析

大変形解析の有限要素定式は 1.4 章で説明した。幾何学的非線形性と材料非線形性を考慮した増分形での平衡方程式は次のように与えられる。

$$([K(u, \sigma)]) \Delta(\hat{u}) = \Delta(\hat{P}) + (\hat{P}) - (\hat{R}) \quad (1.5-1)$$

$[K(u, \sigma)]$  は材料の弾塑性特性，幾何学的非線形での初期応力や初期変位の効果を含んだ接線剛性マトリックスである。ここで外荷重  $\{P\}$  が作用するとき，応力  $\sigma$  と変位  $u$  が生じている。 $\Delta(\hat{u})$  は変位増分， $\Delta(\hat{P})$  は外荷重増分， $\{\hat{R}\}$  は応力  $\sigma$  の分布と等価な節点力ベクトルである。

荷重が  $\lambda\Delta(\hat{P})$  だけ増分したとき，応力と変位の増分をそれぞれ  $\lambda\Delta\sigma$  と  $\lambda\Delta u$  のように線形に仮定すれば，平衡方程式は次のように仮定される。

$$[K(u + \lambda\Delta u, \sigma + \lambda\Delta\sigma)] d(\hat{u}) = d(\hat{P}) \quad (1.5-2)$$

ここで荷重が  $(\{\hat{P}\} + \lambda\Delta\{\hat{P}\})$  において構造が不安定になったとすると，次式が与えられる。

$$[K(u + \lambda\Delta u, \sigma + \lambda\Delta\sigma)] d(\hat{u}) = \{0\} \quad (1.5-3)$$

式 (1.5-3) の左辺は Taylor 展開を利用して次のように表示できる。

$$[K(u + \lambda\Delta u, \sigma + \lambda\Delta\sigma)] = [K(u, \sigma)] + \frac{\partial[K]}{\partial u} \lambda\Delta u + \frac{\partial[K]}{\partial \sigma} \lambda\Delta\sigma + \dots \quad (1.5-4)$$

ここで式 (1.5-4) の高次項を無視すれば，式 (1.5-3) は次のような座屈の固有値方程式が得られる。

$$([K] + \lambda\Delta[K]) \Delta(\hat{x}) = \{0\} \quad (1.5-5)$$

$$\Delta[K] = [K(u + \Delta u, \sigma + \Delta\sigma)] - [K(u, \sigma)] \quad (1.5-6)$$

接線剛性マトリックスの増分  $\Delta[K]$  は，式 (1.5-6) のように増分前と増分後の接線剛性の差で計算する。式 (1.5-5) の座屈荷重解析の固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $\Delta(\hat{x})$  はサブスペース固有値解法で求める。よって，座屈荷重  $\{\hat{P}^{CR}\}$  は次のように計算される。

$$\{\hat{P}^{CR}\} = \{\hat{P}\} + \lambda\Delta\{\hat{P}\} \quad (1.5-7)$$

なお，固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトル  $\Delta(\hat{x})$  は，増分前の変形形状を参照した座屈形状を与える。

## 1.5.2 線形座屈荷重解析

座屈荷重を評価するための第1次近似として、初期変位による効果を省略すると、式(1.5-3)は次のように表わすことができる。

$$[K(\sigma + \lambda \Delta \sigma)] d\{\hat{u}\} = \{0\} \quad (1.5-8)$$

初期応力による接線剛性は、応力の線形関数であるので、式(1.5-8)の左辺は微小変形での剛性マトリックスと初期応力による剛性マトリックスになる。よって、座屈方程式は次のように仮定される。

$$([K^L] + \lambda[K^\sigma])\{x\} = \{0\} \quad (1.5-9)$$

$[K^\sigma]$  は荷重  $\{\hat{P}\}$  による応力  $\sigma$  により計算された初期応力マトリックスであり、座屈荷重は次のようになる。

$$\{\hat{P}^{CR}\} = \lambda\{\hat{P}\} \quad (1.5-10)$$

固有値  $\lambda$  に対応した固有ベクトル  $\{\hat{x}\}$  は初期基準形状を参照した座屈形状となる。

### 〔参考文献〕

- 1) W. Flugge, "Stresses in Shells", Springer-Verlag, 1969.
- 2) O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 1977.
- 3) K. J. Bathe, "FINITE ELEMENT PROCEDURES IN ENGINEERING ANALYSIS", PRENTICE-HALL, 1982.
- 4) J. Walczak, "ON CREEP BUCKLING ANALYSIS OF STRUCTURES", Computers & Structures, Vol.13, pp.683-689, 1981.



## 1.6 破壊力学解析

### 1.6.1 破壊力学パラメータの基礎式

#### (1) 応力拡大係数 $K$

き裂を有する物体に外力が作用する場合に、き裂の上下面の相対変位は、図1.6-1に示される三つの変形様式に分類され、それぞれモードⅠ（開口型）、モードⅡ（面内せん断型）およびモードⅢ（面外せん断型）と呼ばれる。一般に、き裂先端の変形や応力分布はこれら三つのモードの組み合わせとして考えることができる。

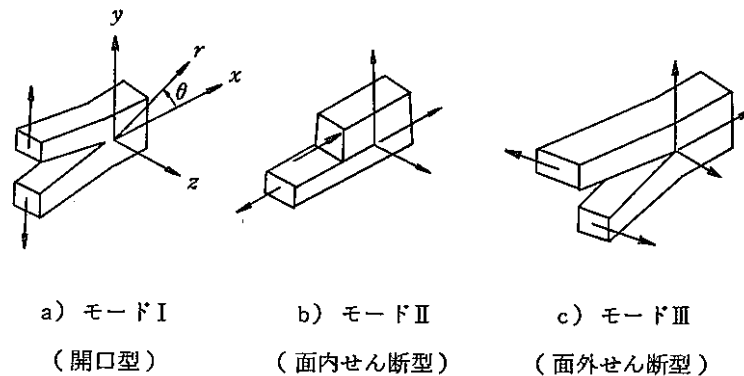


図 1.6-1 き裂の基本変形モード

き裂先端近傍の点  $P$  の応力は、弾性論により近似的に次式で与えられ、 $1/\sqrt{r}$  の特異性を有している（図 1.6-2 参照）。

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (1.6-1)$$

ここで、 $f_{ij}(\theta)$  は各変形様式に基づいて定まる  $\theta$  のみの無次元関数である。また、 $K$  は構造物の形状と作用する応力分布によって定まる係数で応力拡大係数と呼ばれている。

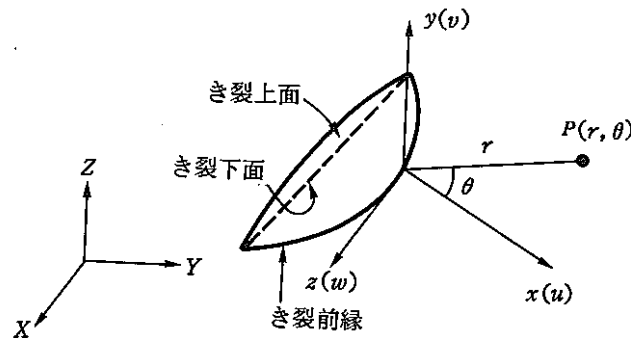


図 1.6-2 3次元き裂

等方性材料の3次元問題における式(1.6-1)の具体的な表示は、次式らで表わされる。

モードI条件:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 2\nu \end{Bmatrix} \quad (1.6-2)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (1.6-3)$$

モードII条件:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ -2\nu \sin \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.6-4)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left( \kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ -\cos \frac{\theta}{2} \left( \kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (1.6-5)$$

モードIII条件:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (1.6-6)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (1.6-7)$$

ただし,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \\ (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \end{cases} \quad (1.6-8)$$

ここで,  $E, \nu$  は縦弾性係数, ポアソン比である。また, 上式らの  $K_I, K_{II}, K_{III}$  はそれぞれ, モード I, モード II, モード III の応力拡大係数であり, 座標  $(r, \theta)$  に無関係である。

## (2) $J$ 積分

線積分法はき裂近傍のポテンシャルエネルギーからエネルギー解放率を求める手法で, Rice により提案された方法である。図 1.6-3 に示すように, き裂に沿って  $x$  軸をとり, き裂近傍に曲線  $\Gamma$  を考える。構造物に物体力が作用せず, また, き裂内面に外力が働かないとするならば, この曲線  $\Gamma$  に沿い式 (1.6-9) の積分を行なうと, その値は  $\Gamma$  の経路に依存せず一定値となる。この値を  $J$  とおき, この積分を  $J$  積分と呼んでいる。

$$J = \int_{\Gamma} \left( W dy - \{T\}^T \frac{\partial \{u\}}{\partial x} ds \right) \quad (1.6-9)$$

ここで,  $W$  はひずみエネルギー密度,  $\{T\}$  は  $\Gamma$  に沿う外向き法線応力のベクトル,  $\{u\}$  は  $\Gamma$  上の点の変位ベクトルである。

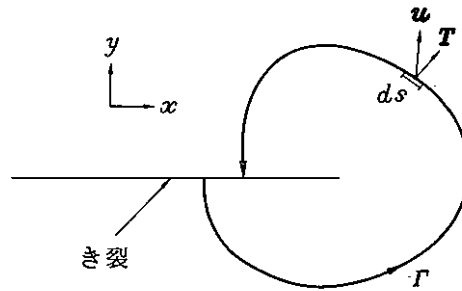


図 1.6-3  $J$  積分

また, 線形破壊力学では,  $J$  はひずみエネルギー解放率  $y$  に一致し, モード I の場合には次式が成り立つ。

$$J = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{K+1}{8G} K_I^2 \quad (1.6-10)$$

ここで,  $a$  はき裂の長さを表わす。そして平面ひずみにおける応力拡大係数は次のようになる。

$$K_I = \sqrt{\frac{J E}{1-\nu^2}} \quad (1.6-11)$$

3次元問題に対するき裂前縁の任意の点における3次元  $J$  積分値, すなわち基準座標系  $(X, Y, Z)$  各方向の  $J$  積分値  $(J_x, J_y, J_z)$  は次式らで表わされる。

$$J_x = \int_{\Gamma} \left( W n_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial X} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial P} P_x - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial u_i}{\partial X} \right) \right\} dA \quad (1.6-12)$$

$$J_Y = \int_{\Gamma} \left( w n_Y - T_i \frac{\partial u_i}{\partial Y} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial P} P_Y - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial u_i}{\partial Y} \right) \right\} dA \quad (1.6-13)$$

$$J_Z = \int_{\Gamma} \left( w n_Z - T_i \frac{\partial u_i}{\partial Z} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \frac{\partial W}{\partial P} P_Z - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial u_i}{\partial Z} \right) \right\} dA \quad (1.6-14)$$

ここで、 $n_i$  ( $i=X, Y, Z$ ) は積分経路 $\Gamma$ に沿った外向きの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の成分であり、 $\mathbf{P}$ は積分領域 $A$ に対する外向き単位法線ベクトルである(図1.6-4, 1.6-5参照)。

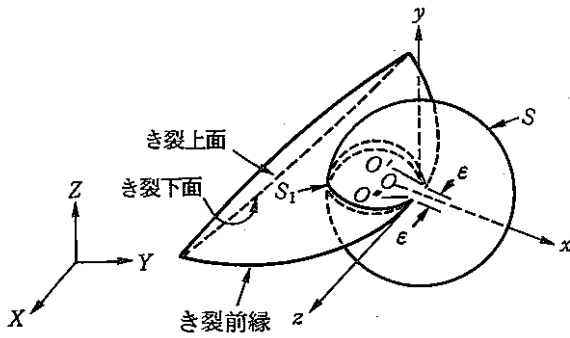


図 1.6-4 任意の積分曲面  $S$

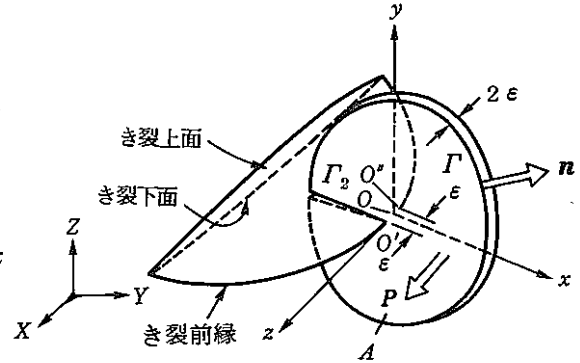


図 1.6-5 3次元 $J$ 積分のための積分経路 $\Gamma$ と積分領域 $A$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ )

したがって、3次元 $J$ 積分値は各方向の $J$ 積分値( $J_X, J_Y, J_Z$ )を用いて、式(1.6-15)から得られる。

$$J = J_X \cos \theta_0 + J_Y \cos \varphi_0 + J_Z \cos \phi_0 \quad (1.6-15)$$

ここで、 $\theta_0, \varphi_0, \phi_0$ は $x$ 軸と( $X, Y, Z$ )軸とのなす角である。

### (3) $\hat{J}$ 積分

Rice が提案した $J$ 積分は非線形弾性体に対して定式化されている。そのため弾塑性問題において $J$ 積分が、き裂先端近傍の積分経路独立な破壊力学パラメータとして、物理的な意味をもつのは、全ひずみ理論に従う弾塑性体が単調増加荷重を負荷される場合に限られている。

一般に弾塑性解析法は、ひずみ増分理論に基づいて定式化されていることが多い。ここでは、青木等が提案しているひずみ増分理論による3次元弾塑性体におけるエネルギー解放率として、Riceの $J$ 積分を拡張した $\hat{J}$ 積分について示す。

3次元問題に対するき裂前縁の任意の点における3次元 $\hat{J}$ 積分値、すなわち基準座標系( $X, Y, Z$ )各方向の $\hat{J}$ 値( $\hat{J}_X, \hat{J}_Y, \hat{J}_Z$ )は次式らで表わされる。

$$\hat{J}_X = \int_{\Gamma} \left( -T_i \frac{\partial u_i}{\partial X} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial u_i}{\partial X} \right) \right\} dA \quad (1.6-16)$$

$$\hat{J}_Y = \int_{\Gamma} \left( -T_i \frac{\partial u_i}{\partial Y} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial u_i}{\partial Y} \right) \right\} dA \quad (1.6-17)$$

$$\hat{J}_z = \int_{\Gamma} \left( -T_i \frac{\partial u_i}{\partial Z} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial u_i}{\partial Z} \right) \right\} dA \quad (1.6-18)$$

したがって、3次元 $\hat{J}$ 積分値は各方向の $\hat{J}$ 積分値 ( $\hat{J}_X, \hat{J}_Y, \hat{J}_Z$ ) を用いて、式(1.6-15)と同様に次式から得られる。

$$\hat{J} = \hat{J}_X \cos \theta_0 + \hat{J}_Y \cos \varphi_0 + \hat{J}_Z \cos \phi_0 \quad (1.6-19)$$

#### (4) $J'$ 積分

き裂先端近傍においてクリープ現象により、大きい変形や応力の再配分等が生じている場合には、 $J$ 積分をそのまま適用することはできない。

いま、応力・クリープひずみ速度関係が Hoff の類似により  $\dot{\epsilon} = K \sigma^n$  (Norton 則) で与えられると、き裂先端の特異応力場は式(1.6-20)で表わされる。

$$\sigma \cong r^{-1/(n+1)} \quad (1.6-20)$$

この場合には、 $J$ 積分と同様にクリープ $J$ 積分が定義でき、この積分を $J'$ 積分と呼び式(1.6-21)で表わされる。

$$J' = \int_{\Gamma} \left( \dot{W} n_x - \{T\}^r \frac{\partial \{\dot{u}\}}{\partial x} \right) dS \quad (1.6-21)$$

ここで、 $\dot{W}$ は次式で与えられる。また( $\dot{\quad}$ )は時間微分を意味する。

$$\dot{W} = \int_0^{\dot{\epsilon}_{ij}} \sigma_{ij} \alpha \dot{\epsilon}_{ij} \quad (1.6-22)$$

$J'$ 積分値は特異応力場の強度を表わし、構造物の形状やき裂の大きさに依存しない破壊力学パラメータとなる。

3次元問題に対するき裂前縁の任意の点における3次元 $J'$ 積分値、すなわち基準座標系(X, Y, Z)各方向の $J'$ 積分値 ( $J'_X, J'_Y, J'_Z$ ) は次式らで表わされる。

$$J'_X = \int_{\Gamma} \left( \dot{W} n_x - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \frac{\partial \dot{W}}{\partial P} P_x - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X} \right) \right\} dA \quad (1.6-23)$$

$$J'_Y = \int_{\Gamma} \left( \dot{W} n_y - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial Y} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \frac{\partial \dot{W}}{\partial P} P_y - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial Y} \right) \right\} dA \quad (1.6-24)$$

$$J'_Z = \int_{\Gamma} \left( \dot{W} n_z - T_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial Z} \right) d\Gamma + \iint_A \left\{ \frac{\partial \dot{W}}{\partial P} P_z - \frac{\partial}{\partial P} \left( \sigma_{ij} P_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial Z} \right) \right\} dA \quad (1.6-25)$$

したがって、3次元 $J'$ 積分値は各方向の $J'$ 積分値 ( $J'_X, J'_Y, J'_Z$ ) を用いて、式(1.6-15)と同様に次式から得られる。

$$J' = J'_X \cos \theta_0 + J'_Y \cos \varphi_0 + J'_Z \cos \phi_0 \quad (1.6-26)$$

## 1.6.2 破壊力学パラメータの計算方法

ここでは、前述の破壊力学パラメータである各積分を求める線積分の計算方法について FINAS における  $J$  積分の方法を述べる。式(1.6-9)は次式のように書き換えることができる。

$$J = \int_{\Gamma} \left( W n_x - \{n\}^T \{\sigma\} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} \right) ds \quad (1.6-27)$$

ここで、 $\{n\}$  は積分径路  $\Gamma$  の外向き単位法線ベクトルで、 $n_x$  はその  $x$  軸方向の成分である。また、 $\{\sigma\}$  は評価点における応力を表わす。ひずみを  $\{\epsilon\}$  とすると、上式の  $W$  は次のように表わされる。

$$W = \int_0^{\epsilon} \{\sigma\}^T d\{\epsilon\} \quad (1.6-28)$$

有限要素法では式(1.6-27)は、径路  $\Gamma$  を含む要素についてその総和をとることにより表わされる。すなわち、

$$J = \sum_{i=1}^m J^{(i)} \quad (1.6-29)$$

ここで、 $m$  は径路  $\Gamma$  を含む要素の数であり、 $J^{(i)}$  は式(1.6-27)より次のように表わされる。

$$J^{(i)} = \int_{S_1^{(i)}}^{S_2^{(i)}} \left( W n_x - \{n\}^T \{\sigma\} \frac{\partial \{u\}}{\partial x} \right) ds \quad (1.6-30)$$

ただし、 $S_1^{(i)}$ 、 $S_2^{(i)}$  は要素  $(i)$  の積分径路  $\Gamma$  の始点と終点の座標である。要素内での線積分は、要素剛性の数値積分および応力ひずみの評価点となる要素の積分点をとる径路によって行なわれる。四辺形要素の場合、要素のある一辺上の点が始点となり対応する反対側の辺上の点が終点となる(図1.6-6参照)。式(1.6-28)を増分形にすると次式ようになる。

$$W^n = \sum_{k=1}^n \{\sigma\}_k^T \Delta\{\epsilon\}_k \quad (1.6-31)$$

上式は  $n$  回目の増分におけるひずみエネルギーであり、添字  $k$  は  $k$  番目の増分後における値を表わす。FINAS では式(1.6-30)、(1.6-31)により  $J$  積分値を評価している。図1.6-7に破壊力学解析の流れ図を示す。

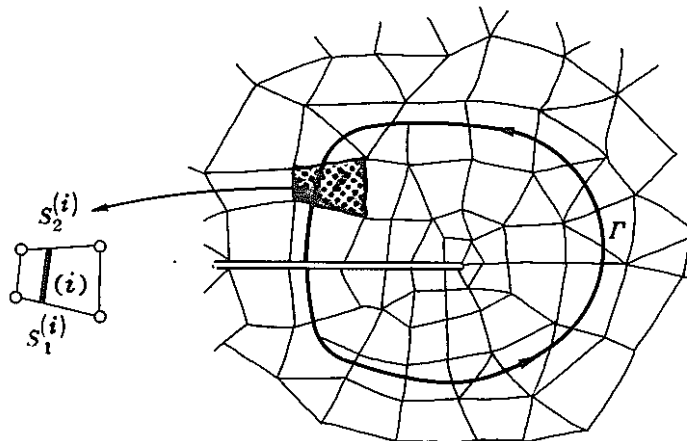


図1.6-6 FINAS における  $J$  積分

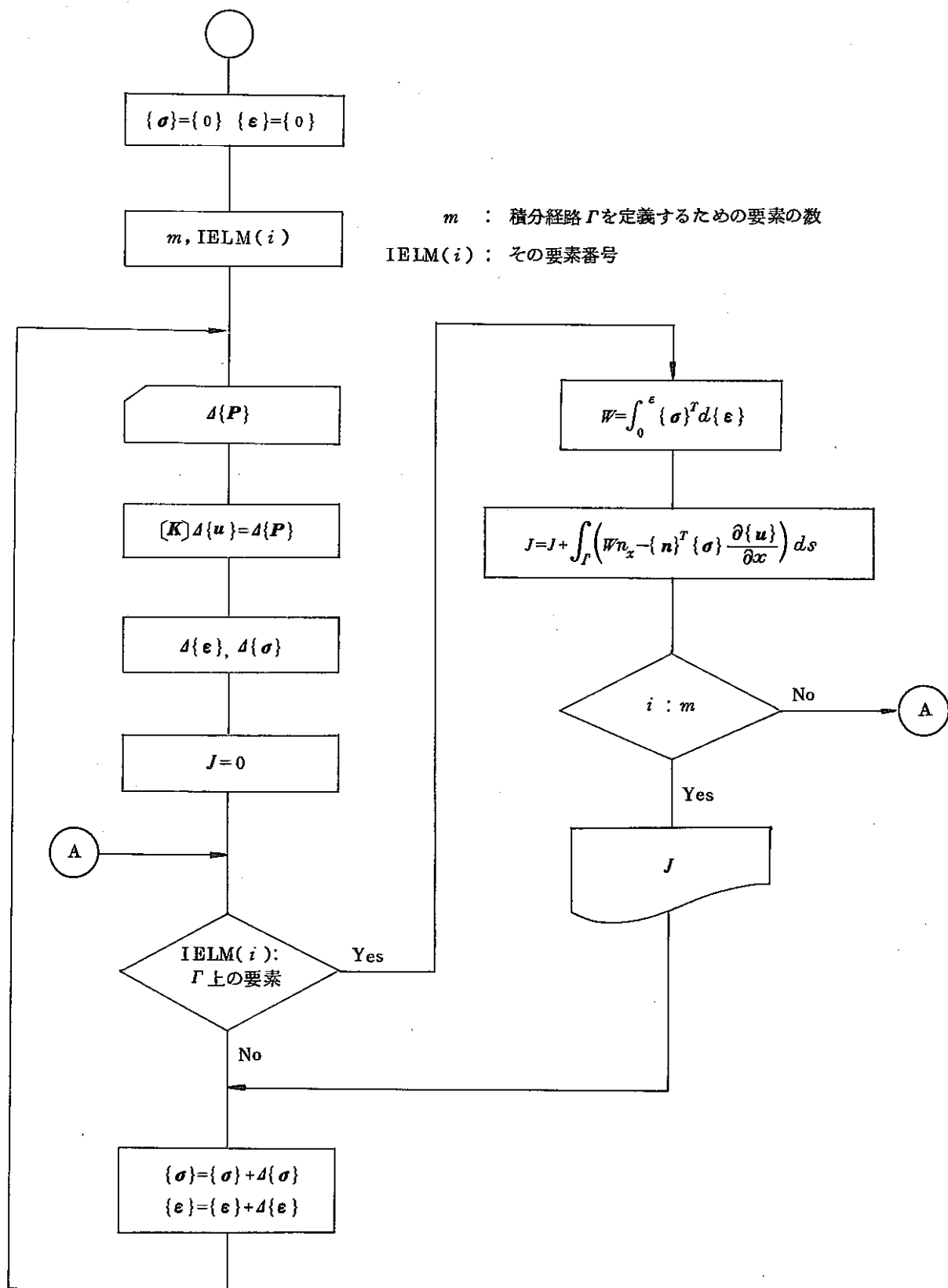


図 1.6-7 破壊力学解析の流れ

〔参考文献〕

- 1) D.M. Parks, " A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Elastic Crack Tip Stress Intensity Factors ", Structural Analysis with MARC-CDC, Background Papers, Volum V, MARC Analysis Research Corporation.
- 2) Roshdy S. Barsoum, " On The Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics ", Int. J. Numer. Meth. Eng., 1975.
- 3) D.M. Park, " The Virtual Crack Extention Method for Nonlinear Material Behavior ", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 12, 1977.
- 4) R. D. Henshell, et al., " Crack Tip Finite Element Are Unnecessary ", Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 9, 1975.
- 5) O. C. Zienkiewicz, " The Finite Element Method in Engineering and Science ", the third edition.
- 6) 石田 誠, " き裂の弾性破壊と応力拡大係数 ", 破壊力学と材料強度講座 2.
- 7) J. R. Rice et al. " Recent finite element studies in plasticity and fracture mechanics ", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 17/18 (1979), pp. 411-442.
- 8) T.K. Hellen, " A SUBSTRUCTURING APPLICATION OF VIRTUAL CRACK EXTENSION METHOD ", INT. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 19, 1713-1737 (1983)
- 9) 青木 繁, " 弾性破壊力学と弾塑性破壊力学 ", 総合材料強度学 5.
- 10) 青木, " 温度場における  $\hat{J}$  積分 ", 機論 47-415 (昭 56-3)
- 11) 岸本, 青木, " き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて ", 機論 46-410 (昭 55-10)
- 12) 大路, 小倉, 久保, " クリープ変形初期のき裂先端近傍の応力・ひずみ場と修正  $J$  積分 ", 材料, 第 29 巻, 第 320 号 (昭 55-5).



## 1.7 動的解析

動的構造解析の手法は、直接積分法によるものとモーダル法によるものに分類されることが一般的である。これらの手法は一見まったく異なるものに思えるが、実際には密接に関連した解析法である。動的問題は離散化過程を経て節点に関する2階の連立常微分方程式で表わされる。この動的平衡方程式をモーダル法や時間方向に離散化を仮定する直接積分法で解析することになる。材料非線形性や幾何学的非線形及び衝撃などの問題では直接積分法で解析を行なうことが多い。

動的問題は静的問題に比べて平衡方程式が複雑であり、計算効率を改善するために種々の手法が提案されており、モーダル法などはその良い例である。以下の各節では FINAS における動的問題の有限要素定式、モーダル法定式、直接積分法定式について説明する。

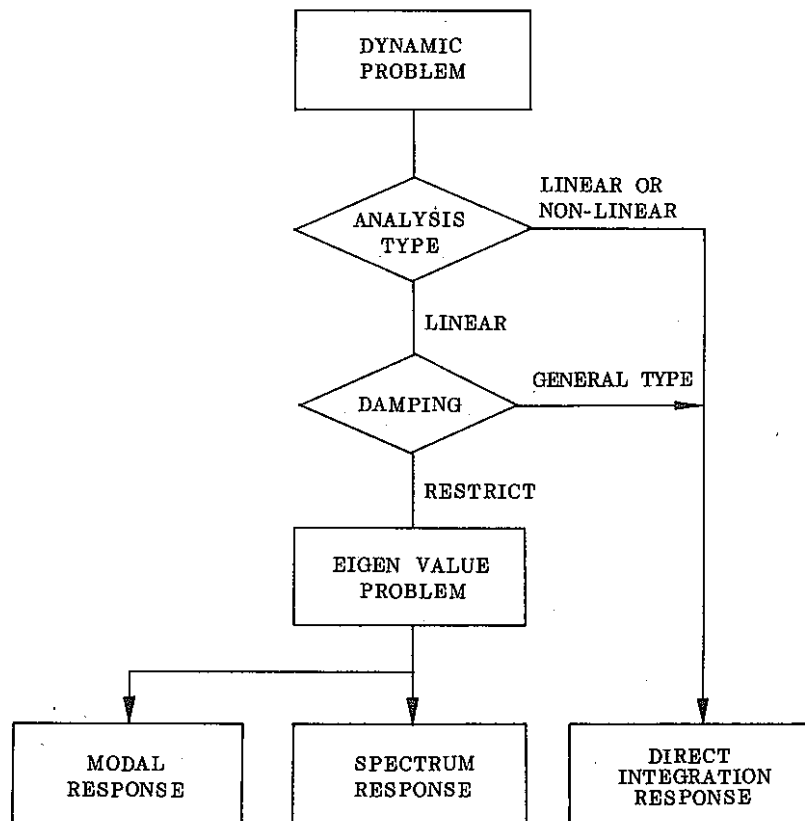


図 1.7-1 動的解析手法の分類

### 1.7.1 動的問題の有限要素法平衡方程式

動的構造解析の有限要素平衡方程式を仮想仕事の原理を利用して導く。D'Alembert の原理を考慮して時刻  $t$  における領域  $V$ 、表面力の作用する境界を  $A$  とした場合の仮想仕事式は、式 (1.7-1) で与えられる。

$$\int_V \delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_t dv - \int_V \delta\{\mathbf{u}\}^T (\{\mathbf{f}_B\}_t - \rho_t \{\dot{\mathbf{u}}\}_t - c_t \{\dot{\mathbf{u}}\}_t) dv - \int_S \delta\{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{f}_T\}_t dS = 0 \quad (1.7-1)$$

ここで、減衰効果は速度に比例するものと仮定している。 $\delta\{\mathbf{u}\}$ と $\delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ は仮想変位と仮想ひずみであり、 $\{\boldsymbol{\sigma}\}_t$ は時刻 $t$ での応力、 $\{\mathbf{f}_B\}_t$ と $\{\mathbf{f}_T\}_t$ は物体力と表面力、 $\rho_t$ と $c_t$ は物質の質量と減衰係数である。式(1.7-1)において、ドットは時間に関しての微分を表わしている。境界条件としては、表面力の作用するもの、変位及び加速度などが規定されるものが考えられる。変位及び加速度が規定される境界条件の取り扱いについては、本章の終りで説明する。

有限要素法の離散化により、節点変位増分より要素内の変位、ひずみ、応力とそれに対応した仮想量は次のように表示する。

$$\Delta\{\mathbf{u}\}_t = [\mathbf{N}]\Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}, \quad \delta\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\delta\{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (1.7-2)$$

$$\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}, \quad \delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\delta\{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (1.7-3)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_t = \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t-1} + [\mathbf{D}^{ep}]\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t-1} + [\mathbf{D}^{ep}][\mathbf{B}]\Delta\{\hat{\mathbf{u}}\} \quad (1.7-4)$$

ここで、 $[\mathbf{N}]$ は補間関数、 $[\mathbf{B}]$ は変位ひずみ変換マトリックス、 $[\mathbf{D}^{ep}]$ は弾塑性を考慮した材料マトリックスである。式(1.7-2)～式(1.7-3)でのハット(^)は節点での状態量を表わし、例えば $\Delta\{\hat{\mathbf{u}}\}$ は節点変位の増分を表わしている。作用力、速度、加速度についても補間関数 $[\mathbf{N}]$ で表示すれば、式(1.7-1)の離散化式は仮想変位について整理できる。

$$\begin{aligned} & \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}^T \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}^{ep}] [\mathbf{B}] dv \Delta\{\hat{\mathbf{u}}\} + \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}^T \int_V [\mathbf{N}]^T \rho [\mathbf{N}] dv \cdot \{\hat{\mathbf{u}}\}_t + \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}^T \int_V [\mathbf{N}]^T c [\mathbf{N}] dv \cdot \{\hat{\mathbf{u}}\}_t \\ & = \delta\{\hat{\mathbf{u}}\}^T \left( \int_V [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv \cdot \{\hat{\mathbf{f}}_B\}_t + \int_S [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] ds \cdot \{\hat{\mathbf{f}}_T\} - \int_V [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t-1} dv \right) \end{aligned} \quad (1.7-5)$$

よって次のようなマトリックス形に整理できる。

$$[\mathbf{M}_s]\{\hat{\mathbf{u}}\}_t + [\mathbf{C}_s]\{\hat{\mathbf{u}}\}_t + [\mathbf{K}_s]\Delta\{\hat{\mathbf{u}}\} = \{\hat{\mathbf{f}}_s\}_t - \{\hat{\mathbf{R}}_s\}_{t-1} \quad (1.7-6)$$

ここで

$$[\mathbf{M}_s] = \int_V [\mathbf{N}]^T \rho [\mathbf{N}] dv \quad (1.7-7)$$

$$[\mathbf{C}_s] = \int_V [\mathbf{N}]^T c [\mathbf{N}] dv \quad (1.7-8)$$

$$[\mathbf{K}_s] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}^{ep}] [\mathbf{B}] dv \quad (1.7-9)$$

$$\{\hat{\mathbf{f}}_s\}_t = \int_V [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv \cdot \{\hat{\mathbf{f}}_B\}_t + \int_S [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] ds \cdot \{\hat{\mathbf{f}}_T\} \quad (1.7-10)$$

$$\{\hat{\mathbf{R}}_s\}_{t-1} = \int_V [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t-1} dv \quad (1.7-11)$$

また、線形解析では、式(1.7-6)は次のように全変位で表示できる。

$$[M_s]\{\hat{\ddot{u}}\}_t + [C_s]\{\hat{\dot{u}}\}_t + [K_s]\{\hat{u}\}_t = \{\hat{f}_s\}_t \quad (1.7-12)$$

次に、流体 - 構造連成解析での運動方程式を考える。構造体を線形弾性体とし、流体を非圧縮性、非粘性と仮定した場合の、流体 - 自由表面 - 構造物の動的方程式は次のように与えられる（10章 流体構造連成解析を参照）。

$$[T_{p\eta}]\{\hat{\dot{\eta}}\}_t + [K_p]\{\hat{P}\}_t - [R_p]\{\hat{\ddot{u}}\}_t = 0 \quad (1.7-13)$$

$$[K_\eta]\{\hat{\eta}\}_t - [T_{\eta p}]\{\hat{P}\}_t = 0 \quad (1.7-14)$$

$$[M_s]\{\hat{\ddot{u}}\}_t + [C_s]\{\hat{\dot{u}}\}_t + [K_s]\{\hat{u}\}_t + \frac{1}{\rho_F}[R_p]^T\{\hat{P}\}_t = \{\hat{f}_s\}_t \quad (1.7-15)$$

ここで、 $\{\hat{\eta}\}$  は流体自由表面の上下動変位を表わし、 $\{\hat{P}\}$  は流体の節点圧力である。式(1.7-13)の圧力 $\{\hat{P}\}$ を自由表面加速度 $\{\hat{\dot{\eta}}\}$ と構造加速度 $\{\hat{\ddot{u}}\}$ で表わし、式(1.7-14)と式(1.7-15)を整理すると、次のような流体 - 構造物連成方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_s - Q_F \\ -Q_F^T & M_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\ddot{u}} \\ \hat{\dot{\eta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\dot{u}} \\ \hat{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s & 0 \\ 0 & K_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.7-16)$$

ここで、

$$[\bar{M}_s] = [M_s] + \frac{1}{\rho_F}[R_p]^T[K_p]^{-1}[R_p] \quad (1.7-17)$$

$$[M_\eta] = \frac{1}{\rho_F}[T_{p\eta}]^T[K_p]^{-1}[T_{p\eta}] \quad (1.7-18)$$

$$[Q_F] = \frac{1}{\rho_F}[R_p]^T[K_p]^{-1}[T_{p\eta}] \quad (1.7-19)$$

よって、式(1.7-16)を次のように表わすことができる。

$$[M]\{\hat{\ddot{u}}\}_t + [C]\{\hat{\dot{u}}\}_t + [K]\{\hat{u}\}_t = \{f\}_t \quad (1.7-20)$$

次に、境界条件の取り扱い方法として、基盤より加速度が入力される場合を考える。図1.7-2に示すように、式(1.7-20)の節点自由度を基盤加振自由度（添字 $r$ ）と内部自由度（添字 $l$ ）に分ける。

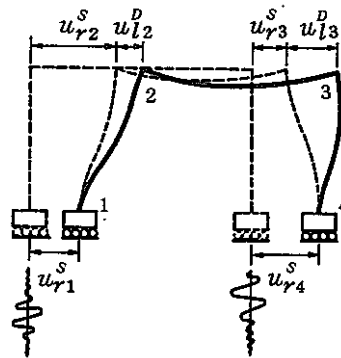


図 1.7-2 構造物の静的変位と動的変位

$$\begin{bmatrix} M_{ll} & M_{lr} \\ M_{rl} & M_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{u}_r \end{Bmatrix}_t + \begin{bmatrix} C_{ll} & C_{lr} \\ C_{rl} & C_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{u}}_l \\ \dot{\hat{u}}_r \end{Bmatrix}_t + \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{lr} \\ K_{rl} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{u}_r \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \hat{f}_l \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.7-21)$$

ここで、加振波の多点入力を考える Clough が提案した方法により、変位量を静的変位と動変位に分離する。

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_l \\ \hat{u}_r \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{u}_l^S \\ \hat{u}_r^S \end{Bmatrix}}_{\text{(静的)}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{u}_l^D \\ 0 \end{Bmatrix}}_{\text{(動的)}} \quad (1.7-22)$$

Clough は静的変位について次のような仮定を設けた。

$$[K_{ll}]\{\hat{u}_l^S\} + [K_{lr}]\{\hat{u}_r^S\} = 0 \quad (1.7-23)$$

式(1.7-23)は、基盤自由度に変位  $\{\hat{u}_r^S\}$  を与えたとき、内部自由度の変位  $\{\hat{u}_l^S\}$  と仮定するものである。式(1.7-22)と式(1.7-23)より、式(1.7-21)を整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} [M_{ll}]\{\hat{u}_l^D\}_t + [C_{ll}]\{\dot{\hat{u}}_l^D\}_t + [K_{ll}]\{\hat{u}_l^D\}_t &= \{\hat{f}_e\}_t + ([M_{ll}][K_{ll}]^{-1}[K_{lr}] - [M_{lr}])\{\hat{u}_r^S\}_t \\ &+ ([C_{ll}][K_{ll}]^{-1}[K_{lr}] - [C_{lr}])\{\dot{\hat{u}}_r^S\}_t \end{aligned} \quad (1.7-24) \quad (1.7-24)$$

式(1.7-24)は動変位についてのつり合い方程式である。よって、絶対形の変位、速度、加速度は次のように計算される。

$$\{\hat{u}_l\}_t = \{\hat{u}_l^D\}_t - [K_{ll}]^{-1}[K_{lr}]\{\hat{u}_r^S\}_t \quad (1.7-25)$$

$$\{\dot{\hat{u}}_l\}_t = \{\dot{\hat{u}}_l^D\}_t - [K_{ll}]^{-1}[K_{lr}]\{\dot{\hat{u}}_r^S\}_t \quad (1.7-26)$$

$$\{\hat{u}_l\}_t = \{\hat{u}_l^D\}_t - [K_{ll}]^{-1}[K_{lr}]\{\hat{u}_r^S\}_t \quad (1.7-27)$$

## 1.7.2 モーダル解析法

### (1) モーダル応答解析

調和自由振動を仮定した固有方程式は、式(1.7-24)より次のように表わされる。

$$[K_{ll}]\{\phi_l\} = \omega^2 [M_{ll}]\{\phi_l\} \quad (1.7-28)$$

ここで、 $\omega$ は固有方程式、 $\{\phi_l\}$ は固有ベクトルである。また、モーダル応答解析での基礎式を次のように仮定する。

$$[M_{ll}]\{\hat{u}_l^D\} + [C_{ll}]\{\dot{\hat{u}}_l^D\} + [K_{ll}]\{\hat{u}_l^D\} = \{f_l\} + [\tilde{M}_{lr}]\{\hat{u}_r\} \quad (1.7-29)$$

ここで、

$$[\tilde{M}_{lr}] = [M_{ll}][K_{ll}]^{-1}[K_{lr}] - [M_{lr}] \quad (1.7-30)$$

各固有モードに対応した一般化変位を  $\{X_i\}$  とすれば、応答変位  $\{u_i^D\}$  は次のように固有ベクトルの線形結合形で表わすことができる。

$$\{u_i^D\} = \{\phi_i^1\} X_1 + \{\phi_i^2\} X_2 + \cdots + \{\phi_i^N\} X_n \quad (1.7-31)$$

ここで、 $N$  はモードの次数を表わす。固有ベクトルは質量マトリックスと剛性マトリックスについて直交しているので、次のように正規形で表示することができる。

$$\{\phi_i\}^T [M_{ii}] \{\phi_i\} = [I], \quad \{\phi_i\}^T [K_{ii}] \{\phi_i\} = [Q] \quad (1.7-32)$$

式(1.7-31)と式(1.7-32)より、式(1.7-29)は一般化変位で書き直すことができる。

$$\{\ddot{X}_i\} + [\overset{*}{C}_{ii}] \{\dot{X}_i\} + [Q] \{X_i\} = \{\phi_i\}^T \{f_i\} + \{\phi_i\}^T [\tilde{M}_{ir}] \{\ddot{u}_r\} \quad (1.7-33)$$

$$[\overset{*}{C}_{ii}] = \{\phi_i\}^T [C_{ii}] \{\phi_i\} \quad (1.7-34)$$

式(1.7-34)は減衰項をのぞいて、非連成形であるので、減衰の評価として次のような比例減衰を仮定する。

$$[C_{ii}] = \alpha [M_{ii}] + \beta [K_{ii}] \quad (1.7-35)$$

ここで  $\alpha$  と  $\beta$  は減衰のパラメータであり、 $\alpha$  は粘性減衰を模擬したもので、一方  $\beta$  は構造減衰を模擬したものである。よって、 $[\overset{*}{C}_{ii}]$  は次のように表わされる。

$$[\overset{*}{C}_{ii}] = [\alpha + \beta w_i^2] \quad (1.7-36)$$

また、固有振動数に比例したモーダル減衰を仮定すると、

$$[C_{ii}] = [M_{ii}] \{\phi_i\} [2d w_i] \{\phi_i\}^T [M_{ii}] \quad (1.7-37)$$

$$[\overset{*}{C}_{ii}] = [2d w_i] \quad (1.7-38)$$

式(1.7-35)の比例減衰や、式(1.7-37)のモーダル減衰を仮定すると、式(1.7-33)はモード次数  $N$  に関する非連成の2階常微分方程式に帰着する。

$$\ddot{X}_i^i + 2h w_i \dot{X}_i^i + w_i^2 X_i^i = g_i^i(t) \quad i = 1 \sim N \quad (1.7-39)$$

ここで  $h$  として、比例減衰では  $h = (\alpha + \beta w_i^2)/2w_i$ 、モーダル減衰では  $h = d$  である。式(1.7-39)の右辺の加振項を時間  $t$  と時間  $t + \Delta t$  で線形変化を仮定すれば、

$$\ddot{X}_i^i + 2h w_i \dot{X}_i^i + w_i^2 X_i^i = a^i + b^i t \quad (1.7-40)$$

$$b^i = \frac{g_i^i(t + \Delta t) - g_i^i(t)}{(t + \Delta t) - t}, \quad a^i = g_i^i(t) - b^i t \quad (1.7-41)$$

よって、式(1.7-40)の常微分方程式の一般解は次のように与えられる。

$$X_i^i = c_1 e^{-hw_i t} \cos \sqrt{w_i^2 - w_i^2 h^2} t + c_2 e^{-hw_i t} \sin \sqrt{w_i^2 - w_i^2 h^2} t + \frac{a^i + b^i t}{w_i^2} - \frac{2hb}{w_i^3} \quad (1.7-42)$$

時刻  $t+\Delta t$  の一般化変位  $\{X_i\}_t$  より, 時刻  $t+\Delta t$  の応答変位は次のように計算される。

$$\{\hat{u}_i^D\}_{t+\Delta t} = \{\phi_i\}\{X_i\}_{t+\Delta t} \quad (1.7-43)$$

絶対形での変位, 速度, 加速度は式 (1.7-25), 式 (1.7-26), 式 (1.7-27) より求められる。例えば, 絶対形での変位は次のように計算される。

$$\{\hat{u}_i\}_{t+\Delta t} = \{\hat{u}_i^D\}_{t+\Delta t} - [K_{ll}]^{-1}[K_{lr}]\{u_r^S\} \quad (1.7-44)$$

## (2) スペクトル応答解析

式 (1.7-24) の運動方程式において, 加振力として単一加速度波を仮定すると, 式 (1.7-39) の一般化変位についての運動方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \ddot{X}_i^i + 2h\omega_i\dot{X}_i^i + \omega_i^2 X_i^i &= -(\gamma_X^i \ddot{u}_{rx} + \gamma_Y^i \ddot{u}_{ry} + \gamma_Z^i \ddot{u}_{rz}) \\ \gamma_X^i &= \{\phi_i^i\}^T [M_{ll}]\{I_X\}, \quad \gamma_Y^i = \{\phi_i^i\}^T [M_{ll}]\{I_Y\}, \quad \gamma_Z^i = \{\phi_i^i\}^T [M_{ll}]\{I_Z\} \end{aligned} \quad (1.7-45)$$

ここで,  $\gamma_X^i$ ,  $\gamma_Y^i$ ,  $\gamma_Z^i$  は刺激係数の各成分であり,  $\ddot{u}_{rx}$ ,  $\ddot{u}_{ry}$ ,  $\ddot{u}_{rz}$  は加振波の各成分を表わす。また,  $\{I_X\}$ ,  $\{I_Y\}$ ,  $\{I_Z\}$  は単位ベクトルを表わしている。

固有振動数  $\omega_i$  と減衰  $h$  に関する加振波  $\{\hat{u}_i\}$  に対応した応答変位スペクトルを  $S_D$  とすれば, 固有モード  $\{\phi_i\}$  に関する最大応答値は次のように表わされる。

$$\{\hat{u}_i^i\}^{\max} = \{\phi_i^i\} (|\gamma_X^i| S_{DX}(w_i, h) + |\gamma_Y^i| S_{DY}(w_i, h) + |\gamma_Z^i| S_{DZ}(w_i, h)) \quad (1.7-46)$$

よって, 最大応答変位は次のように仮定できる。

$$\{\hat{u}\}^{\max} = \left( \sum_{i=1}^N (\{\hat{u}_i^i\}^{\max})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7-47)$$

### 1.7.3 直接積分解析法

材料の非線形性や幾何学的非線形性を考慮した動的応答解析や, 減衰マトリックスがより一般的な形式の場合, 非減衰系の固有ベクトルを用いて, 連立動的平衡方程式を非連成常微分方程式化することはできない。よって, 式 (1.7-20) の連立常微分方程式を差分法などにより時間方向に離散化を仮定し, 直接積分法で解析することになる。

時間積分法のスキームとしては, 時刻  $t$  で平衡方程式を仮定する陽解法スキームと, 時刻  $t+\Delta t$  で方程式を仮定する陰解法スキームが考えられる。陰解法は時間増分  $\Delta t$  に依存しない無条件安定のスキームとされている。一方, 陽解法の場合, 質量マトリックス  $[M]$  と減衰マトリックス  $[C]$  を対角行列とすれば, 応答計算の過程において逆行列を計算する必要はない。しかし, 陽的解法は条件つき安定でしかなく, 時間増分  $\Delta t$  の選び方には一定の制約がおかれることになる。

陰解法の代表的なものとしては, Newmark の  $\beta$  法, Houbolt 法, Wilson の  $\theta$  法などがある。Goudereau と Talyer, Bathe らはこれらのスキームを詳しく調べ, Newmark の  $\beta$  法が他の方法に比べて優れていることを検証

している。

(1) Newmark の  $\beta$  法スキーム

単一加振波に限定した時刻  $t+\Delta t$  の運動方程式は、式 (1.7-6) より次のように増分形で仮定する。

$$[M_U]\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} + [C_U]\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} + [K_U]\Delta\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} = \{\hat{f}_l\}_{t+\Delta t} - [M_U][I_r]\{\hat{u}_r\} - \{\hat{R}\}_t \quad (1.7-48)$$

ここで、 $[I_r]$  は加振波を内部自由度へ付加するための単位マトリックスである。

Newmark の  $\beta$  法は線形加速度法の一拡張であるので、時刻  $t+\Delta t$  の速度と変位を次のように仮定する。

$$\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} = \{\hat{u}_l\}_t + ((1-\gamma)\{\hat{u}_l\}_t + \gamma\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t}) \Delta t \quad (1.7-49)$$

$$\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} = \{\hat{u}_l\}_t + \{\hat{u}_l\}_t \Delta t + \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \{\hat{u}_l\}_t + \beta \{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} \right) \Delta t^2 \quad (1.7-50)$$

$$\Delta\{\hat{u}_l\} = \{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} - \{\hat{u}_l\}_t \quad (1.7-51)$$

$\gamma$  と  $\beta$  は差分スキームの定数であり、無条件安定のためには次の条件をみたす必要がある。

$$\gamma \geq 0.5, \quad \beta \geq \frac{1}{4} (0.5 + \gamma)^2 \quad (1.7-52)$$

Newmark は、 $\gamma$  の値として  $\gamma=0.5$  を用いるべきであると推奨していた。 $\gamma=0.5$ 、 $\beta=0.25$  のとき Newmark の平均加速度法といわれるもので、良い精度が得られるとされている。

式 (1.7-50)、式 (1.7-49) より時刻  $t+\Delta t$  の加速度と速度は変位増分を用いて次のように表わされる。

$$\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left( \Delta\{\hat{u}_l\} - \Delta t \{\hat{u}_l\}_t - \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \{\hat{u}_l\}_t \right) \quad (1.7-53)$$

$$\{\hat{u}_l\}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta\{\hat{u}_l\} + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \{\hat{u}_l\}_t + \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \{\hat{u}_l\}_t \quad (1.7-54)$$

以上より、式 (1.7-48) を変位増分について整理する。

$$\begin{aligned} [\bar{K}_U] \Delta\{\hat{u}\} &= \{\hat{f}_l\}_{t+\Delta t} - \{\hat{R}_l\}_t - [M_U][I_r]\{\hat{u}_r\}_{t+\Delta t} + [M_U] \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \{\hat{u}_l\}_t + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \{\hat{u}_l\}_t \right) \\ &\quad + [C_U] \left( \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \{\hat{u}_l\}_t + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \{\hat{u}_l\}_t \right) \end{aligned} \quad (1.7-55)$$

$$[\bar{K}_U] = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [M_U] + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} [C_U] + [K_U] \quad (1.7-56)$$

式 (1.7-56) の有効剛性マトリックスは、材料の非線形性と幾何学的非線形性を考慮した剛性マトリックスを含むものである。式 (1.7-56) の平衡方程式は右辺第 2 項に残差修正項を含む非線形振動を念頭にしたものである。式 (1.7-56) より時刻  $t+\Delta t$  の変位が得られる。変位より、時刻  $t+\Delta t$  の加速度、速度、応力ひずみ状態が得られ、次のステップへ時刻を進める。Newmark の  $\beta$  法などの陰解法スキームでは、各時間ステップで  $[\bar{K}_U]$  マトリックスの計算、組み立て、逆行列計算が必要であるので、計算コストと記憶装置が大きなものとなる。次節では、非線形性を考慮した陽解法スキームについて考える。

## (2) 中央差分スキーム

中央差分スキームは Newmark の  $\beta$  法において、 $\gamma = \frac{1}{2}$ 、 $\beta = 0$  と仮定した場合に相当するもので、質量マトリックスと減衰マトリックスを対角行列とすれば、運動方程式を解くために逆行列計算は必要ない。ここで減衰効果を省略すると、式(1.7-48)に相当する時刻  $t$  の平衡方程式は次のように表示することも可能である。

$$[M]\{\hat{u}\}_t + \{\hat{R}\}_t = \{\hat{f}\}_t \quad (1.7-57)$$

$$\{\hat{u}\}_t = [M]^{-1}(\{\hat{f}\}_t - \{\hat{R}\}_t) \quad (1.7-58)$$

$$\{\hat{R}\}_t = \int_V [B]^T \{\sigma\}_t dv \quad (1.7-59)$$

式(1.7-58)より時刻  $t$  の加速度  $\{\hat{u}\}_t$  が得られると、時刻  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  の速度、時刻  $t + \Delta t$  の変位は次のように計算できる。

$$\{\hat{u}\}_{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \{\hat{u}\}_{t-\frac{1}{2}\Delta t} + \Delta t \{\hat{u}\}_t \quad (1.7-60)$$

$$\{\hat{u}\}_{t+\Delta t} = \{\hat{u}\}_t + \Delta t \{\hat{u}\}_{t+\frac{1}{2}\Delta t} \quad (1.7-61)$$

式(1.7-61)の時刻  $t + \Delta t$  の変位  $\{\hat{u}\}_{t+\Delta t}$  より、時刻  $t + \Delta t$  の応力  $\{\sigma\}_{t+\Delta t}$  を評価する。時刻  $t + \Delta t$  の外作用力  $\{\hat{f}\}_{t+\Delta t}$  と等価節点力  $\{\hat{R}\}_{t+\Delta t}$  を計算し、式(1.7-58)より時刻  $t + \Delta t$  の加速度  $\{\hat{u}\}_{t+\Delta t}$  を計算する。以上を応答時刻間くり返す。

中央差分スキームでは、積分法における時間ステップ  $\Delta t$  が、ある臨界値  $\Delta t_{cr}$  以下である必要がある。この臨界値は、全要素集合体の質量および剛性の特性から計算できる。

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} \quad (1.7-62)$$

ここで、 $T_n$  は有限要素モデルの最小周期であり、 $n$  は要素系の次数である。

中央差分スキームのように、ある臨界時間ステップ  $\Delta t_{cr}$  より小さい時間ステップ  $\Delta t$  を使う必要のある積分スキームは、条件安定であるといわれる。もし、 $\Delta t_{cr}$  より大きい時間ステップを用いると、積分は不安定である。積分が不安定である意味は、数値積分や計算の丸めによって生じる誤差が成長し、多くの場合に応答計算を役に立たないものにしてしまうということである。しかし、衝撃解析などの非線形性の大きい問題では、陽解法スキームを利用した手法が提案されている。

### 1.7.4 接触 - 衝撃問題の定式

接触 (contact) と衝撃 (impact) の定義としては、静的条件では接触として、動的条件では衝撃とするのが一般的である。接触問題は境界値問題であるかまたは連続体力学の原理による物体  $B^1$  と物体  $B^2$  が相互に作用する初期境界値問題である。接触問題の基本的原理は物体  $B^1$  と  $B^2$  が相互に入りこまないことである。

$$b^1 \cap b^2 = 0 \quad (1.7-63)$$

物体  $B^1$  と  $B^2$  の接触は次のように仮定される。

$$c = \partial b^1 \cap \partial b^2 \quad (1.7-64)$$

$v^1$  と  $v^2$  を  $\partial b^1$  と  $\partial b^2$  の  $x^1$ 、 $x^2$  の位置での物質粒子の速度とすれば、ある瞬間に  $x = x^1 = x^2$  となる。



$$v \cdot n = v^1 \cdot n = v^2 \cdot n \quad (1.7-65)$$

ここで、 $n$ は $x$ 位置での $c$ 面の単位法線ベクトルである。一方、 $x$ 位置での運動量が釣り合うためには、

$$t^1 + t^2 = 0 \quad (1.7-66)$$

ここで、 $t^a$ は $\partial b^a$ 面に関するCauchyの表面力ベクトルである。面 $c$ 上では引張り力が発生しないと仮定するので、

$$t^a \cdot n^a \leq 0 \quad (1.7-67)$$

$n^a$ は面 $\partial b^a$ の外向き単位法線ベクトルである。これにより物体が固着一体化することを除いている。式(1.7-63)から式(1.7-67)は接触問題の概念を一般化するものである。

$v^a$ と $t^a$ の接線方向成分は接面の摩擦特性より決定される。ここでは次の2つの単純化したケースを考察する。

ケースI：一旦接触した点は離反するまで $c$ 面として移動する。

$$v^1 = v^2 \quad (1.7-68)$$

今回の定式化では接面においてノンスリップ(完全摩擦)を仮定する。

ケースII： $t^a$ の接線方向成分をゼロとすることで摩擦なし、またはすべり接触条件となる。

$$t^a - (t^a \cdot n^a) n^a = 0 \quad (1.7-69)$$

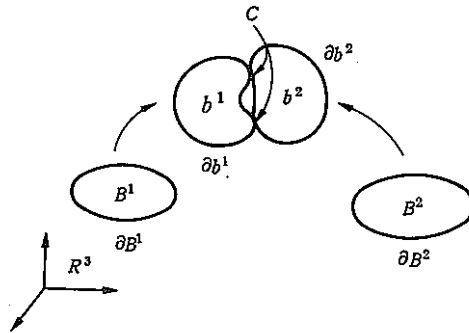


図 1.7-3 接触物体

### (1) Hertz タイプの接触問題

接触面を平面で近似して接面近傍の変形が微小ひずみで仮定されるとき Hertz タイプの問題としている。ここでは次の仮定を設ける。

- (i) 接面 $c$ の単位法線ベクトルは  $n \equiv n_i e_i \approx e_3$  であり、 $n_i$ は $R^3$ についての基準基底  $\{e_i\}_1^3$ の成分を表わしている(図1.7-4)。
- (ii) 接面上の変形と非変形の面積比は無視できる。そして物体 $\alpha$ のCauchyの表面力ベクトルとPiola-Kirchhoffの表面力ベクトル( $t^a$ と $T^a$ )は近似的に等しい。例えば  $t^a \approx T^a$

(i)と(ii)の仮定は次の意味を持つ。

$$t_3^a \approx t^a \cdot n \approx T^a \cdot n \approx T_3^a$$

$$\{t_1^a, t_2^a, 0\} \approx t^a - (t^a \cdot n) n \approx T^a - (T^a \cdot n) n \approx \{T_1^a, T_2^a, 0\}$$

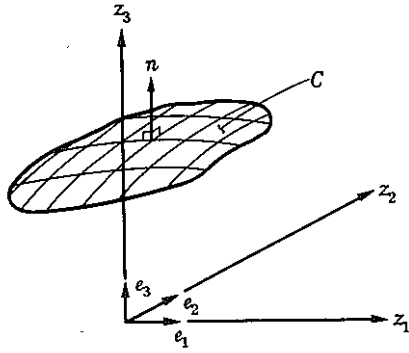


図 1.7-4 接触面の形状

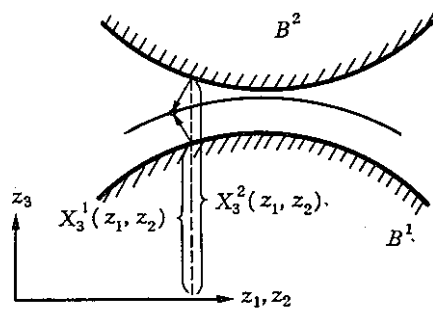


図 1.7-5 接触状態の形状

(iii) 接触する物体点の初期座標値はオーダー的に同じものである (図 1.7-5)。

以上の仮定による本定式化はヘルツタイプの理論より広範囲に適用が可能である。

## (2) 接面の空間的離散化

接面のシミュレーションを除けば接触問題の有限要素離散化は通常の方法で得られる。2つの物体が  $c$  面にそって接触しているとき、2つの独立物体の標準的変分式に次の項を付加すればよい。

$$\int_c \tau \cdot (x^1 - x^2) dc \quad (1.7-70)$$

界面  $c$  にそった適合性の強制は独立変数  $\tau$  により得られる ( $x^\alpha$  は物体  $\alpha$  の変形座標であり、 $\tau$  は界面を横断する Cauchy 表面力ベクトルである)。(i)の仮定より  $c$  面を  $Z_1-Z_2$  平面へ投影することで式 (1.7-70) が得られる。

式 (1.7-70) の離散化は節点のパラメータより次のようになる。

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^N \tau_{ij} (x_{ij}^1 - x_{ij}^2) \quad (1.7-71)$$

ここで  $i=1, 2, 3$  は空間の方向を表わし、 $N$  は接触節点のペアの数、 $\tau_{ij}$  は節点接触力である (図 1.7-6)。

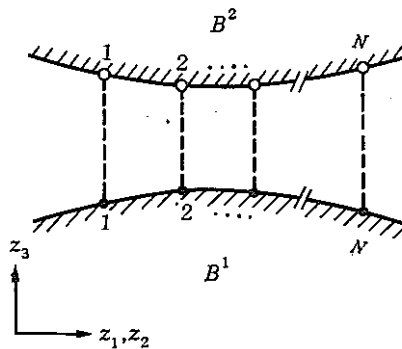


図 1.7-6 接触ペア節点の形状

接面での摩擦なし条件を求めるためには、式(1.7-70)と式(1.7-71)より  $i=1, 2$  項を除く。

$$\int_c \tau (x^1 - x^2) dc \quad (1.7-72)$$

$$\sum_{j=1}^N \tau_j (x_j^1 - x_j^2) \quad (1.7-73)$$

式(1.7-72)と式(1.7-73)では表示を簡便にするために添字3をのぞいている。よって、 $\tau_3$ は法線方向の節点接触力である。以下の説明では定式化を明確にするために摩擦なしのケースを取り扱う。

全体系にマトリックスをアセンブルするとき  $\tau_j$  を未知節点変位の中を含める。式(1.7-73)より接触剛性マトリックスが与えられる。 $j$  番目の接触節点について

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j^1 \\ \tau_j \\ x_j^2 \end{Bmatrix} \quad (1.7-74)$$

$j$  番目の接触ペア節点が接触したとき式(1.7-74)を全体系の剛性マトリックスへ加える。式(1.7-74)の代りに次式とすれば  $j$  番目の接触節点は連成しないので、 $\tau_j = 0$  の結果となる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j^1 \\ \tau_j \\ x_j^2 \end{Bmatrix} \quad (1.7-75)$$

以上は接触を説明するために、剛性を変更するための大まかなアイデアをのべたものである。

### (3) 接触条件と離反条件

衝撃問題を数値的に解析することは、時刻( $t_1, t_2$ )の間で衝突する物体をモニターすることである。時刻  $t_1$  での物体の状態が既知であり、時刻  $t_1$  と  $t_2$  の間で境界の一部が一体化する。問題は時刻  $t_2$  の接面  $c$  を求めることであり、 $c$  面の表面力、速度、加速度を計算することである。このためには前進ステップの時間積分が必要となり、時間増分  $\Delta t$  は特異面の進展理論を含む局所的波動伝播理論より推定できる。同様のことが物体の離反についてもみられる。

次に、線形弾性体について離散化した衝撃と離反の条件を説明する。ここではコンシステントマスではなく集中マスを用いる。これは定式化を簡便にするのであるが、低次の要素でも精度を損なうものではない。摩擦なしのケースでの接触節点ペアの運動方程式は次のようになる。

$$M^\alpha \ddot{u}^\alpha + K^\alpha (u^\alpha) - (-1)^\alpha \tau = 0 \quad (1.7-76)$$

ここで、肩添字  $\alpha$  は物体を区別するもので、 $M^\alpha$  は集中マス係数、 $K^\alpha (u^\alpha)$  は弾性力、そして  $\tau$  は接触力である。もし未接触では  $\tau = 0$ 、他では  $\tau > 0$  である。

前ステップで未接触状態が今回のステップで接触したとき、

$$(i) \ d \equiv x^1 - x^2 < -TOL \quad \text{or} \quad (ii) \ d < TOL \text{ and } \tau > 0 \quad (1.7-77)$$

ここで、 $TOL$  は丸め誤差の安全対処のための正の数である（例えば  $TOL=10^{-1} \times L$ ,  $L$  は構造の長さ）。接触した結果として変位が適合する。例えば、 $u^2 - u^1 = d_0 \equiv X^1 - X^2$  で、ここで  $X^1$  と  $X^2$  は初期形状で測定した粒子の座標である。速度  $\dot{u}^1$  と  $\dot{u}^2$  そして加速度  $\ddot{u}^1$  と  $\ddot{u}^2$  は変位より計算されるが、衝撃条件を課する。接触節点ペアの速度、接触力、加速度の修正値を次のように仮定する。

$$V_+ = \frac{(\rho_0^2 U^2 \dot{u}_{-1}^2 - \rho_0^1 U^1 \dot{u}_{-1}^1)}{(\rho_0^2 U^2 - \rho_0^1 U^1)} \quad \text{or} \quad \frac{M^2 \dot{u}_{-1}^2 + M^1 \dot{u}_{-1}^1}{(M^1 + M^2)} \quad (1.7-78)$$

$$\tau_+ = \tau_{-1} - \frac{M^1 M^2}{M^1 + M^2} (\ddot{u}_{-1}^2 - \ddot{u}_{-1}^1) \quad (1.7-79)$$

$$\ddot{u}_+ = \frac{(M^1 \ddot{u}_{-1}^1 + M^2 \ddot{u}_{-1}^2)}{(M^1 + M^2)} \quad (1.7-80)$$

ここで、 $\rho_0^\alpha$  は初期形状での物体の密度、 $U^\alpha$  は物体の波動速度（wave velocity）、例えば3次元体では、膨張速度（dilatational velocity）や梁では棒の波動速度である。添字（-1）は前ステップでの最終値、添字（-）は現ステップでのくり返し計算での最終値である。式（1.7-78）の右辺は衝撃前の値（ $\dot{u}_{-1}^1$ ,  $\dot{u}_{-1}^2$ ）に依存している。これは波動伝播理論に適合するもので、数値計算上では重要なことである。例えば、現時間ステップの最終くり返しでの値（ $\dot{u}_{-1}^1$ ,  $\dot{u}_{-1}^2$ ）を用いることは著しく劣った結果となる（急激な解の発散や振動）。一方、 $\tau_+$  と  $\ddot{u}_+$  は最後のくり返し計算（ $\tau_{-1}$ ,  $\ddot{u}_{-1}^1$ ,  $\ddot{u}_{-1}^2$ ）より求める。接触状態は  $u_{-1}^1$  と  $u_{-1}^2$  が適合しているので  $\tau_+$  と  $\ddot{u}_+$  について式（1.7-76）を解く。

$$M^\alpha \ddot{u}_+ + K^\alpha (u_{-1}^\alpha) - (-1)^\alpha \tau_+ = 0 \quad (1.7-81)$$

前回までのくり返し計算の式（1.7-76）から式（1.7-81）を引く。

$$M^\alpha \ddot{u}_{-1} + K^\alpha (u_{-1}^\alpha) - (-1)^\alpha \tau_{-1} = 0 \quad (1.7-82)$$

このようにして式（1.7-79）、式（1.7-80）を求める。式（1.7-81）による衝突後の状態について運動方程式は自動的に満足する。

次に離反条件について考察する。これは衝撃条件と同様の概念である。局所的波動伝播解析より前離反での値  $\tau_{-1}$  と  $V_{-1}$  より離反後の速度  $V_+^1$  と  $V_+^2$  は次のように仮定する。

$$V_+^\alpha = V_{-1} + (-1)^\alpha \tau_{-1} / \rho_0^\alpha U^\alpha A^\alpha \quad \text{or} \quad V_{-1} + (-1)^\alpha \Delta t \tau_{-1} / 2M^\alpha \quad (1.7-83)$$

ここで、 $A^1$  と  $A^2$  は接触する節点の支配面積である。同時に、 $\tau_+$  はゼロとする。 $\tau_+ = 0$  として運動方程式を満足するように式（1.7-76）の加速度を調整する。

$$\ddot{u}_+^\alpha = \ddot{u}_{-1}^\alpha - (-1)^\alpha \tau_{-1} / M^\alpha \quad (1.7-84)$$

ここで、 $\ddot{u}_+^1$  と  $\ddot{u}_+^2$  は離反後での修正した加速度、 $\ddot{u}_{-1}^1$  と  $\ddot{u}_{-1}^2$  と  $\tau_{-1}$  は現ステップでの最終くり返し計算の値である。離反が発生するか否かは次のようにして決定する。

$\tau < 0$ （接触力が引張り）のとき離反する。

$\tau > 0$  であるが前ステップ  $\tau_{-1}$  の2%以下であるときの離反とする。

また、メッシュサイズは  $(\Delta X_3)^\alpha = \Delta t U^\alpha$  程度で規則的なものが望ましい。ここで、 $(\Delta X_3)^\alpha$  は物体  $\alpha$  の要素の長さである (図 1.7-7)。

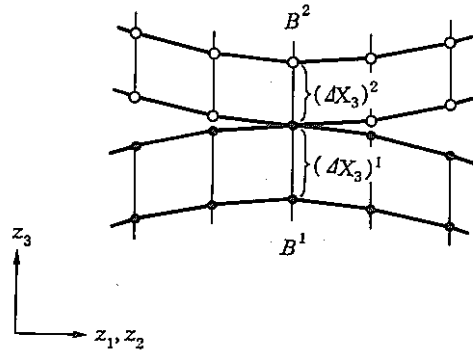


図 1.7-7 接触面の有限要素モデル

#### (4) 解析アルゴリズム

以上の議論を踏まえて弾性体における接触問題のアルゴリズムを説明する。モデル化として接触ペア節点については図 1.7-8 のような局所座標系を定義して接触方向とすべり方向を明確に定義する必要がある。これらの節点に関連した剛性マトリックス、質量マトリックス、荷重ベクトル等は局所系へ座標変換する必要がある。また、接触問題は非線形性の高い現象であるので、運動平衡方程式は増分形で解く必要がある。全体形で解く場合には接触する両物体間での力の分配に不都合が生ずることが予測できるからである。

Newmark の  $\beta$  法 (平均加速) による時刻  $t + \Delta t$  の増分形での運動平衡方程式は次のようになる。

$$[K_D] \Delta \{\hat{u}\} = \Delta \{\hat{F}\} + \{\hat{R}\} + [M] \left( \frac{1}{4\Delta t} \{\hat{u}\}_t + \frac{1}{2} \{\hat{\dot{u}}\}_t \right) + [C] 2\{\hat{u}\}_t \quad (1.7-85)$$

$$[K_D] = \frac{1}{4\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] + [K] \quad (1.7-86)$$

$$\{\hat{R}\} = \{\hat{F}\}_t - [M] \{\hat{\ddot{u}}\}_t - [C] \{\hat{\dot{u}}\}_t - \int_V [B]^T \{\sigma\}_t dv \quad (1.7-87)$$

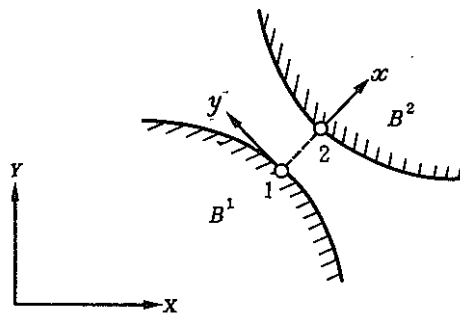


図 1.7-8 接触ペア節点での局所座標系

よって、時刻  $t + \Delta t$  の変位は次のように計算される。

$$\{\hat{u}\}_{t+\Delta t} = \{\hat{u}\}_t + \Delta\{\dot{u}\} \quad (1.7-88)$$

局所系での  $j$  番目の接触ペア節点の変位は  $(\hat{u}_{j1}^1)_{t+\Delta t}$ 、 $(\hat{u}_{j1}^2)_{t+\Delta t}$  であるので、このペアが接触したときのオーバーラップ量  $\delta$  は

$$\delta = (\hat{u}_{j1}^1)_{t+\Delta t} - (\hat{u}_{j1}^2)_{t+\Delta t} - \text{GAP} \quad (1.7-89)$$

ここで、GAP はペア節点間のギャップ量である。このオーバーラップ量を解消するように変位を修正する（すべり方向も同様）。

$$\delta u_{j1}^1 = -\delta \frac{|(\hat{u}_{j1}^1)_{t+\Delta t}|}{|(\hat{u}_{j1}^1)_{t+\Delta t}| + |(\hat{u}_{j1}^2)_{t+\Delta t}|} \quad (1.7-90)$$

$$\delta u_{j1}^2 = +\delta \frac{|(\hat{u}_{j1}^2)_{t+\Delta t}|}{|(\hat{u}_{j1}^1)_{t+\Delta t}| + |(\hat{u}_{j1}^2)_{t+\Delta t}|} \quad (1.7-91)$$

例えば、式(1.7-90)と式(1.7-91)の修正量をペア節点の変位に付加して変位を修正する。この変位により速度、加速度を計算する。また、この修正した変位をベースにして応力を求め、応力と等価な節点力を計算して残差修正荷重に用いる。等価節点力を求めることで接触力ペア節点間で作用する力が得られるので、すべり評価と離反判定のために使用する。

表 1.7-1 接触-衝撃アルゴリズム

- |  |
|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 各要素の剛性マトリックス、質量マトリックス、減衰マトリックスを計算し、接触ペア節点の局所系について座標変換を行う。</li> <li>2. 時間増分 <math>\Delta t</math> を決めて実効剛性を組み立て分解する。</li> <li>3. 実効荷重を計算し、前進消去・後退代入より変位増分を求める。</li> <li>4. 変位を計算し接面の状態をチェックする。接触状態のペアはオーバーラップ量により変位を修正する。</li> <li>5. 変位と等価な節点力を求めすべり状態をチェックする。すべり状態にある接触ペア節点では接線方向の等価力を摩擦力と置換する。</li> <li>6. 修正した変位より速度、加速度を求める（衝撃による修正を考慮してもよい）。</li> <li>7. <math>\Delta t</math> が一定の時間ステップについて3~6をくり返す。</li> <li>8. <math>\Delta t</math> の変化に対応して2~7をくり返す。</li> </ol> |
|--|

## 1.8 熱伝導解析

本節では、FINAS システムの熱伝導解析の有限要素法による定式について説明する。

### 1.8.1 連続体の熱伝導方程式

内部発熱がある場合の熱伝導問題の基礎方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q - c \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.8-1)$$

$x_i$  は空間座標,  $T$  は温度,  $k_{ij}$  は熱伝導係数,  $Q$  は内部発熱量,  $t$  は時間,  $c$  は比熱,  $\rho$  は密度である。

境界条件としては, 次のものが一般的に考えられる。

a) 境界  $S_1$  で温度が規定される場合

$$T = T_p \quad (1.8-2)$$

b) 境界  $S_2$  で熱が入力される場合

$$-k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j = q \quad (1.8-3)$$

$n_j$  は境界  $S_2$  上における外向き法線ベクトルの成分であり,  $q$  は境界  $S_2$  において単位面積あたりに入熱される熱量である。

c) 境界面  $S_3$  で熱伝達がある場合

$$-k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j = h(T - T_0) \quad (1.8-4)$$

$h$  は熱伝達係数であり,  $T_0$  は外部雰囲気温度である。境界面  $S_3$  が熱伝達リンク状態である場合,  $T$  と  $T_0$  は熱伝達リンク両端での温度となる。

d) 境界  $S_4$  で放射をうける場合

$$-k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j = \sigma \varepsilon F(T^4 - T_\infty^4) \quad (1.8-5)$$

$\sigma$  は Stefan-Boltzmann 定数,  $\varepsilon$  は放射係数,  $F$  は表面の形状係数,  $T_\infty$  は放射源の温度である。

時刻  $t$  において, 式 (1.8-1) と等価で, 式 (1.8-3) と式 (1.8-4) を自然境界条件とする汎関数  $\chi$  は次式で与えられる。

$$\chi = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} + c \rho \cdot T - QT \right\} dV$$

$$+ \int_{S_2} qT dS + \int_{S_3} \frac{1}{2} h (T - T_0)^2 dS \quad (1.8-6)$$

## 1.8.2 有限要素法による定式

有限要素法による定式化において、解析すべき領域を  $M$  個の有限要素で離散化する。そして全体での汎関数  $\chi$  を次のように表わす。

$$\chi = \sum_{m=1}^M \chi_m \quad (1.8-7)$$

$\chi_m$  は式 (1.8-6) の積分の定義域を  $m$  番目の要素に適用したものである。

次に汎関数  $\chi_m$  を要素の節点温度を用いて表示する。要素  $m$  の内部における温度  $T_m$  とその時間微分  $\dot{T}_m$  は節点での温度とその時分微分値により次のように補間される。

$$T_m = [\phi]_m \{\hat{T}\}_m, \quad \dot{T}_m = [\dot{\phi}]_m \{\hat{T}\}_m \quad (1.8-8)$$

$[\phi]_m$  は要素  $m$  の補間関数である。  $\{\hat{T}\}_m$  は要素の節点温度であり、  $\{\hat{T}\}$  はその時間微分値である。式 (1.8-6) の汎関数を要素  $m$  について求めると次のようになる。

$$\chi_m = \frac{1}{2} \{\hat{T}\}_m^T ([K_1]_m + [K_2]_m) \{\hat{T}\}_m + \{\hat{T}\}_m^T [C]_m \{\hat{T}\}_m$$

$$- \{\hat{T}\}_m ([\hat{Q}_1]_m + [\hat{Q}_2]_m + [\hat{Q}_3]_m) \quad (1.8-9)$$

$$[K_1]_m = \int_{V_m} \frac{\partial \{\phi\}_m}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial \{\phi\}_m}{\partial x_j} dV \quad (1.8-10)$$

$$[K_2]_m = \int_{S_3^m} h \{\phi\}_m [\phi]_m dS \quad (1.8-11)$$

$$[C]_m = \int_{V_m} c \rho \{\phi\}_m [\phi]_m dV \quad (1.8-12)$$

$$[\hat{Q}_1]_m = \int_{V_m} Q \{\phi\}_m dV \quad (1.8-13)$$

$$[\hat{Q}_2]_m = - \int_{S_2^m} q \{\phi\}_m dS \quad (1.8-14)$$



$$\{\hat{Q}_3\}_m = \int_{S_3^m} h T_0 \{\phi\}_m ds \quad (1.8-15)$$

$[K_1]_m$ ,  $[K_2]_m$ ,  $[C]_m$  は要素の熱伝導マトリックス, 熱伝達マトリックス, 熱容量マトリックスである。また  $\{\hat{Q}_1\}_m$ ,  $\{\hat{Q}_2\}_m$ ,  $\{\hat{Q}_3\}_m$  は発熱量, 入熱, 雰囲気温度による熱伝達と等価な節点熱流ベクトルである。要素間が熱伝達リンク状態である場合には式(1.8-11)が修正され, 式(1.8-15)の雰囲気温度による熱流ベクトルは零である。熱伝達リンク要素の補間関数を  $[\bar{\phi}]_m$ , 熱伝達境界面を  $S_3^m$ と仮定すれば, 熱伝達リンクマトリックスは次のように定義される。

$$[K_2]_m = \int_{S_3^m} h \{\bar{\phi}\}_m [\bar{\phi}]_m ds \quad (1.8-16)$$

### 1.8.3 全体有限要素の支配方程式

要素単位での汎関数  $\chi_m$  が得られたので, 次に全体領域での汎関数  $\chi$  を求め, これを最小とするための支配方程式を導く。

$$\begin{aligned} \chi = \sum_{m=1}^M \chi_m = \frac{1}{2} \{\hat{T}\}^T ([K_1] + [K_2]) \{\hat{T}\} + \{\hat{T}\}^T [C] \{\hat{T}\} \\ - \{\hat{T}\}^T (\{\hat{Q}_1\} + \{\hat{Q}_2\} + \{\hat{Q}_3\}) \end{aligned} \quad (1.8-17)$$

$\{\hat{T}\}$ ,  $\{\hat{Q}_1\}$ ,  $\{\hat{Q}_2\}$ ,  $\{\hat{Q}_3\}$  は  $\{\hat{T}\}_m$ ,  $\{\hat{Q}_1\}_m$ ,  $\{\hat{Q}_2\}_m$ ,  $\{\hat{Q}_3\}_m$  をすべての要素について集めたものである。 $[K_1]$ ,  $[K_2]$ ,  $[C]$  は各要素の  $[K_1]_m$ ,  $[K_2]_m$ ,  $[C]_m$  を対角に配したマトリックスである。

要素節点での温度  $\{\hat{T}\}$  およびその時間微分  $\{\dot{\hat{T}}\}$  は, 全領域の離散化モデルを構成する節点での温度  $\{T\}$  および  $\{\dot{T}\}$  と次のように関係づけられる。

$$\{\hat{T}\} = [A] \{T\}, \quad \{\dot{\hat{T}}\} = [A] \{\dot{T}\} \quad (1.8-18)$$

$[A]$  マトリックスは要素の結合状態を表すブーリアンマトリックス (boolean matrix) である。式(1.8-18)を式(1.8-17)へ代入する。

$$\chi = \frac{1}{2} \{T\}^T [K] \{T\} + \{T\}^T [C] \{\dot{T}\} - \{T\}^T \{Q\} \quad (1.8-19)$$

$$[K] = [A]^T ([K_1] + [K_2]) [A] \quad (1.8-20)$$

$$[C] = [A]^T [C] [A] \quad (1.8-21)$$

$$\{Q\} = [A]^T (\{\hat{Q}_1\} + \{\hat{Q}_2\} + \{\hat{Q}_3\}) \quad (1.8-22)$$

$[K]$ ,  $[C]$ ,  $\{Q\}$  は全体領域の熱伝導マトリックス, 熱容量マトリックス, 等価熱流ベクトルである。

汎関数  $\chi$  の停留値は, 最小値を与えるものである。 $\chi$  の最小値を決定する問題から適当な境界条件を伴った微分

方程式が得られ、これが支配方程式となる。 $\chi$ が極値をとるための必要条件は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \{0\} \quad (1.8-23)$$

したがって式(1.8-19)、式(1.8-23)より、次の支配方程式が得られる。

$$[K]\{T\} + [C]\{\dot{T}\} = \{Q\} \quad (1.8-24)$$

定常熱伝導解析の場合には式(1.8-24)の左辺第2項を零とおくことにより次の支配方程式が得られる。

$$[K]\{T\} = \{Q\} \quad (1.8-25)$$

境界条件として放射を考慮する場合には、支配方程式が非線形となり、式(1.8-24)と式(1.8-25)の右辺が修正され、反復計算が必要となる。

#### 1.8.4 非定常支配方程式の解法

非定常熱伝導解析の支配方程式である1階のマトリックス常微分方程式を差分法で解く方法について説明する。時間 $t$ における節点温度 $\{T\}_t$ を次のように2次式で仮定する。

$$\{T\}_t = \{\alpha_0\} + \{\alpha_1\}t + \{\alpha_2\}t^2 \quad (1.8-26)$$

時間 $t$ と $t+dt$ における節点温度とその時間微分 $\{\dot{T}\}_t$ 、 $\{T\}_t$ 、 $\{T\}_{t+dt}$ を用いて、式(1.8-26)を $\{\dot{T}\}_{t+dt}$ について表わすと次のようになる。

$$\{T\}_{t+dt} = \{T\}_t + \{\dot{T}\}_t dt + \frac{1}{2} (\{\dot{T}\}_{t+dt} - \{\dot{T}\}_t) dt \quad (1.8-27)$$

これを一般化して次のように表わすこともできる。

$$\{T\}_{t+dt} = \{T\}_t + \{\dot{T}\}_t dt + \beta (\{\dot{T}\}_{t+dt} - \{\dot{T}\}_t) dt \quad (1.8-28)$$

ここで $\beta = \frac{1}{2}$ は式(1.8-27)と同じ中央差分であり、 $\beta = 0$ は前進差分、 $\beta = 1$ は後退差分である。式(1.8-28)を $\{\dot{T}\}_{t+dt}$ について展開すると次のように表わされる。

$$\beta \{\dot{T}\}_{t+dt} = \frac{1}{dt} \{T\}_{t+dt} - \frac{1}{dt} \{T\}_t - (1-\beta) \{\dot{T}\}_t \quad (1.8-29)$$

式(1.8-24)のような1階の常微分連立方程式の解法としては、Crank-Nicolson法がよく用いられる。Crank-Nicolson法では時間 $t+dt$ で式(1.8-24)を導くことが基本となる。ここでは時間 $t+\beta dt$ で方程式を導く一般化Crank-Nicolson法について説明する。時間 $t+\beta dt$ で式(1.8-24)を導くと次のようになる。

$$\begin{aligned} [K](\beta \{T\}_{t+dt} + (1-\beta) \{T\}_t) + [C](\beta \{\dot{T}\}_{t+dt} + (1-\beta) \{\dot{T}\}_t) \\ = \beta \{Q\}_{t+dt} + (1-\beta) \{Q\}_t \end{aligned} \quad (1.8-30)$$

式(1.8-30)に式(1.8-29)を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left( \beta[\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] \right) \{ \mathbf{T} \}_{t+\Delta t} \\ & = \left( -(1-\beta)[\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] \right) \{ \mathbf{T} \}_t + \beta \{ \mathbf{Q} \}_{t+\Delta t} + (1-\beta) \{ \mathbf{Q} \}_t \end{aligned} \quad (1.8-31)$$

ここで  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $\{ \mathbf{Q} \}_{t+\Delta t}$  は時間  $t+\beta\Delta t$  での材料特性(熱伝導率, 比熱, 密度, 熱伝達係数)で計算されるものであるので, 材料特性が温度依存で与えられる場合は, 非線形問題となり反復計算が必要となる。

非線形問題の反復計算の代りに FINAS では予測子-修正子法(Predictor-corrector method)を用いている。この方法では, はじめに時間  $t$  での温度  $\{ \mathbf{T} \}_t$  により  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $\{ \mathbf{Q} \}_{t+\Delta t}$  を求める。

$$\begin{aligned} & \left( \beta[\mathbf{K}]_t + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}]_t \right) \{ \tilde{\mathbf{T}} \}_{t+\Delta t} \\ & = \left( -(1-\beta)[\mathbf{K}]_t + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}]_t \right) \{ \mathbf{T} \}_t + \beta \{ \mathbf{Q} \}_{t+\Delta t} + (1-\beta) \{ \mathbf{Q} \}_t \end{aligned} \quad (1.8-32)$$

上式を  $\{ \tilde{\mathbf{T}} \}_{t+\Delta t}$  について解き, 次式(1.8-33)で示す温度  $\{ \tilde{\mathbf{T}} \}$  で  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{C}]$ ,  $\{ \mathbf{Q} \}$  を計算する。

$$\{ \tilde{\mathbf{T}} \} = \beta \{ \tilde{\mathbf{T}} \}_{t+\Delta t} + (1-\beta) \{ \mathbf{T} \}_t \quad (1.8-33)$$

再度, 式(1.8-32)を解くことにより時間  $t+\Delta t$  の温度  $\{ \mathbf{T} \}_{t+\Delta t}$  を求めることになる。

次に増分形での支配方程式を求める。式(1.8-31)における  $\{ \mathbf{T} \}_{t+\Delta t}$ ,  $\{ \mathbf{Q} \}_{t+\Delta t}$  は次のように表わされる。

$$\{ \mathbf{T} \}_{t+\Delta t} = \{ \mathbf{T} \}_t + \Delta \{ \mathbf{T} \} \quad (1.8-34)$$

$$\{ \mathbf{Q} \}_{t+\Delta t} = \{ \mathbf{Q} \}_t + \Delta \{ \mathbf{Q} \} \quad (1.8-35)$$

式(1.8-31)に式(1.8-34), (1.8-35)を代入し,  $\Delta \{ \mathbf{T} \}$  について整理する。

$$\left( \beta[\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] \right) \Delta \{ \mathbf{T} \} = -[\mathbf{K}] \{ \mathbf{T} \}_t + \{ \mathbf{Q} \}_t + \beta \Delta \{ \mathbf{Q} \} \quad (1.8-36)$$

FINAS では式(1.8-36)を用いて増分形式で定式化し, 通常は  $\beta = \frac{1}{2}$  を用いた中央差分スキームで解析を行なう。

$$\left( \frac{1}{2} [\mathbf{K}] + \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{C}] \right) \Delta \{ \mathbf{T} \} = -[\mathbf{K}] \{ \mathbf{T} \}_t + \{ \mathbf{Q} \}_t + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{Q} \} \quad (1.8-37)$$

また, 非定常解析と定常解析を組み合わせて用いる問題では, 式(1.8-37)と次式の定常解析の方程式を用いて解析を行なう。

$$[\mathbf{K}] \Delta \{ \mathbf{T} \} = -[\mathbf{K}] \{ \mathbf{T} \}_t + \{ \mathbf{Q} \}_t + \Delta \{ \mathbf{Q} \} \quad (1.8-38)$$

定常解析において材料特性が温度依存で与えられる場合は, 非定常解析と同じように予測子-修正子法を用いて解

析される。

### 1.8.5 熱伝導解析のアルゴリズム

#### (1) 解析全体の流れ

図 1.8-1 には FINAS の定常および非定常の熱伝導解析アルゴリズムを流れ図で示した。

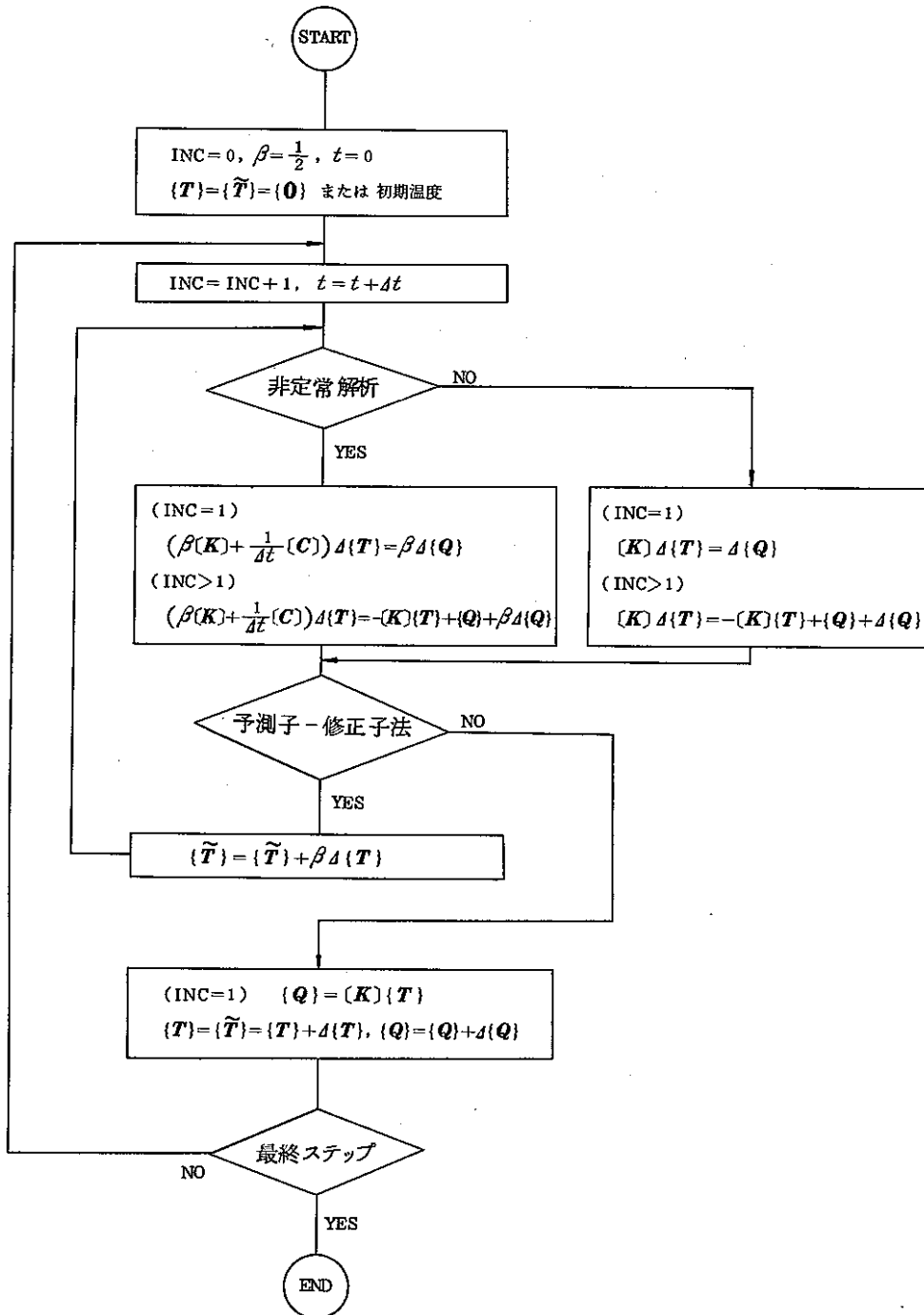


図 1.8-1 熱伝導解析のアルゴリズム

(2) 時間増分自動決定のアルゴリズム

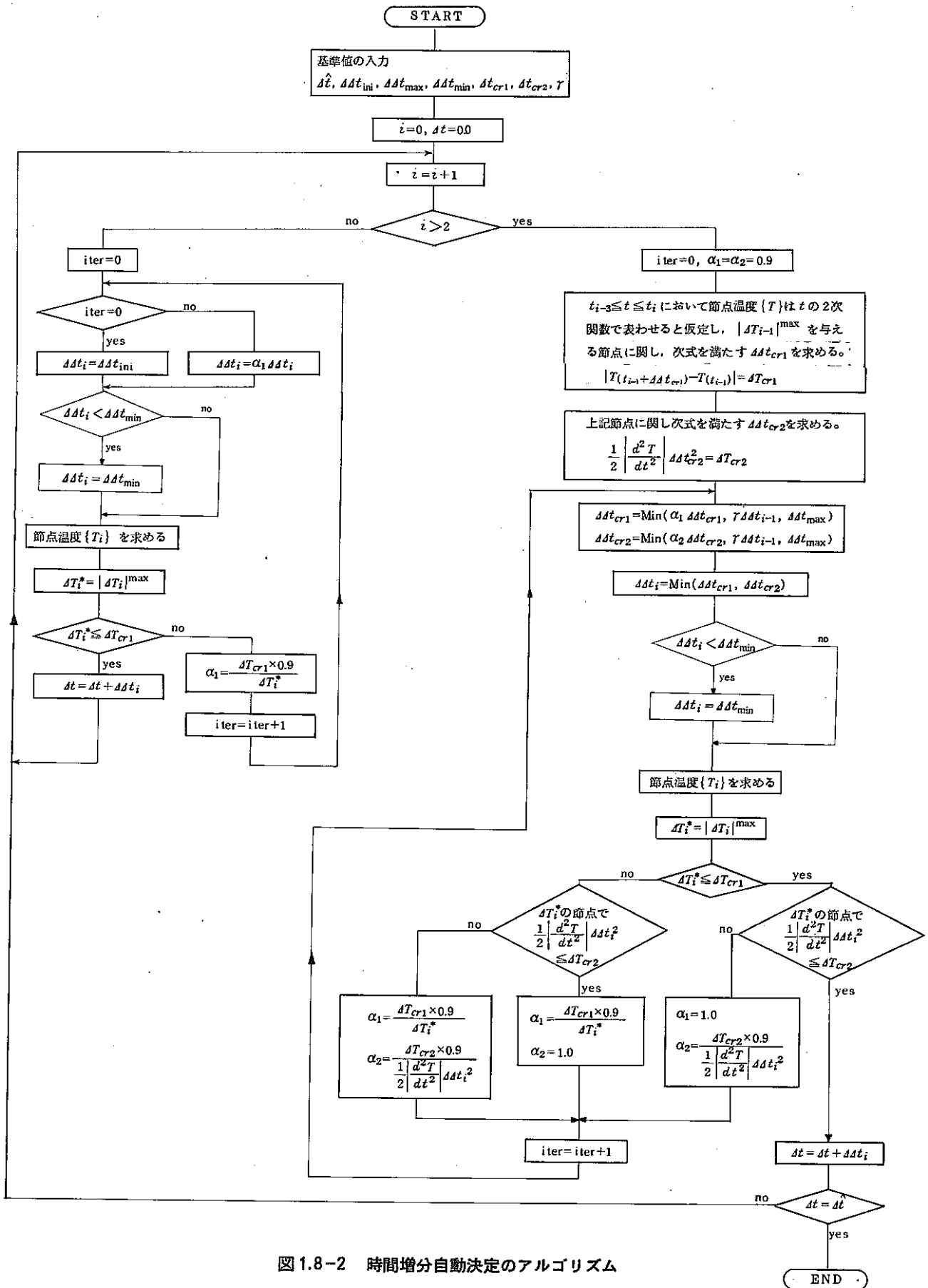


図 1.8-2 時間増分自動決定のアルゴリズム

〔参考文献〕

- 1) K. J. Bathe, M. R. Khoshgoftaar, " Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer ", Nuclear Engineering and Design 51 (1979) 389-401.
- 2) R. W. Lewis, K. Morgan, O. C. Zienkiewicz, " Numerical Methods in HEAT TRANSFER", JOHN WILEY & SONS, 1982.
- 3) S. Orivuori, " Efficient method for solution of nonlinear heat conduction ", Int. J. Num. Meth. Engin., Vol.14, 1461-1476 (1979).
- 4) W. D. Rolph, K. J. Bathe, " An efficient algorithm for analysis of nonlinear heat transfer with phase change ", Int. J. Num. Meth. Engin., Vol.18, 119-134 (1983).
- 5) E. L. Wilson, K. J. Bathe, F. E. Peterson, " Finite element analysis of linear and nonlinear heat transfer ", Nuclear Engineering and Design 29 (1974), 110-124.
- 6) W. L. Wood, R. W. Lewis, " A comparison of time marching schemes for the transient heat conduction equation ", Int. J. Num. Meth. Engin., Vol.9, 679-689 (1975).

## 1.9. 荷重増分自動決定機能

FINASにおける非線形問題の取り扱いには接線剛性法を用いた増分形式で定式化されている。非線形問題としては材料非線形挙動、構造と荷重の幾何学的非線形、境界の非線形挙動などが考えられる。これらの非線形問題は挙動の特性を考慮して解析荷重増分を定義し、解析を行うことになる。非線形挙動を接線剛性法により近似することによる計算誤差は、荷重増分を細分化することや、誤差と改善するための収束計算を行なうことにより修正することが可能であるが、各解析ステップにおいて適切な荷重増分を与えることは構造特性に関する知識と数値解析に関する洞察が必要である。このような背景より解析で得られる状態量より荷重増分を自動的に決定するアルゴリズムが必要とされている。例えば、幾何学的非線形問題で用いられる弧長増分法 (arc-length method) は、解析基準として荷重-変位空間での弧長の概念を仮定するもので、与えられた弧長を満足するように増分パラメータの定義に拘束を与えるものである。構造の分岐現象や飛び移り現象も連続的な挙動であれば、弧長増分法により増分解析が可能である。

ここでは静的応力解析における弧長増分法と Newton-Raphson 収束法を組み合わせた荷重増分自動決定機能の定式化とアルゴリズムを説明する。

### 1.9.1 増分形の平衡方程式

静的応力解析において、解析ステップ  $i-1$  の状態を基準としてステップ  $i$  の有限要素法増分形平衡方程式は次のように表わされる。

$$[\mathbf{K}]^{i-1} \Delta \{\mathbf{u}\}^i = \{\mathbf{P}\}^i - \{\mathbf{R}\}^{i-1} \quad (1.9-1)$$

ここで  $[\mathbf{K}]^{i-1}$ 、 $\{\mathbf{R}\}^{i-1}$  はステップ  $i-1$  を基準とした接線剛性マトリックス、等価力ベクトルであり、一方  $\Delta \{\mathbf{u}\}^i$ 、 $\{\mathbf{P}\}^i$  はステップ  $i$  での変位増分ベクトルと負荷荷重ベクトルである。全体での荷重ベクトル  $\{\mathbf{P}\}$  分割して増分形で与えるので、ステップ  $i$  の荷重ベクトルは荷重パラメータを用いて次のように表わすことができる。

$$\{\mathbf{P}\}^i = \lambda^i \{\mathbf{P}\} \quad (1.9-2)$$

$\lambda^i$  はステップ  $i$  での荷重係数であり、次のようにステップ  $i-1$  までの荷重パラメータとその増分として表示する。

$$\lambda^i = \lambda^{i-1} + \Delta \lambda^i \quad (1.9-3)$$

$\Delta \lambda^i$  はステップ  $i$  の荷重増分パラメータであり、その収束計算ステップを  $j$  で表わすとすれば、荷重パラメータは次のように表わすことになる。

$$\lambda_j^i = \lambda^{i-1} + \sum \Delta \lambda_j^i \quad (1.9-4)$$

ここで  $\Delta\lambda_j^i$  はステップ  $i$ , くり返し計算  $j$  での荷重増分パラメータを表わす。よってステップ  $i$  での変位増分ベクトルも次のように表わすことになる。

$$\sum_{j=1} \{ \Delta u_j^i \} = \{ \Delta u^i \} + \{ \Delta u_j^i \} \quad (1.9-5)$$

以上より式(1.9-1)は収束計算を考慮して次のように表わすことができる。

$$[K]_{j-1}^i \Delta \{ u \}_j^i = \lambda_j^i \{ P \} - \{ R \}_{j-1}^i \quad (1.9-6)$$

ここで  $[K]_0^i = [K]^{i-1}$ ,  $\{ R \}_0^i = \{ R \}^{i-1}$  のような初期状態を仮定するものである。

### 1.9.2 荷重増分自動決定機能の定式化

ここでは弧長増分法と Newton-Raphson 法によるくり返し計算を組み合わせた荷重増分決定法の定式化を説明する。弧長増分法は変位-荷重曲線に沿う予測した弧長を保つような拘束を与えるように収束方向を進めるものである。変位空間についてのパラメータ  $\alpha$  と荷重空間についてのパラメータ  $\beta$  によりスケーリングした変位-荷重空間についてステップ  $i$  における弧長増分  $\Delta l^i$  を次のように定義する。

$$\alpha \Delta \{ u \}^{iT} \Delta \{ u \}^i + \beta (\Delta \lambda^i)^2 = (\Delta l^i)^2 \quad (1.9-7)$$

$\beta=0$  のとき変位コントロール法,  $\alpha=0$  のとき荷重コントロール法,  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  のとき一般的に弧長増分法である。

FINASでは  $\alpha=\beta=1.0$  のスケールファクタを用い, 式(1.9-7)の弧長を満たすように荷重パラメータを制御する方法を用いる。解析ステップ内のくり返し計算として Newton-Raphson 法を用いるので, 収束計算における荷重増分パラメータ  $\Delta\lambda_j^i$  は各ステップで与えた弧長増分を満たすように与える。荷重増分パラメータ  $\Delta\lambda_j^i$  の拘束条件として式(1.9-7)より推定する球拘束法 (spherical constrain method) と, くり返し計算での変位増分間において直交関係の拘束を与える法平面拘束法 (normal plane constrain method) があるが, ここでは球拘束法を考える。式(1.9-7)はくり返し計算を考慮して次のように表わすことができる。

$$(\Delta \{ u \}^i + \Delta \{ u \}_j^i)^T (\Delta \{ u \}^i + \Delta \{ u \}_j^i) + (\Delta \lambda^i + \Delta \lambda_j^i)^2 = (\Delta l^i)^2 \quad (1.9-8)$$

変位増分と荷重パラメータの高次項を省略し, 次のような近似拘束式を仮定する。

$$\Delta \{ u \}^{iT} \Delta \{ u \}^i + 2 \Delta \{ u \}^{iT} \Delta \{ u \}_j^i + \Delta \lambda^i{}^2 + 2 \Delta \lambda^i \Delta \lambda_j^i \equiv \Delta l^i{}^2 \quad (1.9-9)$$

くり返し計算  $j$  での変位増分を次のように仮定する。



$$\Delta\{\mathbf{u}\}_j^i = \frac{\Delta\lambda_j^i}{\Delta\lambda_{j-1}^i} \Delta\{\mathbf{u}\}_{j-1}^i \quad (1.9-10)$$

式(1.9-10)を式(1.9-9)へ代入し、荷重増分パラメータは次のように計算できる。

$$\Delta\lambda_j^i = \frac{1}{2} (\Delta l^{i2} - \Delta\{\mathbf{u}\}^{iT} \{\mathbf{u}\}^i - \Delta\lambda^{i2}) / (\Delta\{\mathbf{u}\}^{iT} \Delta\{\mathbf{u}\}_{j-1}^i / \Delta\lambda_{j-1}^i + \Delta\lambda^i) \quad (1.9-11)$$

荷重-変位挙動の様である挙動では式(1.9-11)で荷重増分パラメータを仮定することができるが、例えば構造が耐力の極限值を超える除荷状態となるような遷移領域では、接線剛性マトリックスの行列式より負荷パラメータの符号を仮定する。剛性が正より負へ変化する場合、(1.9-11)の符号は負とし、その反対に負より正へ変化する場合は正と仮定する。極限点近傍での構造は非常に不安定であるので、式(1.9-10)の仮定が一義的に成り立たなくなるので、剛性マトリックスの状態により収束方向を仮定することがくり返し計算を安定化し、解の収束を得るためにも重要である。

Newton-Raphson法によるくり返し計算では式(1.9-6)に示されるようにくり返し計算の中で剛性マトリックスなどを再評価し、収束効率を高める一方で、再計算による計算コストを軽減するために効果的な収束判定が必要となる。例えば次のようなエネルギーノルムの変化率により収束判定とすることが考えられる。

$$e_j^i = \Delta\{\mathbf{u}\}_j^{iT} [\mathbf{K}]_{j-1}^i \Delta\{\mathbf{u}\}_j^i \quad (1.9-12)$$

$$e_j^i / \sum_{j=1}^i e_j^i \leq \text{ETOL} \quad (1.9-13)$$

式(1.9-12)はひずみエネルギー増分を与えるもので、式(1.9-13)はひずみエネルギーの変化率を収束判定基準とし、ETOLは収束判定のための誤差基準であり、構造特性により適切に与えられるものであるが、FINASでは0.01~0.15の幅で収束状態により選択している。変位増分の変化率により収束判定基準とすることも考えられる。

$$\text{MAX}(\Delta\{\mathbf{u}\}_j^i) / \text{MAX}(\Delta\{\mathbf{u}\}^i) \leq \text{ETOL} \quad (1.9-14)$$

ここで $\text{MAX}(\Delta\{\mathbf{u}\}_j^i)$ はステップ*i*の変位増分ベクトルの最大値であり、その変化率を用いて収束判定基準とするものである。また極限点近傍の遷移領域では構造の挙動が不安定であるので式(1.9-13)や式(1.9-14)の収束判定の他に剛性の変化(正より負、負より正)の安定性も合わせて収束基準として仮定している。

くり返し計算の中で収束が得られた場合には、次の解析ステップの荷重増分パラメータと弧長増分を定義する。

$$\Delta\lambda_0^{i+1} + \sum_{j=1}^i \Delta\lambda_j^i \quad (1.9-15)$$

$$(\Delta l^{i+1})^2 = \left( \sum_{j=1}^i \Delta\{\mathbf{u}\}_j^{iT} \sum_{j=1}^i \Delta\{\mathbf{u}\}_j^i \right) + \left( \sum_{j=1}^i \Delta\lambda_j^i \right)^2 \quad (1.9-16)$$

式(1.9-15)で与えられる荷重増分パラメータの符号は剛性の状態に依存して仮定するもので、行列式が正であれば、正、負であれば負の符号を仮定する。

解析を開始するための初期状態として荷重増分パラメータ  $\Delta\lambda^1=1/100$  とし、これに対応する弧長増分  $\Delta l^1$  を計算し、以降の解析ステップの基準値とする。解析の挙動が線形であれば荷重増分パラメータを大きく仮定し、非線形領域では未収束の場合には荷重増分パラメータの細分化を行うことになる。

完全な線形挙動域(式(1.9-11)の荷重増分パラメータがほぼ零である場合またはエネルギー的誤差が非常に小さい場合など)では弧長増分および荷重増分パラメータの初期値を前回の値の1.5~2.0倍とし、全体荷重の10分の1を上限值とする。荷重増分自動決定に関する論文では弧長を次式のように増減する方法も提案されている。

$$\Delta l^{i+1} = \Delta l^i (\hat{N}/N)^{1/2} \quad (1.9-17)$$

ここで  $N$  はステップ  $i$  での収束回数、 $\hat{N}$  を収束回数の期待値とする。式(1.9-17)は理論的なものではなく、弧長増分は荷重パラメータと変位に関係した量であるので、単に増減を与えることはできない。ただし、完全な線形挙動域では、弧長増分と荷重パラメータは比例関係であるので、比例倍することが可能である。

予測した弧長増分と荷重増分パラメータを用いた解析において、収束が得られない場合には、弧長増分荷重パラメータを小さくして、再度計算を行う再計算のループも考慮している。例えば構造耐力の限界近傍では構造自体が不安定となっているので、荷重増分パラメータを極端に小さくする必要がある。FINASでは収束が得られない場合には、荷重増分パラメータを初期値の1/100に減少させる。以下その1/2ずつ小さくするような仮定を行っているが、一方、弧長増分も同時に減少させるが、ある限界値(初期値での弧長増分の半分)よりは小さくは仮定しない。これは弧長増分を過小限界を与えることにより、解析増分が極端に小さくなることの予防として設けている。

### 1.9.3 荷重増分自動決定機能のアルゴリズム

図1.9-1に荷重増分自動決定機能のアルゴリズムを示す。

START

(初期値)

$$\Delta\lambda_1 = 1/100, \{P\}, i=1$$

(ステップ1)

$$\Delta\lambda^1 = \Delta\lambda_1, \lambda^1 = \Delta\lambda_1$$

$$\Delta\{u\}^1 = [K]^0 \Delta\lambda^1 \{P\}$$

$$\Delta l^1 = (\Delta\{u\}^{1T} \Delta\{u\}^1 + \Delta\lambda^{1^2})^{1/2}$$

$$\Delta l_{\max} = 10 \Delta l^1, \Delta l_{\min} = 0.5 \Delta l^1$$

(ステップ2のパラメータ)

線形挙動:  $\Delta l^2 = 2 \Delta l^1, \Delta\lambda_0^2 = 2 \Delta\lambda^1$

非線形挙動:  $\Delta l^2 = \Delta l^1, \Delta\lambda_1^2 = \Delta\lambda^1$

解析ステップ  $i=i+1, \Delta\lambda^i=0, \Delta\{u\}^i=0$

収束計算ステップ  $j=j+1$  (初期ステップの場合  $j=1$ )

(変位増分の計算)

$$\Delta\lambda^i = \Delta\lambda^i + \Delta\lambda_j^i, \lambda^i = \lambda^i + \Delta\lambda_j^i$$

$$\Delta\{u\}_j^i = [K]_{j-1}^i (\lambda^i \{P\} - \{R\}_{j-1}^i)$$

$$\Delta\{u\}^i = \Delta\{u\}^i + \Delta\{u\}_j^i$$

(荷重パラメータ  $\Delta\lambda_{j+1}^i$  の計算)

$$\Delta\lambda_{j+1}^i = (\Delta l^{i^2} - \Delta\{u\}^{iT} \Delta\{u\}^i - \Delta\lambda^{i^2}) / (\Delta\{u\}^{iT} \Delta\{u\}_j^i / \Delta\lambda_j^i + \Delta\lambda^i)$$

(遷移域の場合)

剛性 正→負:  $\Delta\lambda_{j+1}^i = -|\Delta\lambda_{j+1}^i|$

剛性 負→正:  $\Delta\lambda_{j+1}^i = |\Delta\lambda_{j+1}^i|$

(荷重パラメータの境界)

$\lambda^i + \Delta\lambda_{j+1}^i > 0.0$  のとき:  $\Delta\lambda_{j+1}^i = 1.0 - \lambda^i$

(C) (B)

(A)

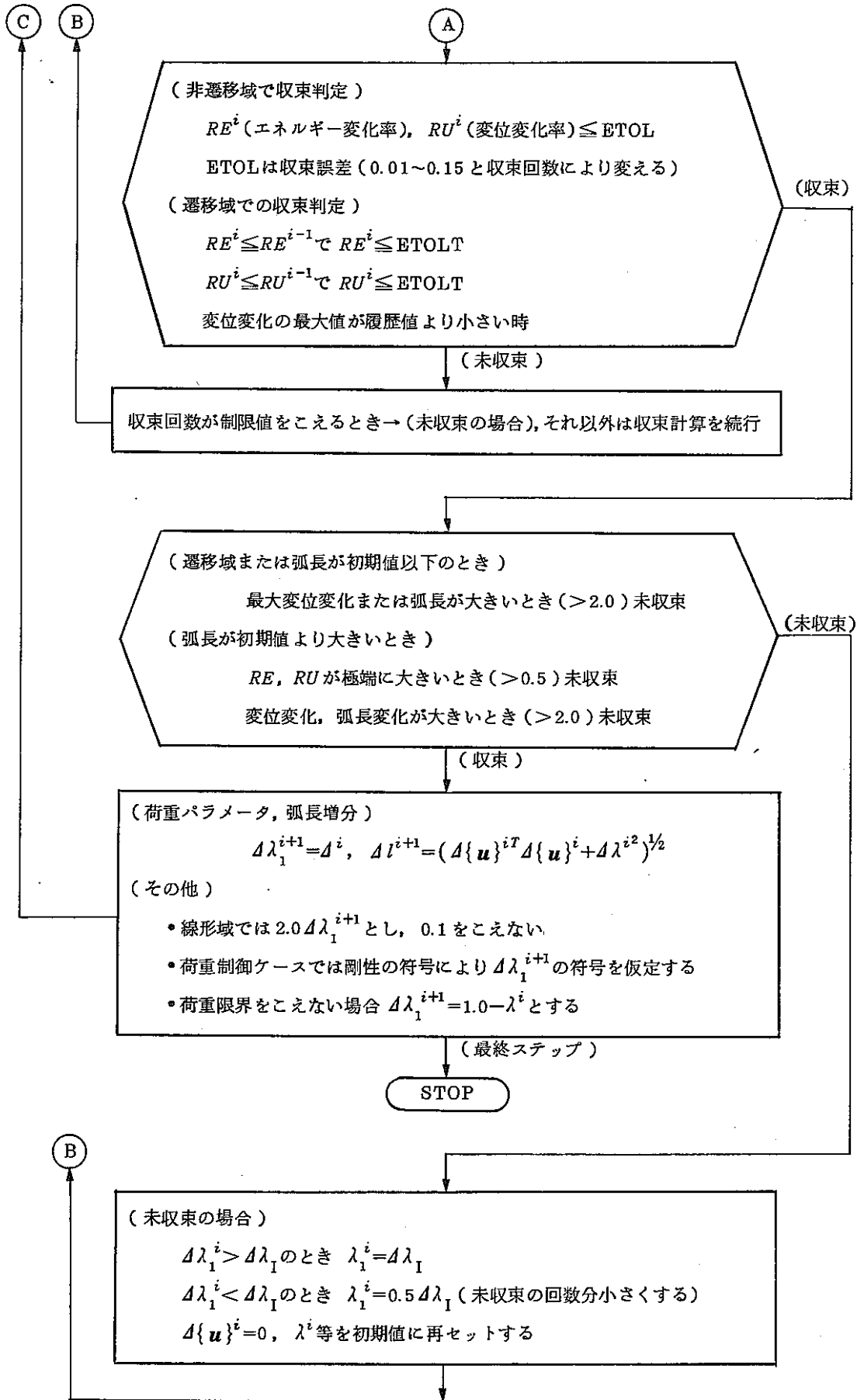


図1.9-1 荷重増分自動決定機能のアルゴリズム

〔参考文献〕

- 1) M. A. Crisfield, " Solution procedures for nonlinear structural problems ", Recent advances in non-linear computational mechanics, Pineridge press, 1982.
- 2) K. L. Bathe and E. N. Drorkin, " On the automatic solution of nonlinear finite element equations ", Comput. structures, 17, 1983.
- 3) P. X. Bellini, A. Chulya, "An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equations", Comput. Structures, 26, pp.99-100, 1987.
- 4) C. T. Tsai, A. N. Palazotto, "A modified Riks approach to composite shell snapping using a high-order shear deformation theory", Comput. structures, 35, No.3, pp.221-226, 1990.
- 5) M. J. Clarke, G. J. Hancock, "A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis", Int. j. numer. methods engin, 29, 1365-1391 (1990).

## 1.10 流体構造物連成解析

原子炉プラント、貯蔵タンク、配管等の構造解析では、流体-構造物の相互作用が重要な問題となる。これらの連成構造の動的特性を考える場合、一般的には流体自由表面のスロッシング特性と貯蔵容器等の構造物の周波数特性領域は明確に分離できると仮定される。よって、流体のスロッシング効果が構造の撓性へ与える影響を省略している場合が多い。しかし、ある流体-構造システムの周波数特性が5Hz以下であれば、構造撓性への自由表面波強度の影響が無視できないものである。例えば、LMFBRプラントのような薄肉反応容器では、周波数特性が2~10Hzとされているので、自由表面のスロッシング効果を考慮した連成問題が重要となる。

流体-構造連成問題を解くとき、流体部の未知量として何を選ぶかにより、最終の支配方程式の形が変わり、解き易さに著しい相違がある。有限要素法において、構造物の挙動は変位 $u$ で表わすことが多い。流体の挙動は、粘性流体の場合は圧力 $P$ と流速 $v$ を用いて表わされることが多い。非圧縮流体の場合、ペナルティ法により圧力 $P$ を消去して、速度 $v$ のみで表現することもある。構造との連成を考えるとき、流体を非粘性渦なしとして取り扱える場合が多い。次のような未知量が流体の挙動記述に選ばれる。

- ① 圧力  $P$
- ② 速度ポテンシャル  $\phi$
- ③ 圧力  $P$  と速度ポテンシャル  $\phi$
- ④ 圧力  $P$  と変位ポテンシャル  $\Phi$

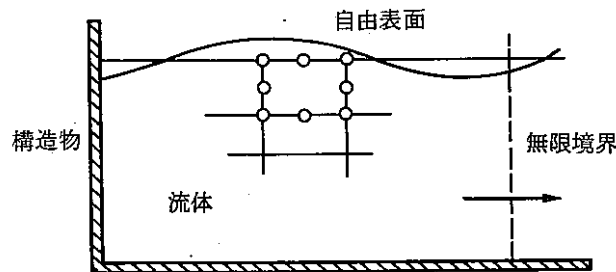


図1.10-1 流体構造物連成問題

以上の変数の選び方によって最終的に得られるマトリックス方程式の性質は異なる。この連成問題の動的解析法には次の3つの方法がある。

- ① 流体場と構造場のいずれかの場を消去する。
- ② 2つの場を連立させて同時に解く方法
- ③ 2つの場を同じ時間ステップ内で互い違いに解く方法

これらの方法を用いた有限要素法定式の代表的なものは、付加質量法、オイラー定式法、ラグランジュ定式法である。

付加質量法は、流体と構造物の界面に流体の仮想質量を付加する方法である。付加質量を求める仮定としては、構造物の撓性と非圧縮性流体を基礎としている。

オイラー定式法は、流体挙動を圧力または速度ポテンシャル等で定義し、オイラー座標系で運動方程式を記述する。

流体は圧力または速度ポテンシャル等を節点自由度にもつ有限要素で定式化される。この方法では、流体と構造との相互作用力により連成し、平衡方程式は非対称形となる特徴がある。

ラグランジュ定式法は、流体挙動を変位（または速度）で定義し、ラグランジュ座標系で運動方程式を記述する。この方法の利点は、特別な接面方程式が必要でなく、平衡方程式も対称形を保持するので、既存の構造解析プログラムに組み込むことが容易なことである。多くのラグランジュタイプの流体要素が提案されているが、流体の零エネルギー変形モードの影響が顕著であり、精度において問題がみられる。零エネルギーモードである“砂時計モード”や“回転モード”は、零せん断係数と低減数値積分が要因である。しかし、高次の数値積分を用いることは流体要素の剛性を高め、低周波のスロッシング挙動を除去する傾向があるとされている。

FINASの流体構造連成定式は、非粘性非圧縮性流体を仮定した。流体圧力 $P$ 、自由表面変位 $\eta$ 、構造変位 $u$ を未知数とするオイラー法による運動方程式を基礎としている。

### 1.10.1 流体の基礎方程式

流体の運動は、Navier-Stokesの方程式と連続の方程式で支配される。対流加速度項と粘性項を省略すると、流体の運動方程式は次のように表わすことができる。

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (1.10-1)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{v}}$ は流体の加速度、 $\rho$ は質量密度、 $P$ は静水圧をこえる圧力である（例えば、静水圧効果を含む場合）。また、 $\nabla$ は座標成分での微分演算子である。

連続の方程式は次のように表わされる。

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla^T \mathbf{v} = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{K} \dot{P} \quad (1.10-2)$$

ここで、 $K$ は流体の体積弾性係数である。式(1.10-1)と式(1.10-2)より流体内の圧力分布についての支配方程式が得られる。

$$\nabla^2 P - \frac{1}{c^2} \ddot{P} = 0 \quad (1.10-3)$$

ここで、

$$\nabla^2 = \nabla^T \nabla, \quad c = \sqrt{K/\rho}$$

$c$ は流体中の縦波速度（compression wave velocity）である。

## 1.10.2 流体の境界条件式

流体と構造の接触面において、構造の加速度 $\ddot{u}$ と流体の圧力 $P$ について、次のような境界条件式が仮定される。

$$n\ddot{u} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial n} \quad (1.10-4)$$

ここで、 $n$ は法線方向 $n$ の単位ベクトルである。次に自由表面での境界式は次のように仮定される。

$$P = \rho g \eta \quad (1.10-5)$$

ここで、 $g$ は重力加速度、 $\eta$ は自由表面の変位である。式(1.10-4)より次式が得られる。

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (1.10-6)$$

よって、式(1.10-5)と式(1.10-6)より自由表面について次の境界式が得られる。

$$\frac{\partial P}{\partial Z} = -\frac{1}{g} \ddot{P} \quad (1.10-7)$$

式(1.10-7)は表面波についての線形化条件より得られた境界式である。

図1.10-1では無限境界が示されているが、十分な領域を考えて、すべての波は外方向( $x$ 軸方向と仮定)へ伝播するものとするれば、解は次のように仮定される。

$$P = f(x-ct) \quad (1.10-8)$$

よって、

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f' \quad (1.10-9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -cf' \quad (1.10-10)$$

$f'$ を消去して、無限境界での次の条件式が得られる。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.10-11)$$

この関係式は Sommerfield の放射条件と呼ばれるもので、波動源より十分な距離の点において近似的に適用が可能である。

以上の定式では圧力を未知数として与えているが、速度ポテンシャル $\phi$ についても同様な定式化が可能である。

$$v = -\nabla\phi \quad (1.10-12)$$

よって、式(1.10-1)より、圧力は次のように定義される。



$$P = \rho \dot{\phi} \quad (1.10-13)$$

### 1.10.3 オイラ一定式の離散化と連成平衡方程式

流体要素の圧力についての補間関数を  $[N_p]$  とすれば、要素内の圧力  $P$  は節点圧力ベクトル  $\{\hat{P}\}$  より次のように補間される。

$$P = [N_p] \{\hat{P}\} \quad (1.10-14)$$

流体支配方程式と境界条件式に式(1.10-14)を代入し、Galerkin法離散化手法を適用して、次のマトリックス式が得られる。

$$[K_p] \{\hat{P}\} + [C_p] \{\hat{P}\} + [M_p] \{\dot{\hat{P}}\} - \{\hat{h}_1\} + \{\hat{h}_0\} = 0 \quad (1.10-15)$$

ここで、

$$K_{P_{ij}} = \int_{V_F} \nabla N_{P_i} \nabla N_{P_j} dv \quad (1.10-16)$$

$$C_{P_{ij}} = \frac{1}{C} \int_{S_E} N_{P_i} N_{P_j} dv \quad (1.10-17)$$

$$M_{P_{ij}} = \frac{1}{g} \int_{S_S} N_{P_i} N_{P_j} dS + \frac{1}{C^2} \int_{V_F} N_{P_i} N_{P_j} dv \quad (1.10-18)$$

$$h_{I_i} = \int_S N_{P_i} \rho n^T \dot{u} dS \quad (1.10-19)$$

$V_F$  は流体の体積、 $S_E$  は無限境界の面積、 $S_S$  は自由表面、 $S_I$  は流体と構造との接触面積である。 $\{\hat{h}_1\}$  は構造より流体へ作用する圧力ベクトル、 $\{\hat{h}_0\}$  は圧力負荷項である。

次に、構造物の変位ベクトルを式(1.10-20)とすれば、動的平衡方程式は次のように表わされる。

$$u = [N] \{\hat{u}\} \quad (1.10-20)$$

$$[M] \{\ddot{\hat{u}}\} + [C] \{\dot{\hat{u}}\} + [K] \{\hat{u}\} - \{\hat{f}_1\} + \{\hat{f}_0\} = 0 \quad (1.10-21)$$

ここで、 $u$  は構造要素の変位、 $[N]$  は補間関数、 $\{\hat{u}\}$  は節点変位ベクトルである。 $\{\hat{f}_1\}$  は流体より構造への作用力、 $\{\hat{f}_0\}$  は負荷荷重ベクトルである。よって、式(1.10-20)の補間式より  $\{\hat{f}_1\}$  ベクトル、 $\{\hat{h}_1\}$  ベクトルは次のように表わすことができる。

$$\{\hat{f}_1\} = \int_S [N]^T n [N_p] \{\hat{P}\} dS = [Q] \{\hat{P}\} \quad (1.10-22)$$

$$\{\hat{h}_f\} = \int_{S_f} [N_p]^T n^T \rho [N] \{\hat{u}\} dS = \rho [Q]^T \{\hat{u}\} \quad (1.10-23)$$

よって、流体構造連成問題の連立常微分方程式は次のようにマトリックス形で表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ -\rho Q^T & M_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\hat{u}} \\ \dot{\hat{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -Q \\ 0 & K_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{P} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{h}_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.10-24)$$

式(1.10-24)の平衡方程式は非対称形であるので、構造問題での一般的解法や固有値解法の適用には数値計算アルゴリズム上の工夫が不可欠である。また、解法上の数値的安定性や流体構造界面でのバンド幅の拡大などの問題が存在する。

#### 1.10.4 非圧縮性流体の定式化

流体の非圧縮性を仮定し、また自由表面の挙動を拘束するとすれば、式(1.10-24)の平衡方程式において  $[M_p]$  マトリックスを除くことができ、無限境界条件を仮定しなければ、 $[C_p]$  マトリックスを除くことができる。よって節点圧力ベクトル  $\{\hat{P}\}$  は次のように表わすことができる。

$$\{\hat{P}\} = [K_p]^{-1} (\{\hat{h}_0\} + \rho [Q]^T \{\hat{u}\}) \quad (1.10-25)$$

式(1.10-25)を式(1.10-24)へ代入し、流体連成を考慮した構造系の平衡方程式は次のように得られる。

$$([M] + [M_p]) \{\hat{u}\} + [C] \{\dot{\hat{u}}\} + [K] \{\hat{u}\} + \{\hat{f}_0\} + \{\hat{f}_p\} = 0 \quad (1.10-26)$$

ここで、 $[M_p]$  は流体挙動が構造に与える仮想質量マトリックスであり、 $\{\hat{f}_p\}$  は流体が構造へ与える外荷重項である。

$$[M_p] = \rho [Q]^T [K_p]^{-1} [Q] \quad (1.10-27)$$

式(1.10-27)の付加仮想質量マトリックスは、流体接面の構造自由度についての対称形のフルマトリックスとなる。よって有限要素平衡方程式の特性であるスパースマトリックス性が失われることになる。

#### 1.10.5 FINASでの流体構造連成アルゴリズム

1.10.4節では、自由表面の挙動を拘束した流体構造連成方程式を説明した。ここでは、自由表面の挙動を考慮した非圧縮性非粘性流体での流体構造連成定式を示す。自由表面の挙動を式(1.10-5)、式(1.10-6)で表わすと、流体圧力  $P$ 、自由表面変位  $\eta$ 、構造変位  $u$  を未知量とする。  $P-\eta-u$  形での連成方程式は次のように表わすことができる。

$$[T_{p\eta}]\{\hat{\ddot{n}}\} + [K_p]\{\hat{P}\} - [Q_{ps}]\{\hat{\ddot{u}}\} = 0 \quad (1.10-28)$$

$$[K_\eta]\{\hat{n}\} - [T_{\eta p}]\{\hat{P}\} = 0 \quad (1.10-29)$$

$$[M]\{\hat{\ddot{u}}\} + [K]\{\hat{u}\} + [Q_{sp}]\{\hat{P}\} + \{\hat{f}_0\} = 0 \quad (1.10-30)$$

$[M]$ ,  $[K]$ は構造の質量マトリックスと剛性マトリックスであり、減衰項は便宜的に省略した。また、残りの各マトリックスが流体および連成に関するマトリックスである。

$$[T_{p\eta}] = \int_{S_S} \rho [N_p]^T [N_p] dS \quad (1.10-31)$$

$$[K_p] = \int_{V_F} [N_{p,i}]^T [N_{p,i}] dv \quad (1.10-32)$$

$$[Q_{ps}] = \int_{S_I} \rho [N_p]^T \mathbf{n}^T [N] dS \quad (1.10-33)$$

$$[K_\eta] = \int_{S_S} \rho g [N_p]^T [N_p] dS \quad (1.10-34)$$

$$[T_{\eta p}] = \frac{1}{\rho} [T_{p\eta}]^T \quad (1.10-35)$$

$$[Q_{sp}] = \frac{1}{\rho} [Q_{ps}]^T \quad (1.10-36)$$

ここで、 $[N_p]$ は流体要素の圧力についての補間関数、 $[N]$ は構造要素の変位についての補間関数である。 $\mathbf{n}$ は流体構造接面での法線方向の単位ベクトルであり、図1.10-2に示すとおりである。また、 $\rho$ は流体の質量、 $g$ は自由表面での重力加速度を表わしている。

式(1.10-28)～式(1.10-30)の連成方程式は非対称形であるので、Müllerの提案した方法を拡張した手法により自由表面挙動を考慮した対称形での連成方程式を導く。はじめに、式(1.10-28)より、圧力ベクトル $\{\hat{P}\}$ を自由表面変動加速度 $\{\hat{\ddot{\eta}}\}$ と構造の加速度 $\{\hat{\ddot{u}}\}$ で表わす。

$$\{\hat{P}\} = -[K_p]^{-1} [T_{p\eta}]\{\hat{\ddot{\eta}}\} + [K_p]^{-1} [Q_{ps}]\{\hat{\ddot{u}}\} \quad (1.10-37)$$

式(1.10-37)を式(1.10-29)と式(1.10-30)へ代入して整理すると、次のような自由表面のスロッシング波効果を含んだ対称形での流体構造連成方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & -Q \\ -Q^T & M_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\ddot{u}} \\ \hat{\ddot{\eta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K_\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{h}_0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.10-38)$$

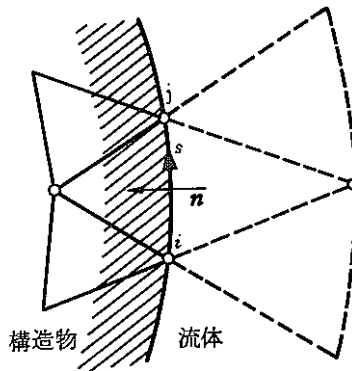


図1.10-2 流体構造界面での法線方向ベクトル

ここで,

$$[\bar{M}] = [M] + [A_F] \quad (1.10-39)$$

$$[A_F] = -\frac{1}{\rho} [Q_{PS}]^T [K_P]^{-1} [Q_{PS}] \quad (1.10-40)$$

$$[M_\eta] = -\frac{1}{\rho} [T_{P\eta}]^T [K_P]^{-1} [T_{P\eta}] \quad (1.10-41)$$

$$[Q] = -\frac{1}{\rho} [Q_{PS}]^T [K_P]^{-1} [T_{P\eta}] \quad (1.10-42)$$

$[A_F]$  は流体の構造への付加質量マトリックス,  $[M_\eta]$  は自由表面での付加質量マトリックス,  $[Q]$  は連成マトリックスである。式(1.10-38)の連成方程式はLiuらによって提案されたもので, 最終的には構造と自由表面の自由度だけが残ることになる。式(1.10-38)の質量項はフルマトリックス形であるが, 剛性マトリックスはスパースのままであるので, サブスペース法などのくり返し法などの固有値計算では, 剛性項だけが三角分解の対象であるので, 計算の効率化は期待できる。FINASでは, モーダル法および線形直接積分法での流体構造連成解析は, 式(1.10-38)を基礎式としている。

次に式(1.10-40)~式(1.10-42)の各マトリックスの計算方法を説明する。

流体構造連成状態での全体自由度での剛性マトリックスを次のように分割する。

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K & 0 & \bar{Q}_{PS}^T \\ 0 & K_\eta & \bar{K}_{P\eta}^T \\ \bar{Q}_{PS} & T_{P\eta} & \bar{K}_P \end{bmatrix} \quad (1.10-43)$$

よって,  $[A_F]$ ,  $[M_\eta]$ ,  $[Q]$  の各付加マトリックスは次のように合同変換式で表わすことができる。

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{PS}^T \\ \bar{T}_{P\eta}^T \end{bmatrix}^T [\bar{K}_P]^{-1} [\bar{Q}_{PS} \bar{T}_{P\eta}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{PS}^T \bar{K}_P^{-1} \bar{Q}_{PS} & \bar{Q}_{PS}^T \bar{K}_P^{-1} \bar{T}_{P\eta} \\ \bar{T}_{P\eta}^T \bar{K}_P^{-1} \bar{Q}_{PS} & \bar{T}_{P\eta}^T \bar{K}_P^{-1} \bar{T}_{P\eta} \end{bmatrix} \quad (1.10-44)$$

ここで,

$$\{\bar{K}_p\} = -\frac{1}{\rho} \{K_p\} = -\int_{V_F} \frac{1}{\rho} \{N_{p,i}\}^T \{N_{p,i}\} dv \quad (1.10-45)$$

$$\{\bar{Q}_{ps}\} = -\frac{1}{\rho} \{Q_{ps}\} = -\int_{S_f} [N_p]^T \{N\} dS \quad (1.10-46)$$

$$\{\bar{T}_{p\eta}\} = -\frac{1}{\rho} \{T_{p\eta}\} = -\int_{S_S} [N_p]^T [N_p] dS \quad (1.10-47)$$

となる。流体連成要素は次の各マトリックスを出力する。

流体要素 .....  $\{\bar{K}_p\}$   
 連成要素 .....  $\{\bar{Q}_{ps}\}$   
 自由表面要素 .....  $\{\bar{T}_{p\eta}\}, \{K_\eta\}$

流体構造連成問題の有限要素モデルとしては、図1.10-3に示すものが典型である。構造と流体は、構造要素、流体要素でモデル化し、自由表面は自由表面要素、流体構造界面は境界要素で定義する。節点の自由度は次のように与えられる。

流体節点	(例えばA点)	$P$ (圧力)
自由表面節点	( " B点)	$P, \eta$ (自由表面変位)
自由表面での連成節点	( " C点)	$P, \eta, u_x, u_y$ (変位)
連成節点	( " D点)	$P, u_x, u_y$

連成節点は、節点を定義する要素タイプにより、圧力 $P$ 、自由表面変位 $\eta$ 、構造変位 $u_i$ を自動的に識別する。

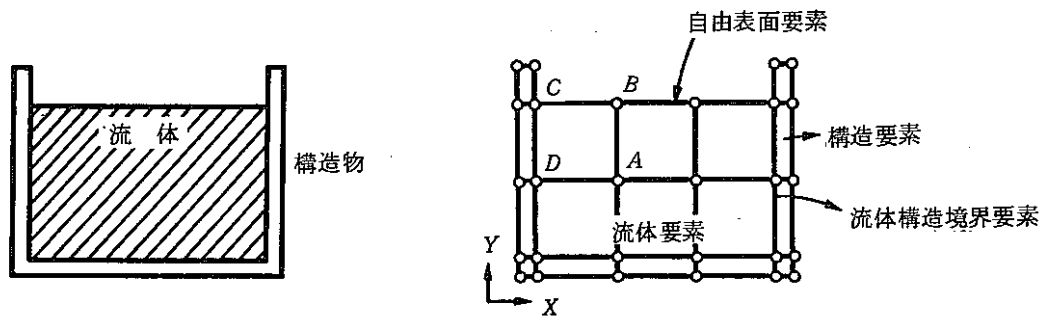


図 1.10-3 流体構造連成問題のモデル化

〔参考文献〕

- 1) H. M. Westergaard, " Water pressure on dams during earthquakes ", Trans. Am. Soc. Civ. Eng. (1931).
- 2) G. W. Housner, " Dynamic pressures on accelerated fluid containers ", Bull. Seismol. Soc. Am. (1957).
- 3) T. Belytschko, " Methods and programs for analysis of fluid-structure system ", Nucl. Eng. Des. 42, 41-52 (1977).
- 4) D. C. Zienkiewicz, P. Bettles, " Fluid-structure dynamic interaction and wave forces, an introduction to numerical treatment ", Int. J. Num. Meth. Engng, 13, 1-16 (1978).
- 5) K. J. Bathe, V. Sonnad, " On effective implicit time integration in analysis of fluid-structure problems ", Int. J. Num. Meth. Engng, 15, 943-948 (1980).
- 6) W. C. Muller, " Simplified analysis of linear fluid-structure interaction ", Int. J. Num. Meth. Engng, 17, 113-121 (1981).
- 7) J. R. Hughes, W. K. Liu, T. K. Zimmermann, " Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows ", Comp. Meth. App. Mech. Engng, 29, 329-349 (1981).
- 8) W. K. Liu, D. C. Ma, " Coupling effect between liquid sloshing and flexible fluid-filled system ", Nucl. Engng. Des. 72, 345-357 (1982).
- 9) W. K. Liu, D. C. Ma, " Computer implementation aspects for fluid-structure interaction problems ", Comp. Meth. App. Mech. Engng, 31, 129-148 (1982).
- 10) W. K. Liu, H. Chang, " On a numerical method for liquid filled system ", Comp. Struc. 23, 671-677 (1986).
- 11) A. N. Brooks, T. R. Hughes, " Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation ", Comp. Meth. App. Mech. Engng, 32, 199-259 (1982).
- 12) W. K. Liu, T. Belytschko, H. Chang, " An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite elements method for path-dependent materials ", Comp. Meth. App. Mech. Engng. 58, 227-245 (1986).
- 13) 大坪英臣, " 流体 - 構造相関問題 ", 数理科学 1986年12月号 36-42, サイエンス社.

## 1.11 動的解析における時間増分自動決定機能

FINASでは、動的応答解析での時間積分スキームとしてNewmark- $\beta$ 法およびWilson- $\theta$ 法の陰的解法スキームが用意されている。ここでは、陰的解法の特徴を示し、衝撃問題等の非線形振動問題に用いられる陽的解法スキームの特性を検討する。各スキームの特性を考慮した時間増分自動決定機能について述べる。

### 1.11.1 陰的解法と陽的解法

動的問題の有限要素離散化つり合い方程式は1.7節より次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (1.11-1)$$

$$\{\dot{u}\} = \{\partial u / \partial t\}, \quad \{\ddot{u}\} = \{\partial \dot{u} / \partial t\} \quad (1.11-2)$$

式(1.11-1)は、時刻 $t$ での連立常微分方程式であるので、数値解析では時間に関して離散化を仮定するのが一般的である。直接積分法では式(1.11-2)における時間に関する微分演算子を差分離散化することを基本としている。時刻 $i$ ステップ( $t$ )と時刻 $i+1$ ステップ( $t+\Delta t$ )の加速度の線形変化を仮定した差分式では、時刻 $i+1$ ステップの変位と速度は次のように仮定できる。

$$\{u\}^{i+1} = \{u\}^i + \Delta t \{\dot{u}\}^i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{(\ddot{u})^i + 2\beta \{\ddot{u}\}^{i+1}\} \quad (1.11-3)$$

$$\{\dot{u}\}^{i+1} = \{\dot{u}\}^i + \Delta t \{(1-\gamma)\{\ddot{u}\}^i + \gamma \{\ddot{u}\}^{i+1}\} \quad (1.11-4)$$

よって時刻 $i+1$ のつり合い方程式は次のように整理できる。

$$[A]^{i+1} \{\dot{u}\}^{i+1} = \{b\}^{i+1} \quad (1.11-5)$$

ここで、

$$[A]^{i+1} = [M]^{i+1} + \Delta t \beta [C]^{i+1} + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1-\alpha) [K]^{i+1} \quad (1.11-6)$$

$$\begin{aligned} \{b\}^{i+1} = & \{P\}^{i+1} - (\Delta t (1-\beta) [C]^{i+1} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \alpha [K]^{i+1}) \{\ddot{u}\}^i \\ & - ([C]^{i+1} + \Delta t [K]^{i+1}) \{\dot{u}\}^i - \{R\}^{i+1} \end{aligned} \quad (1.11-7)$$

$$\therefore \{R\}^{i+1} = \int_V [B]^{T i+1} \{\sigma\}^i dV \quad (1.11-8)$$

$\{R\}^{i+1}$  は $i+1$ ステップでの残差荷重を評価するためのものである。

式(1.11-3), 式(1.11-4)において,  $\gamma=1.0$ ,  $\beta=0$ とした場合, 変位と速度は次のように計算できる。

$$\{u\}^{i+1} = \{u\}^i + \Delta t \{\dot{u}\}^i + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{u}\}^i \quad (1.11-9)$$

$$\{\dot{u}\}^{i+1} = \{\dot{u}\}^i + \Delta t \{\ddot{u}\}^i \quad (1.11-10)$$

よって, 式(1.11-6)の実効質量マトリックスは質量マトリックスと等しくなる。

$$[A]^{i+1} = [M]^{i+1} \quad (1.11-11)$$

式(1.11-9)と式(1.11-10)は  $i+1$  ステップの変数は1つ前の  $i$  ステップと時間ステップ巾  $\Delta t$  で表わされる。このアルゴリズムでは  $[M]$  を集中質量マトリックスを採用すると, 連立方程式の解法を含まない陽的解法スキームとなる。

一方, Newmark- $\beta$ 法は,  $\alpha=0.5$ ,  $\beta=0.25$  を仮定するのが一般的であり, また, Wilson- $\theta$ 法では

$$\{\ddot{u}\}^{i+r} = \{\ddot{u}\}^i + \frac{r}{\theta \Delta t} (\{\ddot{u}\}^{i+r} \Delta t - \{\dot{u}\}^i) \quad (1.11-12)$$

$\theta$ の値は1.4が用いられているが, これらの方法は式(1.11-6)の実効質量マトリックスが減衰項と剛性項を含んでいるので, 連立方程式の計算が必要である陰解法スキームである。Newmark- $\beta$ 法の改良として数値的減衰特性を持つH-H-T法(Hilber-Hughes-Taylor)が提案されている。衝撃問題では不必要な高次振動が数値誤差として介入し, 精度を下げる原因となっている。このためH-H-T法のような数値減衰を含む時間積分法が提案されている。

$$r = \frac{1}{2}(1-2\alpha), \quad \beta = \frac{1}{4}(1-\alpha)^2 \quad (1.11-13)$$

ここで,  $\alpha$ は人工粘性に関する係数で,  $\alpha=0$ としたものはNewmark- $\beta$ 法に一致する。

### 1.11.2 陰解法の基本特性

時間積分法の安定性は, 任意の初期条件に対する数値解の挙動を調べることにより決定される。初期条件が与えられ, 荷重項を省略した場合の解は次のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} u_{t+\Delta t} \\ \dot{u}_{t+\Delta t} \\ \ddot{u}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = [L]^n \begin{Bmatrix} u_t \\ \dot{u}_t \\ \ddot{u}_t \end{Bmatrix} \quad (1.11-14)$$

積分法の安定性について考察すると, 無条件安定なスキームと条件安定のスキームが存在する。任意の初期条件に対する解が, どのような時間ステップ  $\Delta t$  に対しても(特に  $\Delta t/t$  が大きくても), 際限なく増大することがなければ, 無条件安定である。もし,  $\Delta t/t$  がある値より小さいときのみ成立するのであれば, 条件安定なスキームである。



時間積分法の安定性を調べるには、(1.11-10)式が便利である。安定性の検証には時間積分作用子〔L〕のスペクトル分解を用いる。

$$[L]^n = [P][J][P]^{-1} \quad (1.11-15)$$

ここで、〔P〕は〔L〕の固有ベクトルを並べたマトリックスであり、〔J〕は固有値  $\lambda_i$  を対角線上に並べた〔L〕の Jordan 標準形である。〔L〕のスペクトル半径を  $\rho(L)$  とすれば、

$$\rho(L) = \max |\lambda_i| \quad i=1, 2, 3 \quad (1.11-16)$$

となり、スペクトル半径  $\rho(L) \leq 1$  の場合が安定性の判定規準である。よって、Wilson- $\theta$  法では  $\theta \geq 1.37$  が安定限界であり、Newmark- $\beta$  法では  $\gamma \geq 0.5$ 、 $\beta \geq 0.25(\gamma+0.5)^2$  が無条件安定条件である。

次に陰解法スキームの特徴を列挙すると次のとおりである。

- (1) 線形問題に対しては無条件安定である。
- (2) 連立方程式の求解が各ステップで必要である。
- (3) 地震応答解析のような低次モードが支配的な現象では計算効率が良く安定した解が得られる。
- (4) 数値減衰の導入により高次振動モードをコントロールすることができる(H-H-T法)。

### 1.11.3 陽解法の基本特性

陽解法の特徴を考察する対象として、代表的な手法として中央差分スキームを考える。1次元を仮定すれば、

$$u^{i+1} = -u^{i-1} + 2u^i + \Delta t^2 \ddot{u}^i \quad (1.11-17)$$

$$\ddot{u}^i = \frac{1}{2\Delta t} (u^{i+1} - u^i) \quad (1.11-18)$$

安定のための時間ステップ  $\Delta t$  は次のように与えられる。

$$0 < \Delta t < \frac{2}{\omega} \quad (1.11-19)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1.11-20)$$

式(1.11-19)は Courant 条件に対応するものである。また、減衰を含む場合の安定限界は次のように与えられる。

$$0 < \Delta t < \frac{2}{\omega} (\sqrt{\mu^2 + 1} - \mu) \quad (1.11-21)$$

$\mu$  も減衰値と臨界減衰値との比で与えられる。

$$\mu = C/C_{cr} \quad (1.11-22)$$

一般に多自由系での固有振動数 (Natural frequency)  $\omega$  の最大値は、系を構成する各有限要素の固有振動数より推定することになる。代表的な有限要素の固有振動数は、次のように得られている。

表 1.11-1 代表的有限要素の固有振動数  $\omega$

バネ・集中質量	$\sqrt{\frac{k^a(M_1+M_2)}{M_1M_2}}$	$A$ : 断面積
バネ・分布質量	$\frac{2c}{l}$	$c$ : 弾性波の伝播の速度
梁一様質量	$\frac{2c}{l}$ or $\sqrt{\frac{48c^2I}{l^2} \left[ \frac{1}{Al^2} + \frac{3}{12I+Al^2} \right]}$	$h$ : 板厚
板	$\frac{2c}{L}$ or $\frac{4ch}{L^2}$	$I$ : 断面 2 次モーメント
		$k$ : バネ係数
		$L$ : 要素対角
		$M_i$ : 集中質量
		$l$ : 要素長さ

ここで、陽解法スキームの特徴を要約すると次のようになる。

- (1) 条件安定であるので時間増分の選択に注意を要する。
- (2) 解析アルゴリズムが簡単である。
- (3) 陰解法に比べて 1 ステップあたりの演算回数は格段に少ないが、解析ステップは多くなる。

#### 1.11.4 時間増分自動決定機能

動的応答解析での時間積分ステップ  $\Delta t$  を自動的に決定するアルゴリズムを説明する。動的問題は対象とする現象を数値アルゴリズムの面から分類すると、陽解法スキームによる時間増分法が一般的である非線形性が強い衝撃的問題と、地震動による応答などの陰解法が一般的である振動問題に大別される。

陽解法スキームでは、時間積分での時間ステップ  $\Delta t$  が式 (1.11-19) や式 (1.11-21) の Courant 条件で与えられる臨界値  $\Delta t_{cr}$  が有限要素モデルの個々の幾何形状より表 1.11-1 などのように推定できる。よって、陽解法スキームによる動的応答解析での時間増分決定機能では、各有限要素で得られた臨界時間増分  $\Delta t_{cr}$  を基準として時間増分  $\Delta t$  を決定する。

次に陰解法スキームによる地震動解析などの応答解析では、応答値が少数の基本振動モードに依存している場合が多い。よって、モーダル応答解析などでは低次の振動モードを用いて応答を評価している。有限要素モデルの振動数やモード形は近似値であるので、高次モードを応答で考慮してもあまり意味がない場合が多い。直接積分法において必要以上に小さい時間ステップを用いた場合、高次モードが自動的に積分される。よって、最低次より順に  $P$  個の固有モードが考慮できる時間ステップを自動的に決定する必要がある。このため、陰解法スキームでは、地震板等の加振板データを FFT によりスペクトル分析し、卓越した固有周期を推定し、この周期を基準に時間ステップ  $\Delta t$  を決定する。

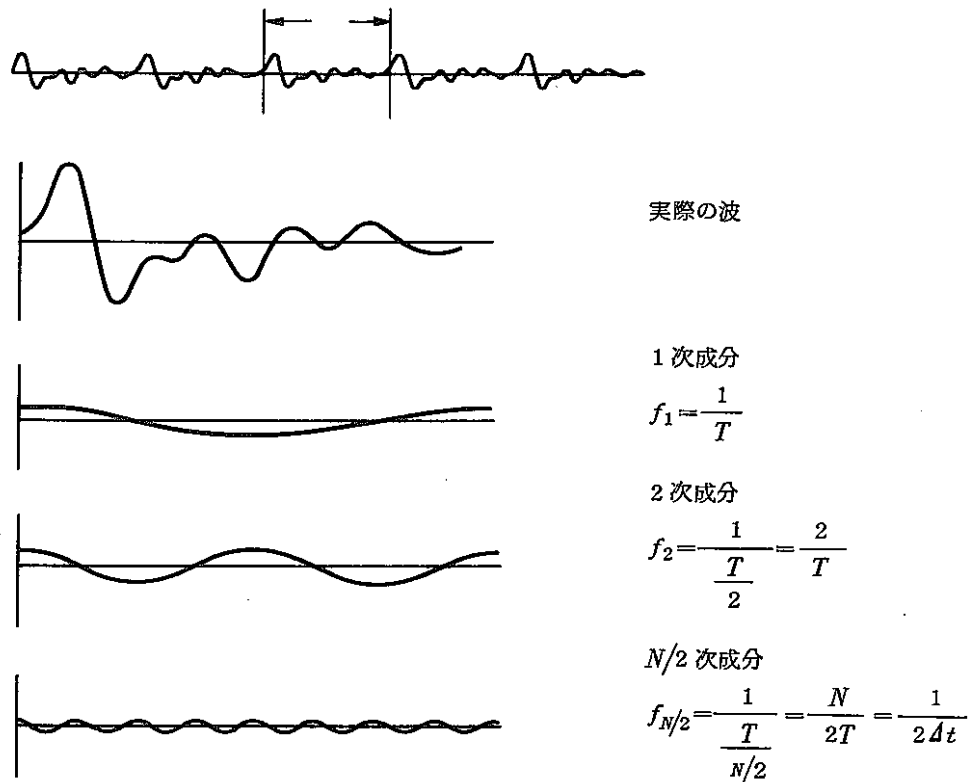


図1.11-1 FFTによる地震波のFourier変換

〔参考文献〕

- 1) T. Belytschko, K. J. Bathe, "Computational methods for transient analysis", North-Holland, 1983.
- 2) T. Belytschko, J. I. Lin, "Eigenvalues and stable time steps for the bilinear mindlin plate element", International Journal for numerical methods in Engineering, vol. 21, 1729~1745(1985).

## 1.12 周波数応答解析機能

構造物に調和外力が作用するとその過渡的な応答は減衰の効果によってうすれ、十分時間が経過した後では定常応答のみが得られる。この定常応答も調和的となり、単一周波数成分に対する応答は加えた外力と同じ周波数で、ある振幅と位相差を持つ。よって、このような問題を解析する場合、定常応答のみに注目するなら外力の各周波数成分に対する構造物の各点での振幅と位相差を知れば応答解析は完了したことになる。つまり、強制振動のように外力が調和的でありかつ定常応答のみを問題とするなら周波数応答解析を行なうことが有効である。

さて、周波数応答解析が実際に適用される場合を調べると、一般に以下のような2つの場合がある。

### 1) 振動解析に用いられる場合

これは、船、自動車、ポンプ等のように周期的加振源を持った構造物の振動解析を行なう場合であり、いわゆる強制振動問題である。このような構造物の動的解析は一般に固有値解析までのことが多いが、加振周波数に対する振動特性を議論する場合に周波数応答解析が用いられる。

### 2) 地震応答解析に用いられる場合

地震に対する応答解析を行なう場合、地震を調和的であると仮定して周波数応答解析を行なう場合がある（これは一般に地盤と構造物の連成問題を議論する場合に多く、専門プログラムが使われる）。このときの解析手順は以下のようになり、イで周波数応答解析が用いられる。

ア. 外力（地震波）を各周波数成分に分解する。（フーリエ変換）

イ. 各周波数に対する応答を求める。

ウ. 2で得られた応答を重ね合わせ実際の応答を得る。（フーリエ逆変換）

実際に汎用構造解析プログラムにおいて周波数応答解析が行なわれるのは、1)の場合においてであり、このための機能としては2)のイのみを備えていればよい。よって FINAS における周波数応答解析機能も調和外力のある周波数成分（一般に振幅と位相差で表わされる）に対しての定常応答（これも振幅と位相差として得られる）を計算することを目的とする。ゆえに解析を行う前に外力は各周波数成分に分解されており、得られる応答も各周波数成分についてのものとなる。

線形動的解析の一般的な基礎方程式は以下ようになる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{p\} \quad (1.12-1)$$

ここに、以下のような周波数  $\omega/2\pi$  の調和外力が与えられる場合を考える。

$$\{p\} = \{a\} \cos(\omega t + \{\phi\}) \quad (1.12-2)$$

これは、複素数を用いて以下のように書ける。

$$\{p\} = \text{Real} \left[ \{\bar{f}\} \exp(i\omega t) \right] \quad (1.12-3)$$

ただし,

$$\begin{aligned}\{\bar{f}\} &= \{f_1\} + i\{f_2\} && : \text{複素振幅} \\ \{a\}^2 &= \{f_1\}^2 + \{f_2\}^2 && : \text{振幅} \\ \{\phi\} &= \tan^{-1}(\{f_2\}/\{f_1\}) && : \text{位相のずれ}\end{aligned}$$

式(1.12-1)の一般解は, 次式で表わされる。

$$\{u\} = \{b\} \cos(\omega t + \{\phi\}) \quad (1.12-4)$$

これも, 複素数を用いて次式のように書ける。

$$\{u\} = \text{Real}[\{\bar{u}\} \exp(i\omega t)] \quad (1.12-5)$$

同様に,

$$\begin{aligned}\{\bar{u}\} &= \{u_1\} + i\{u_2\} && : \text{複素振幅} \\ \{b\}^2 &= \{u_1\}^2 + \{u_2\}^2 && : \text{振幅} \\ \{\phi\} &= \tan^{-1}(\{u_2\}/\{u_1\}) && : \text{位相のずれ}\end{aligned}$$

式(1.12-3), 式(1.12-5)より, 虚数部を含めて外力, 変位, 速度, 加速度は次式らで表わされる。

$$\{p\} = \{\bar{f}\} \exp(i\omega t) \quad (1.12-6)$$

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \exp(i\omega t) \quad (1.12-7)$$

$$\{\dot{u}\} = i\omega\{\bar{u}\} \exp(i\omega t) \quad (1.12-8)$$

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2\{\bar{u}\} \exp(i\omega t) \quad (1.12-9)$$

式(1.12-6)~式(1.12-9)を式(1.12-1)に代入して共通項“ $\exp(i\omega t)$ ”を消去すれば, 次式が得られる。

$$(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K])\{\bar{u}\} = \{\bar{f}\} \quad (1.12-10)$$

式(1.12-10)の複素連立一次方程式を一般の線形静的問題と同様に解けば, 式(1.12-1)の式(1.12-3)に対する定常調和応答 $\{\bar{u}\}$ が得られる。これは, 外力と同じ周波数 $\omega/2\pi$ で振幅が $\{b\}$ , 位相 $\{\phi\}$ を持った調和応答である。

ただし, 減衰がなく( $[C] = [0]$ ), かつ外力に位相のずれがなければ( $[\phi] = [0]$ ), 式(1.12-10)は以下のように実数のみの式となる。

$$(-\omega^2[M] + [K])\{b\} = \{a\} \quad (1.12-11)$$

また, 外力振幅 $\{a\}$ を単位化して各周波数 $\omega$ に対する応答振幅 $\{b\}$ を求めると, これは $\omega$ の関数になり, 周波数応答関数(Amplification Function)と呼ばれる。

これは単位加振力に対する構造物の応答倍率を表わし、構造物の各点で図 1.12-1 のような関係を示す。

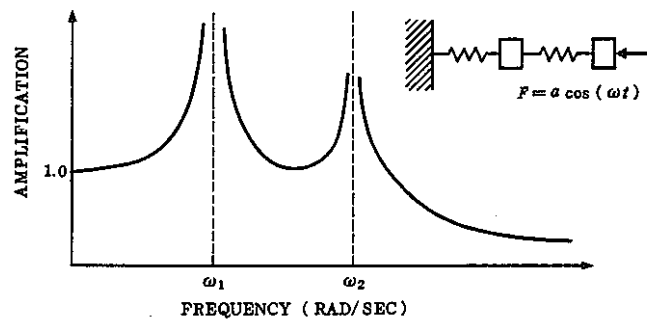


図 1.12-1 周波数応答関数

## 1.13 面接触解析機能

接触問題として分類される現象は、構造解析の様々な分野において一般的であるが、取り扱いが困難な問題として考えられているが、Hertzの解法で代表される理論的解法は対象とする形状、前提とする仮定のために実用上の制約が多いため、有限要素法で代表される数値計算による解析法の確立が多くの研究者により検討されている先端的な問題である。接触問題の有限要素法による解析法として、いくつかの方法が提案されているが、代表的な定式化としては、ラグランジュ乗数法により接面拘束を与える方法とペナルティ法として接面拘束を与える方法が一般的である。

ラグランジュ乗数法は物体間の接触条件と拘束条件をラグランジュ乗数を拘束パラメータを用いて全体支配方程式へ組み入れる。このため、接触状況により支配方程式の元数が増減し、最終的な連立方程式の正定値性や対称性が保証されないため、求解過程では特別な工夫が必要である。

ペナルティ法はラグランジュ乗数法での求解の数値計算上の困難さを回避する方法として考えられたもので、一種の近似解を求めるものであるが、接触拘束を与えるためのペナルティ係数の値を適切に選択することや、収束計算でのペナルティ条件の与え方などで理論上の問題点が考えられる。従来から用いられている非線形パネタイプの接触要素はペナルティ法が応用された例である。

### 1.13.1 面接触問題の定式化

図1.13-1は物体間での接触問題を示したもので、各物体を便宜的に接触体 (Contactor body) と対象体 (Target body) に分類する。FINASの面接触機能はラグランジュ乗数法で定式化し、接触作用力をラグランジュ乗数として取り扱い、求解過程を変位求解フェイズと接触求解フェイズの2段階の相互解法と収束計算を組み合わせた高精度解法を考える。

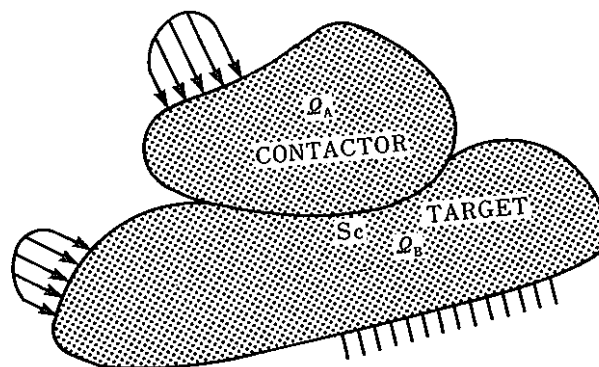


図1.13-1 接触問題の形式

基礎式としては構造物のポテンシャル・エネルギー式に物体間に作用する接触力をラグランジュ乗数としたポテンシャル・エネルギー項を追加し、接面の整合性拘束 (物体の相互入り込み拘束) を与えることによるポテンシャル・エネルギー増加を考える。

$$\Pi' = \Pi - \sum \Pi_K \quad (1.13-1)$$

$\Pi$ は接触条件を除いた増分形平衡方程式より導かれる通常のポテンシャル・エネルギーであり、 $\sum \Pi_K$ は有限要素離散化による接触節点 $K$ に作用する接触力によるポテンシャル・エネルギーの増加分であり、接面の拘束を表わすためのラグランジュ乗数で表わされる項である。

接線剛性法を用いた増分形定式において、時刻 $t+\Delta t$ 、収束計算 $(i-1)$ の形状を既知状態として $(i)$ ステップの形状を求めるものと仮定する。時刻 $t+\Delta t$ 、収束計算 $(0)$ での初期状態は時刻 $t$ での形状を仮定する。面接触物体間のオーバーラップベクトルを $G$ で表わすと、図1.13-2のようにConnector節点 $K$ とTarget節点 $a, b$ 間における $(i-1)$ ステップでのオーバーラップベクトル $G_K^{(i-1)}$ は次のように表わされる。

$$G_K^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}X_K^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}X_C^{(i-1)} \quad (1.13-2)$$

${}^{t+\Delta t}X_K^{(i-1)}$ は時刻 $t+\Delta t$ 、収束計算 $(i)$ でのConnector節点 $K$ の位置ベクトルを表わし、 ${}^{t+\Delta t}X_C^{(i-1)}$ は物体間の固着接触を考えた場合の接触位置を表わす位置ベクトルであり、完全すべりや摩擦を考慮する場合については次節で検討する。図1.13-2において、節点 $a-b$ の接触面についての局所系を $t-n$ で表わし、 $t$ は接線方向、 $n$ は法線方向を表わす。よって局所系でのオーバーラップベクトル ${}^{t+\Delta t}g_K^{(i-1)}$ は次のように変換される。

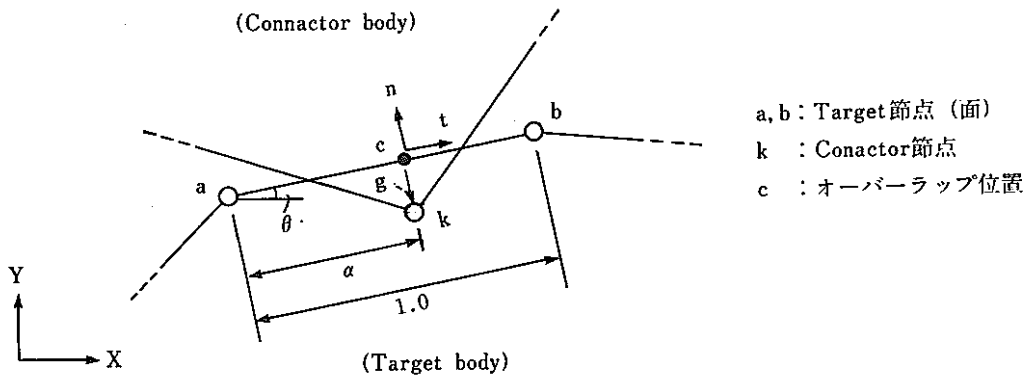


図1.13-2 2次元問題での面接触形状

$$\begin{Bmatrix} g_{Kt}^{(i-1)} \\ g_{Kn}^{(i-1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G_{KX}^{(i-1)} \\ G_{KY}^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (1.13-3)$$

接触面での接触力の評価等は局所系での成分を考えることが便宜的であるので、以下の議論では接触面については局所系での定式化を考える。

$(i-1)$ ステップにおいて物体間がオーバーラップ状態について $(i)$ ステップにおいて物体相互の入り込みを禁止する適合状態を得るためには、節点 $K$ について次の関係が与えられる。

$${}^{t+\Delta t}X_K^{(i)} = {}^{t+\Delta t}X_C^{(i)} \quad (1.13-4)$$



式(1.13-2)と式(1.13-4)を局所系での変位増分で整理すると次式が得られる。

$$\Delta \mathbf{u}_C^{(i)} = \Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \mathbf{g}_K^{(i-1)} \quad (1.13-5)$$

節点 a, b, K に作用する固着状態の接触力によるポテンシャル・エネルギー  $\Pi_K$  は次のように仮定できる。

$$\Pi_K = {}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i)T} (\Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \mathbf{g}_K^{(i-1)}) + {}^{t+\Delta t} \lambda_a^{(i)T} \Delta \mathbf{u}_a^{(i)} + {}^{t+\Delta t} \lambda_b^{(i)T} \Delta \mathbf{u}_b^{(i)} \quad (1.13-6)$$

図1.13-2に示すように接触位置 C を表わすために節点 a-b 間を正規化した座標  $\alpha$  を利用する。

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_C^{(i)} = (1-\alpha^{(i-1)}) {}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_a^{(i)} + \alpha {}^{t+\Delta t} \mathbf{X}_b^{(i)} \quad (1.13-7)$$

正規化座標  $\alpha$  を用いて節点 K の接触力に対応する節点 a, b の接触力を次のように仮定する。

$${}^{t+\Delta t} \lambda_a^{(i)} = -(1-\alpha^{(i-1)}) {}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i)} \quad (1.13-8)$$

$${}^{t+\Delta t} \lambda_b^{(i)} = -\alpha^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i)} \quad (1.13-9)$$

節点 K の接触力を増分形で次のように表示する。

$${}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i-1)} + \Delta \lambda_K^{(i)} \quad (1.13-10)$$

式(1.13-8)~式(1.13-10)を式(1.13-6)へ代入し、ポテンシャル・エネルギー  $\Pi_K$  を増分形で表示する。

$$\begin{aligned} \Pi_K = & {}^{t+\Delta t} \lambda_K^{(i-1)T} \left[ (\Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \mathbf{g}_K^{(i-1)}) - (1-\alpha) \Delta \mathbf{u}_a^{(i)} - \alpha^{(i-1)} \Delta \mathbf{u}_b^{(i)} \right] \\ & + \Delta \lambda_K^{(i)T} \left[ (\Delta \mathbf{u}_K^{(i)} + \mathbf{g}_K^{(i-1)}) - (1-\alpha) \Delta \mathbf{u}_a^{(i)} - \alpha^{(i-1)} \Delta \mathbf{u}_b^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (1.13-11)$$

式(1.13-11)で表わされるポテンシャル・エネルギー式は Contactor 節点を主自由度, Target 面を従自由度として取り扱うような形式となっている。式(1.13-11)は固着接触の場合のエネルギー式となっているが, 安全すべりや摩擦すべりの場合は 1.13 節において検討を行なう。

式(1.13-1)のポテンシャル・エネルギーを変位増分, 接触力増分の変分に関する停留条件  $\delta \pi = 0$  より次のようなマトリックス形の平衡方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} & {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_J^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_L^{(i-1)T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_C^{(i-1)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_C^{(i-1)} \\ \mathbf{g}^{(i-1)} \end{Bmatrix} \quad (1.13-12)$$

$K$ は剛性マトリックス、 $B_j$ は接触力に関する拘束マトリックス、 $B_L$ は変位についての拘束マトリックス、 $P$ は作用荷重ベクトル、 $R$ は等価力ベクトル、 $R_c$ は接触力履歴による外力ベクトルである。接触力と変位についての拘束マトリックスは固着と完全すべりの場合に対称形マトリックスとなる。

$$\left[ {}^{t+\Delta t} B_j^{(i-1)} \right] = \left[ {}^{t+\Delta t} B_L^{(i-1)} \right]^T \quad (1.13-13)$$

また式(1.13-13)は全体系での拘束マトリックスであるので局所系からの変換は式(1.13-3)と同様である。

$$\left[ {}^{t+\Delta t} B_j^{(i-1)} \right] = [C]^T \left[ {}^{t+\Delta t} b_j^{(i-1)} \right] \quad (1.13-14)$$

ここで $C$ は全体系より局所系への変換マトリックス、 $b_j$ は局所系での拘束マトリックスであり、図1.13-2のような2次元体での固着接触の場合は次のような係数マトリックスとなる。

$$\left[ {}^{t+\Delta t} b_j^{(i-1)} \right] = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1-\alpha^{(i-1)} & 0 \\ 0 & 1-\alpha^{(i-1)} \\ \alpha^{(i)} & 0 \\ 0 & \alpha^{(i)} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \text{K 節点} \\ \text{a 節点} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{b 節点} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (1.13-15)$$

全体系での接触力ベクトルも同様にして局所系より全体系へ変換される。

$$\left\{ {}^{t+\Delta t} R_c^{(i-1)} \right\} = [C]^T \left\{ {}^{t+\Delta t} r_c^{(i-1)} \right\} \quad (1.13-16)$$

$$\left\{ {}^{t+\Delta t} r_c^{(i-1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{t+\Delta t} \lambda_{Kt}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \lambda_{Kn}^{(i-1)} \\ -(1-\alpha) {}^{t+\Delta t} \lambda_{Kt}^{(i-1)} \\ -(1-\alpha) {}^{t+\Delta t} \lambda_{Kn}^{(i-1)} \\ \alpha {}^{t+\Delta t} \lambda_{Kt}^{(i-1)} \\ \alpha {}^{t+\Delta t} \lambda_{Kn}^{(i-1)} \end{array} \right\} \quad (1.13-17)$$

ここで $\lambda_{Kt}$ と $\lambda_{Kn}$ は接触節点Kでの局所系での接触力の接線方向成分と法線方向成分である。

### 1.13.2 求解アルゴリズム

固着状態での増分形接触方程式は式(1.13-12)で表わされるが、右辺係数マトリックスの接触力増分を表わすラグランジュ乗数係数( $\Delta\lambda$ )に関する対角成分がゼロであるので、求解における連立方程式消去を行なうことが困難となる。求解過程を変位増分求解と接触力増分求解に分離し、収束計算の中で相互に計算を行なう2段階解法を用いる。

はじめに接触力増分をゼロと仮定し、式(1.13-10)を変位増分について計算を行なう。

$$\left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \right] \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \} = \{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{P} \} - \{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^{(i)} \} + \{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_C^{(i-1)} \} \quad (1.13-18)$$

$\{ \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \}$  は  $(i)$  ステップでの変位増分の近似解である。式(1.13-18)を用いて式(1.13-12)は次のように整理することができる。

$$\left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \right] \{ \Delta \mathbf{u}^{(i)} \} + \left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right] \{ \Delta \lambda^{(i)} \} = \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \right] \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \} \quad (1.13-19)$$

$$\left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right]^T \{ \Delta \mathbf{u}^{(i)} \} = \{ \mathbf{g}^{(i-1)} \} \quad (1.13-20)$$

$\left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right]$  は変位増分  $\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$  により表示される接触力の拘束マトリックスであり、固着のケースでは変位拘束マトリックスと対称形となる。式(1.13-20)へ式(1.13-19)を代入し、接触力増分について整理する。

$$\left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right]^T \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \right]^{-1} \left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right] \{ \Delta \lambda^{(i)} \} = \left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right]^T \{ \Delta \bar{\mathbf{u}} \} - \{ \mathbf{g}^{(i-1)} \} \quad (1.13-21)$$

式(1.13-21)の右辺へ式(1.13-3)の座標変換を代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right] \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \} - \{ \mathbf{g}^{(i-1)} \} &= - \left( \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}_K^{(i)} \} - \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}_C \} + \{ \mathbf{g}^{(i-1)} \} \right) \\ &= - \left( \{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}_K^{(i-1)} \} + \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}_K^{(i)} \} - \{ {}^{t+\Delta t}\mathbf{x}_C^{(i-1)} \} - \{ \Delta \bar{\mathbf{u}}_C^{(i)} \} \right) \\ &= - \left( \{ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{x}}_K^{(i)} \} - \{ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{x}}_C^{(i)} \} \right) \end{aligned} \quad (1.13-22)$$

ここで  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{x}$  は接触面の局所系での変位成分と位置ベクトルを表わしている。式(1.13-22)より式(1.13-21)の右辺は、式(1.13-18)より得られる変位増分  $\Delta \bar{\mathbf{u}}^{(i)}$  の近似値より求まる接触部分のオーバーラップベクトルを表わしている。よって式(1.13-21)は次のように表わすことができる。

$$\left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right]^T \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \right]^{-1} \left[ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{B}}_J^{(i)} \right] \{ \Delta \lambda^{(i)} \} = - \{ \bar{\mathbf{d}}^{(i)} \} \quad (1.13-23)$$

$$\{ \bar{\mathbf{d}}^{(i)} \} = \{ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{X}}_K^{(i)} \} - \{ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{X}}_C^{(i)} \} \quad (1.13-24)$$

式(1.13-23)を解くことにより接触力増分が得られる。 $(i)$  ステップでの接触力は次のように仮定する。

$$\{ {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i)} \} = \{ {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} \} + \{ \Delta \lambda^{(i)} \} \quad (1.13-25)$$

式(1.13-25)を式(1.13-17)へ代入し接触力による外力ベクトルが得られる。式(1.13-18)~式(1.13-24)の変位増分〈 $\rightarrow$ 〉接触増分のくり返し計算により、より精度が改善された解析結果を求めることができる。

### 1.13.3 摩擦を考慮した接触定式

式(1.13-12)は一般的な接触方程式であり拘束マトリックスは剛性マトリックスの行と列の部分に配置される。表1.13-1に示すように接触面の状態により接触方程式は対称形の場合と非対称の場合にわけられる。接触状態が固着の場合は接触面の法線方向と接線方向に拘束条件が与えられるので対称形である。摩擦のない完全すべりの場合も、接触面の法線方向だけの拘束条件となるので対称形である。摩擦を考慮したすべり接触の場合、変位拘束としては法線方向の拘束だけで、接線方向の拘束は除かれる。接触力の拘束条件としては法線方向の接触力と接線方向の摩擦力を組み合わせた拘束条件となり、変位と接触力の拘束マトリックスは対称形とはならない。

摩擦を考慮した接触問題の各ステップにおいて初期状態として固着を仮定して計算を行ない、接触力ベクトルとして法線方向成分と接線方向成分が得られる。摩擦則としてCoulomb則を適用すると、各接触節点についてすべり判定条件として次式が与えられる。

$$|\lambda_t| < |\mu_s \lambda_n| \quad (1.13-26)$$

ここで  $\lambda_t$ 、 $\lambda_n$ 、 $\mu_s$  は接線方向と法線方向の接触力と静摩擦係数である。接線方向の接触力が式(1.13-27)を超えると、すべり接触条件となり、接触力の拘束条件として次式が仮定される。

$$\lambda_t = \pm \mu_d \lambda_n \quad (1.13-27)$$

ここで  $\mu_d$  は動摩擦係数であり、その符号は接触面の局所系に関してのすべり方向により定義するものである。

表1.13-1 接触状態と拘束マトリックス

	接触面の状態		
	固着接触	完全すべり	摩擦すべり
$B_J$ (接触力拘束マトリックス)	接線方向及び法線方向の拘束	法線方向の拘束	法線方向拘束と摩擦係数を考慮した接線方向拘束
$B_L$ (変位拘束マトリックス)	"	"	法線方向の拘束
$B_L = B_J^T$ (対称性)	○	○	×

S. K. Pascoe 等は文献 7) において摩擦すべりの非対称接触方程式の対称化手法について接線方向力法と法線方向ギャップ法と称する 2 つの方法を提案しているが、FINAS では次のようにアルゴリズムにより摩擦すべりを取り扱う。

- Step.1 固着状態を仮定し計算を行なう。
- Step.2 収束計算の開始
- Step.3 式 (1.13-26) によりすべり判定を行い、すべり節点については完全すべりを仮定する。
- Step.4 収束計算終了後、すべり接触節点について、収束計算の中でのすべり移動量と方向を求め、式 (1.13-27) に摩擦力を求め、すべり方向により符号を仮定する。
- Step.5 接触力による外力ベクトルを求め、解析を次のステップへ進める。

図 1.13.3 は固着、完全すべり、摩擦すべりの接触形状を示したもので、物体間の相対的な接線方向への移動方向により摩擦力の方向を仮定する。Pascoe 等の方法は変位と力の拘束マトリックスのどちらか一方を用いて、方程式の対称化を仮定するものである。FINAS の方法は接線方向力法に似たアルゴリズムとなっている。

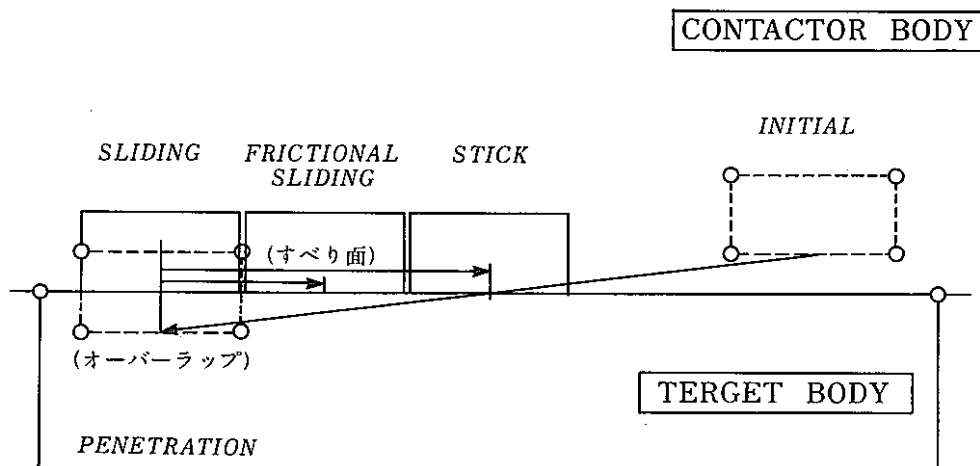


図 1.13-3 固着とすべりでの接触位置

#### 1.13.4 接触要素定式

接触面または接触辺を定義するために、FINAS では 2 節点辺要素と 4 節点面要素を開発する。図 1.13-4 のように接触面または辺について、A 面と B 面のように面の組み合わせを定義する。各組は要素列として定義するが、FINAS の内部データとしては Contactor 物体については節点列に変換し、Target 物体については入力のままの要素列として取り扱う。

接触状態をサーチするアルゴリズムとしては、各 Target 面要素について要素の形状領域に属する Contactor 節点を求め、オーバーラップの有無を検証する。このアルゴリズムは基本的には辺要素の場合も面要素の場合も同様であるが、接触形状が複雑なモデルでは要素レンジの判定において誤まった Contactor 節点をサーチする可能性があるため、判定条件としてオーバーラップ量の最小となるペアを選択する条件も追加した。

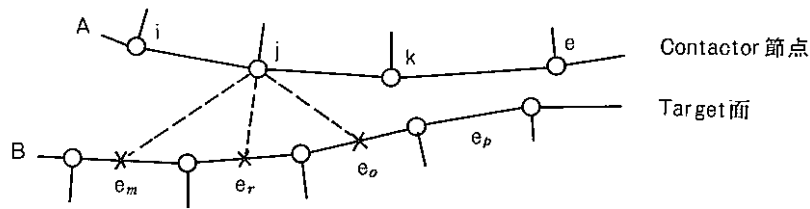


図 1.13-4 接触面の定義

- a. Target 要素内に存在する Contactor 節点
- b. Target 要素と Contactor 節点のオーバーラップの有無
- c. オーバーラップ量の最小値となるペアを求める

2 節点辺要素を用いた場合の接触定式については 1.13-1 節において具体的に示されているので、ここでは 4 節点面要素の接触条件マトリックスについて説明する。図 1.13-5 のように節点 o, p, q, r から成る面要素と接触する Contactor 節点 k がサーチされ、要素内での接触位置を c 点とし、要素の図心位置を e 点で表わす。要素について全体座標より局所系  $x, y, z$  への変換マトリックスを求め、各節点の座標を局所系へ変換する。変換マトリックスは四辺形シェル要素などで用いている定義法と同様である。

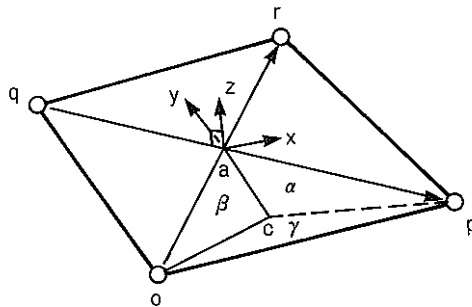


図 1.13-5 4 節点四辺形面接触要素

$$(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_o, \mathbf{X}_p, \mathbf{X}_q, \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_e) \rightarrow (\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_o, \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_e)$$

$$\mathbf{X}_e = \frac{1}{4}(\mathbf{X}_o + \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_q + \mathbf{X}_r) \quad (1.13-28)$$

要素内での接触位置 c 点を仮定し、図 1.13-5 に示す正規化した面積座標  $\alpha, \beta, \gamma$  を求める。

$$\mathbf{x}_c = \left(\alpha + \frac{1}{4}\gamma\right)\mathbf{x}_o + \left(\beta + \frac{1}{4}\gamma\right)\mathbf{x}_p + \frac{1}{4}\gamma\mathbf{x}_q + \frac{1}{4}\gamma\mathbf{x}_r \quad (1.13-29)$$

ここで

$$\alpha = \Delta(cpe) / \Delta(ope), \quad \beta = \Delta(oce) / \Delta(ope), \quad \gamma = \Delta(opc) / \Delta(ope) \quad (1.13-30)$$

4 節点面要素の場合のオーバーラップ ベクトル  $d$  と固着ケースでの接触拘束マトリックス  $b_I$  は 次のように定義される。

$$d = x_k - x_c \quad (1.13-31)$$

$$[b_I] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \alpha + \frac{1}{4}r & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \frac{1}{4}r & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + \frac{1}{4}r \\ \beta + \frac{1}{4}r & 0 & 0 \\ 0 & \beta + \frac{1}{4}r & 0 \\ 0 & 0 & \beta + \frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}r & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}r \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{k 節点} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{o 節点} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{p 節点} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{q 節点} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{r 節点} \end{matrix} \quad (1.13-32)$$

式(1.13-32)の各節点自由度は3成分で示されているが、シェルタイプの解析では6自由度となり並進方向成分について拘束条件が与えられる。

〔参考文献〕

- 1) N. Okamoto, M. Kakazawa, "Finite element incremental contact analysis with various frictional conditions", Int. J. Num. Math. Eng., vol. 14, pp. 337~357 (1979).
- 2) B. Nour-omid, P. Wriggers, "A two level iteration method for solution of contact problems", Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 54, pp. 131~144 (1986).
- 3) K. J. Bathe, A. Chaudhary, "A solution method for planar and axisymmetric contact problems", Int. J. Num. Meth. Eng. vol. 21, pp. 66~88 (1986).
- 4) P. R. Heyliger, J. N. Reddy, "A mixed computational algorithm for plane elastic contact problems I. formulation", Comput. Struct., vol. 26, pp. 621~634 (1987).
- 5) Zhi-hua-Zhong, L. Nilsson, "A contact searching algorithm for general 3-D contact-impact problems",

Comput. Struct., vol. 34, pp. 327~335 (1990).

- 6) J. Bohn, "A comparison of different contact algorithms with applications", Comput. Struct., vol.26, pp.207-221 (1987).
- 7) S. K. Pascoe, J. E. Mottershead, "Two new finite element contact algorithms", Comput. Struct., vol.32, pp.134-144 (1989).



## 2. 数値解法

### 2.1 はじめに

原子力構造物の各種コンポーネントに対して有限要素法による種々の非線形構造解析を安定かつ効率的に行なう要求が増大しているが、非線形解析では増分法解析が必要であるために、計算コストが線形解析に比べて多大に必要となる。有限要素法解析に特有なスパースマトリックスに関する数値計算技術 — 例えばスカイライン法、ウェーブフロント法等 — が提案されている。汎用非線形構造解析プログラムの開発では、非線形解析法の特徴を考慮した手法を採用する必要がある。

連立一次方程式の解法はウェーブフロント法を用いており、マトリックスのスパース性、大次元問題での補助記憶装置とのデータ転送量の最小化および計算効率の向上に注意を払っている。フロント法は要素番号が計算効率に大きく影響を与えるので、要素番号の最適リナンバー機能を開発する。特に繰り返し計算となる非線形問題では有効なものとなる。また、固有値計算方法は、有限要素法解析の特長であるスパースマトリックスのある特定固有値計算に適したサブスペース法を採用している。固有値解法は動的解析および座屈解析に利用される。

2.2節では、連立一次方程式の解法とリナンバー機能についてアルゴリズムを説明する。2.3節では、固有値解法の計算アルゴリズムを説明する。

## 2.2 連立一次方程式の解法

FINAS では連立一次方程式の解法としてマトリックスを組み立てながら解くウェーブフロント法を採用している。ここでは、2.2.1節で自由度間の線形結合を含めた一般的な境界条件の処理について述べ、2.2.2節では連立一次方程式の解法について説明する。2.2.3節では要素番号の最適化のリナンバー機能について説明する。

### 2.2.1 境界条件の処理

境界条件の処理は、実際のプログラムにおいては要素単位で処理して全体系へアセンブルする過程となるのであるが、これを明晰にするために全体系での処理として説明する。全体モデルの平衡方程式と境界条件式を次のように表わす。

$$[K] \Delta \{\hat{U}\} = \Delta \{\hat{P}\} \quad (2.2-1)$$

$$[A] \Delta \{\hat{U}\} = \Delta \{\hat{B}\} \quad (2.2-2)$$

ここで、 $[K]$  は係数マトリックス、 $\Delta \{\hat{U}\}$  と  $\Delta \{\hat{P}\}$  は未知量および荷重増分ベクトルである。式(2.2-2)は規定条件および自由度間の線形結合条件(ファスニングと呼ぶ)を含んだ境界条件式であり、 $[A]$  は自由度間の線形結合マトリックス、 $\Delta \{\hat{B}\}$  は規定条件である。

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \Delta \{\hat{B}\} = \begin{Bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{Bmatrix} \quad (2.2-3)$$

$n$  は全体モデルの自由度数、 $m$  は境界条件式の数である。マトリックス  $[A]$  の階数を  $r$  とすると、 $r$  は  $[A]$  の 1 次独立な行数を表わし、 $[A]$  の  $r$  階の小行列式のうち、その値が非零のものが少なくとも 1 つ存在することを意味する。○ の 1 次独立な行より成るマトリックスを  $[\bar{A}]$  とし、対応して  $\Delta \{\hat{B}\}$  の  $r$  元ベクトルを  $\Delta \{\bar{B}\}$  とすると、次のようになる。

$$[\bar{A}] \Delta \{\hat{U}\} = \Delta \{\bar{B}\} \quad (2.2-4)$$

次に行列式の値が非零となる ○ の小行列を  $[\bar{A}_1]$ 、そして残りを  $[\bar{A}_2]$  として、○○ も  $\Delta \{\hat{U}_1\}$  と  $\Delta \{\hat{U}_2\}$  に分割する。

$$[\bar{A}] = [\bar{A}_1 \bar{A}_2], \quad \Delta \{\hat{U}\} = \begin{Bmatrix} \Delta \hat{U}_1 \\ \Delta \hat{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.2-5)$$

$[\bar{A}_1]$  と  $[\bar{A}_2]$  はそれぞれ  $r \times r$  次、 $r \times (n-r)$  次のマトリックスであり、○○ と  $\Delta \{\hat{U}_2\}$  は  $r$  次、 $(n-r)$

$k+1, \dots, n$  の順に次の計算より求まる。

$$S_{kl} = K_{kl}^{(k)} \quad (l = k, \dots, n) \quad (2.2-15)$$

$$K_{ij}^{(k+1)} = K_{ij}^{(k)} - \frac{K_{ik}^{(k)}}{K_{kk}^{(k)}} K_{kj}^{(k)} \quad (j = k+1, \dots, n) \quad (2.2-16)$$

ただし、

$$K_{ij}^{(1)} = K_{ij}, \quad S_{nn} = K_{nn}^{(n-1)} \quad (2.2-17)$$

よって〔 $S$ 〕の対角成分が〔 $D$ 〕となり、非対角成分と対角に1.0を配したものが〔 $U$ 〕となる。

### 2.2.3 要素番号のリナンバー機能

有限要素法で得られるスパースなマトリックスの解法としてフロントル法が一般的となっているが、従来のバンド法と比較すると、記憶領域的にも演算回数の点でも同程度に効率の良いものといわれている。フロントル法の効率は要素の順番に依存しており、節点番号は重要ではない。これは消去の過程が要素単位にアセンブルと分解されることによる。要素数が少なく簡単なモデルではフロントル法を効率よく実行する要素番号化が可能であるが、2次元や3次元の複雑なモデルでは最適な要素番号化は困難である。効果的な要素番号の定義は線形方程式をくり返し計算する非線形問題では特に重要である。効果の良いソルバーを必要とするものは、陰的スキームの動的解析や大規模な塑性問題などである。

スパースマトリックスのバンド幅を最小化するためのアルゴリズムについては多数の文献が存在しているが、フロント幅を最小に試みるスキームの開発についてはあまり注目されていない。この種の問題を解決する手法としては2つの方法が考えられる。以下順次考察する。

フロントル法における計算量を最小化する直接的な手法を開発する最初の試みはKingの論文にみられる。Kingのアルゴリズムは最大フロント幅を最小化する要素番号を定義するのに適しているが、この論文が発表されたとき一般的であったアルゴリズムは節点単位にアセンブルして消去する方法であり、節点のリナンバーが注目されていた。

要素単位でアセンブルと消去を相互に行なうフロント法にKingの手法を適用して要素番号のリナンバーを行なうと、節点の消去順は可能なかぎり最適なものとなる。

ステップは次のように要約される。順序化の効率を区別するものとして、順序効率化パラメータ $\sigma$ を提案した。

$$\sigma = \sum_{i=1}^N M_i^2 \quad (2.2-18)$$

$M_i$ は節点 $i$ を消去するときの非対角節点数であり、 $N$ は全体の節点数である。Kingのアルゴリズムを要約すると次のようになる。

- (1) メッシュモデルの全節点の結合を示す隣接リスト(adjacency list)を作成する。節点がある他の節点と要素を共有しているとき隣接状態と呼ぶ。
- (2) 開始点を選び、節点1とする。

次のベクトルである。 $[\bar{A}_1]$  の定義より  $[\bar{A}_1]^{-1}$  が存在するので、式(2.2-4)と式(2.2-5)より、 $\Delta\{\hat{U}_1\}$  は次のようになる。

$$\Delta\{\hat{U}_1\} = -[\bar{A}_1][\bar{A}_2]\Delta\{\hat{U}_2\} + [\bar{A}_1]^{-1}\Delta\{\bar{B}\} \quad (2.2-6)$$

したがって、

$$\Delta\{\hat{U}\} = [\tilde{A}]\Delta\{\hat{U}_2\} + \Delta\{\tilde{B}\} \quad (2.2-7)$$

ただし、

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} -[\bar{A}_1] & [\bar{A}_2] \\ & I \end{bmatrix}, \quad \Delta\{\tilde{B}\} = \begin{bmatrix} [\bar{A}_1]^{-1}\Delta\{\bar{B}\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2-8)$$

ここで、 $I$  は  $(n-r) \times (n-r)$  次の単位マトリックスである。式(2.2-7)を式(2.2-1)へ代入して、両辺に左側より  $[\tilde{A}]^T$  をかける。

$$[\tilde{K}]\Delta\{\hat{U}_2\} = \Delta\{\tilde{P}\} \quad (2.2-9)$$

$$[\tilde{K}] = [\tilde{A}]^T[K][\tilde{A}], \quad \Delta\{\tilde{P}\} = [\tilde{A}]^T\Delta\{\hat{P}\} - [\tilde{A}]^T[K]\Delta\{\tilde{B}\} \quad (2.2-10)$$

式(2.2-9)が境界条件を考慮した平衡方程式であり、最終の未知ベクトルは  $\Delta\{\hat{U}_2\}$  より、式(2.2-7)で計算できる。

## 2.2.2 連立一次方程式の解法

FINAS では係数マトリックス  $[K]$  を組み立てながら解くフロント法を採用しており、式(2.2-10)の境界条件の処理は消去の前段階として要素単位に変換される。境界条件を考慮した剛性マトリックス  $[\tilde{K}]$  は、以下のようになり LDU 分解される。

$$[\tilde{K}] = [L][D][U] \quad (2.2-11)$$

$[L]$  は単位下三角マトリックス、 $[D]$  は対角マトリックス、 $[U]$  は単位上三角マトリックスである。Gauss の消去法により三角化したマトリックスを  $[S]$  とすれば

$$[L][S] = [L][D][U] \quad (2.2-12)$$

となる。 $[\tilde{K}]$  は対称マトリックスであるので、式(2.2-11)は次のように表わすこともできる。

$$[\tilde{K}] = [L][D][L]^T \quad (2.2-13)$$

また  $[\tilde{K}]$  が正値性であるならば、次のようにコレスキー分解できる。

$$[\tilde{K}] = [G][G]^T, \quad [G] = [L]\sqrt{D} \quad (2.2-14)$$

式(2.2-12)の  $[S]$  マトリックスは Gauss の消去法により、 $K=1, 2, \dots, n-1$  の順に各  $K$  について、 $i=$

- (3) 現在アクティブである節点のリストを作成する。隣接リストの中でこれらの節点を参照するすべてに負の印をつける。順序効率パラメータ  $\sigma$  を累積する。
- (4) リスト中のアクティブ節点を調べ、消去されるならばアクティブ節点の増減を計算する。節点が隣接リストにおいて正の節点に結合されるならば増加となる。
- (5) アクティブ節点の増加が最も小さいものを選び定義する。もし同じものがいくつかある場合は最も長くアクティブであるものを選ぶ。
- (6) 選択した節点をアクティブカラムのリストより削除して、隣接した節点をリストに加える。隣接リストではこの節点を参照するすべてに負の印をつける。
- (7) リスト中のアクティブ節点の数の2乗を効率化パラメータ  $\sigma$  に累積する。
- (8) ステップ(4)~(7)を全節点が再定義されるまでくり返す。
- (9) ステップ(2)~(8)を開始節点が処理されるまでくり返す。

ステップ(4)と(5)はフロント幅を最小化するための基準と解釈することができるので、King のアルゴリズムの本質である。このアルゴリズムは節点番号の再定義だけで、要素番号については行なわない。Cuthill によれば、King のアルゴリズムは効率のよいものであり、メッシュモデルのフロント幅を非常に最適化するものとされる。この方法の主たる欠点は開始点の選択の影響が大きいことであり、節点数が多いモデルでは多数の開始点を考えると経済性において重大な問題となる。

最大フロント幅を低減する要素リナンバーの手法としては Levy のものがある。これは King の手法と似ているが、拡大フロント最小化を基にしている。各ステージで次に定義する節点は、未定義のすべての節点を考慮して最小フロント幅の基準で評価をすすめる。リナンバーする節点を選択するとき拡大した探索が行なわれるので、Levy のアルゴリズムは King のものに比べて効率が悪いものであるが、得られたフロント幅は真に最小に近いものである。King の場合と同様に Levy のアルゴリズムでも開始点は予め決める必要がある。各開始点についてリナンバースキームを検討するので、開始点の問題は重要な事柄である。

FINAS では Levy の方法と同じ直接的な最小フロント幅サーチの原理で要素番号のリナンバー化を行なっているが、開始点はメッシュモデルの最小番号を無条件に選択する。今後の問題としては、King らの隣接リストを利用したリナンバーの効率化と、グラフ理論の概念により開始点を自動的に選択するアルゴリズムなどが考えられる。

#### [ 参考文献 ]

- 1) I. P. King, " An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived from network systems ", *Int. J. num. Meth. Engng*, 2, 523-533 (1970).
- 2) B. M. Irons and S. Ahmad, " Techniques of Finite Elements ", Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1980.
- 3) E. Hinton and D. R. J. Owen, " Finite Element Programming ", Series in Computational Mathematics and Applications, vol. 1, Academic Press, London, 1977.
- 4) E. Cuthill, " Several strategies for reducing the bandwidth of matrices ", in *Sparse Matrices and Their Applications* ( Rose, D. J. and Willoughby, R. A., Eds.), Plenum Press, New York, 1972.
- 5) R. Levy, " Resequencing of the structural stiffness matrix to improve computational efficiency ", *Jet Propul. Lab. Q. Tech. Rev.*, 1, 61-70 (1971).

- 6) H. L. G. Pina, "An algorithm for frontwidth reduction", *Int. J. num. Meth. Engng*, 17, 1539-1546 (1981).
- 7) J. E. Akin and R. M. Pardue, "Element resequencing for frontal solutions", in *The Mathematics of Finite Elements and Applications (MAFELAP 1975)* (Whiteman, J. R., Ed.), Academic Press, London, 1975, pp. 535-541.
- 8) A. Razzaque, "Automatic reduction of frontwidth for finite element analysis", *Int. J. num. Meth. Engng*, 15, 1315-1324 (1980).
- 9) E. Cuthill and J. McKee, "Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices", *Proc. A. C. M. Nat. Conf.*, Association for Computing Machinery, New York, 1969.
- 10) A. George and J. W. H. Liu, "An implementation of a pseudo-peripheral node finder", *A. C. M. Trans. Math. Software*, 5, 284-295 (1979).
- 11) N. E. Gibbs, W. G. Poole and P. K. Stockmeyer, "An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix", *SIAM J. Numer. Anal.* 2, 236-250 (1976).
- 12) B. M. Irons, "A frontal solution program for finite element analysis", *Int. J. num. Meth. Engng*, 2, 5-32 (1970).
- 13) H. R. Grooms, "Algorithm for matrix bandwidth reduction", *J. Struct. Div., A. S. C. E.* 98 (ST1), 203-214 (1972).
- 14) G. Akhras and G. Dhatt, "An automatic node relabelling scheme for minimising a matrix or network bandwidth", *Int. J. Num. Meth. Engng*, 10, 787-797 (1976).
- 15) A. M. Britto, private communication.
- 16) R. J. Collins, "Bandwidth reduction by automatic renumbering", *Int. J. num. Meth. Engng*, 6, 345-356 (1973).
- 17) E. L. Wilson, K. J. Bathe and W. P. Daherty, "Direct solution of large systems of linear equation", *Comp. Structure* 4, 363-372 (1974).
- 18) B. M. Irons, "Frontal program for finite element analysis", *Int. J. Num. Engng*, 2, 5-32 (1969).
- 19) S. W. Sloan and M. F. Randolph, "Automated element reordering for finite element analysis with frontal solution schemes", *Int. J. Num. Meth. Engng*, 19, 1153-1181 (1983).

## 2.3 固有値問題の解法とアルゴリズム

FINAS では固有値解法としてサブスペース法を採用している。ここでは、この解法とアルゴリズムについて説明する。インバースパワー法やレーレイ反復法は1つのベクトルに対して反復させる方法であるが、複数のベクトルに同時に反復させて固有値のペアを得ようとするのがサブスペース法である。この方法は Bauer<sup>6)</sup> が最初に試みたとされているが、Rutishauser<sup>2)</sup>, Jennings<sup>3)</sup>, Bronlund<sup>4)</sup>, Bathe<sup>1)</sup> らにより改良あるいは変形アルゴリズムが提案された。

サブスペース法の基本はベクトル反復と Ritz 法を結びつけたものであり、収束も早く安定したアルゴリズムで大次元固有値解法に適している。特に初期部分空間が固有空間を含んでいれば1回の反復で解が得られるとされる。FINAS のサブスペース法のアルゴリズムは Bathe の方法をもとにしたもので、低次から複数個の固有値ペアを求めるものである。表 2.3-1 は代表的な固有値解法を比較したものである。

表 2.3-1 固有値問題の解法比較

名称	解析手順	問題の形式	適用マトリックス	問題の大小	演算中のマトリックスの粗の保持	得られる固有値	その他
ベキ乗法	くり返し法	標準, 一般	対角化可能	中	粗	最大固有値	
逆ベキ乗法	くり返し法	"	対角化可能	中	粗	最小固有値	
サブスペース法	Ritz 法によるくり返し法	"	実対称	大	粗	複数個	
Jacobi 法	相似変換	"	実対称	小	粗	全固有値	
House holder 法	相似変換	標準	対称	大	密となる	—	マトリックスの三重対角化のみ
QR法	相似変換	"	対角化可能特に三重対角	小	粗	全固有値	
行列式法	行列式の零点	標準, 一般	任意	小	粗	1	固有値のみ
Strum 法	区間内の固有値数	"	実対称	中	粗	1	"

### 2.3.1 解法

一般的固有値問題は次のように表わすことができる。

$$[A]\{\phi\} = \lambda[B]\{\phi\} \quad (2.3-1)$$

ここで  $[A]$ ,  $[B]$  は正値対称マトリックスとする。このマトリックス  $[A]$ ,  $[B]$  および固有値  $\lambda$ , 固有ベクトル  $\{\phi\}$  は実際の工学問題では次のものが対応する。

線形振動問題

- $[A]$  : 剛性マトリックス
- $[B]$  : 質量マトリックス

$\lambda = w^2, w$  : 自由振動数

$\{\phi\}$  : モードベクトル

線形座屈解析

$[A]$  : 剛性マトリックス

$[B]$  : 幾何剛性マトリックス

$\lambda$  : 座屈荷重の倍率

式(2.3-1)と等価なものとして、次の汎関数  $\rho(\{\phi\})$  極値問題に置き換えることができる。

$$\rho(\{\phi\}) = \frac{\{\phi\}^T [A] \{\phi\}}{\{\phi\}^T [B] \{\phi\}} \quad (2.3-2)$$

$$\lambda_1 = \text{Min}_{\{\phi\} \in R^n} \rho(\{\phi\}) \quad (2.3-3)$$

ただし、 $0 < \lambda_1 \leq \rho(\{\phi\}) \leq \lambda_n < \infty$  であり、 $n$  は元数、 $\lambda_1$  と  $\lambda_n$  は最小固有値と最大固有値であり、 $R^n$  は  $n$  次のユークリッド空間である。

$p$  ( $\leq n$ ) 個の固有値ペア  $(\lambda_1, \{\phi_1\}), (\lambda_2, \{\phi_2\}), \dots, (\lambda_p, \{\phi_p\})$  を求めるとき、 $\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_p\}$  で張られる部分空間  $E_p$  の基底を  $\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_p\}$  で近似する。任意の  $\{\phi\} \in R^n$  を  $\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_p\}$  で表わすと、

$$\{\phi\} \approx x_1 \{e_1\} + x_2 \{e_2\} + x_3 \{e_3\} + \dots + x_p \{e_p\} \quad (2.3-4)$$

式(2.3-4)を式(2.3-3)に代入して、

$$\rho(\{\phi\}) = \frac{\sum x_i x_j \tilde{a}_{ij}}{\sum x_i x_j \tilde{b}_{ij}} = \frac{\{X\}^T [A] \{X\}}{\{X\}^T [B] \{X\}} \quad (2.3-5)$$

ただし、

$$\tilde{a}_{ij} = \{e_i\}^T [A] \{e_j\}, \quad \tilde{b}_{ij} = \{e_i\}^T [B] \{e_j\} \quad (2.3-6)$$

$$\{X\}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p], \quad [\tilde{A}] = [\tilde{a}_{ij}], \quad [\tilde{B}] = [\tilde{b}_{ij}] \quad (2.3-7)$$

したがって、 $\rho(\{\phi\})$  の最小値を得るために  $x_i$  に関して微分し極値を零とすると、 $p$  次元に縮小した固有値問題を導く。

$$[\tilde{A}] \{X\} = \rho [\tilde{B}] \{X\} \quad (2.3-8)$$

式(2.3-8)における  $\rho$  は式(2.3-1)における固有値  $\lambda$  の上限値となる。

$$\rho_1 \geq \lambda_1, \quad \rho_2 \geq \lambda_2, \quad \dots, \quad \rho_p \geq \lambda_p \quad (2.3-9)$$

もし、 $\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_p\}$  で張られる  $E_0$  が  $E_p$  を含んでおり、次式で表わされる条件を満足すれば式(2.3-9)における  $\rho_i$  は式(2.3-3)の  $\lambda_i$  に一致し、正解が得られる。

$$E_0 \supseteq E_p \quad (2.3-10)$$



サブスペース法は、この近似固有部分空間  $E_0$  をベクトル同時反復手法により真の固有部分空間  $E_p$  に収束させるものである。

### 2.3.2 アルゴリズム

サブスペース法は基本的に Ritz 法であり、初期固有ベクトルで張る部分空間  $E_i$  の中で最適なものを求める。もし、 $E_i \subset R^n$  が求める固有ベクトル空間と一致すれば、正確に求めることができるわけである。初期部分空間をベクトル反復法により固有ベクトルの近似空間へ縮合し、その近似空間の中で最適な最小固有値 (Ritz 法の意味で) の組と対応する固有ベクトルを求める。そして、固有ベクトルをもとの空間へもどす。求められた固有値  $\lambda_i$  と固有ベクトル  $\{\phi_i\}$  の固有値ペアを Strum 列により検証することができるが、これはマトリックスの三角分解が必要となるので、選択として実行される。

#### (1) 収束性

$n$  個の固有値を  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_p \leq \lambda_{p+1} \leq \dots \leq \lambda_n$  とおき、サブスペース法より  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  の固有値を得るものとすれば、固有値  $\lambda_i$  の収率  $\varepsilon_\lambda^i$  と固有ベクトル  $\{\phi_i\}$  の収束率  $\varepsilon_\phi^i$  は、次のように表わすことができる。

$$\varepsilon_\lambda^i = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} \right)^2 \quad (2.3-11)$$

$$\varepsilon_\phi^i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} \quad (2.3-12)$$

これは、ベクトル反復法の収束率に比べて改善されたものとなっている。

#### (2) 加速法

サブスペース法の加速は重要であり、その1つの方法として部分固有値空間より大きめの空間で反復を行なう方法がある。これは式 (2.3-11) と式 (2.3-12) によりあきらかなように、必要とする固有値が  $p$  個であっても  $q (> p)$  なる部分空間で計算することにより加速することができる。

第2の方法は原点移動をサブスペース法に適用する手法である。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  に対して、シフト量  $\alpha$  を  $(\lambda_1 + \lambda_p)/2$  にすれば、 $\lambda_i$  ( $i=1 \sim p$ ) の中で収束の遅い  $\lambda_p$  に対する収束率  $\varepsilon_\lambda^p$  を次のように改良することができる。

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda^p = \left( \frac{\lambda_p - \alpha}{\lambda_{p+1} - \alpha} \right)^2 < \left( \frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}} \right)^2 = \varepsilon_\lambda^p \quad (2.3-13)$$

第3の方法は固有値解法の加速に古くから利用された Chebyshev の多項式を用いる方法で、サブスペース法に適したアルゴリズムも提案されている。 $k$  次の Chebyshev の多項式により  $\lambda_i$  に対応する固有ベクトルの収束を  $1/2^{k-1}$  程度改善することができる。

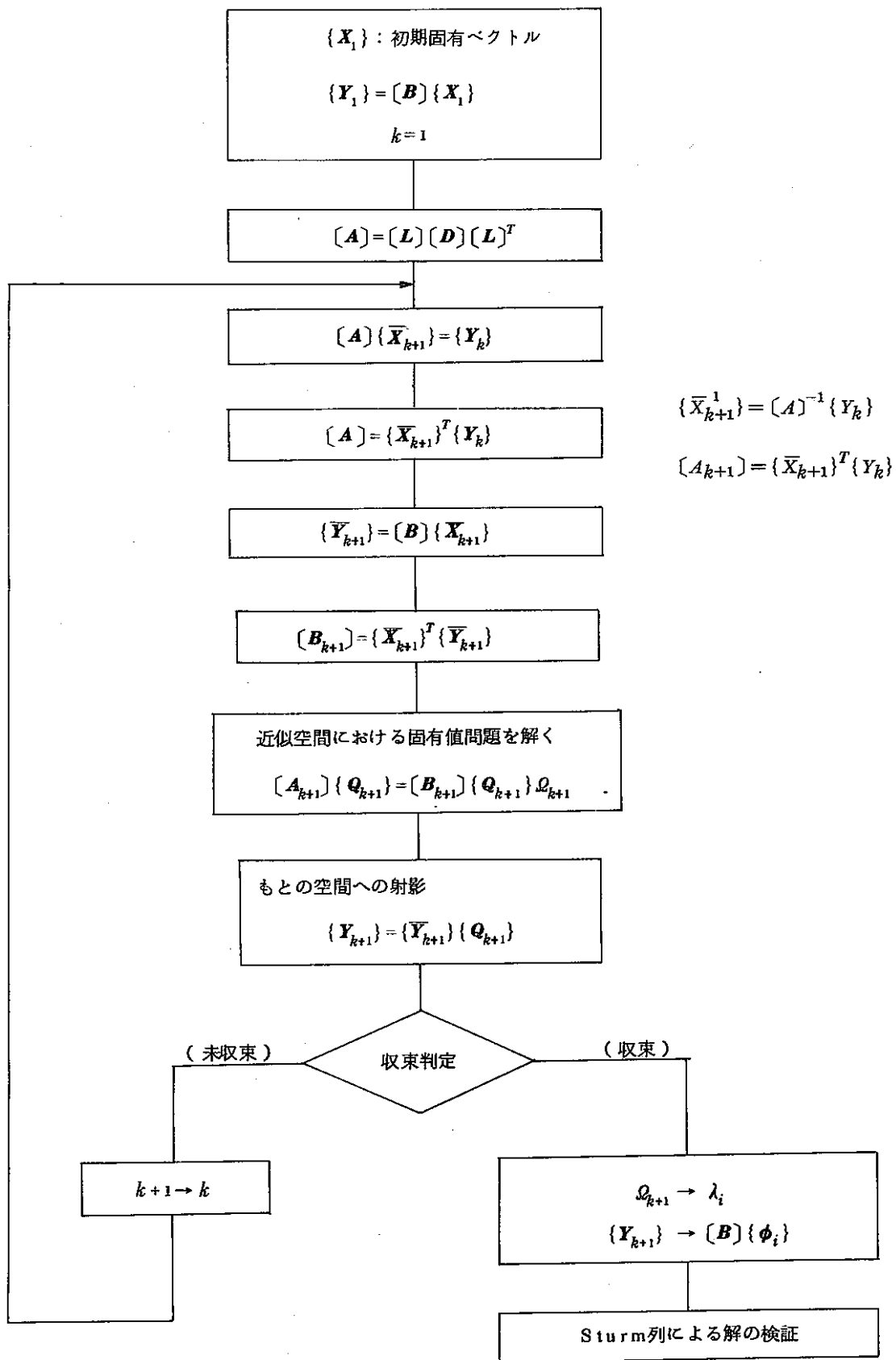


図 2.3-1 サブスペース法の計算アルゴリズム

FINAS では部分空間の拡張による加速法を用いており、 $q = \text{Min}(2 \times p, p+7, n)$  を採用している。

〔参考文献〕

- 1) K. J. Bathe and E. L. Wilson : " Numerical methods in Finite element analysis ", Prentice-Hall, 1976.
- 2) 山田・岡村 : " 非拘束はりの剛体モードの計算について ", 日本鋼構造協会第11回全国大会論文集, 1977.
- 3) A. Jennings and D. R. L. Orr : " Application of the Simultaneous Iteration Methods to Undamped Vibration Problems ", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 1971.
- 4) S. B. Dong and J. A. Wolf, Jr. : " On a Direct iterative eigen solution technique ", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 4, 1972.
- 5) J. H. Wilkinson : " The Algebraic Eigenvalue Problem ", Oxford Univ. Press, 1965.
- 6) 大坪 : " 実対称固有値問題  $Ax = \lambda Bx$  の解法 ", 日本鋼構造協会第7回全国大会論文集, 1973.
- 7) E. L. Wilson : " An eigen solution strategy for the dynamic analysis of large structural systems ", SAP Conference, Tokyo, 1978.

## 第III編 FINASの検証と応用

# 序

FINAS (Finite Element Nonlinear Structural Analysis System) は、昭和51年7月より5年間開発および昭和56年6月から改良・整備が5年間実施され、昨年度よりさらに拡張・整備が進められている構造解析用の汎用プログラムであり、高速増殖炉および関連機器の開発に伴う構造上の広範囲にわたる問題を解決することを目的としている。現在利用できる機能は静的解析、動的解析および熱伝導解析の機能であり、各解析では材料非線形、幾何学的非線形あるいは境界の非線形性を考慮することができる。また、解析モデルおよび解析結果の図化処理は解析時だけでなく、解析結果を収めたリスタートテープを使用して行なうことができる。

FINASではプログラムの信頼性を保証するため、VP (Verification Problem) と DP (Demonstration Problem) を作成して系統的に検証を進めてきた。VP は FINAS が備えている各種機能が正しく作動するかどうかを検証する問題であり、DP は解析能力の総合評価を行なう問題である。本年度は新しく VP が 14 題追加された。このうち静的解析については13題、動的解析については1題である。

# 1. 検証のための解析

FINAS プログラムが備えている各種解析機能を検証するために表1-1に示す検証問題 VP (Verification Problem) を作成し、解析を行なってきた。表に引続き、本年度に実施した検証問題の詳細を記載する。

表 1-1 静的解析 VP の一覧表

№	タ イ ト ル	目 的
VP-001	単軸引張(弾性)問題 (昭和51年度)	8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 の弾性要素剛性マトリックスのチェックおよび単軸引張問題の弾性解と理論解との比較を行なう。
VP-002	単軸引張(弾塑性)問題 (昭和51年度)	8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 の弾塑性マトリックスのチェックおよび単軸引張(弾塑性)問題の解と理論解との比較を行なう。
VP-003	内圧を受ける円筒(弾性)問題 (昭和51年度)	8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 を使用して 内圧を受ける円筒(弾性)問題の解と理論解の比較を行なう。
VP-004	内圧を受けるノズル付き球殻(弾性)問題 (昭和51年度)	8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 を使用して内圧を受けるノズル付き球殻の弾性解を求め、中規模問題における計算時間を ASKA と比較する。
VP-005	単軸弾性熱応力問題 (昭和51年度)	8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 の単軸弾性熱応力問題の弾性解と理論解との比較を行なう。
VP-006	円筒弾性熱応力問題 (昭和52年度)	8 節点四辺形軸対称要素 QAX8 を使用して円筒弾性熱応力問題の弾性解と理論解との比較を行なう。
VP-007	単軸サイクリック弾塑性問題 (昭和52年度)	単軸引張り問題において、単軸サイクリック弾塑性解析の機能をチェックすることを目的としている。解法としては、等方硬化理論、移動硬化理論を使用する。

順	タ イ ト ル	目 的
VP-008	単軸弾性クリープ問題 (昭和52年度)	クリープに関する機能をチェックするために、一定応力下での単軸クリープ問題を解析し、理論解との比較を行なう。
VP-009	単軸規定変位問題 (1) (昭和52年度)	規定変位の取り扱いに関する機能をチェックし、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-010	単軸規定変位問題 (2) (昭和52年度)	identity-fastening 機能をチェックするために円柱端部の変位を均一保持した状態の引張りを取り扱い理論解との比較を行なう。
VP-011	単軸弾塑性クリープ問題 (昭和52年度)	弾塑性クリープ解析の機能のチェックを目的とし、単軸の場合を取り扱ったもので VP-002 を拡張したものである。
VP-012	単軸サイクリック弾塑性クリープ問題 (昭和52年度)	保持時間を有する繰返し単軸引張り問題により繰返し弾塑性クリープ解析機能のチェックを行なう。
VP-013	弾性係数の温度依存(弾性)問題 (1) — ひずみ制御 — (昭和52年度)	弾性係数を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-014	弾性係数の温度依存(弾性)問題 (2) — 応力制御 — (昭和52年度)	弾性係数を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-015	ポアソン比の温度依存(弾性)問題 (1) — ひずみ制御 — (昭和52年度)	ポアソン比を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-016	ポアソン比の温度依存(弾性)問題 (2) — 応力制御 — (昭和52年度)	ポアソン比を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-017	弾性係数・ポアソン比の温度依存(弾性)問題 (1) — ひずみ制御 — (昭和52年度)	弾性係数とポアソン比を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-018	弾性係数・ポアソン比の温度依存(弾性)問題 (2) — 応力制御 — (昭和52年度)	弾性係数とポアソン比を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-019	加工硬化係数の温度依存(弾塑性)問題(1) — ひずみ制御 — (昭和52年度)	加工硬化係数を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-020	加工硬化係数の温度依存(弾塑性)問題(2) —応力制御— (昭和52年度)	加工硬化係数を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち、温度を変化させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-021	弾性係数・加工硬化係数の温度依存(弾塑性)問題(1) —ひずみ制御— (昭和52年度)	弾性係数と加工硬化係数を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-022	弾性係数・加工硬化係数の温度依存(弾塑性)問題(2) —応力制御— (昭和52年度)	弾性係数と加工硬化係数を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち、温度を変化させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-023	降伏応力の温度依存(弾塑性)問題(1) —ひずみ制御— (昭和52年度)	降伏応力を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の弾塑性遷移領域におけるFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-024	降伏応力の温度依存(弾塑性)問題(2) —応力制御— (昭和52年度)	降伏応力を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち、温度を変化させた場合の弾塑性遷移領域におけるFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-025	熱膨張係数の温度依存(自由膨張)問題 (昭和52年度)	熱膨張係数を温度依存とし、自由膨張させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-026	変位の線形結合問題 (昭和52年度)	要素の結合にセネラルファスニングを用いた場合のFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-027	ORNL形式の硬化則を用いた単軸引張り・圧縮問題 (昭和52年度)	再降伏時の降伏面の大きさとして、10サイクル目の降伏応力 $\sigma_{Y10}$ を用いた場合のFINASの解の比較を行なう。
VP-028	加工硬化係数の多直線近似問題 (昭和52年度)	加工硬化係数を多直線近似し、荷重増分量を変化させてそれに対応したFINASの解の比較を行なう。
VP-029	使用者の作成したプログラムによる加工硬化係数の入力問題 (昭和52年度)	使用者が作成するサブプログラムにより加工硬化係数を入力し、降伏面の大きさを計算する機能が有効に働くかどうかのチェックを行なう。
VP-030	使用者の作成したプログラムによる加工硬化係数の関数型入力問題 (昭和52年度)	使用者が加工硬化係数を相当塑性ひずみの滑らかな関数として入力し、荷重増分を変化させ、それに対応したFINASの解の比較を行なう。
VP-031	軸対称初期ひずみ問題 (昭和53年度)	単軸引張問題のひずみ成分を初期ひずみとして扱い、初期ひずみによる荷重の評価、応力、ひずみの評価のアルゴリズムを検証する。



№	タ イ ト ル	目 的
VP-032	組み合わせ硬化則による単軸引張り圧縮問題 (昭和53年度)	組み合わせ硬化則による単軸引張(弾塑性)問題の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-033 (廃止)	使用者の作成したプログラムによる降伏関数の入力問題 (昭和53年度)	使用者が作成するサブプログラムにより降伏関数を入力し、降伏面における塑性ひずみ成分の向きを評価する機能が有効に働くかどうかのチェックを行なう。
VP-034 (廃止)	移動硬化係数の多直線近似問題 (昭和53年度)	移動硬化係数を多直線近似とし、相当塑性ひずみの評価を2種類の方法で行ない、各々の方法による FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-035	FINASの組み込みクリープ則利用問題 (昭和53年度)	FINASに組み込まれているクリープ則を使用して単軸引張り弾性クリープ解析によるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-036	複数の要素種類組み合わせ問題 (昭和53年度)	異なったタイプの要素を組み合わせ、一様引張りを与えた弾性解析における FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-037	使用者が作成したプログラムによるクリープ則の入力問題 (昭和53年度)	使用者が作成したサブプログラム ECRP1によりクリープ則を入力し、一定応力下における FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-038	材料データライブラリ利用によるひずみ硬化クリープ問題 (昭和53年度)	材料データライブラリを使用し、一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-039 (廃止)	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(1) (昭和53年度)	クリープ解析における“応力反転による硬化則の補助法則”機能のチェックを行なう。
VP-040	階段状負荷履歴を持つ弾性クリープ問題 (昭和53年度)	階段状に応力増分を与え、各応力場ごとにクリープ解析を行ない、理論解と比較する。
VP-041	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(2) (昭和53年度)	応力反転を考慮したクリープ補助法則を用いてクリープ解析を行ない、実験値と解を比較する。
VP-042	弾塑性クリープ解析におけるリスタート機能利用問題 (昭和54年度)	弾塑性計算とクリープ計算の途中で解析の中断と再開を行ない、リスタート機能のチェックを行なう。
VP-043	使用者が作成したプログラムによるクリープ則の入力問題 (昭和54年度)	使用者が作成したサブプログラム XCREEPによりクリープ則を入力し、FINASの解と理論解の比較を行なう。

No.	タ イ ト ル	目 的
VP-044	要素の積分点における温度入力問題 (昭和54年度)	板厚方向に線形な温度分布を有する直管の温度データを要素の積分点で入力して熱弾性解析を行ない、理論解と比較を行なう。
VP-045 ( 廃 止 )	単軸サイクリック弾塑性クリープ問題(2) (昭和54年度)	保持時間を有する繰り返し単軸引張り問題により、塑性に関する各硬化則ごとの弾塑性クリープ解析機能のチェックを行なう。
VP-046	単軸弾性クリープ解析におけるクリープ時間増分ジェネレート機能の利用問題 (昭和54年度)	VP-008の単軸弾性クリープ問題を用いてクリープ時間増分ジェネレート機能のチェックを行なう。
VP-047	単軸弾塑性クリープ解析におけるクリープ時間増分ジェネレート機能の利用問題 (昭和54年度)	VP-011の単軸弾塑性クリープ問題を用いてクリープ時間増分ジェネレート機能のチェックを行なう。
VP-048	局所座標系による節点座標と境界条件の入力問題 (昭和54年度)	節点座標と境界条件を局所座標系で入力して弾性解析を行ない、局所座標系による入力機能のチェックを行なう。
VP-049	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(3) (昭和54年度)	使用者が作成するプログラムによりクリープひずみのデータを入力し、応力反転を考慮したクリープ解析を行なう。
VP-050	組み合わせ硬化則における直線近似問題 (昭和54年度)	温度と塑性ひずみに依存した加工硬化係数と移動硬化係数を使用する組み合わせ硬化則におけるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-051 ( 廃 止 )	弾性熱応力解析におけるインタフェイスプログラム利用問題 (昭和54年度)	温度解析で得られた各時間ステップの温度分布から応力解析のステップでの温度分布を選択するインタフェイスプログラムの機能をチェックする。
VP-052	トラスの弾性大変形問題 — 荷重制御 — (昭和54年度)	簡単なトラス構造を用いて大変形解析を行ない、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-053	移動硬化則における塑性クリープ連成問題 (昭和54年度)	弾塑性クリープ解析において、塑性クリープ連成を考慮した移動硬化則の機能をチェックするためにFINASの解と理論解を比較する。
VP-054	降伏面の大きさが累積相当塑性ひずみに依存する繰り返し組み合わせ硬化問題 (昭和54年度)	降伏面の大きさが累積相当塑性ひずみに依存する繰り返し組み合わせ硬化剤の機能をチェックするためにFINASと理論解の比較を行なう。
VP-055	ORNL形式の硬化則を用いた単軸引張り圧縮問題 (昭和54年度)	応力反転時の降伏応力として10サイクル目の降伏応力 $\sigma_{T10}$ を用いた場合のFINASの解と理論解の比較を行なう。

No	タ イ ト ル	目 的
VP-056	瞬間熱膨張係数温度依存における熱ひずみの評価問題 (昭和54年度)	瞬間熱膨張係数が温度依存の場合、温度変化による熱ひずみの評価のチェックを行なう。
VP-057 (廃止)	2 $\frac{1}{4}$ Cr-1Moの材料データライブラリ利用問題 (昭和54年度)	FINAS材料データライブラリにくみいれている2 $\frac{1}{4}$ Cr-1Moの材料データのチェックをする。
VP-058 (廃止)	材料データライブラリ利用による2 $\frac{1}{4}$ Cr-1Moのひずみ硬化クリープ問題 (昭和54年度)	材料データライブラリを使用し、一定応力下において2 $\frac{1}{4}$ Cr-1Moのひずみ硬化クリープ則を用い、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-059	局所非線形解析法による弾塑性問題 (昭和54年度)	弾塑性問題に対して局所非線形性を考慮した解析機能のチェックを行なう。
VP-060	繰り返し組み合わせ硬化則を用いたサイクリック弾塑性問題 (昭和55年度)	中実丸棒にサイクリックな規定変位を与える問題において、繰り返し組み合わせ硬化則を用いた弾塑性解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-061	塑性クリープ連成を考慮した移動硬化則を用いた応力反転がある弾塑性クリープ問題 (昭和55年度)	塑性クリープ連成を考慮した移動硬化則を用い、クリープ後に応力が反転する弾塑性クリープ解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-062	配管系の弾性解析におけるポストテープ作成機能利用問題 (昭和55年度)	ポストテープに出力した配管系の弾性解析の解とSAP4の解との比較を行なうことにより、FINASの配管解析の機能とその結果をポストテープへ出力する機能の検証を行なう。
VP-063	熱弾塑性クリープ解析におけるポストテープ機能利用問題 (昭和55年度)	熱弾塑性解析における解析結果が正しくポストテープに出力されるかどうかのチェックを行なう。
VP-064	クリープ時間増分ジェネレート機能とリスタート機能の組み合わせ問題 (昭和55年度)	クリープ時間増分ジェネレート機能を利用した弾性クリープ解析の途中で解析の中断と再開を行ない、クリープ時間増分ジェネレート機能を使用した場合のリスタート機能のチェックを行なう。
VP-065	静的解析における図面作成問題 (昭和55年度)	静的解析における解析結果の図面処理機能のチェックを行なう。
VP-066	中央き裂板の線形破壊力学問題 (昭和55年度)	中央にき裂のある帯板の一様引張問題を解析し、線形破壊力学解析の機能の検証を行なう。

No	タ イ ト ル	目 的
VP-067	大変形解析におけるリスタート機能利用問題 (昭和55年度)	VP-052のトラスの弾性大変形解析問題を用いて 大変形解析におけるリスタート機能の検証を行なう。
VP-068	弾塑性解析における残差荷重修正機能のサプレッション問題 (昭和55年度)	FINASでは材料非線形あるいは幾何学的非線形問題を解析する場合に、非線形性による不釣り合い力を平衡方程式の右辺に加えさせて解析を行なう。ここではこの残差荷重修正を行なわない場合についての解析を行ない理論解との比較を行なう。
VP-069	接線剛性によるトラスの弾性大変形解析 (昭和55年度)	FINASの大変形解析では、直前の形状における接線剛性を用いて、修正Newton-Raphson法により収束計算を行なう。そして収束計算の打ち切りによって生じる幾何学的非線形性による不釣り合い力を次の荷重ステップで残差荷重として考慮する。ここでは収束計算および残差荷重修正を行なわない方法により大変形解析を行なう機能についての検証を行なう。
VP-070	トラスの弾性大変形問題 —変位制御— (昭和55年度)	簡単なトラス構造の大変形解析を変位制御で行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-071	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(1)—SUS304— (昭和55年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS304のクリープ式を使用し、一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-072	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(2)—SUS316— (昭和55年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS316のクリープ式を使用し、一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-073	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(3)—SUS321— (昭和55年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS321のクリープ式を使用し、一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-074	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(4)— $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo (NT材)— (昭和55年度)	材料データライブラリの $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo (NT材)のクリープ式を使用し、一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い、FINASの解と理論解の比較を行なう。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-075	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(1)—SUS304—  (昭和55年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS304 の弾塑性特性データを使用して 弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え、それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-076	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(2)—SUS316—  (昭和55年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS316 の弾塑性特性データを使用して弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え、それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-077	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(3)—SUS321—  (昭和55年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS321 の弾塑性特性データを使用して 弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え、それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-078	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(4)— $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo (NT材)—  (昭和55年度)	材料データライブラリの $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 鋼 (NT材) の弾塑性特性データを使用して弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え、それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-079	トラスの線形座屈荷重解析  (昭和55年度)	二本棒トラスの線形座屈荷重解析を行ない、FINASの解とMARCの解との比較を行なう。
VP-080	トラスの非線形座屈荷重解析  (昭和55年度)	二本棒トラスの非線形座屈荷重解析を行ない、FINASの解とMARCの解との比較を行なう。
VP-081	加工硬化係数の多直線近似問題  (昭和55年度)	加工硬化係数を多直線近似し、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-082	解析と独立したプロット機能利用問題  (昭和55年度)	FINAS XYプロット機能には 解析と独立して使用者が準備したX, Yカーブデータをプロットする機能があり、ここでは実際にX, Yカーブデータを与えてその機能を検証する。

No	タ イ ト ル	目 的
VP-083	降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合わせ硬化問題  (昭和55年度)	降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合わせ硬化則を用いて弾塑性解析を行ない、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-084	弾性領域でのスウェリング問題  (昭和55年度)	弾性領域でのスウェリング解析機能をチェックするために、簡易円筒モデルが中性子束の照射を受けている問題を解析し、理論解と比較を行なう。
VP-085	降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合わせ硬化則を用いたサイクリック弾塑性問題  (昭和55年度)	中実丸棒にサイクリックな規定変位を与える問題において、降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合わせ硬化則を用いた弾塑性解析を行ない理論解と比較を行なう。
VP-086	独立した2つの構造物の静的応力解析  (昭和55年度)	独立した2つの構造物の静的応力解析を1回の解析で行ない、各々の構造ごとに解析を行なった場合との解の比較を行なう。
VP-087	FINASの組み込みスウェリング式利用問題  (昭和56年度)	FINASに組み込まれているスウェリングひずみ式を利用して、弾性領域でのスウェリング解析を行ない、FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-088	使用者の作成したプログラムによるスウェリング問題  (昭和56年度)	ユーザサブプログラム XSWELL によりスウェリングひずみ式を入力し、弾性領域でのスウェリング解析を行ないFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-089	平均熱膨張係数を使用した熱弾性問題  (昭和56年度)	平均熱膨張係数が温度依存の場合に、温度変化による熱ひずみの評価が理論解と一致するかどうかの検証を行なう。
VP-090	弾性係数、ポアソン比に対する参照温度のオプションを使用した熱弾性問題  (昭和56年度)	弾性係数、ポアソン比が温度依存の場合に、材料の参照温度を指定するオプションを使用して熱弾性解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-091	材料データ・ライブラリの弾塑性特性に対して参照温度を指定した弾塑性問題  — SUS 304 —  (昭和56年度)	材料データ・ライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS 304 弾塑性特性に対して参照温度を指定して弾塑性解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。

No	タ イ ト ル	目 的
VP-092	材料データ・ライブラリのクリープ特性に対して参照温度を指定した弾性クリープ問題 —SUS 304— (昭和56年度)	材料データ・ライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS304 クリープ特性に対して参照温度を指定して弾性クリープ解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-093	材料データ・ライブラリを利用した時間硬化クリープ問題 —SUS304, SUS316, SUS321, $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo— (昭和56年度)	材料データ・ライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS304, SUS316, SUS321および $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo (NT材)のクリープ式を使用し、時間硬化則による弾性クリープ解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-094	静的解析におけるポストテープ編集機能利用問題 (昭和56年度)	リスタート機能を利用した解析で出力される複数のポストテープの編集を行ない、静的解析におけるポストテープ編集機能が正しく作動することを確認する。
VP-095	静的解析におけるリスタートテープ編集機能およびリスタートテープからの出力機能利用問題 (昭和56年度)	静的解析におけるリスタートテープの編集機能とリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-096	新しいインターフェイス・プログラムを利用した弾性熱応力問題 (昭和56年度)	温度解析の結果から熱応力解析を行なうステップを選択し、節点温度増分をデータファイルTP2Iに出力するインターフェイス・プログラムの検証を行なう。
VP-097	長方形板の多荷重処理におけるリスタート機能利用問題 (昭和56年度)	長方形板に種々の荷重を与えて、多荷重処理のリスタート機能の検証を行なう。
VP-098	配管弾性解析の多荷重処理におけるポストテープ利用問題 (昭和56年度)	配管の弾性多荷重解析を行ない、ポストテープ出力機能の検証を行なう。
VP-099	主応力・最大剪断応力のベクトル表示および等高線値指定問題 (昭和57年度)	周辺単純支持の平板に等分布荷重を負荷する問題により、主応力、最大剪断応力のベクトル表示機能と等高線表示における等高線値の指定機能の検証を行なう。
VP-100	材料データライブラリの単調応力・ひずみ関係式を用いた弾塑性問題 —SUS 304—, —SUS 316—, —SUS 321—, — $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo— (昭和57年度)	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS 304, SUS 316, SUS 321 および $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo 規定温度を与え、応力-ひずみ関係式を用いた弾塑性問題を解析し、関数型弾塑性解析機能の検証を行なう。
VP-101	材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式によるサイクリック弾塑性問題 (昭和57年度)	単軸引張り・圧縮問題において、材料データライブラリ SUS 304 単調応力・ひずみ関係式を用いたサイクリック弾塑性解析機能の検証を行なう。

No.	タイトル	目的
VP-102	材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式を用いた多軸応力場における弾塑性問題 (昭和57年度)	材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式を用いて、多軸応力場における弾塑性問題を解析し、関数型弾塑性解析機能の検証を行なう。
VP-103	材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式を用いた材料温度依存弾塑性問題 —ひずみ制御— (昭和57年度)	材料データライブラリの SUS 304 ステンレス鋼単調応力-ひずみ関係式を用いて、弾性係数、降伏応力、加工硬化係数を温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-104	材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式を用いた材料温度依存弾塑性問題 —応力制御— (昭和57年度)	材料データライブラリの SUS 304 ステンレス鋼単調応力-ひずみ関係式を用いて、弾性係数、降伏応力、加工硬化係数を温度依存とし、機械荷重を一定に保ち、温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-105	加速法を用いたトラスの弾性大変形問題 (昭和57年度)	大変形解析にオプションとして用意されている加速法を用いた収束計算の検証を簡単なトラス構造の大変形解析により行なう。
VP-106	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(3) (昭和57年度)	応力反転のある弾性クリープ問題に対して村上・大野のクリープひずみ硬化則が正しく作動するかのチェックのために、ORNL の補助法則を適用した解および理論解との比較を行なう。
VP-107	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(4) (昭和57年度)	多軸応力場において応力反転がある弾性クリープ問題を村上・大野のクリープ硬化則を適用して解析し、FINAS の解と村上・大野の解との比較を行なう。
VP-108	熱膨張による接触問題 (昭和58年度)	ギャップがある構造モデルにおいて、温度変化により熱膨張が生じた場合の弾性接触問題を解析し、FINAS の解と理論解との比較を行う。
VP-109	摩擦が考慮した接触問題 (昭和58年度)	摩擦が考慮されている構造モデルにおいて、すべりを生じさせる負荷が与えられる弾性接触問題を解析し、FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-110	繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題 (昭和58年度)	クリープの硬化則として繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題において、FINAS の解と理論解との比較を行う。



No	タ イ ト ル	目 的
VP-111	弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題 (昭和58年度)	弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題を解析し、理論解と比較する。
VP-112	弾性大変形接触問題 (昭和58年度)	ギャップがある構造モデルにおいて、弾性大変形接触問題を解析し、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-113	円管の曲げ問題——軸対称要素における非軸対称負荷の問題 (昭和58年度)	軸対称構造物における非軸対称負荷機能を検証するために、円管の自重による曲げの問題により、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-114	非軸対称荷重ジェネレーション問題 (昭和58年度)	荷重データジェネレーションプログラム FNSLOAD を用いて軸対称構造物に作用する非軸対称荷重のデータジェネレーションを行ない、FNSLOAD で求めた荷重分布と理論解との比較を行なう。
VP-115	薄肉円筒の曲げ問題——軸対称構造における非軸対称負荷の問題 (昭和58年度)	軸対称構造物における非軸対称負荷解析の機能を検証するために、薄肉円筒の自重による曲げの問題により、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-116	配管系応力解析問題 (昭和59年度)	直管付きエルボの弾性解析を行ない FNSPIPEにより正しくデータが作成されたかの検証を行なう。
VP-117	新規材料データライブラリの弾塑性特性に対して参照温度を指定した弾塑性問題 (昭和59年度)	材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え、弾塑性解析を行ない、それに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-118	新規材料データライブラリを利用した時間硬化クリープ問題 (昭和59年度)	新規材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS304, SUS316, SUS321 および $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$ (MT材)のクリープ式を使用し、時間硬化則による弾性クリープ解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-119	新規材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式を用いた弾塑性問題 (昭和59年度)	新規材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼 SUS304, SUS316, SUS321 および $2\frac{1}{4}\text{Cr}-1\text{Mo}$ (NT材)の単調応力-ひずみ関係式を用いた弾塑性問題を解析し、関数型弾塑性解析機能の検証を行なう。
VP-120	新規材料データライブラリの単調応力-ひずみ関係式によるサイクリック弾塑性問題 (昭和59年度)	単軸引張り、圧縮問題において新規材料データライブラリ SUS304, 単調応力-ひずみ関係式を用いたサイクリック弾塑性解析機能の検証を行なう。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-121	$\alpha$ リセット法を用いた2直線近似移動硬化問題 (昭和59年度)	2直線近似移動硬化モデルに対して $\alpha$ リセット法を用いたサイクリックな単軸引張り弾塑性解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-122	荷重増分自動決定機能を利用したトラスの弾性大変形解析 (昭和59年度)	簡単なトラス構造における大変形問題に関して、荷重増分自動決定機能を適用したFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-123	球形シェルの弾性大変形解析 (昭和59年度)	浅い球形薄肉シェルの頂部に変位荷重が作用する弾性大変形解析問題を解析し、Zienkiewicz等の解析結果との比較を行なう。
VP-124	浅いアーチの弾性大変形解析(荷重制御) (昭和59年度)	固定端アーチに集中荷重が作用している構造の弾性大変形解析を行ない、Bathe等の解析結果との比較を行なう。
VP-125	柱状構造物の弾塑性大変形解析 (昭和59年度)	簡単な柱状構造を用いて、弾塑性大変形解析を行ない、FINASの解とBatheの解との比較を行なう。
VP-126	変位境界条件変更問題 (1) (昭和59年度)	規定変位境界条件が変更される弾性問題においてFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-127	変位境界条件変更問題 (2) (昭和59年度)	変位線形結合条件が変更される弾性問題においてFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-128	変位境界条件変更問題 (3) (昭和59年度)	規定変位境界条件が変更され、荷重が負荷される弾性問題においてFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-129	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いた単軸引張り問題 (昭和60年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いて単軸引張りの弾塑性解析を行ない、FINASの解と大野・加智等の参照解との比較を行なう。
VP-130	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いたサイクリック弾塑性問題 (昭和60年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いて単軸引張り圧縮のサイクリックな弾塑性解析を行ない、FINASの解と大野・加智等の参照解との比較を行なう。
VP-131	使用者が作成したサブプログラムによる材料異方性を考慮した弾性問題 (昭和60年度)	ユーザサブプログラム"XELMAT"による材料特性の異方性を考慮した弾性特性マトリックスを与えて弾性問題を解析し、FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-132	荷重増分自動決定機能を用いた浅い球形シェル の弾性大変形解析  (昭和60年度)	薄肉の浅い球形シェルの頂部に集中荷重が作用する弾性大変形問題に対して荷重増分自動決定機能を用いて解析し、MESCALL が与えた理論解と比較する。
VP-133	荷重増分自動決定機能を利用した弾塑性単 軸引張り圧縮問題  (昭和60年度)	組み合わせ硬化則による単軸引張り(弾塑性)問題に荷重増分自動決定機能を適用した場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-134	更新ラグランジュ形大変形機能を利用した 大変形エラスティカ問題  (昭和60年度)	片持板を QFLA4R 要素でモデル化し、端部にモーメント荷重を負荷したときのエラスティカ問題を解析し、解析解との比較を行なう。
VP-135	マルチレイヤーモデルを用いた単調引張り弾 塑性問題  (昭和60年度)	マルチレイヤーモデルを用いて、単調引張り弾塑性解析を行ない、FINAS の解とマルチレイヤーモデルの応力-ひずみデータとの比較を行なう。
VP-136	丸棒の一軸引張り試験 — 大変形弾塑性ネッキング解析 —  (昭和60年度)	丸棒(軟鋼)の一軸引張り試験の大変形弾塑性問題を軸対称構造で解析し、Norris らの解と比較検討する。
VP-137	複数の境界条件を参照した弾性問題  (昭和60年度)	複数の変位境界条件を用いた弾性問題を解析し、理論解との比較を行なう。
VP-138	局所座標系を参照した変位線形結合問題(1)  (昭和60年度)	局所座標系を参照した変位線形結合問題において FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-139	局所座標系を参照した変位線形結合問題(2)  (昭和60年度)	片持ち梁を平面応力要素と梁要素で表わし、接合部に局所座標系を参照して変位線形結合条件を与えて解析し、FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-140	新しい入力形式による多荷重処理問題  (昭和60年度)	新しい入力形式を用いて多荷重処理問題を解析し、その機能のチェックを行なう。
VP-141	前処理プログラム FNSLOAD、後処理プ ログラム FNSHARM を用いた非軸対称荷 重問題  (昭和60年度)	軸対称構造物に非軸対称荷重を負荷する問題において、前処理プログラム FNSLOAD、後処理プログラム FNSHARM が正しく作動するかを検証する。
VP-142	REFERENCE TEMP データを用いた熱 弾塑性問題  (昭和60年度)	新しい入力データ "REFERENCE TEMP" で初期温度分布を与えた弾塑性問題を解析し、理論解と FINAS の解との比較を行なう。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-143	マルチレイヤーモデルを用いたサイクリック 負荷による弾塑性問題 (昭和60年度)	マルチレイヤーモデルを用いて、サイクリック負荷による弾塑性解析を行ない、FINAS の解とマルチレイヤーモデルの応力-ひずみデータと比較する。
VP-144	使用者の作成した線膨張係数のサブプログラムによる熱弾性問題 (昭和60年度)	使用者が作成した線膨張係数のためのサブプログラム XEXPA により熱弾性問題を解析して、FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-145	一様分布荷重を受ける片持梁の大変形問題 (昭和60年度)	分布荷重が作用する片持梁を更新ラグランジュ定式で解析する。分布荷重は変形依存の荷重となり、解析解との比較を行なう。
VP-146	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いたサイクリックねじり弾塑性問題 (昭和61年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いてサイクリックなねじり弾塑性問題を解析し、FINAS の解と大野・加智等の参照解と比較する。
VP-147	長柱の座屈問題 (昭和61年度)	初期不整を与えた長柱の大変形解析を行ない、Timoshenko の理論解と比較する。
VP-148	Drucker-Prager 降伏条件による単軸弾塑性問題 (昭和61年度)	Drucker-Prager 降伏条件による単軸圧縮弾塑性解析を行ない、FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-149	Tresca 降伏条件による単軸弾塑性問題 (昭和61年度)	Tresca 降伏条件による単軸引張弾塑性解析を行ない、FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-150	Mohr-Coulomb 降伏条件による単軸弾塑性問題 (昭和61年度)	Mohr-Coulomb 降伏条件による単軸圧縮弾塑性解析を行ない、FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-151	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いた弾塑性問題 (昭和61年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルを切欠丸棒の弾塑性問題に適用して、FINAS の解と大野等の解と比較を行なう。
VP-152	非線形繰返し非硬化領域モデルの材料パラメータ温度依存問題(1) — ひずみ制御 — (昭和61年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルの材料パラメータを温度依存とし、規定変位を与え、温度を変化させた場合の熱弾塑性問題を解析する。
VP-153	非線形繰返し非硬化領域モデルの材料パラメータ温度依存問題(2) — 応力制御 — (昭和61年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルの材料パラメータを温度依存とし、応力を一定に保ち、温度を変化させた場合の熱弾塑性問題を解析する。
VP-154	Drucker-Prager 降伏条件を用いた弾塑性問題 (昭和61年度)	均一な地盤の一部分を取り出し、地表面の一部に圧力が作用する弾塑性問題を解析する。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-155	非線形繰返し非硬化領域モデルの材料パラメータ温度依存性を考慮したサイクリック熱弾塑性問題 (昭和61年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルの材料パラメータを温度依存とし、サイクリックな温度・ひずみ制御の変形を負荷し、大野等の解と比較する。
VP-156	等分布軸圧縮荷重を受ける円筒シェル座屈荷重問題 (昭和61年度)	両端に等分布軸圧縮荷重を受ける円筒シェルの線形座屈荷重問題を QFLA4S 要素でモデル化を行なって解析し、要素の精度を検証する。
VP-157	アワーグラス制御法を用いた低減積分要素による片持梁の弾性問題 (昭和62年度)	曲げモーメントを受ける片持梁問題を QFLA4 RT 要素でモデル化し、アワーグラス制御機能と要素の有効性を検証する。
VP-158	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いた円筒の熱ラッチェットング問題 (昭和62年度)	非線形繰返し非硬化領域モデルを用いて円筒に繰返し温度変化が負荷される場合の熱弾塑性問題を解析する。
VP-159	統一型 Robinson モデルを用いた単軸引張問題 (昭和62年度)	塑性クリープ統一型 Robinson モデルを用いて単軸引張問題を解析して、Robinson の解と比較する。
VP-160	統一型 Robinson モデルを用いた保持時間を考慮したサイクリック問題 (昭和62年度)	塑性クリープ統一型 Robinson モデルを用いて保持時間を考慮した単軸サイクリック問題を解析し、Robinson の解と比較する。
VP-161	統一型 Chaboche モデルを用いた単軸引張問題 (昭和62年度)	塑性クリープ統一型 Chaboche モデルを用いて単軸引張問題を解析し、Chaboche の解と比較する。
VP-162	3次元破壊力学パラメータ解析 — $J$ 積分値, $K$ 値 — (昭和62年度)	3次元き裂問題に対して後処理プログラム FNSFRCT が正しく作動するかのチェックを行なう。
VP-163	2次元破壊力学パラメータ解析 — $\hat{J}$ 積分値 — (昭和62年度)	2次元き裂弾塑性問題に対して後処理プログラム FNSFRCT が正しく作動するかのチェックを行なう。
VP-164	外荷重を受ける円弧アーチの座屈問題 (昭和62年度)	新しく荷重修正マトリックス (Follower Force) を考慮した梁要素 BEAM2 を用いて弾性座屈解析を行なう。
VP-165	曲げモーメント荷重を受ける片持梁の大変形大回転問題 (昭和63年度)	片持梁の自由端に曲げモーメント荷重が作用するエラストィカ問題を BEAM2 要素で解析し、解析解との比較を行ない、大変形大回転等の幾何学的非線形問題での要素定式を検証する

№	タ イ ト ル	目 的
VP-166	荷重増分自動決定機能を利用したピン境界 円筒シールの大変形問題  (昭和63年度)	両側端がピンで支持された部分円筒シールの中央に集中荷重が作用する大変形問題を荷重増分自動決定機能により解析し、Bulliniらの解析結果と比較を行なう。
VP-167	荷重増分自動決定機能を利用した熱ラチェ ットィング問題  (昭和63年度)	熱ラチェットィング問題は材料の非線形挙動として重要なものである。DP-001で解析した問題を荷重増分自動決定機能を利用して解析を行ない、機能の性能を検討する。
VP-168	荷重増分自動決定機能を用いた円筒の弾塑 性せん断座屈問題  (昭和63年度)	円筒の弾塑性大変形座屈問題を荷重増分自動決定機能により解析し、機能特性の検証を行なう。
VP-169	統一型 Bodner モデルを用いた単軸繰返し 変形問題  (昭和63年度)	塑性クリープ統一型 Bodner モデルを用いて 単軸繰返し変形問題を解析し、Bodner の解と比較する。
VP-170	統一型 Walker モデルを用いた単軸応力リ ラグセーション問題  (昭和63年度)	塑性クリープ統一型 Walker モデルを用いて 保持時間を考慮した単軸引張り問題を解析し、Walker の解と比較する。
VP-171	2 曲面繰返し塑性モデルを用いたサイクリ ック弾塑性問題  (昭和63年度)	2 曲面繰返し塑性モデルを用いて単軸引張り、圧縮のサイクリックな弾塑性解析を行ない、ADMODEL によって得られた解と比較することにより FINAS における同モデル解析機能の検証とする。
VP-172	統一型 Walker モデルを用いた変動ひずみ問 題  (昭和63年度)	塑性クリープ統一型 Walker モデルを用いて、変動ひずみ問題を解析し、Walker の解と比較する。
VP-173	有孔板の弾塑性問題  (昭和63年度)	円孔を有する平板にサイクリックな変位を与えた弾塑性問題に対して弾塑性構成式モデルの数値積分法の1つである Substep Iteration/Radial Return 法を用いて解析を行なう。
VP-174	時間増分自動決定機能を用いた統一型モデ ル単軸引張問題  (昭和63年度)	統一型構成式モデルの1つである Chaboche モデルに対して Kumar の時間増分自動決定機能を適用し、単軸引張問題を解析し、Chaboche の解と比較する。
VP-175	時間増分自動決定機能を用いた統一型モデ ルのサイクリック問題  (昭和63年度)	統一型構成式モデルの1つである Robinson モデルに対して、Kumar の時間増分自動決定機能を適用し、保持時間を考慮した単軸サイクリック問題を解析し、Robinson の解と比較する。

№	タ イ ト ル	目 的
VP-176	中立軸の偏心機能を用いた梁の曲げ問題 (昭和63年度)	梁要素 SBEAM2 に新たに追加された偏心機能における断面剛性が大きくなる機能の検証を行なう。
VP-177	荷重の偏心機能を用いた梁のねじり問題 (昭和63年度)	梁要素 SBEAM2 に新たに組み込まれた荷重の偏心機能が正しく動作するかの検証を行なう。
VP-178	2 曲面繰返し塑性モデルを用いたサイクリック弾塑性問題 (2) (平成元年度)	2 曲面繰返し塑性モデルを用いて単軸引張り、圧縮のサイクリック弾塑性解析を行ない、ADMODEL による解と比較する。
VP-179	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (1) (平成元年度)	中央き裂を有する平板の弾性解析を行ない、仮想き裂進展法による $J$ 積分値の計算が正しく行なわれることを確認し、その有効性の検討を行なう。
VP-180	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (2) (平成元年度)	Wilson と Yu による端部き裂を有する平板の平面ひずみき裂問題の熱弾塑性解析を行ない $\hat{J}$ 積分値を求め、SHIH らの解と比較する。
VP-181	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (3) (平成元年度)	中央にき裂のある帯板の一樣引張問題を高次要素、低次要素を用いた場合について $J$ 積分値を求め理論解と比較する。
VP-182	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (4) (平成元年度)	埋没円き裂を有する無限体に引張荷重を負荷し、高次要素、低次要素を用いた場合について $J$ 積分値を求め比較する。
VP-183	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (5) (平成元年度)	埋没円き裂を有する無限体に温度が作用する熱弾塑性解析を行ない、仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値を計算し、渡部らの解と比較し有効性の検討を行なう。
VP-184	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (6) (平成元年度)	中央き裂を有する平板の除荷を含まない弾塑性解析を行ない、仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値を求め、岸本らの解と比較する。
VP-185	仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算 (7) (平成元年度)	除荷過程を含む任意の履歴を持つ荷重に対して、中央き裂を持つ平板の弾塑性解析を行ない、仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値の検証を行なう。

No	タ イ ト ル	目 的
VP-186	統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題 (1)  (平成元年度)	統一型構成モデルの1つである Robinson モデルを適用し、内圧を受ける円管の問題を解析し、Robinson らの解との比較を行なう。
VP-187	統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題 (2)  (平成元年度)	統一型構成モデルの1つである Robinson モデルを適用し、内圧を受ける円管の問題を解析し、Y. Chang らの解との比較を行なう。
VP-188	時間増分自動決定機能を用いた2本棒の熱ラチェット問題  (平成元年度)	統一型構成モデルの1つである Robinson モデルに対し Kumar の時間増分自動決定機能を適用し、2本棒の熱ラチェット問題を解析し、Robinson らの解と比較する。
VP-189	面接触機能を用いた円板塑性加工問題  (平成元年度)	円板材成形シミュレーション問題を解析し、大変形弾塑性面接触解析機能の妥当性を確認する。
VP-190	使用者作成のサブプログラムによる組合せ硬化モデルの組み込み  (平成元年度)	使用者作成プログラムによる組合せ硬化モデルの組み込みを行ない計算し、ADMDEL との解と比較する。



表 1-2 熱伝導解析 VP の一覧表

№	タ イ ト ル	目 的
VP-501	非定常熱伝導問題 (昭和52年度)	FINAS における熱伝導解析の機能の検証。すなわち、8 節点四辺形要素 HQAX8 の熱伝導マトリックス、熱伝達マトリックス、熱容量マトリックス、時間積分のスキーム（一般化 Crank-Nicolson 法）のチェックを行なう。
VP-502	定常規定温度問題 (昭和54年度)	規定温度を与えて定常熱伝導解析を行ない、FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-503	定常熱伝達問題 (昭和54年度)	熱伝達がある場合の定常熱伝導解析を行ない、FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-504	定常熱流束問題 (昭和54年度)	熱流束を与えて定常熱伝導解析を行ない、FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-505	定常内部発熱問題 (昭和54年度)	内部発熱がある場合の定常熱伝導解析を行ない、FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-506	材料が温度依存の定常熱伝導問題 (昭和54年度)	熱伝導係数が温度依存である場合の定常熱伝導解析を行ない、FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-507	厚肉円筒の非定常熱伝導問題 (昭和54年度)	厚肉円筒における非定常熱伝導解析を行ない、FINAS ANSYS および MARC の解の比較を行なう。
VP-508	非定常熱伝導解析におけるリスタート機能 利用問題 (昭和54年度)	非定常熱伝導解析の途中で計算の中断、再開を行ない、リスタート機能のチェックを行なう。
VP-509	材料・熱伝達境界温度依存の非定常熱伝導 問題 (昭和55年度)	材料定数と熱伝達境界条件が温度依存の場合の非定常熱伝導解析を行ない、FINAS の解と ANSYS, MARC の解との比較を行なう。
VP-510	材料データライブラリを使用した非定常熱 伝導解析 (昭和55年度)	材料データライブラリを使用して非定常熱伝導解析を行ない、材料データライブラリを使用せずに材料定数を入力して行なった解析結果と解の比較を行なう。
VP-511	節点温度の線形結合問題 (昭和55年度)	定常解析において節点の線形結合を行ない、ファスニング機能のチェックを行なう。
VP-512	熱伝導解析におけるポストテープ機能利用 問題 (昭和55年度)	熱伝導解析における解析結果が正しくポストテープに出力されるかどうかのチェックを行なう。

No.	タイトル	目的
VP-513	熱伝導解析における図面作成問題 (昭和55年度)	熱伝導解析における解析結果の図面処理機能のチェックを行なう。
VP-514	使用者が作成したサブプログラムによる熱伝達問題 (昭和55年度)	使用者が作成したサブプログラムXFILMにより熱伝達係数を与えて定常熱伝達解析を行なう。
VP-515	独立した2つの構造物の非定常熱伝導問題 (昭和55年度)	独立した2つの構造物の熱伝導解析を1回の解析で行ない、各々の構造ごとに解析を行なった場合との解の比較を行なう。
VP-516	2つの構造物の接触面に熱伝達を考慮した非定常熱伝導問題 (昭和56年度)	2つの構造の接触面における熱の移動を熱伝達で表わす場合について非定常熱伝導解析を行ない、EINASの解とANSYSの解の比較を行なう。
VP-517	熱流束による入熱がある無限板の非定常熱伝導問題 (昭和56年度)	無限板の片面の温度を規定し、他の面に熱流束を与える場合について非定常熱伝導解析を行ない、FINASとANSYSの解の比較を行なう。
VP-518	熱伝導解析におけるポストテープ編集機能利用問題 (昭和56年度)	リスタート機能を利用した解析で出力される複数のポストテープの編集を行ない、熱伝導解析におけるポストテープ編集機能が正しく作動することを確認する。
VP-519	熱伝導解析におけるリスタートテープ編集機能およびリスタートテープからの出力機能利用問題 (昭和56年度)	熱伝導解析におけるリスタートテープの編集機能とリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-520	定常非線形熱伝達リンク問題 (昭和57年度)	定常熱伝導解析において、熱伝導係数および熱伝達係数が温度依存である非線形問題を解析し、FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-521	2つの構造物の接触面に熱伝達を考慮した非定常非線形熱伝導問題 (昭和57年度)	2つの構造の接触面における熱の移動を熱伝達で表わす場合に、熱伝達係数が温度依存である熱伝導解析を行ない、FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-522	定常熱伝導解析と非定常熱伝導解析の連結問題 (昭和57年度)	材料定数と熱伝達境界条件が温度依存の場合について、定常と非定常を連結した熱伝導解析を行ない、FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-523	輻射を含む定常熱伝導問題 (昭和58年度)	輻射を含む定常熱伝導解析を行ない、FINASの解と理論解との比較を行なう。

No	タイトル	目的
VP-524	熱伝導率の直交異方性を考慮した定常熱伝導問題  (昭和58年度)	熱伝導率の直交異方性が考慮された定常熱伝導問題を解析し、FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-525	時間増分自動決定機能を利用した非定常熱伝導問題  (昭和58年度)	厚肉円筒において、内部を流れる液体ナトリウムが急激に変化した場合の非定常熱伝導問題に関して時間増分自動決定機能を適用したFINASの解とANSYSの解との比較を行う。
VP-526	材料座標系を用いた熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題  (昭和58年度)	熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない定常熱伝導問題を解析し、FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-527	使用者が作成したサブプログラムによる熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題  (昭和58年度)	熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない場合に、その材料座標系を定義するための使用者作成サブプログラムXMCORDを用いて定常熱伝導解析を行ないFINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-528	時間増分自動決定機能を利用した非定常熱伝導問題  (昭和60年度)	時間増分自動決定機能を利用して、非定常熱伝導問題を解析し、その機能の検証を行なう。

表 1-3 動的解析 VP の一覧表

No.	タ イ ト ル	目 的
VP-701	梁の固有値問題 (昭和55年度)	多自由度固有値解析の固有値について、NASTRAN との解の比較を行なう。
VP-702	梁の応答スペクトル問題 (昭和55年度)	応答スペクトル解析機能が正しく作動することを理論解との比較により検証する。
VP-703	梁のモーダル応答問題 (昭和55年度)	モーダル応答解析機能が正しく作動することを動的荷重として外力およびそれと等価な加速度を負荷し、それぞれ理論解と比較して検証する。
VP-704	棒の弾性動的応答問題(直接積分法) (昭和55年度)	棒の一端に線形な動的荷重を与えるシンプルな問題を FINAS 直接積分法で解き、理論解および FINAS モーダル法の解と比較する。
VP-705	球殻の弾性動的応答問題(直接積分法) (昭和55年度)	球殻のトップにステップ荷重を与える問題を直接積分法で解き、これを NONSAP <sup>1)</sup> の直接積分法の解と比較する。
VP-706	棒の弾塑性動的応答問題 (昭和55年度)	棒の一端に線形な荷重を与えるシンプルな問題で弾塑性動的応答解析の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-707	付加質量を用いた振動問題 (昭和55年度)	先端に付加質量を与えた棒に外荷重を作用させ、FINAS における直接積分法による解と理論解との比較を行なう。
VP-708	片持ち梁のモーダル応答解析 (昭和56年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し、減衰がない場合について FINAS のモーダル応答解析の結果と理論解との比較を行なう。
VP-709	モーダル応答解析におけるリスタート機能利用問題 (昭和56年度)	第 1 回目の計算で片持ち梁の固有値計算を行ない、リスタートによる第 2 回目の計算で衝撃荷重を受ける場合のモーダル応答解析を行なう。
VP-710	モーダル応答解析におけるポストテープ機能利用問題 (昭和56年度)	モーダル応答解析における解析結果が正しくポストテープに出力されるかどうかのチェックを行なう。
VP-711	直接積分法におけるリスタート機能利用問題 (昭和56年度)	直接積分法による応答解析の途中で計算の中断と再開を行ない、リスタート機能のチェックを行なう。
VP-712	直接積分法におけるポストテープ機能利用問題 (昭和56年度)	直接積分法による応答解析の結果がポストテープに正しく出力されるかどうかのチェックを行なう。

No.	タイトル	目的
VP-713	直接積分法による片持ち梁の応答問題 (昭和56年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し、減衰がない場合について FINAS の直接積分法による応答解析の結果と理論解との比較を行なう。
VP-714	減衰のある片持ち梁のモーダル応答問題 (昭和56年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し、減衰がある場合のモーダル応答解析を行ない、FINAS と NASTRAN の解の比較を行なう。
VP-715	直接積分法による減衰のある片持ち梁の応答問題 (昭和56年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し、直接積分法により減衰のある場合の応答解析を行ない、FINAS と NASTRAN の解の比較を行なう。
VP-716	単純支持梁の応答スペクトル問題 (昭和56年度)	単純支持梁に応答変位スペクトルを与えた応答スペクトル解析を行ない、FINAS の解と NASTRAN, ANSYS の解との比較を行なう。
VP-717	周縁固定円板の固有値問題 (昭和56年度)	周縁固定円板の固有値解析を行ない、FINAS の解と NONSAP の解との比較を行なう。
VP-718	直接積分法による球殻の弾塑性応答問題 (昭和56年度)	球殻の頂点に衝撃荷重を与える弾塑性応答問題を直接積分法で解析し、FINAS と NONSAP の解の比較を行なう。
VP-719	固有値解析におけるリスタートテープからの出力機能利用問題 (昭和56年度)	固有値解析におけるリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-720	モーダル応答解析におけるリスタートテープからの出力機能利用問題 (昭和56年度)	モーダル応答解析におけるリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-721	応答スペクトル解析におけるリスタートテープからの出力機能利用問題 (昭和56年度)	応答スペクトル解析におけるリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-722	直接積分法による動的解析におけるリスタートテープ編集機能およびリスタートテープからの出力機能利用問題 (昭和57年度)	直接積分法による応答解析におけるリスタートテープの編集機能とリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-723	正方形板の固有値問題 (昭和57年度)	周辺単純支持の正方形板の固有値解析を行ない、FINAS の解と理論解および NASTRAN の解との比較を行なう。
VP-724	初期変位を与えた外力加振問題 (昭和57年度)	初期条件として変位を与え、外力により加振する問題を FINAS の線形直接積分法で解析し理論解と比較を行なう。

No.	タ イ ト ル	目 的
VP-725	時間刻みを変化させる線形直接積分応答問題 (昭和57年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し、直接積分法により応答を計算する。応答時刻を2つに分け、1回の計算中に2種類の時間増分を用いて解析を行ない、NASTRAN, MARC との解の比較を行なう。
VP-726	多質点梁モデルの地震応答問題 (昭和57年度)	8個の集中質量系よりなる梁構造の ELCENTRO 波 (N-S 1940) に対する応答を線形直接積分法で解析し、モーダル応答法による解との比較を行なう。
VP-727	減衰のある1自由度系の強制振動問題 (昭和57年度)	バネ・減衰要素の一端にステップ関数の荷重を与える問題を線形直接積分法で解析し、理論解との比較を行なう。
VP-728	静的解析からのリスタート機能を利用した線形直接積分法による減衰のある1自由度系の自由振動問題 (昭和57年度)	バネ・減衰要素の一端に荷重を負荷した状態から、瞬時に荷重を開放したときの自由振動の解析を行なう。最初に荷重を負荷した静的解析を行ない、次にリスタート機能を利用し線形直接積分法により、無負荷状態の自由振動解析を行なう。この結果と理論解との比較を行なう。
VP-729	梁の固有値解析において固有値範囲を指定する問題 (昭和58年度)	VP-701の梁の固有値問題に対して固有値範囲を指定した固有値解析機能が正しく作動するかの検証を行なう。
VP-730	固有値範囲指定による片持ち梁のモーダル応答問題 (昭和58年度)	VP-708の片持ち梁のモーダル応答問題において固有値範囲指定機能が正しく作動するかの検証を行なう。
VP-731	材料データライブラリを用いた固有値解析 (昭和60年度)	材料データライブラリを用いて固有値解析を行ない、理論解と FINAS の解との比較を行なう。
VP-732	"REFERENCE TEMP" データを用いた固有値解析 (昭和60年度)	新しい入力データ "REFERENCE TEMP" で初期温度分布を与えて固有値問題を解析し、理論解と FINAS の解との比較を行なう。
VP-733	片持ち梁の固有値問題 — 非軸対称動的問題 — (昭和60年度)	軸対称調和要素を用いて動的問題を解析し、理論解と FINAS の解との比較を行なう。
VP-734	矩形タンクのスロッシング固有値解析 (昭和60年度)	流体構造連成機能を用いた矩形タンクの固有値解析を行ない、理論解との比較を行なう。
VP-735	円筒タンクのスロッシング固有値解析 (昭和60年度)	流体構造連成機能を用いた円筒タンクの固有値解析を行ない、理論解との比較を行なう。

No	タ イ ト ル	目 的
VP-736	片持梁の衝突振動問題 (昭和61年度)	片持梁の衝突振動問題を解析して、機論の解と比較する。
VP-737	固有値マージング機能を用いたモーダル応答解析 (昭和61年度)	片持梁のモーダル応答解析を行ない、FNSEDIT の固有値マージング機能を用いて応答解析のリスタートを行なう。
VP-738	モーダル法による円筒タンクの動的応答問題 (昭和61年度)	流体構造連成機能を用いて円筒タンクのモーダル応答解析を行なう。
VP-739	直接積分法による円筒タンクの動的応答問題 (昭和61年度)	流体構造連成機能を用いて、円筒タンクの直接積分法による動的応答解析を行なう。
VP-740	応答モードを指定したモーダル応答問題 (昭和62年度)	応答モードを指定したモーダル応答解析機能が正しく作動するかを理論解と比較する。
VP-741	歪エネルギー減衰を用いたモーダル応答問題 (昭和62年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し歪エネルギー減衰がある場合のモーダル応答解析を行なう。
VP-742	動的解析における反力計算 (昭和63年度)	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し、固定端の反力が正しく評価されるかを検証する。問題はVP-725と同一のモデルを用いて、モーダル法と非線形直接積分法により解析し、それぞれの結果を非線形直接積分法での値と比較する。
VP-743	要素断面力および反力のXYプロット出力機器 (昭和63年度)	動的解析における要素断面力および反力のXYプロット出力機能が正しく作動するかのチェックを行なう。
VP-744	BEAM2によるパイプホイップ解析 (昭和63年度)	先端の放出口が45°下方に曲げられた水平片持ちのパイプに放出反力が作用する。反力の作用点は放出口付け根の折れ曲り点で、作用方向は放出口に沿った方向であり、変形に追従して変化する。
VP-745	減衰のある1自由度系の周波数応答問題 (平成元年度)	バネ減衰要素の一端に周期荷重が作用する場合の周波数応答変位を求め、理論解との比較を行なう。

## 1.178 VP-178 二曲面繰返し塑性モデルを用いたサイクリック弾塑性問題(2)

### (1) 目的

岩田氏提案の二曲面繰返し塑性モデルを用いて単軸引張り、圧縮のサイクリックな弾塑性解析を行ない、ADMODELによって得られた解と比較することによりFINASにおける同モデル解析機能の検証とする。

本問題はVP-171に同様であるが、モデルの定式化に若干の変更が加えられている。

### (2) 問題の設定

#### a) 解析モデル

##### • 構造モデル

断面積  $1.0\text{mm}^2$ 、長さ  $10\text{mm}$  の棒

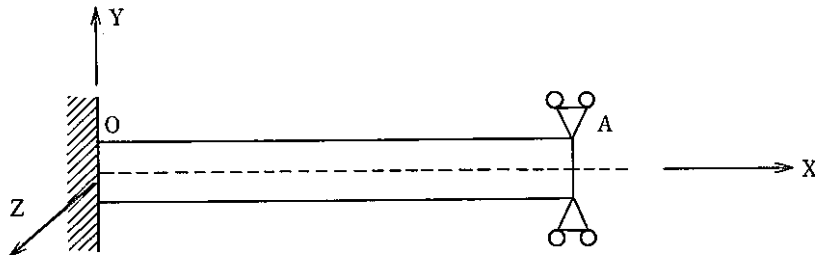


図1.178-1 構造モデル

##### • 使用要素

ROD2 : 3次元棒要素

##### • 有限要素モデル

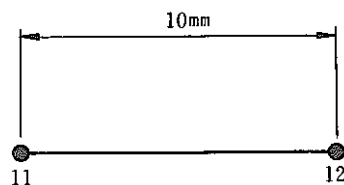


図1.178-2 有限要素モデル

#### b) 材料定数

- 材料は SUS304(550°C)とし、以下の値を用いる。

弾性係数  $E = 1.569125 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$

降伏応力  $\sigma_Y = 9.387379 \text{ kg/mm}^2$

- 塑性に関する硬化則

2曲面繰返し塑性モデルとして以下の材料特性を与える。また、限界曲面の内部で降伏曲面の中心は



Mroz の移動則に従うとする。

単調応力ひずみ関係に関するパラメータ

$$K = 3.446548 E+1 \text{ kg/mm}^2, \quad m = 3.220145 E-1$$

繰返し応力ひずみ関係に関するパラメータ

$$K' = 2.936130 E+2 \text{ kg/mm}^2, \quad m' = 4.172419 E-1$$

繰返し硬化特性に関するパラメータ

$$C_1 = 1.003773 E+1, \quad C_2 = 2.77755$$

$$D = 2.023899 E-2, \quad Q = 0.333333, \quad n = 1.0$$

c) 境界条件

点Oにおいて  $u_x = u_y = u_z = 0$

点Aにおいて  $u_y = u_z = 0$

X方向に下図のような規定変位を与える。

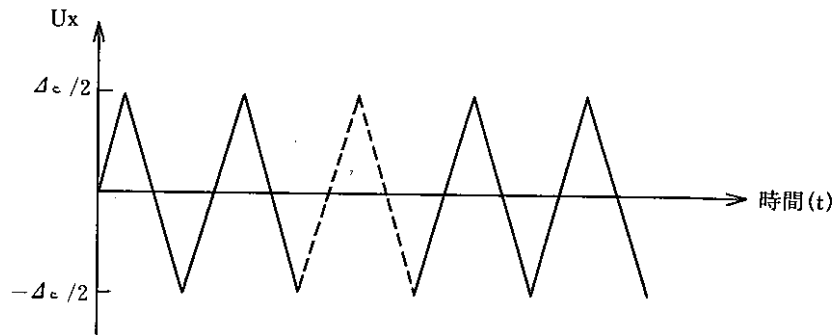


図1.178-3 規定変位の履歴

ただし、ひずみ範囲： $\Delta \epsilon$ は1.0%，サイクル数は80とする。

解析ステップの大きさを以下に示す。

表1.178-1 解析ステップの大きさ

最初の1/2サイクル		以降の1/2サイクル	
分割数	ひずみ増分	分割数	ひずみ増分
1	0.0	1	±0.000001
1	0.0006	1	±0.001199
4	0.0004	8	±0.0008
5	0.001	10	±0.002
6	0.003	12	±0.06

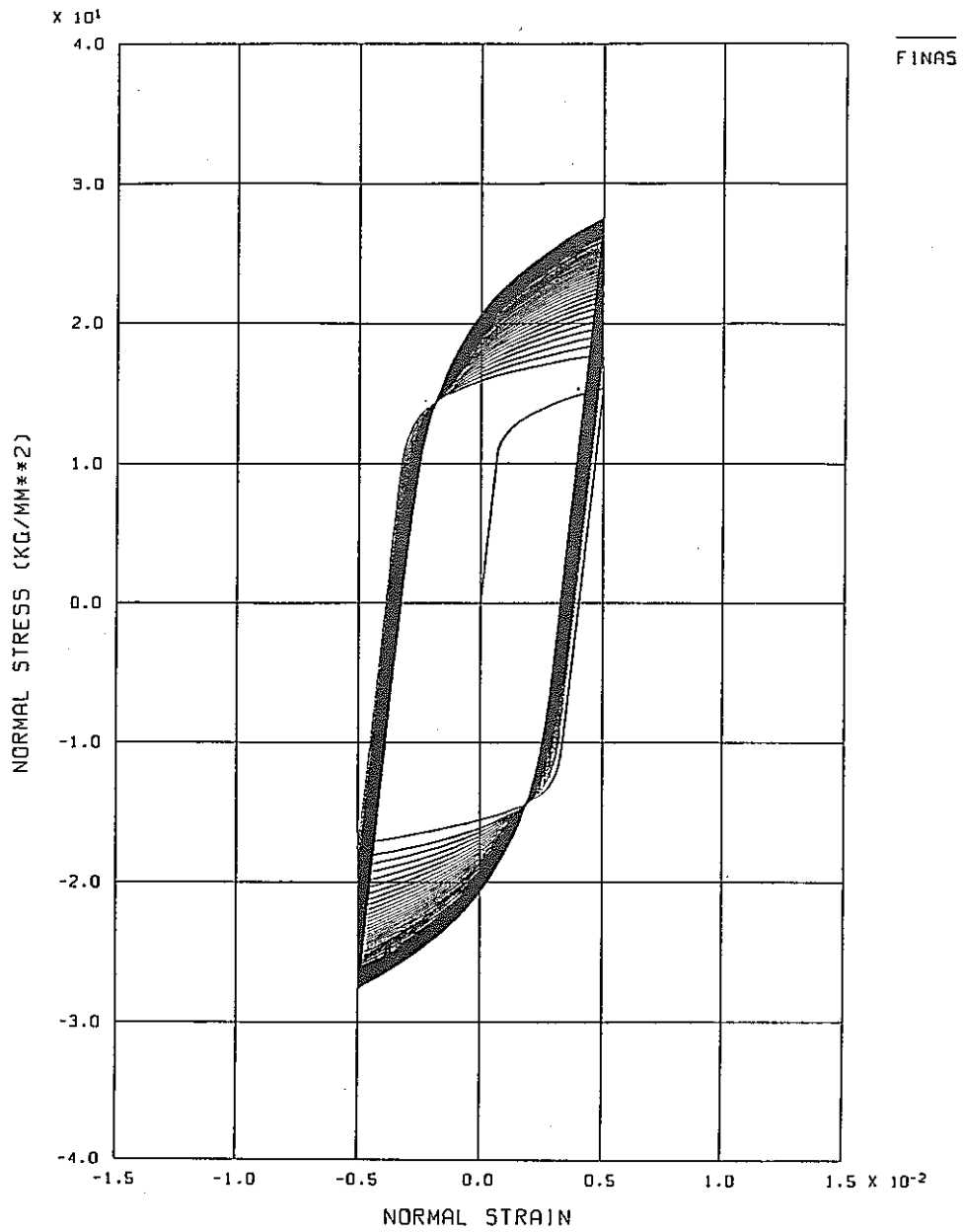
結局、80サイクルの解析には5105ステップを要する。

(3) 解析結果

FINASの解析により得られた応力とひずみの履歴を, ADMODELによって得られたものも併せて以下の頁に示す。またFINASによって得られた最終応力値は $-27.577 \text{ kg/mm}^2$ であった。

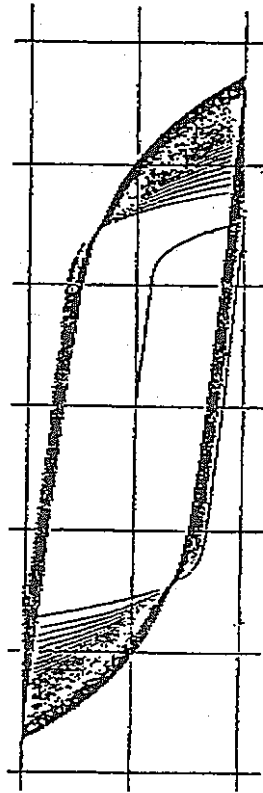
(4) 結論

FINASとADMODELの解析結果は完全に一致しており, FINASにおける二曲面繰返し塑性モデルの解析機能が正常に働くことが確認された。



IWATA'S TWO SURFACE MODEL (1%) 80 CYCLES

図1.178-4 FINASによる応力-ひずみ履歴



$\Delta \epsilon = 1.0\%$

図1.178-5 ADMODELによる応力-ひずみ履歴

# 1.179 VP-179 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(1)

## (1) 目的

中央き裂を有する平板の弾性解析を行ない、FINASに組み込まれた仮想き裂進展法による  $J$  積分値の計算が正しく行なわれることを確認しその有効性の検討を行なう。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

- 構造モデル

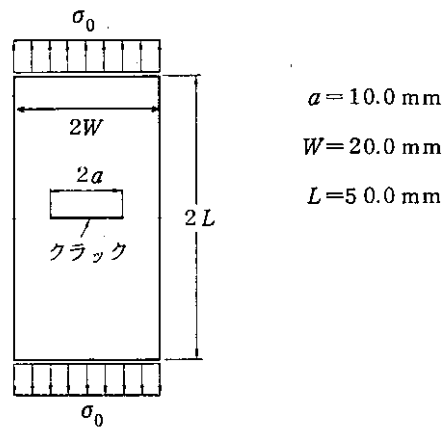


図1.179-1 構造モデル

- 使用要素

QPLAN8 8 節点四辺形平面ひずみ要素

- 有限要素モデル

構造および負荷の対称性を考慮して1/4モデルで解析する。なお、き裂近傍の中間節点を辺長の1/4だけき裂先端側に移動させて、き裂先端に特異性を持たせた。

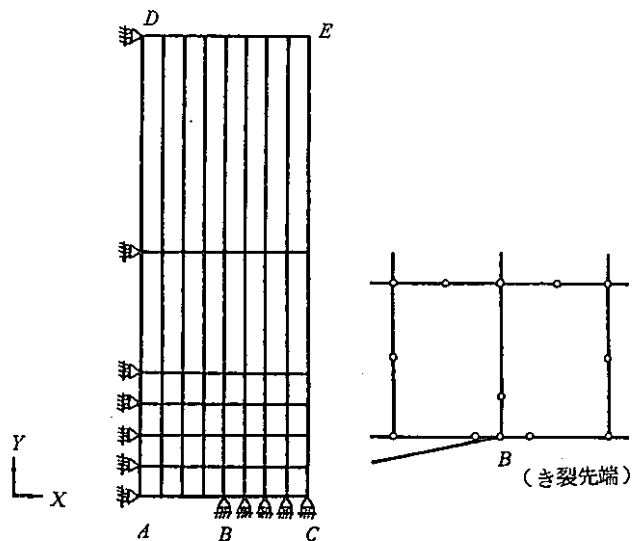


図1.179-2 有限要素モデル

b) 材料定数

弾性係数  $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$

ポアソン比  $\nu = 0.3$

c) 境界条件

B-Cに沿って  $u_y = 0$

A-Dに沿って  $u_x = 0$

d) 負荷条件

D-Eに沿って分布荷重  $\sigma_0 = 10 \text{ kg/mm}^2$  を与える。

e) 積分領域

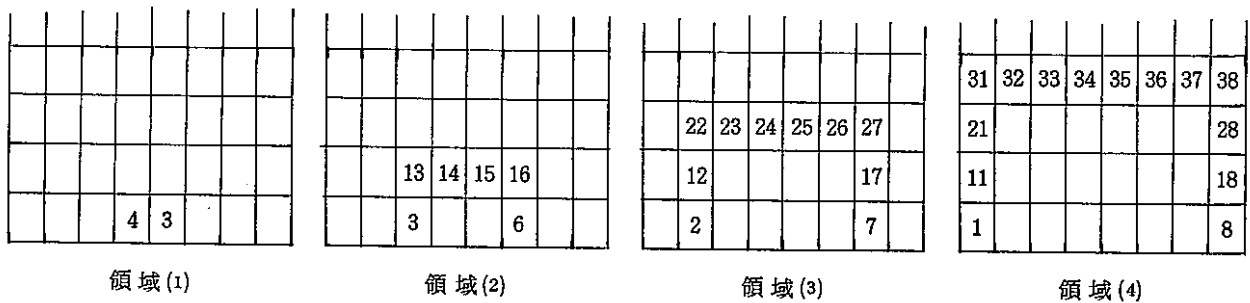


図1.179-3 積分領域

f) 理論解

中央にき裂がある帯板の一樣引張り問題における応力拡大係数は近似的に次式で与えられる。

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a \cdot \sec(\pi a / W / 2)} = 66.655$$

また平面ひずみ場における  $K_I$  と  $J$  の関係は次式となる。

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 = 1.9252 \times 10^{-10}$$

(3) 解析結果

表1.179-1  $J$  積分値

積分領域	仮想き裂進展法	FNSFRCT	理論解
1	$1.9083 \times 10^{-1}$	$1.7591 \times 10^{-1}$	$1.9252 \times 10^{-1}$
2	$1.9022 \times 10^{-1}$	$1.8946 \times 10^{-1}$	
3	$1.9030 \times 10^{-1}$	$1.9015 \times 10^{-1}$	
4	$1.9031 \times 10^{-1}$	$1.8015 \times 10^{-1}$	

#### (4) 考 察

表1.179~1に示すように、仮想き裂進展法の解は理論解とよく一致している。これより本機能の有効性が確認された。

# 1.180 VP-180 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(2)

## (1) 目的

Wilson と Yu によってなされた, 端部き裂を有する平板の平面ひずみき裂問題<sup>1)</sup> について熱弾塑性解析を行なって, 非線形破壊力学パラメータ $\hat{J}$ 積分値を求め, SHIHらの解<sup>2)</sup> と比較する。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

- 構造モデル

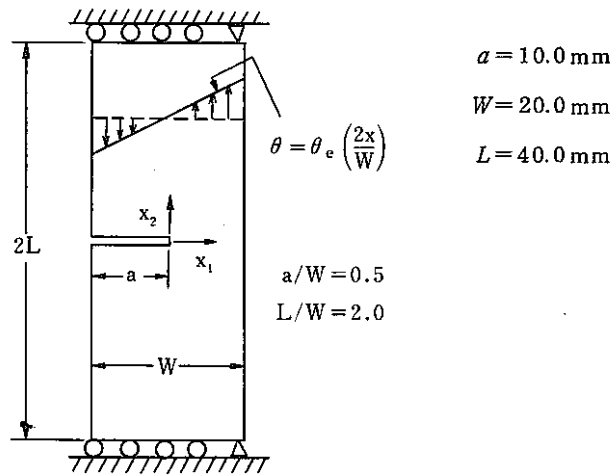


図1.180-1 構造モデル

- 使用要素

QPLAN8 : 8 節点平面ひずみ要素

- 有限要素モデル

構造および負荷の対称性を考慮して $1/2$ モデルで解析する。

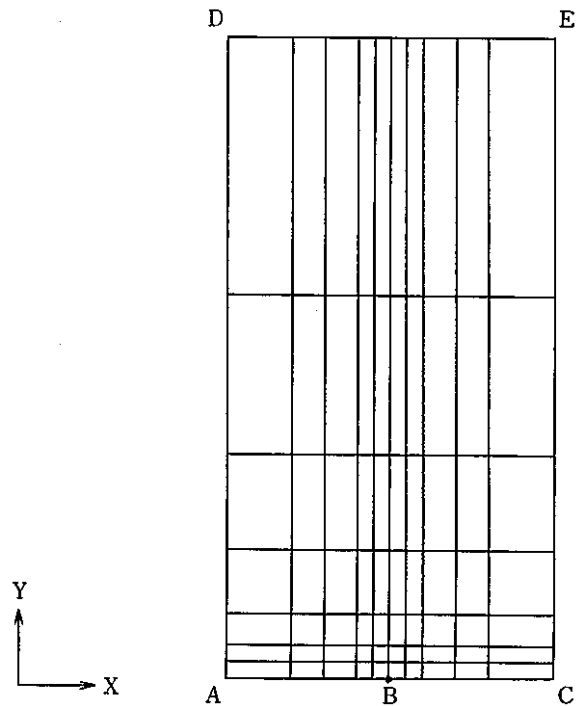


図1.180-2 有限要素モデル

b) 材料定数

弾性係数	$E = 21000.0 \text{ kg/mm}^2$
ポアソン比	$\nu = 0.3$
線膨張係数	$\alpha = 1.2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$
降伏応力	$\sigma_Y = 49.0 \text{ kg/mm}^2$
加工硬化係数	$H' = 210.0 \text{ kg/mm}^2$

c) 境界条件 ( 図1.180-2 参照 )

B-Cに沿って	$u_X = 0$
D-Eに沿って	$u_Y = 0$
E点	$u_Z = 0$

d) 負荷条件

i) 熱弾性解析 ( ケース 1 )

平板の巾  $W$  に沿って  $\theta = \theta_0 \left( \frac{2X}{W} \right)$  の温度分布を与える。

ただし,  $\theta_0 = 100^\circ\text{C}$

ii) 熱弾塑性解析 ( ケース 2 )

平板の巾  $W$  に沿って  $\theta = \theta_0 \left( \frac{2X}{W} \right)$  の温度分布を与える。

ただし,  $\theta_0 = 2\varepsilon_Y / \alpha = 2\sigma_Y / R / \alpha = 388.889^\circ\text{C}$

ステップ数 40 ( 等分割 )

温度増分  $\Delta\theta_0 = 9.722^\circ\text{C}$

e) 積分領域

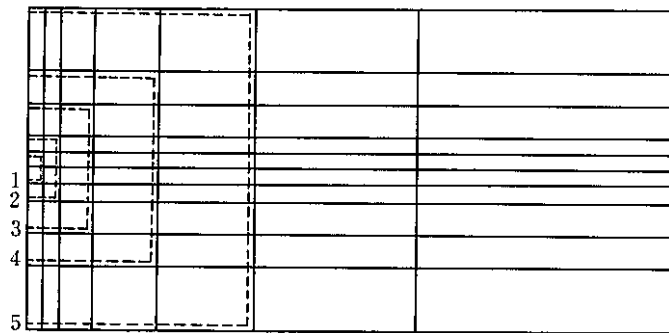


図1.180-3 積分領域



(3) 解析結果

i) 熱弾性解析(ケース1)

表1.180-1  $\hat{J}$ -Integration value (無次元化)

積分領域	FINAS $J/(\sigma_{\theta}^2 a/E)$	FNSFRCT $J/(\sigma_{\theta}^2 a/E)$	SHIHらの 解の平均 <sup>注)</sup>
1	0.7160	0.7940	0.6744
2	0.7233	0.7351	
3	0.7239	0.7443	
4	0.7238	0.7393	
5	0.7249	0.7285	

ただし,  $\sigma_{\theta} = E\alpha\theta_0/(1-\nu)$

注) SHIHらの解は4節点平面ひずみ要素を用いた値である。  
要素数=20×12

ii) 熱弾塑性解析(ケース2)

表1.180-2  $\hat{J}$ -Integration value (無次元化)

積分領域	$\varepsilon_{\theta}/\varepsilon_Y=1$			$\varepsilon_{\theta}/\varepsilon_Y=2$		
	FINAS $J/(\sigma_Y \varepsilon_Y a)$	FNSFRCT $J/(\sigma_Y \varepsilon_Y a)$	SHIH らの解	FINAS $J/(\sigma_Y \varepsilon_Y a)$	FNSFRCT $J/(\sigma_Y \varepsilon_Y a)$	SHIH らの解
1	1.4268	1.5809	1.4114	4.1669	5.2578	4.2581
2	1.5532	1.5873		4.4019	4.6415	
3	1.5608	1.5811		4.2899	4.7417	
4	1.5496	1.5727		4.2310	4.6845	
5	1.5476	1.5676		4.2430	4.6971	

また, 図1.180-4は $\hat{J}$ 積分値とき裂開口変位との関係を示したものである。

(4) 考察

熱弾性解析の $\hat{J}$ 積分値はSHIHらの解と約7%の差がある。これらはSHIHらが解析に用いた要素が4節点要素であるためと考えられる。一方, 熱弾塑性解析における $\hat{J}$ 積分値はSHIHらの解とよく一致している。これらのことより, 本機能の有効性が確認された。

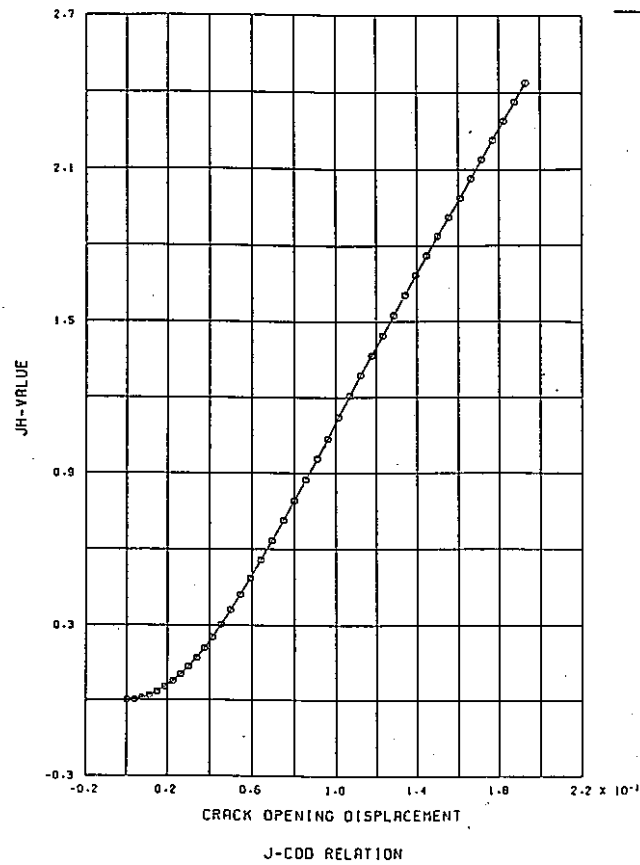


圖1.180-4  $\hat{j}$ -COD關係圖

〔参考文献〕

- 1) W. K. Wilson, I. W. Yu, International Journal of Fracture 15 (1979) 377 - 387.
- 2) C. F. Shih, B. Moran, T. Nakamura, "Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body", International Journal of Fracture 30 (1986) 79-102.

## 1.181 VP-181 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(3)

### (1) 目的

中央にき裂のある帯板の一樣引張問題に対し、高次要素を用いた場合と低次要素を用いた場合について  $J$  積分値を求め理論解と比較する。

### (2) 問題の設定

#### a) 解析モデル

- 構造モデル

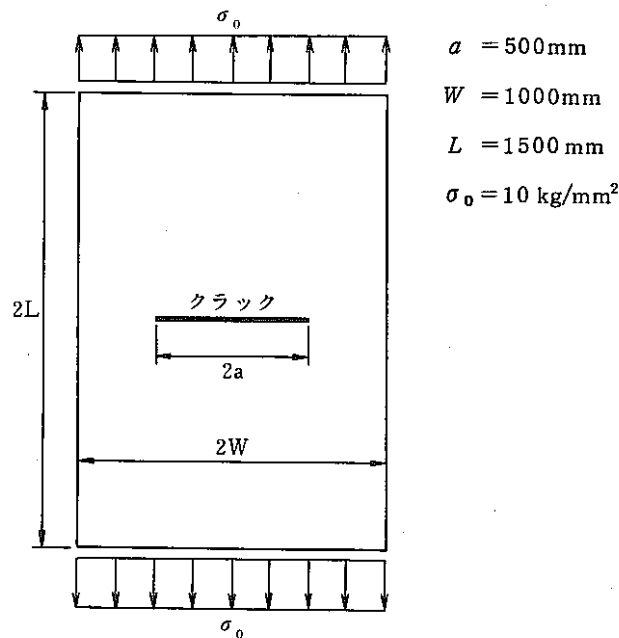


図1.181-1 構造モデル

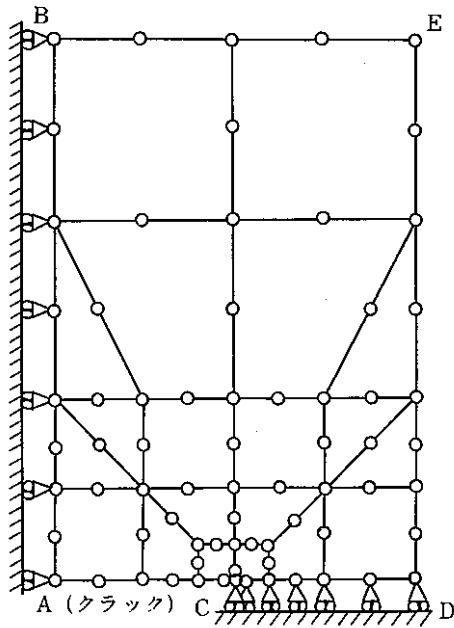
#### • 使用要素

QMEM8 : 8 節点四辺形平面応力要素 (ケース1)

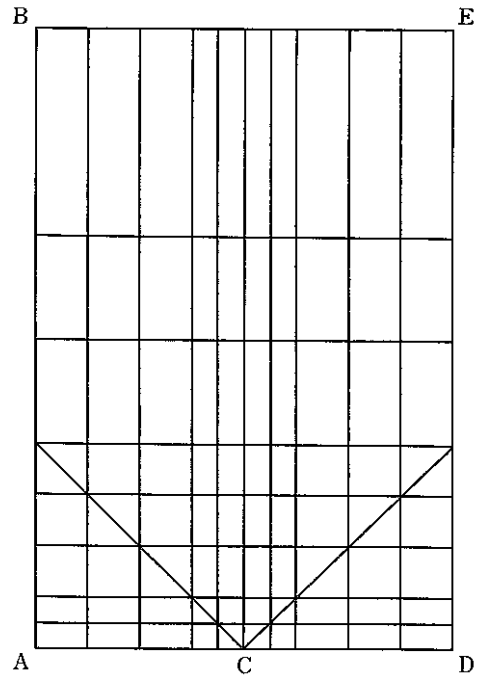
QMEM4 : 4 節点四辺形平面応力要素 (ケース2)

#### • 有限要素モデル

構造および負荷条件の対称性を考慮して  $1/4$  モデルで解析を行なう。



高次要素モデル(ケース1)



低次要素モデル(ケース2)

図1.181-2 有限要素モデル

b) 材料定数

弾性係数  $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$

ポアソン比  $\nu = 0.3$

c) 境界条件 (図1.181-2 参照)

A-Bに沿い  $u_x = 0$

C-Dに沿い  $u_y = 0$

全節点で  $u_z = 0$

d) 負荷条件

B-Eに沿い, 分布荷重  $\sigma_0 = 10 \text{ kg/mm}^2$  を与える。

e) 積分領域 (図1.181-3 参照)

f) 理論解

中央にクラックのある帯板の一樣引張り問題における応力拡大係数  $K_I$  は次式で近似的に与えられる。

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a \cdot \sec(\pi a / W / 2)} = 471.322$$

平面応力の場合における  $K_I$  と  $J$  の関係は次式となる。

$$J = \frac{1}{E} K_I^2 = 10.578$$

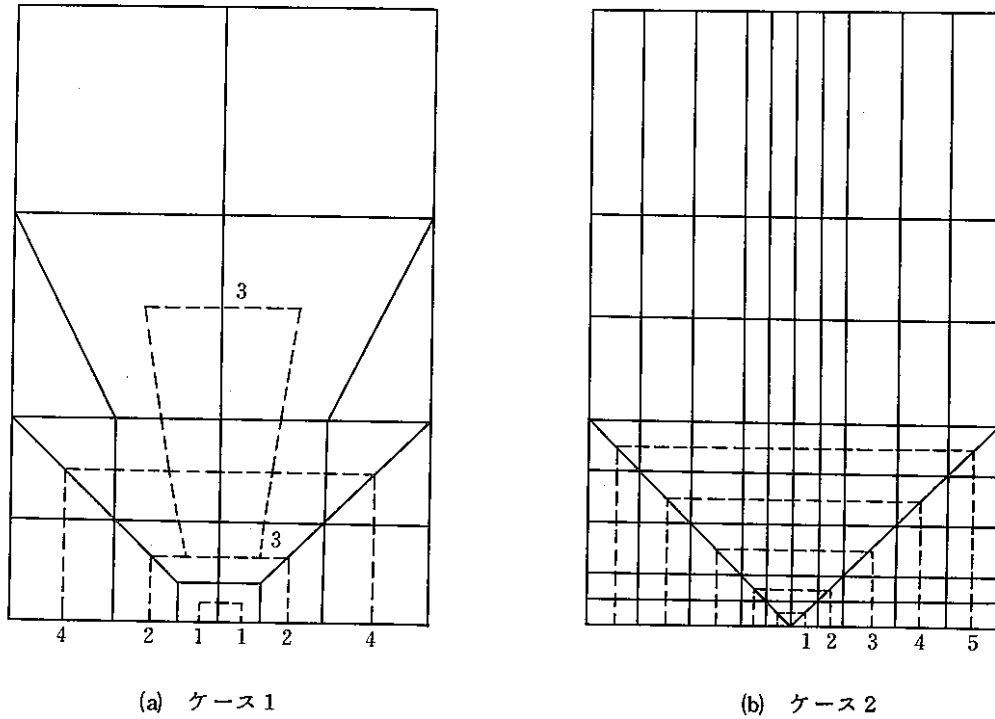


図1.181-3 積分領域

(3) 解析結果

表1.181-1 J 積分値の比較

領域	FINAS		FNSFRCT	理論解
	QMEM8	QMEM4		
1	10.7706	9.1750	10.0488	10.578
2	10.7170	9.8666	11.1706	
3	10.7252	9.8030	11.0172	
4	10.7354	9.8662	10.7792	
5	—	9.8962	—	

(4) 考察

表1.181-1に示すように、FINASの値は高次要素を用いた場合、理論解とよく一致している。低次要素を用いた場合でも、き裂先端の値を除いて約7%の誤差で一致している。このことより、本機能の妥当性が確認された。

# 1.182 VP-182 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(4)

## (1) 目的

埋没円き裂を有する無限体に引張荷重を負荷した場合について、高次要素を用いた場合と低次要素を用いた場合とでJ積分値を比較する。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

- 構造モデル

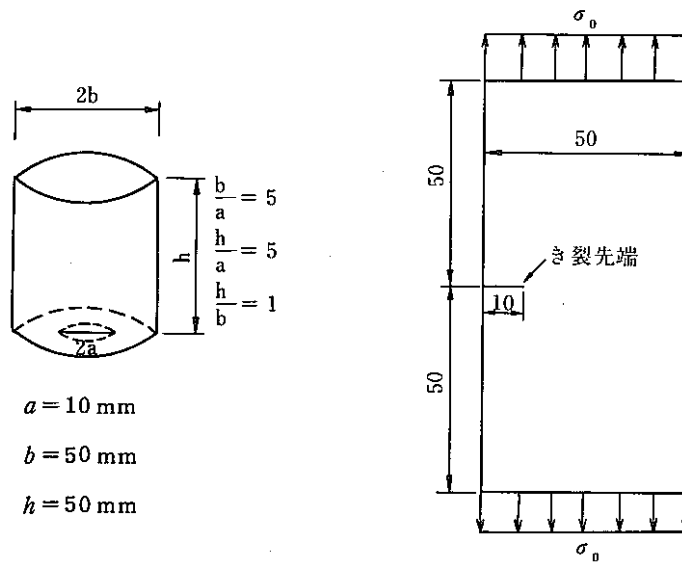


図1.182-1 埋没円き裂を有する無限体

- 使用要素

QAX8 : 8 節点四辺形軸対称要素

QAX4 : 4 節点四辺形軸対称要素

- 有限要素モデル

図1.182-2 参照。

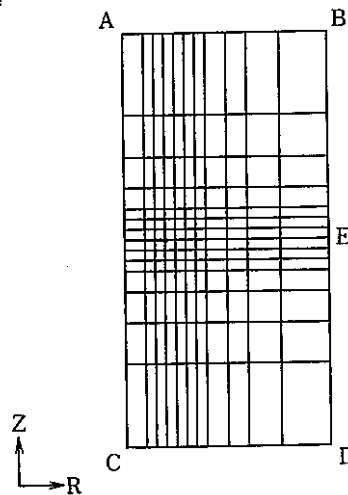


図1.182-2 有限要素モデル

b) 材料定数

弾性係数  $E=1.85 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \text{ (MPa)}$

ポアソン比  $\nu=0.3$

c) 境界条件

ACに沿って  $u_R=0$

E点  $u_Z=0$

d) 負荷条件

ABに沿って

CDに沿って  $\sigma_0=10 \text{ N/mm}^2 \text{ (MPa)}$

e) 領域の選択

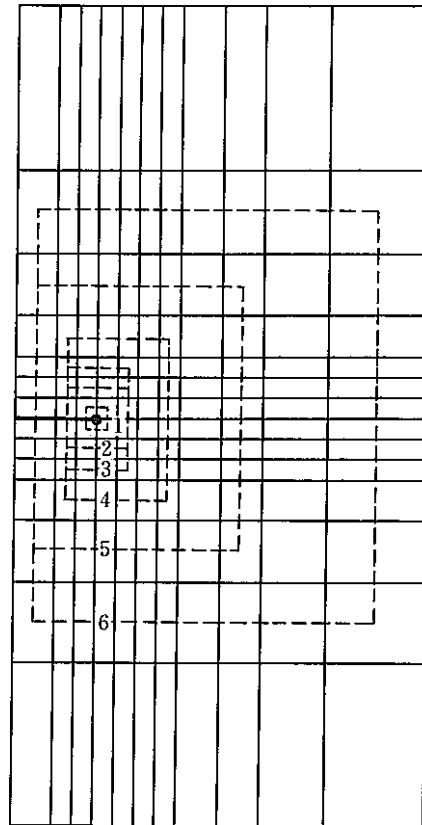


図1.182-3 J積分の領域

f) 理論解

$$K_I = 2\sigma_0\sqrt{a/\pi} = 35.682$$

$$J = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 = \frac{1-0.3^2}{1.85 \times 10^5} \times 35.682^2 = 6.263 \times 10^{-3} \text{ N/mm}$$

(3) 解析結果

表1.182-1  $\hat{J}$  積分値の比較

領域	仮想き裂進展法		FNSFRCT	理論解
	QAX8	QAX4		
1	$5.9195 \times 10^{-3}$	$5.1423 \times 10^{-3}$	$5.7017 \times 10^{-3}$	$6.263 \times 10^{-3}$
2	$5.9786 \times 10^{-3}$	$5.6065 \times 10^{-3}$	$5.3484 \times 10^{-3}$	
3	$5.9765 \times 10^{-3}$	$5.6288 \times 10^{-3}$	$5.9042 \times 10^{-3}$	
4	$5.9722 \times 10^{-3}$	$5.6251 \times 10^{-3}$	$5.9230 \times 10^{-3}$	
5	$5.9801 \times 10^{-3}$	$5.6273 \times 10^{-3}$	$5.9778 \times 10^{-3}$	
6	$5.9799 \times 10^{-3}$	$5.6164 \times 10^{-3}$	$5.9878 \times 10^{-3}$	

(4) 考察

表1.182-1 より仮想き裂進展法による  $J$  積分値は径路独立性がよく表われており、QAX8 の高次要素を用いた値は理論解と約5%の誤差で一致している。

低次要素を用いた値はき裂先端での値を除いて理論解と約10%の誤差で一致している。



# 1.183 VP-183 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(5)

## (1) 目的

埋没円き裂を有する無限体に温度分布が作用する熱弾性解析を行ない、FINASに組み込んだ仮想き裂進展法により  $\hat{J}$  積分値を計算し、渡辺ら<sup>1)</sup>の解と比較し、本機能の有効性の検討を行なう。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

- 構造モデル

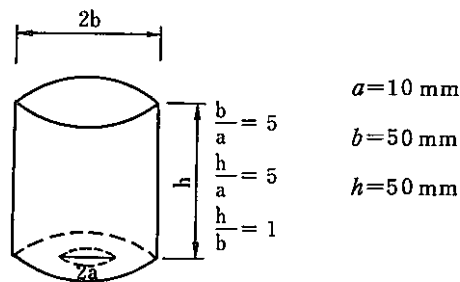


図1.183-1 埋没円き裂を有する無限体

- 使用要素

QAX8 : 8 節点四辺形軸対称要素

- 有限要素モデル

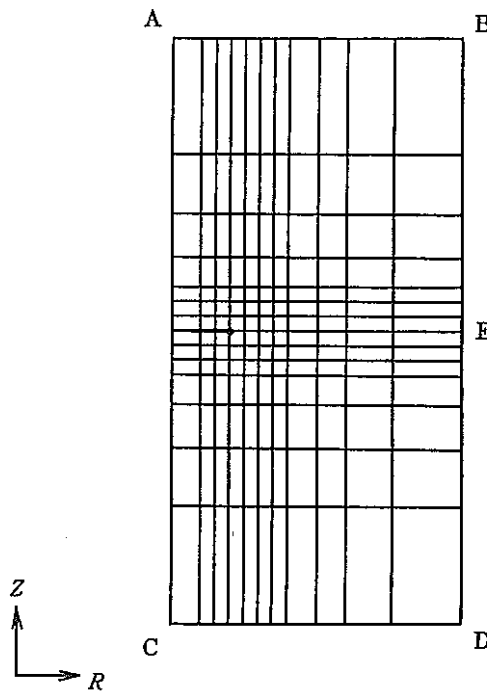


図1.183-2 有限要素モデル

b) 材料定数

弾性係数  $E=1.85 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

ポアソン比  $\nu=0.3$

熱膨張係数  $\alpha=1.2 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$

c) 境界条件

A-Bに沿って  $u_z=0$

C-Dに沿って  $u_z=0$

d) 負荷条件

基準温度  $0^\circ\text{C}$

最初に全節点を一様に  $-60^\circ\text{C}$ まで一様冷却した後,  $\Delta T = -100 \left(1 - \frac{r}{b}\right)$  の分布を与える。

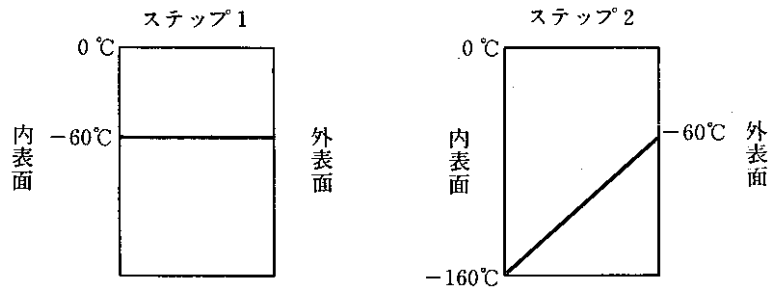


図1.183-3 温度分布

e) 積分領域

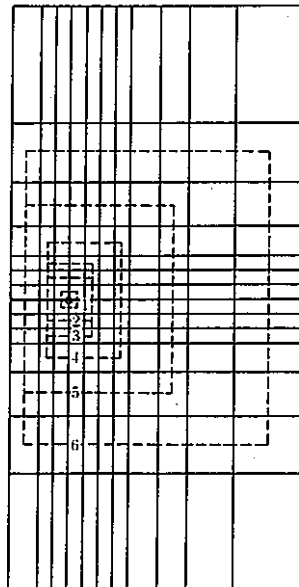


図1.183-4 積分領域

### (3) 解析結果

表1.183-1  $\hat{J}$  積分値 (ステップ1)

積分領域	仮想き裂進展法	FNSFRCT	渡辺らの解
1	1.0383	1.0536	1.055
2	1.0486	0.9418	
3	1.0483	0.9243	
4	1.0475	0.9324	
5	1.0490	0.9468	
6	1.0489	0.9470	

表1.183-2  $\hat{J}$  積分値 (ステップ2)

積分領域	仮想き裂進展法	FNSFRCT	
1	8.0201	7.4626	
2	8.0952	7.0520	
3	8.0923	7.3398	
4	8.0850	7.4279	
5	8.0922	7.4811	
6	8.0828	7.4524	

### (4) 考察

表1.183-1より仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値は径路独立性がよく表われており、渡辺らの解ともよく一致している。

### 〔参考文献〕

- 1) 渡辺, 矢川, 吉野, 軸対称問題における $J$ および $\hat{J}$ 積分の解析, 機械学会 63期全国大会, 1985

# 1.184 VP-184 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(6)

## (1) 目的

中央き裂を有する平板の除荷を含まない弾塑性解析を行ない、FINASに組み込んだ仮想き裂進展法により $\hat{J}$ 積分値を求め、岸本らの解と比較する。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデルおよび有限要素モデル

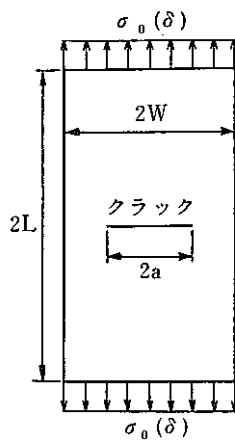
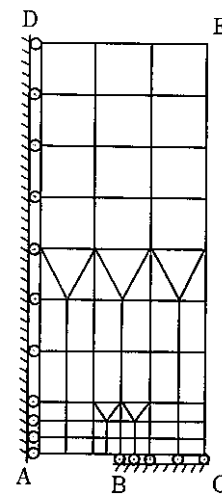


図1.184-1 構造モデル

- $a = 10.0 \text{ mm}$
- $W = 20.0 \text{ mm}$
- $L = 50.0 \text{ mm}$
- $E = 2100.0 \text{ kgf/mm}^2$
- $\nu = 0.3$
- $\sigma_Y = 49.0 \text{ kgf/mm}^2$
- $H' = 210.0 \text{ kgf/mm}^2$



使用要素  
QPLAN8

図1.184-2 有限要素モデル (1/4モデル)

### b) 境界条件 (図1.184-2 参照)

- B-Cに沿って  $u_Y = 0$
- A-Dに沿って  $u_X = 0$
- D-Eに沿って  $u_Y = 0.15 \text{ mm}$  (強制変位)

### c) 負荷条件

D-Eに沿って強制変位  $u_Y = 0.15 \text{ mm}$ を40ステップで載荷する。

### d) 積分領域

図1.184-3に積分経路を示す。

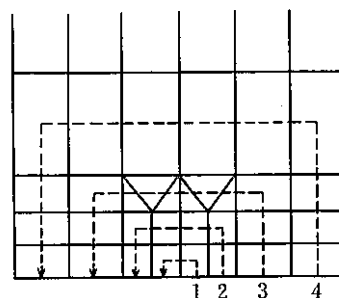


図1.184-3 積分領域

(3) 解析結果

図1.184-4に $\sigma_0-\delta$ 関係図を示す。

図1.184-5にFINASによる $J$ 積分値,  $\hat{J}$ 積分値の強制変位量 $\delta$ との関係を示す。理論上, $J$ 積分値と $\hat{J}$ 積分値は単調増加荷重のもとで一致することが知られているが, FINASの値は多少 $\hat{J}$ 積分値の方が大きめであるがよく一致していることがわかる。また, 図1.184-6に岸本らの値を示すが, FINASの値とよく一致していることがわかる(なお, 岸本らは荷重制御で解析を行なっている)。

〔参考文献〕

- 1) 青木, 岸本, 鍋田, 坂田, 前荷重を受けた物体に対する弾塑性破壊力学パラメータ, 「材料」第31巻第343号 60-65.

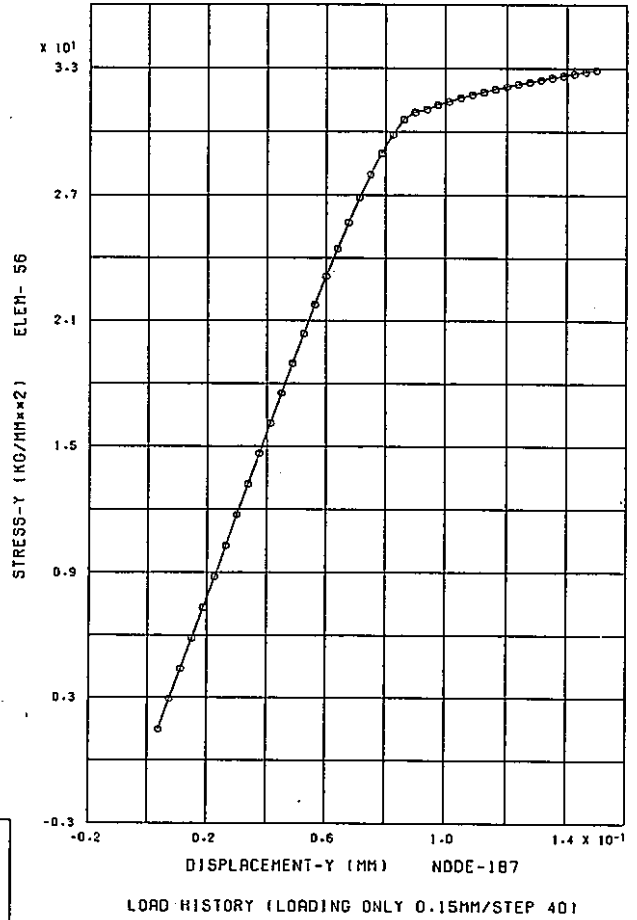


図1.184-4  $\sigma_0-\delta$ 関係図

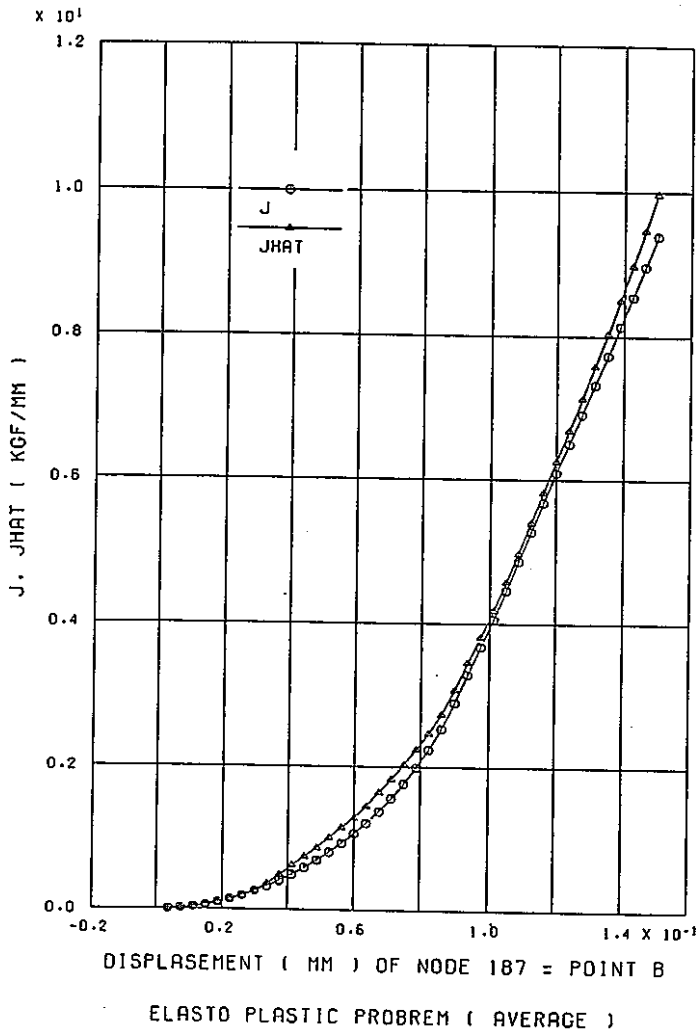


図1.184-5 FINASによる $J, \hat{J}$ 積分値

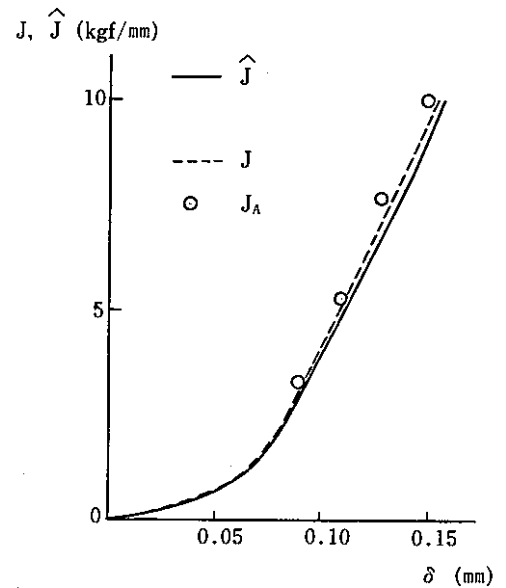


図1.184-6 岸本らの $J, \hat{J}$ 積分値

# 1.185 VP-185 仮想き裂進展法による破壊力学パラメータの計算(7)

## (1) 目的

除荷過程を含む任意の履歴を持つ荷重に対して、中央き裂を持つ平板の弾塑性解析を行ない、FINASに組み込まれた仮想き裂進展法による $\hat{J}$ 積分値の検証を行なう。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

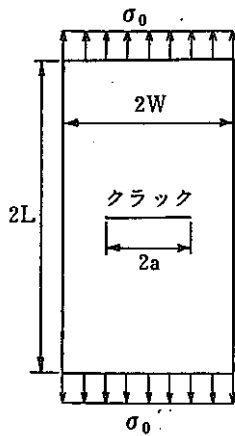


図1.185-1 構造モデル

- $a = 10.0 \text{ mm}$
- $W = 20.0 \text{ mm}$
- $L = 50.0 \text{ mm}$
- $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$
- $\nu = 0.3$
- $\sigma_Y = 480.0 \text{ MPa}$
- $H' = E/100 \text{ MPa}$

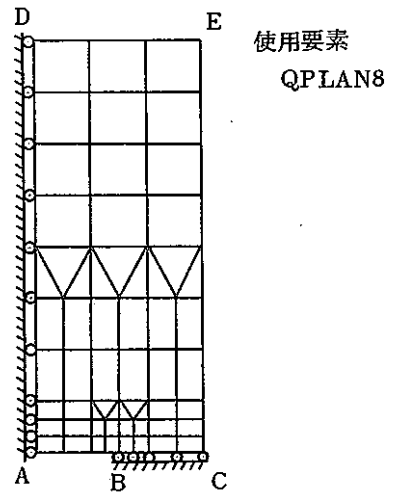


図1.185-2 有限要素モデル(1/4モデル)

### b) 境界条件 (図1.185-2 参照)

- B-Cに沿って  $u_Y = 0$
- A-Dに沿って  $u_X = 0$

### c) 負荷条件

D-Eに沿って  $\sigma_0 = 336.0 \text{ MPa}$  ( $\sigma_0/\sigma_Y = 0.7$ ) を図1.185-3の履歴で載荷する (トータル 161 ステップ)。

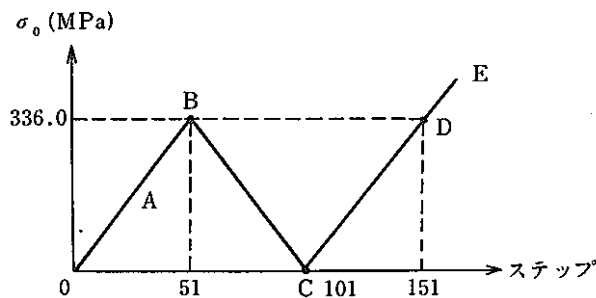


図1.185-3 負荷履歴

d) 積分領域

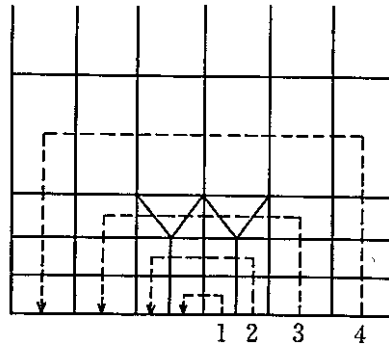


図1.185-4 積分領域

(3) 解析結果

図1.185-5にD点(図1.185-2参照)のY方向変位と $\sigma_0$ との関係を示す。また、図1.185-6, 7はFINASおよびFNSFRCTの $\hat{j}$ 積分値と $\sigma_0/\sigma_y$ の関係、図1.185-8, 9は $\hat{j}$ 積分値の径路独立性を示したものである。

なお、APPENDIX 1, 2に青木ら<sup>1)</sup>と渡辺ら<sup>2)</sup>が行なった解析の概要を示した。

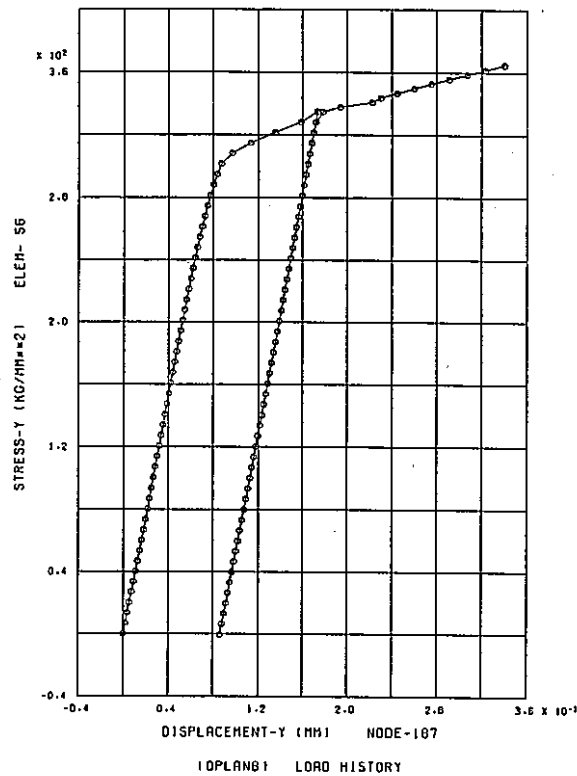


図1.185-5  $\sigma_0$ -変位関係図

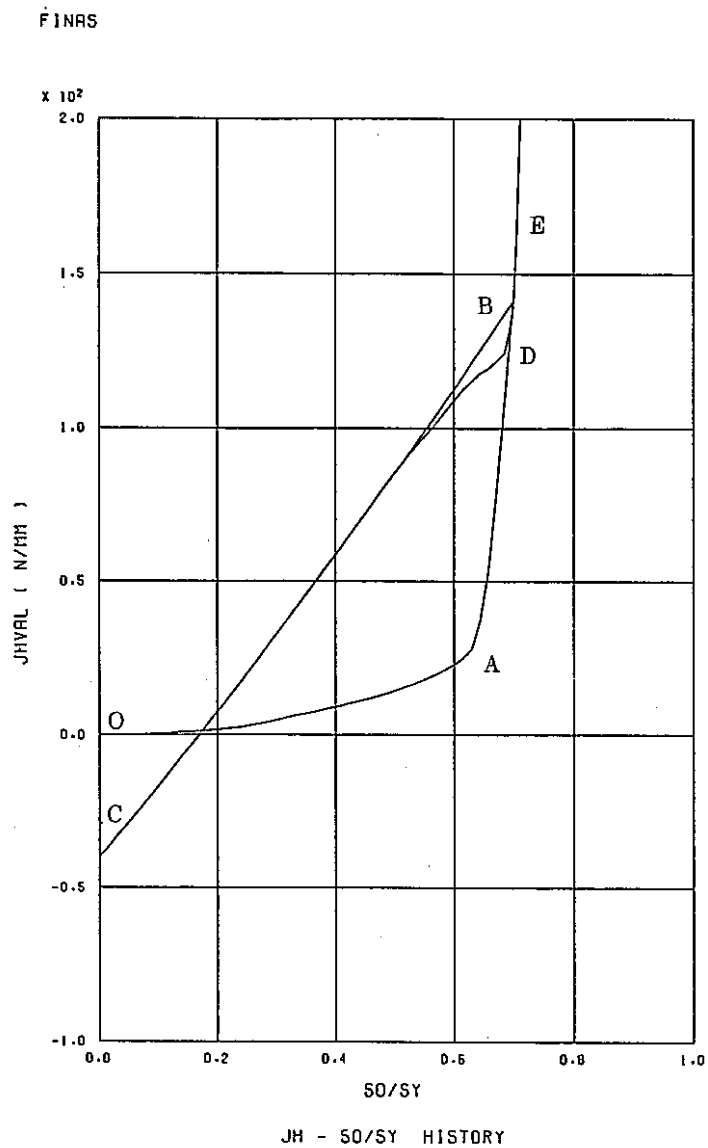


図1.185-6 FINASにおける $\hat{J}$ の履歴

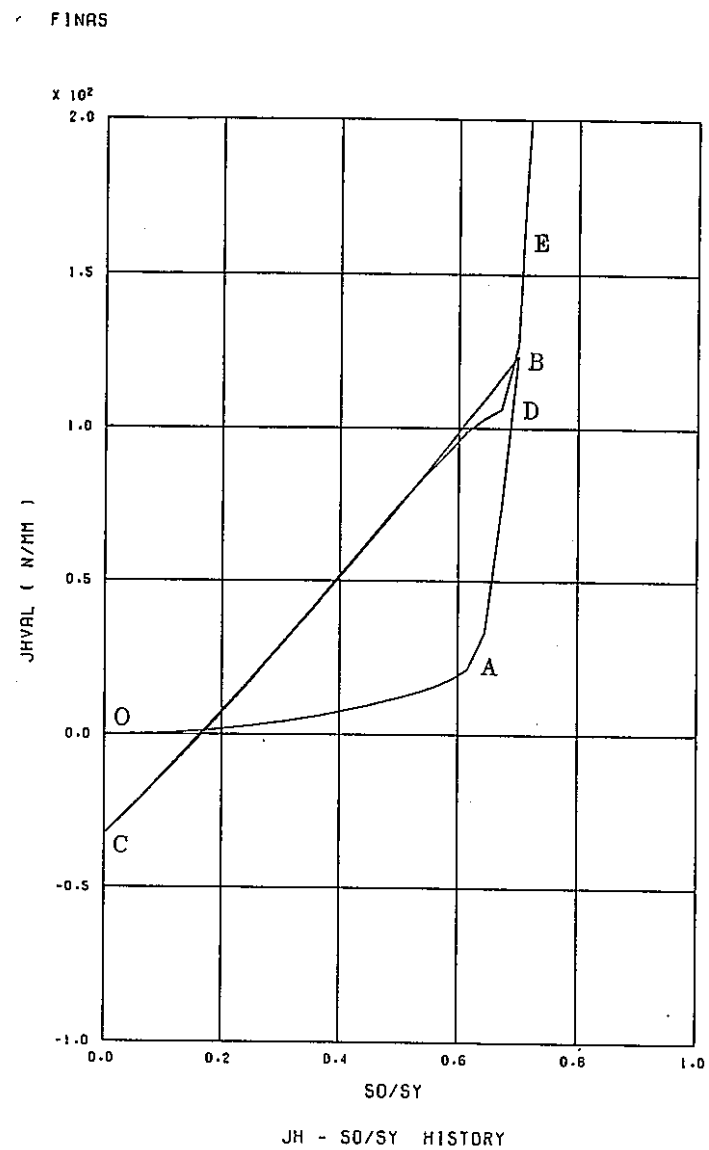
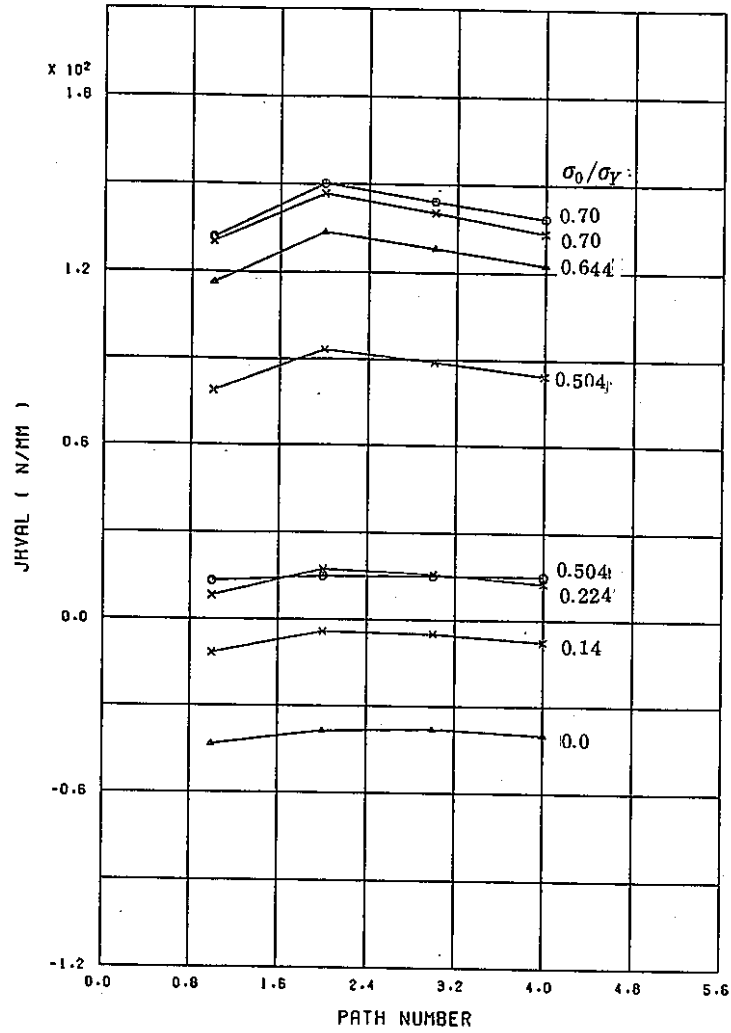


図1.185-7 FNSFRCTにおける $\hat{J}$ の履歴



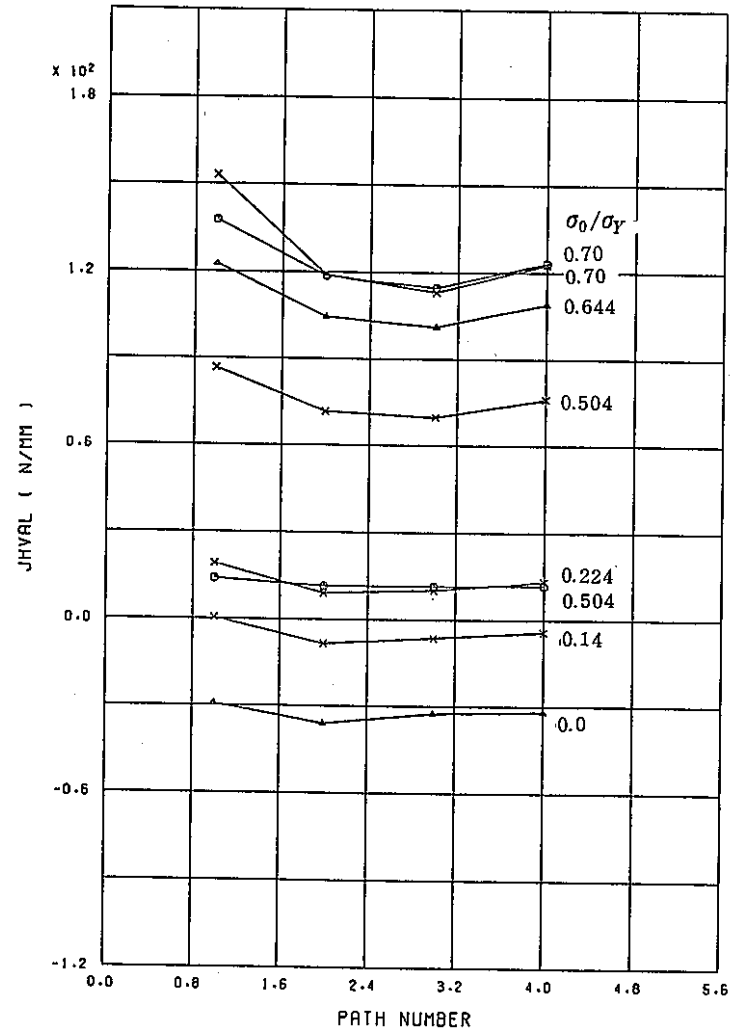
FINAS



JH - PATH RELATION

図1.185-8 FINASにおける $\hat{J}$ 積分値の径路独立性

FINAS



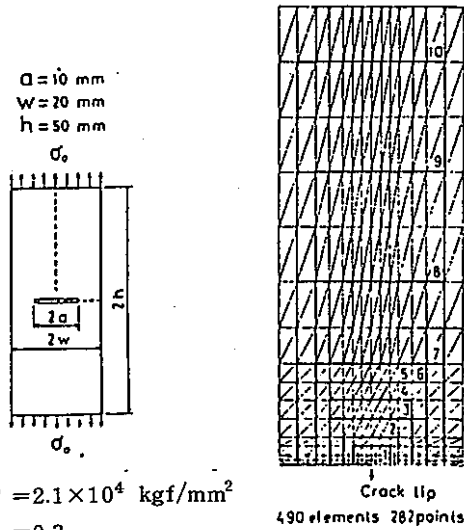
JH - PATH RELATION

図1.185-9 FNSFRCTにおける $\hat{J}$ 積分値の径路独立性

〔参考文献〕

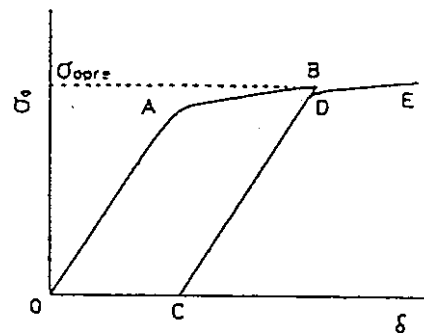
- 1) 青木, 岸本, 坂田, 鍋田, 前荷重を受けた物体に対する弾塑性破壊力学パラメータ, 「材料」第31巻, 第343号 60-65.
- 2) 渡辺, 宮崎, 矢川,  $J$  および  $\hat{J}$  積分評価における径路積分法と仮想き裂進展法の関係について, 機論A編, 50巻, 451号, 昭59-3.

APPENDIX-1 青木らの計算例

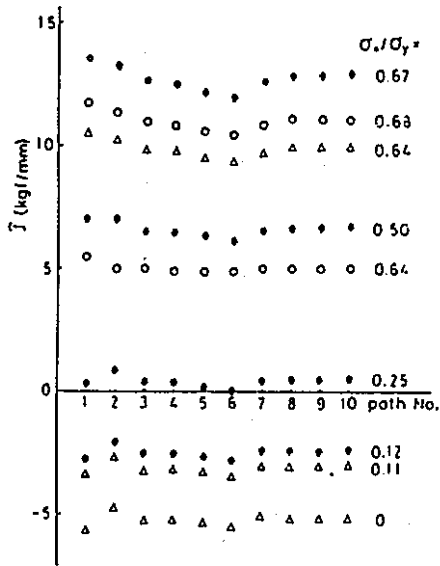


$E = 2.1 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$   
 $\nu = 0.3$   
 $\sigma_Y = 49.0 \text{ kgf/mm}^2$   
 $H' = E/100$

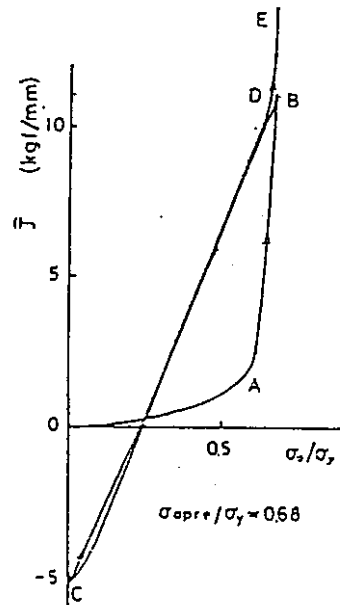
Crack tip  
490 elements 282 points



Remote stress vs. load-point displacement.

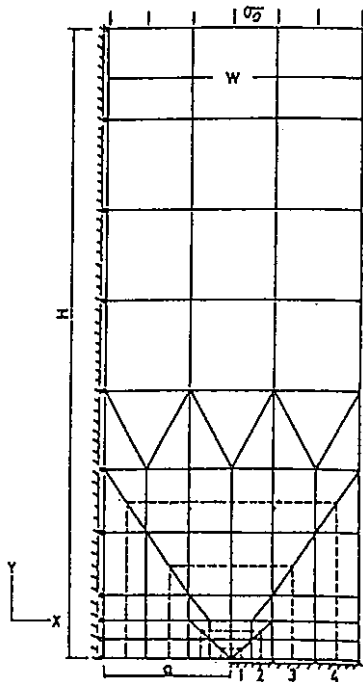


$\hat{J}$  vs. integration path (Elastic-plastic problem,  $\circ$  : Loading,  $\triangle$  : Unloading,  $\bullet$  : Reloading).

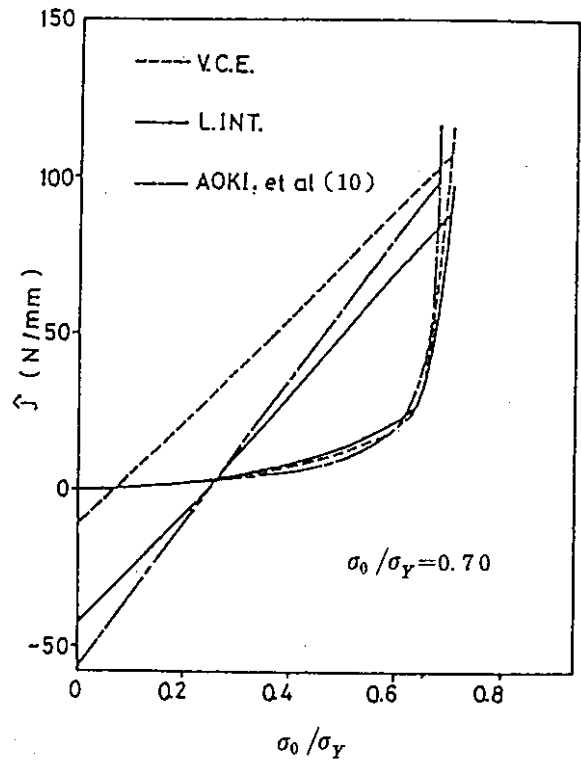
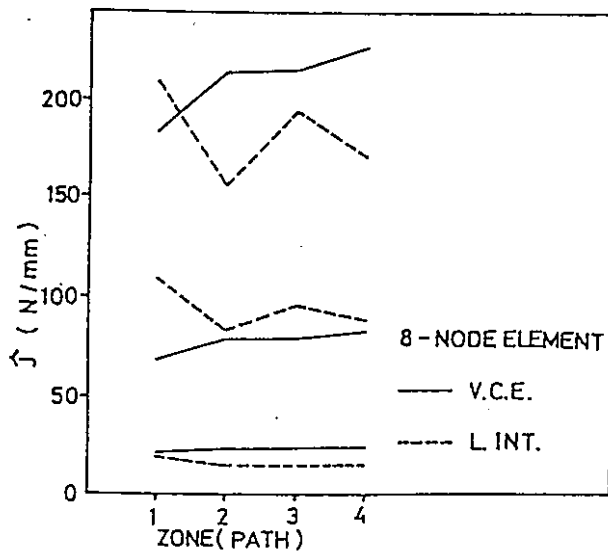


$\hat{J}$  vs. remote stress.

APPENDIX-2 渡辺らの計算例



$a = 10 \text{ mm}$   
 $W = 20 \text{ mm}$   
 $H = 50 \text{ mm}$   
 $E = 2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0.3$   
 $\sigma_Y = 480.0 \text{ MPa}$   
 $H' = E/100$



# 1.186 VP-186 統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題(1)

## (1) 目的

統一型構成モデルの1つである Robinson モデルを適用し、内圧を受ける円管の問題を解析し、Robinson らの解<sup>1)</sup>との比較を行なう。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

- 構造モデル

内径 0.4 cm、管厚 0.235 cm の無限円管（両端閉じ）に一定内圧  $P$  が作用する。

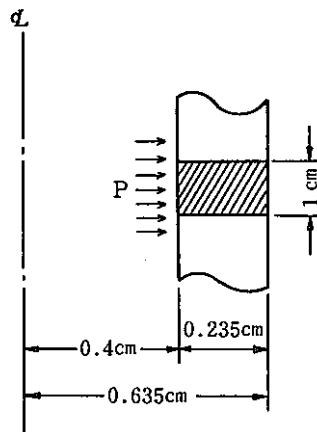


図1.186-1 構造モデル

- 使用要素

QAX8 : 8 節点四辺形軸対称要素

- 有限要素モデル

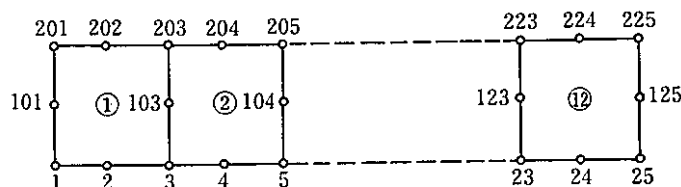


図1.186-2 有限要素モデル

### b) 材料定数

Robinson により与えられている  $2 \frac{1}{2}$  Cr-1 Mo 鋼の温度  $566^{\circ}\text{C}$  の材料定数および材料パラメータを用いる。

• 材料定数

弾性係数  $E=21877.6$  (ksi)

ポアソン比  $\nu=0.2868$

• 材料パラメータ

$\bar{\mu}=\mu \exp(-\theta_1)(h)$ ,  $\mu=3.61 \times 10^7$ ,  $n=4.0$ ,  $m=7.73$ ,  $\beta=1.5$ ,

$R=9.0 \times 10^{-3} \exp(\theta_2)$  (ksi/h),  $H=1.37 \times 10^{-4}$  (ksi/h),  $G_0=0.14$  (ksi),

$\kappa=0.82$  (ksi)

ここで,

$$\theta_1=(23.8\theta-2635)(1/811-1/\theta)$$

$$\theta_2=40,000(1/800-1/\theta)$$

ただし,

$\theta$  は絶対温度 ( $^{\circ}\text{K}$ ) である。

c) 境界条件 (図1.186-3 参照)

AB に沿って  $u_z=0.0$

CD に沿って  $u_z=\text{一定}$

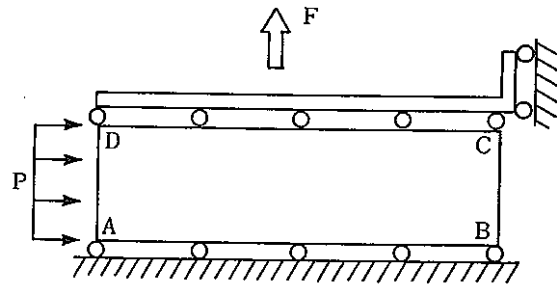


図1.186-3 境界条件と負荷条件

d) 負荷条件

• 機械荷重は内圧  $P$  および内圧に対応した軸方向荷重  $F$  であり, 図1.186-4 に示されるように保持時間を考慮した負荷履歴を与える。

$$F=\pi p r^2=0.29355 \text{ (ksi)}$$

$$p=3.65 \text{ (ksi)}$$

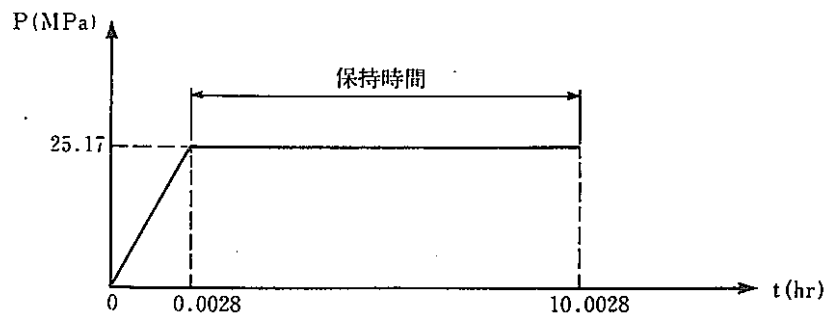


図1.186-4 負荷履歴

(3) 解析結果

表1.186-1 は各時刻における内, 外面での周方向応力について FINAS の解と Robinson の解とを比較したものである。また, 図1.186-5 は各時刻における周方向応力の管厚方向分布を示したものである。

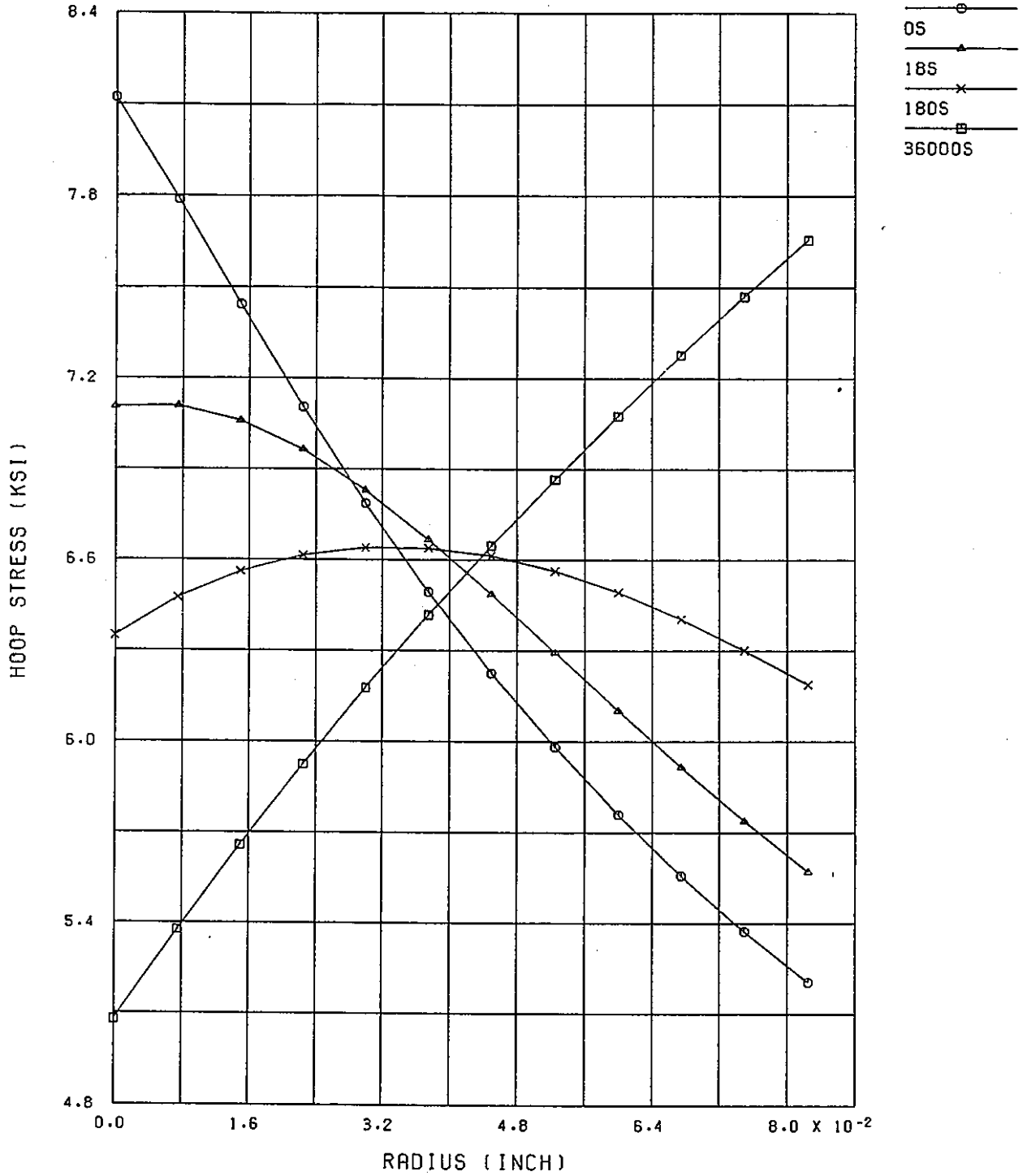
表 1.186-1 各時刻における周方向応力の比較(内,外面)

時刻 応力	内 面		外 面	
	FINASの解	Robinsonの解	FINASの解	Robinsonの解
(秒)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	55.9	55.4	35.8	36.2
18	48.9	48.2	38.4	38.4
180	43.7	43.6	42.7	42.8
36000	35.0	41.3	52.8	46.6
10 <sup>8</sup>	—	35.0	—	53.0

〔参考文献〕

- 1) D. N. Robinson, R. W. Swindeman, "United Creep-Plasticity Constitutive Equations for 2- $\frac{1}{4}$  CR-MO Steel at Elevated Temperature", Report No. ORNL/TM-84444, Oak Ridge National Laboratory, 1983.

FINAS



STRESS DISTRIBUTION ALONG RADIUS

図1.186-5 周方向応力の管厚方向分布

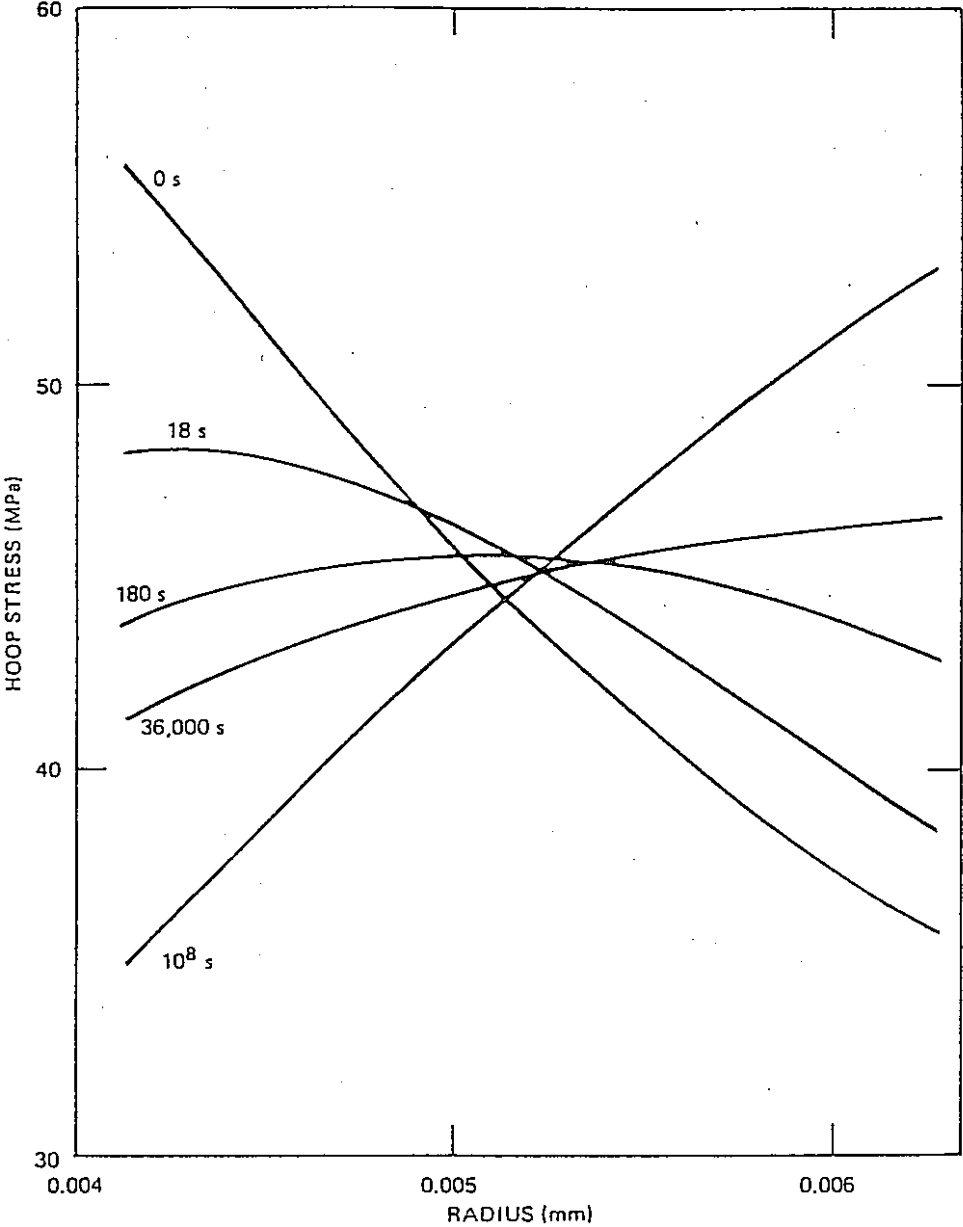


図1.186-6 Robinsonの参照解



## 1.187 VP-187 統一型モデルを適用した内圧を受ける円管問題(2)

### (1) 目的

統一型構成モデルの1つである Robinson モデルを適用し、内圧を受ける円管の問題を解析し、Y. Chang らの解との比較を行なう。

### (2) 問題の設定

#### a) 解析モデル

##### • 構造モデル

円径 0.4 cm, 管厚 0.235 cm の無限円管 (両端閉じ) に一定内圧  $P$  が作用する。

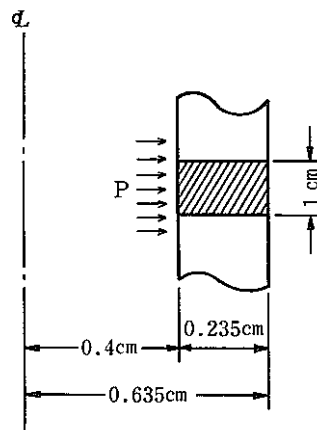


図1.187-1 構造モデル

##### • 使用要素

QAX8 : 8 節点四辺形軸対称要素

##### • 有限要素モデル

図1.187-2 参照。

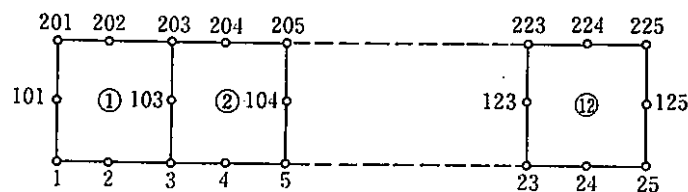


図1.187-2 有限要素モデル

#### b) 材料定数

Robinson により与えられている  $2\frac{1}{2}$  Cr-1 Mo 鋼の温度  $538^{\circ}\text{C}$  の材料定数および材料パラメータを用いる。

• 材料定数

弾性係数  $E=22482.4$  (ksi)

ポアソン比  $\nu=0.2924$

• 材料パラメータ

$\bar{\mu} = \mu \exp(-\theta_1)$  (h),  $\mu = 3.61 \times 10^7$ ,  $n = 4.0$ ,  $m = 7.73$ ,  $\beta = 1.5$ ,

$R = 8.97 \times 10^{-8} \exp(\theta_2)$  (ksi/h),  $H = 1.37 \times 10^{-4}$  (ksi/h),  $G_0 = 0.14$  (ksi),

$\kappa = 0.82$  (ksi)

ここで,

$\theta_1 = (23.8\theta - 2635)(1/811 - 1/\theta)$

$\theta_2 = 40,000(1/800 - 1/\theta)$

ただし,

$\theta$  は絶対温度 ( $^{\circ}\text{K}$ ) である。

c) 境界条件

図1.187-3 参照。

ABに沿い :  $u_z = 0.0$

CDに沿い :  $u_z = \text{一定}$

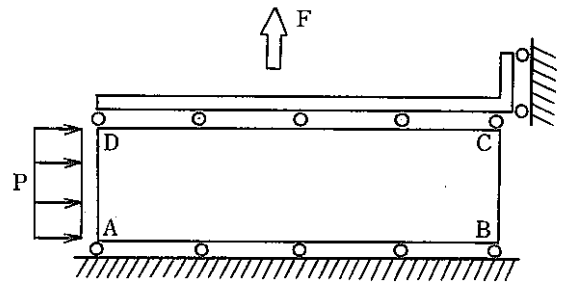


図1.187-3 境界条件と負荷条件

d) 負荷条件

- 機械荷重は内圧  $P$  および内圧に対応した軸方向荷重  $F$  であり, 図1.187-4 に示すように保持時間を考慮した負荷履歴を与える。

$$F = \pi p r^2 = 0.4198 \text{ (ksi)}$$

$$p = 5.22 \text{ (ksi)}$$

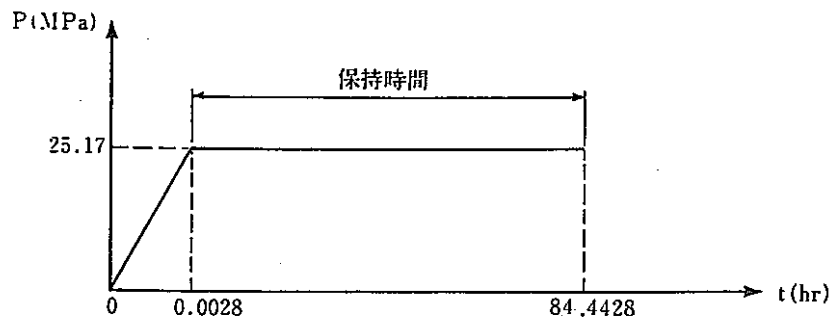


図1.187-4 負荷履歴

(3) 解析結果

表1.187-1 は各時刻における外面での半径方向変位について FINAS の解と Y. Chang の解との比較を示したもので, 図1.187-5 は外面での半径方向変位の履歴を示したものである。

表1.187-1 半径方向変位の比較

時刻	FINASの解	Y. Changの解
25 h	$7.3 \times 10^{-4}$ cm	$3.5 \times 10^{-4}$ cm
50	$8.1 \times 10^{-4}$	$3.8 \times 10^{-4}$
84.4428	$8.8 \times 10^{-4}$	$4.3 \times 10^{-4}$

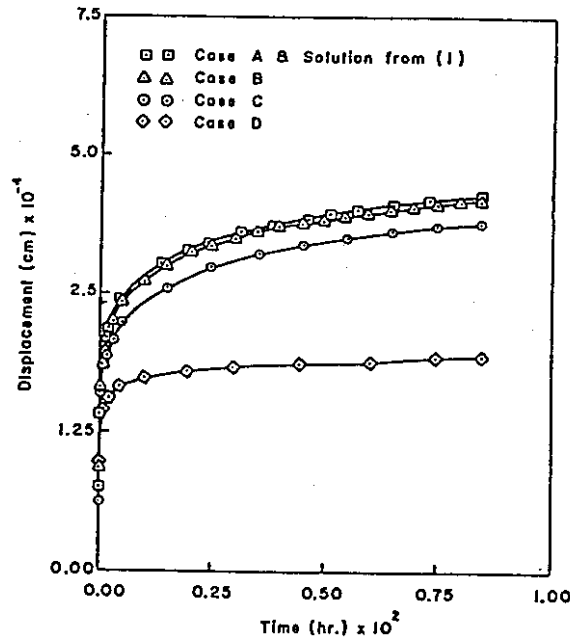
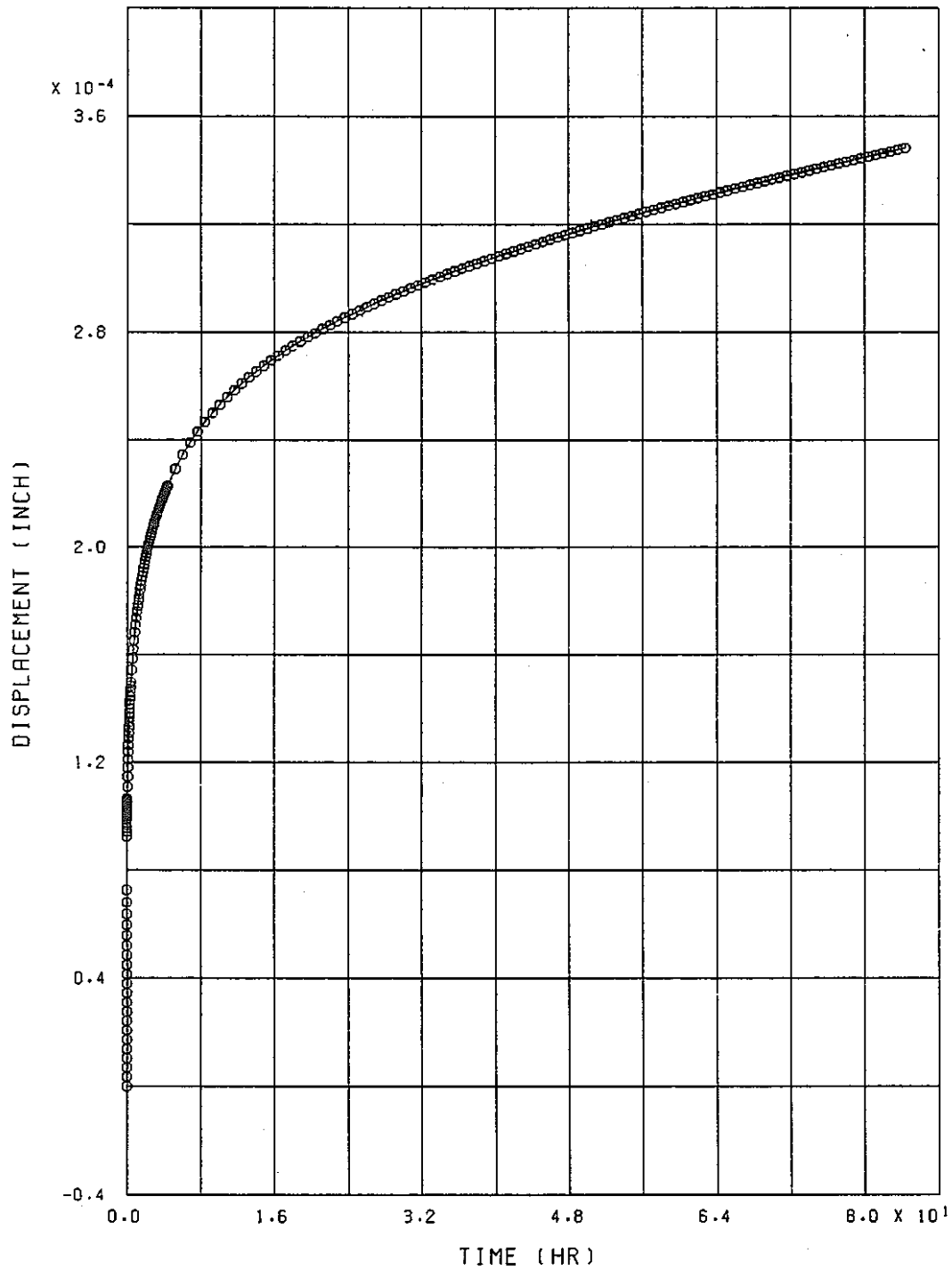


図1.187-6 Y. Chang 等の参照解

〔参考文献〕

- 1) T. Y. Chang, J. Y. Chen and S. C. Chu, "Viscoplastic Finite Element Analysis by Automatic Subincrementing Technique", Journal of Engineering Mechanics, Vol.114, No.1, January, 1988.

FINRS



DISPLACEMENT RESPONSE

図1.187-5 外面での半径方向変位の履歴

# 1.188 VP-188 時間増分自動決定機能を用いた2本棒の熱ラチェット問題

## (1) 目的

統一型構成モデルの1つである Robinson モデルに対して Kumar の時間増分自動決定機能を適用し、2本棒の熱ラチェット問題を解析し、Robinson らの解と比較する。

## (2) 問題の設定

### a) 解析モデル

- 構造モデル

長さ  $L=1.0$  in, 断面積  $S=1.0$  in<sup>2</sup> の2本棒に一定荷重および各棒に温度変化が負荷される。

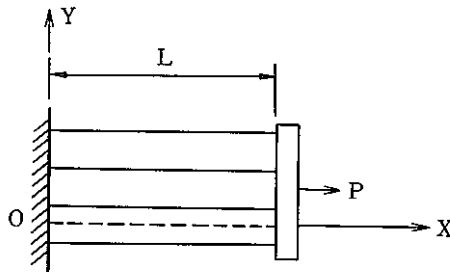
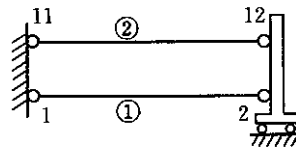


図1.188-1 構造モデル

- 使用要素

ROD2 : 3次元棒要素

- 有限要素モデル



1, 2, 21, 12 : 節点番号

①, ② : 要素番号

図1.188-2 有限要素モデル

### b) 材料定数

Robinson により与えられている  $2\frac{1}{2}$ Cr-1Mo 鋼の材料定数および材料パラメータを用いる。ただし、材料は温度依存とする。

- 材料定数

弾性係数  $E=4 \times 10^4 - 21.6\theta$  (ksi)

線膨張係数  $\alpha=14 \times 10^{-6}$

• 材料パラメータ

$$\bar{u} = \mu \exp(-\theta_1)(h), \quad \mu = 3.61 \times 10^7, \quad n = 4, \quad m = 7.73, \quad \beta = 1.5,$$

$$R = 9.0 \times 10^{-3} \exp(\theta_2) \text{ (ksi/h)}, \quad H = 1.37 \times 10^{-4}, \quad G_0 = 0.14 \text{ (ksi)},$$

$$\kappa = (K^i/3)^{1/2}, \quad K^i = 2.0 - (1 - \exp(-4000(1/800 - 1/\theta)))$$

ここで,

$$\theta_1 = (23.8\theta - 2635)(1/811 - 1/\theta)$$

$$\theta_2 = 40,000(1/800 - 1/\theta)$$

ただし,  $\theta$  は絶対温度である。

c) 境界条件 (図1.188-2 参照)

節点 1, 11 :  $u_x = u_y = u_z = 0$

節点 2, 12 :  $u_y = u_z = 0$  および  $u_x$  は一定

d) 負荷条件

• 機械荷重

2 本棒の平均応力  $\sigma_m = 58.6 \text{ MPa}$  となるように節点荷重  $P$  を与える。

• 熱荷重および保持時間

図1.188-3 に示す温度変化および保持時間を与える。

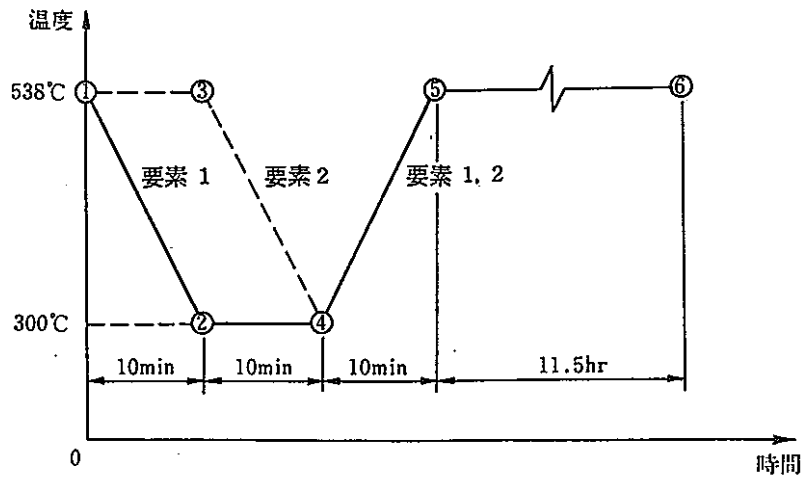


図1.188-3 温度変化および保持時間

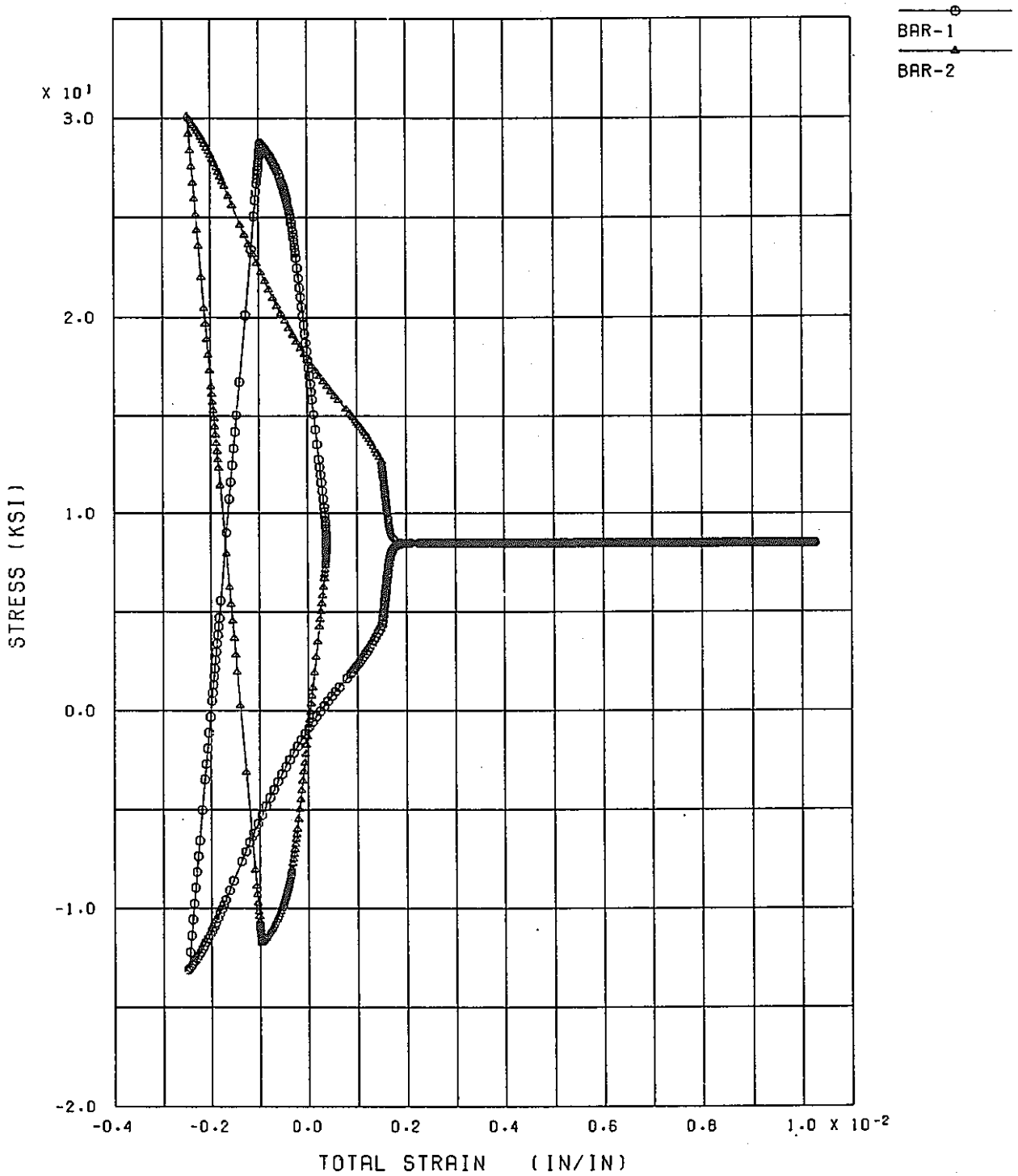
(3) 解析結果

表1.188-1 は各時刻における各要素での応力, ひずみについて, FINAS の解と Robinson の解を比較したものである。また, 図1.188-4 は応力-ひずみ履歴を示したものである。

表1.188-1 各時刻における各要素での応力、ひずみの比較

時刻 (h)	応力/ひずみ (ksi)	要素 1		要素 2	
		FINASの解	Robinsonの解	FINASの解	Robinsonの解
0	$\sigma$	8.5000E+00	7.25	8.5000E+00	10.32
	$\epsilon$	3.7807E+04	3.5294E-04	3.7807E-04	3.5294E-04
0.167	$\sigma$	2.8757E+01	27.33	-1.1757E+01	-9.20
	$\epsilon$	-9.6579E+04	-8.6274E-04	-9.6579E-04	-8.6274E-04
0.33	$\sigma$	-1.3106E+01	-9.48	3.0106E+01	26.22
	$\epsilon$	-2.4765E+03	-2.1568E-03	-2.4765E-03	-2.1568E-03
0.5	$\sigma$	4.3415E+00	3.35	1.2659E+01	12.82
	$\epsilon$	1.5086E+03	1.9215E-03	1.5086E-03	1.9215E-03
12.0	$\sigma$	8.5019E+00		8.4981E+00	
	$\epsilon$	1.0264E+02		1.0263E-02	

FINAS



BAR STRESS-STRAIN CURVE (VP181:TWO-BAR THERMAL RATCHETTING)

図1.188-4 各要素の応力-ひずみ履歴



F I N A S   E X E C U T I O N   S U M M A R Y

ANALYSIS MODEL INFORMATION

ANALYSIS TYPE . . . . .	STATIC	TE
NUMBER OF LOAD STEPS . . . . .	431	[ FROM 1 TO 431 ]
NUMBER OF ELEMENTS . . . . .	2	[ 2*ROD2 ]
NUMBER OF NODES . . . . .	4	
NUMBER OF UNKNOWN FREEDOMS . . . . .	1	
MAXIMUM NUMBER OF ACTIVE COLUMNS . . . . .	1	
AVERAGE NUMBER OF ACTIVE COLUMNS . . . . .	1.0	

EXECUTION TIME LOG (CPU TIMES IN SECONDS)

ELEMENT MATRICES FORMATION . . . . .	46.2	[ 9.76 % ]
LOAD VECTOR FORMATION . . . . .	19.4	[ 4.10 % ]
MATRIX ASSEMBLY AND DECOMPOSITION . . . . .	67.6	[ 14.25 % ]
STRESS DATA RECOVERY AND UPDATING LOAD VECTOR FOR NONLINEARITIES . . . . .	90.2	[ 19.04 % ]
ACTIVE COLUMN OPTIMIZATION . . . . .	0.0	[ 0.00 % ]
OTHERS (DATA INPUT, PRINT OUT, ETC.) . . . . .	250.5	[ 52.85 % ]
TOTAL EXECUTION TIME . . . . .	474.0 SECONDS	

STORAGE DEVICE INFORMATION

DISK SPACE UTILIZED FOR WORK . . . . .	100 TRACKS
AMOUNT OF NEW RESTART TAPE FILE . . . . .	0 TRACKS
	[ 'SAVE' OPTION INACTIVE ]

図1.188-5 FINAS EXECUTION SUMMARY

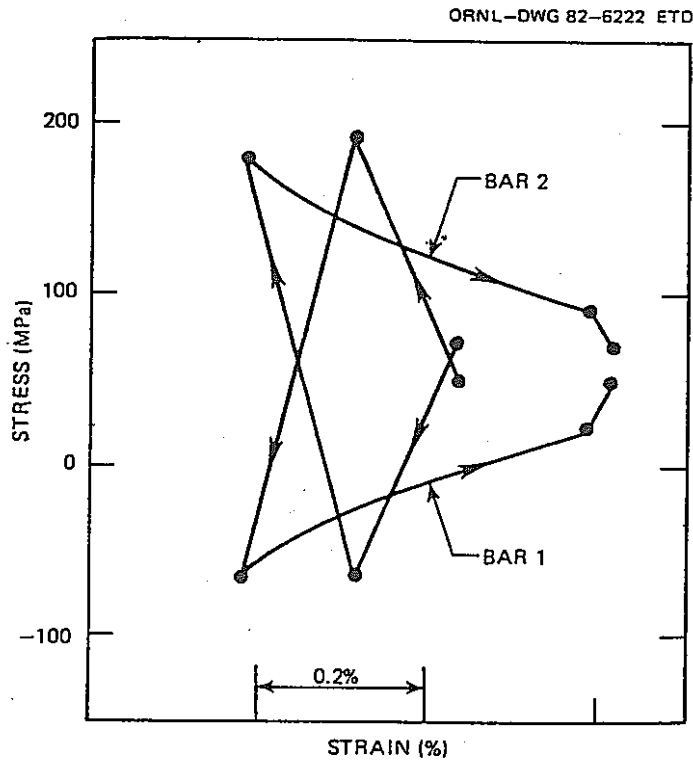


図1.188-6 Robinsonらによる参照解

## 1.189 VP-189 面接触機能を用いた円板塑性加工問題

### (1) 目的

生産工程において板成形過程を解析する有限要素法シミュレーション手法(CAE)の開発が新素材の導入および効率的な生産要求に伴い重要な課題となっている。FINASでは塑性加工過程をシミュレーションする弾塑性大変形状態での面接触機能を開発した。生産加工過程の数値解法に関する国際会議(NUMIFORM '89)<sup>2)</sup>のベンチマーク問題を本機能を用いて解析し有効性を検証する。

### (2) 問題の設定

#### a) 解析モデル

##### • 構造モデル

円板の縁全周をリング状固定のダイで拘束し、中央部より球頭ポンチにより押し込みを行なう。構造としては円板、リング状固定ダイ、球頭ポンチの接触連成問題であり、ポンチに強制変位を与える。

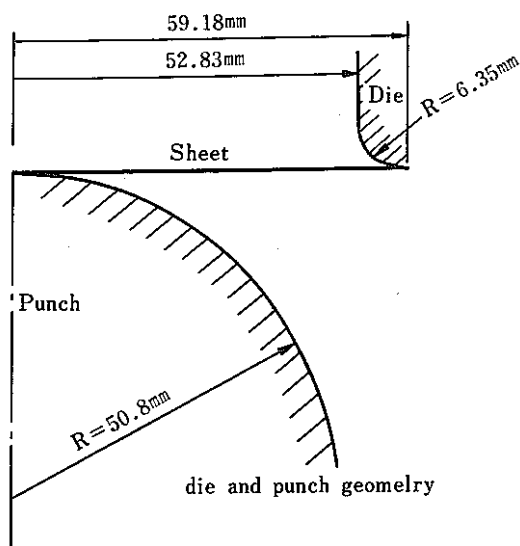


図1.189-1 構造モデル

##### • 使用要素

QAX4 : 4節点四辺形軸対称要素

LCONT2 : 2節点辺接触要素

##### • 有限要素モデル

図1.189-2に示すとおり円板部を厚さ方向2層、半径方向50分割とし、ダイとポンチは剛体であるが接触を考慮した分割とした。円板上面とダイ外面、円板下面とポンチ外面の各面を接触要素で定義し、各面間において接触拘束を与える。

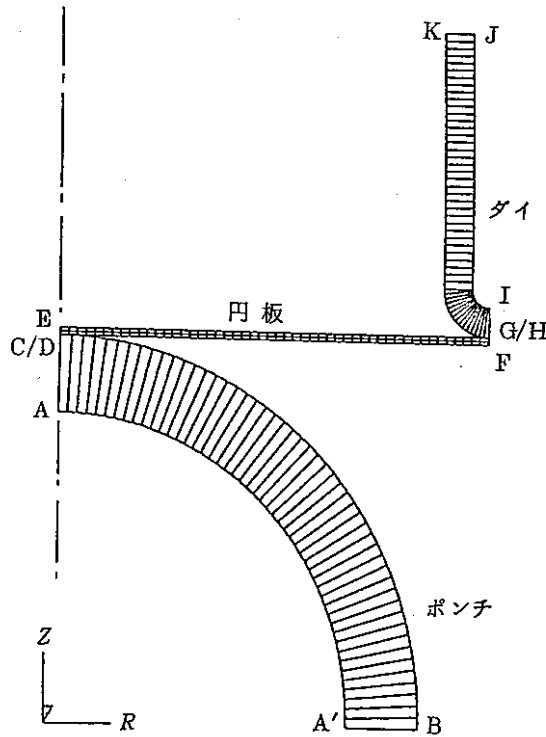


図1.189-2 有限要素モデル

b) 材料定数

• 円板部

弾性係数	$E = 68 \text{ GPa}$
ポアソン比	$\nu = 0.3$
降伏応力	$\sigma_Y = 80.56 \text{ MPa}$
応力-ひずみ式	$\bar{\sigma} = 589(10^{-4} + \bar{\epsilon} p)^{0.216} \text{ MPa}$
降伏条件	von Mises 条件 (等方硬化則)

• ダイ・ポンチ部 (剛体と仮定)

弾性係数	$E = 68 \times 10^4 \text{ GPa}$
ポアソン比	$\nu = 0.3$

c) 境界条件

- A-C, D-E, F-Gについて半径方向変位拘束 ( $u_R = 0$ )
- G-H-Iについて完全拘束 ( $u_R = u_Z = 0$ )
- B-C辺, D-F辺間の接触条件 (マサツなし)
- E-G辺とK-H辺間の接触条件 (マサツなし)
- A点に強制変位 ( $u_Z = 0 \sim 40.0 \text{ mm}$ )

#### d) 解析条件

参照形状を更新する Update Lagrangian 定式による大変形弾塑性解析を行なう。負荷ステップは次のとおり。

ポンチ進行量(mm)	ステップ数	1ステップ当りの増分量(mm)
0～4	400	0.01
0～10	300	0.02
10～40	750	0.04

#### (3) 解析結果

図1.189-3～図1.189-6はポンチ押し込み量10mm, 20mm, 30mm, 35mmにおける変形図を示す。図1.189-7は円板中央面のZ方向変位分布を同様の解析ステップにおいて示したものである。図1.189-8は各ステップでのひずみ分布を示す。参考に上げた仲町らの解析結果は、膜要素を用いて膜方向に沿った子午線方向ひずみを示したものであり、FINASでは、せん断変形を考えないと主ひずみが子午線方向ひずみに近似されるので、次式により主ひずみを計算し表示した。

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_R + \varepsilon_Z) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_R - \varepsilon_Z)^2 + \gamma_{RZ}^2}$$

参考として図1.189-9に各ステップでの周方向ひずみ分布を同一ステップで示す。

本解析は、計算および後処理をEWSのSUN SPARC Station-1で実施し、計算時間は約20時間程度である。

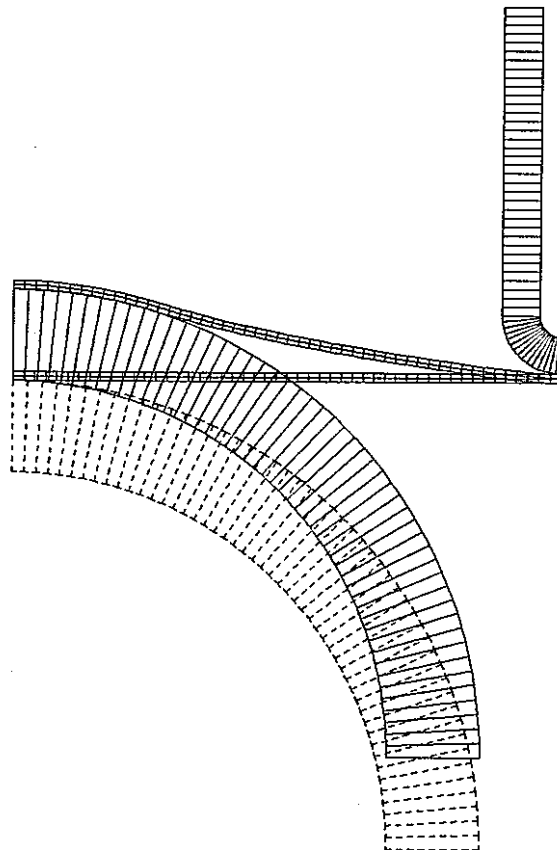
#### (4) 考察

図1.1893～6変形図に示されるように接触面の適合は良く表わされる。また、文献1)で示される膜ひずみ分布とFINASで計算された図1.189-8のひずみ分布は良く一致を示している。ダイ端部域におけるひずみ分布の相異は、端部拘束条件がFINASの場合と文献1)の場合とは異なることが原因であろう。また、押し込みが大きくなる高ひずみ域において、ひずみ分布に多少の相異がみられるが、この原因としては応力客観性の取扱いや大変形大ひずみ定式などが原因であると思われる。FINASでは客観量としてJaumann応力速度を用いているが、極分解(Polar decomposition)を用いた厳密な定式との比較などが今後の課題であるが、面接触機能に関しては有効性が確認できた。

#### 〔参考文献〕

- 1) 仲町英治, “板材成形”, 弾性と加工(日本塑性加工学会誌) 第31巻 第350号, pp.311-316.
- 2) 仲町英治, R. H. ワゴナー, “板成形過程の有限要素シミュレーション(剛・粘塑性および弾塑性解析の比較)” 平成元年度, 塑性加工春季講演会講演論文集, pp.391-394.

FINAS  
DEFORMED SHAPE



STEP NO. 700

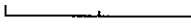

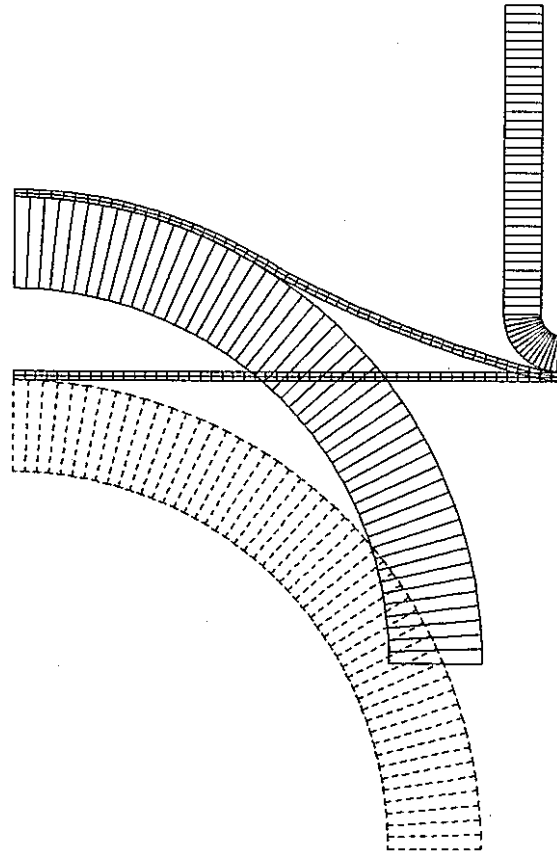
DISP. SCALE  20.0000  
GEOM. SCALE  20.0000

PLATE FORMING

図1.189-3 押込み量10mmでの変形量

FINAS  
DEFORMED SHAPE



STEP NO. 950


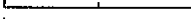
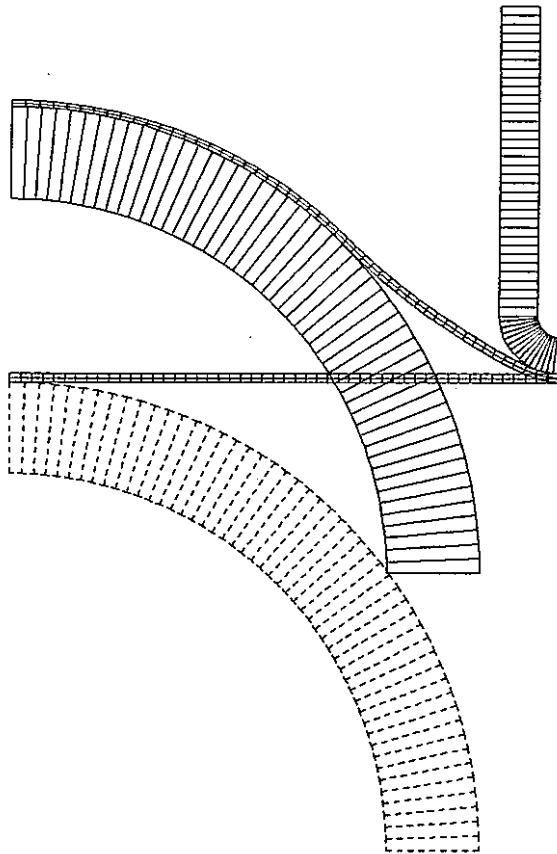
DISP. SCALE  20.0000  
GEOM. SCALE  20.0000

PLATE FORMING

図1.189-4 押込み量20mmでの変形図

FINAS  
DEFORMED SHAPE



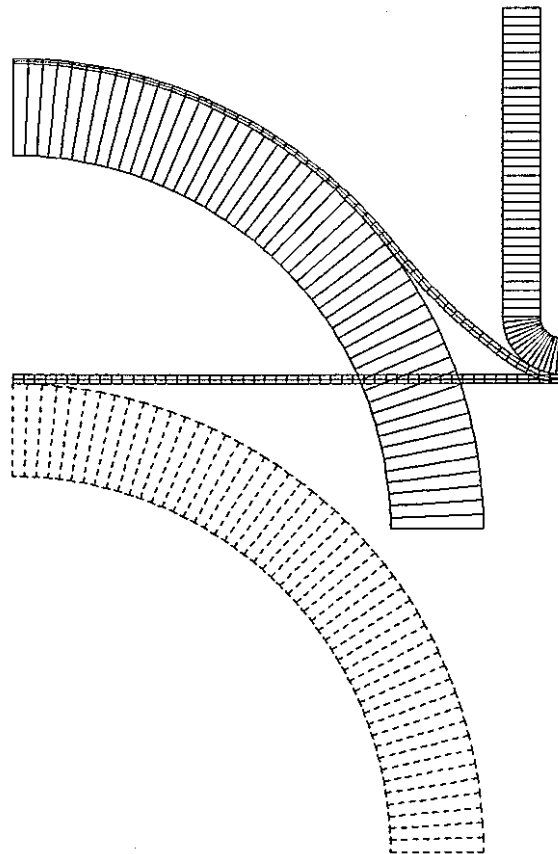
STEP NO. 1200

DISP. SCALE  20.0000  
GEOM. SCALE  20.0000

PLATE FORMING

図1.189-5 押込み量 30 mmでの変形図

FINAS  
DEFORMED SHAPE



STEP NO. 1325


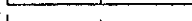
DISP. SCALE  20.0000  
GEOM. SCALE  20.0000

PLATE FORMING

図1.189-6 押込み量 35 mm での変形図



FINAS

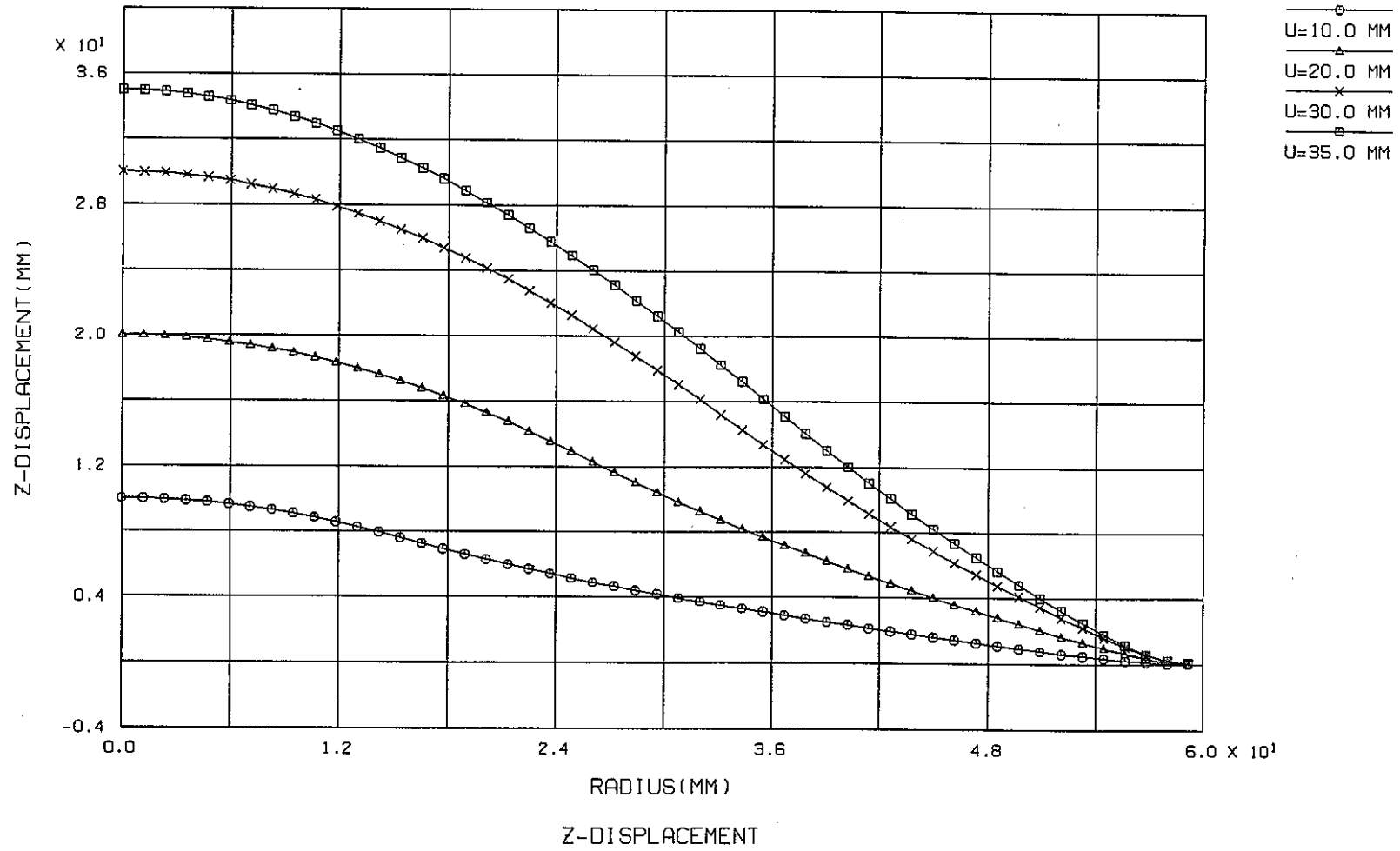


図1.189-7 Z方向変位分布の履歴図

FINAS

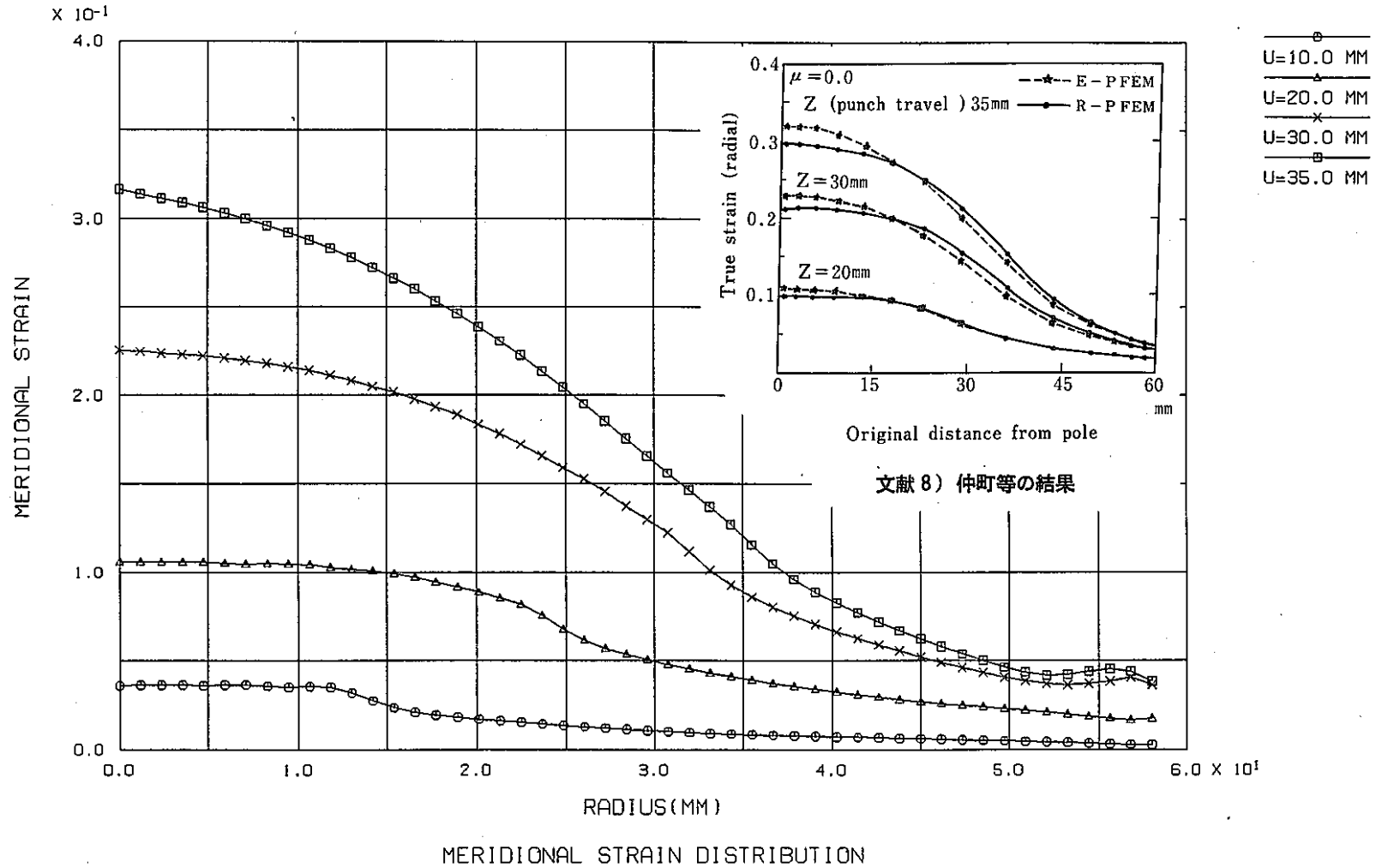
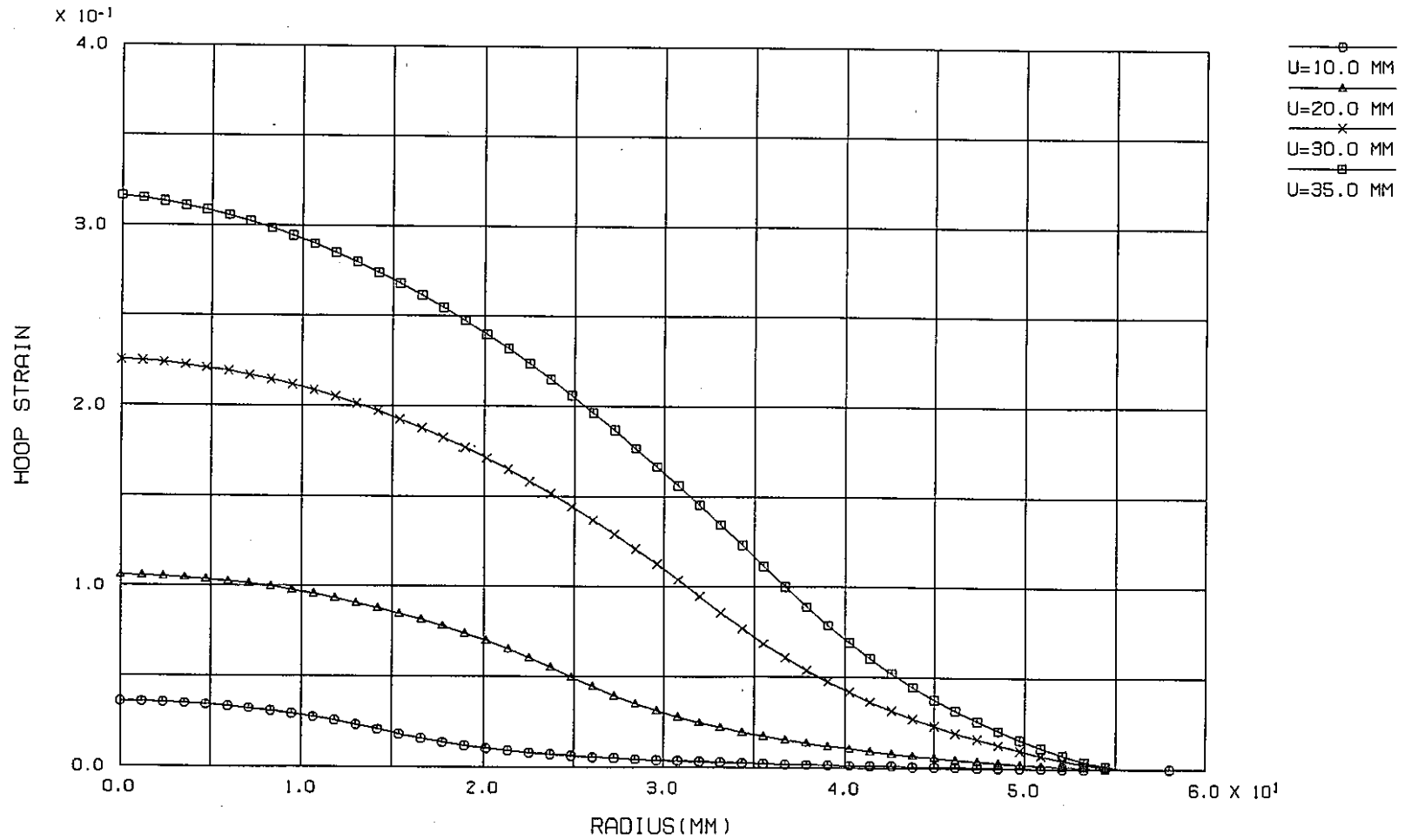


図1.189-8 子午線方向ひずみ分布図

FINAS



HOOP STRAIN DISTRIBUTION (UPPER)

图1.189-9 周方向ひずみ分布図

## 1.190 VP-190 使用者作成のサブプログラムによる組合せ硬化モデルの組み込み

### (1) 目的

使用者作成プログラムによる構成モデルの組み込み例として、組合せ硬化モデルを FINAS に組み込む。組合せ硬化モデルは既に FINAS の解析機能として組み込まれ、解析が行なわれているが (VP-032)、これと今回の解析結果を比較することにより使用者作成のサブプログラムによる構成モデルの組み込み機能の検証とする。また今回作成するサブルーチン XMAT1, XMAT2 は ADMODEL においても解析可能であり、これとの比較も併せて行ない同一の解が得られることを検証する。

### (2) 問題の設定

#### a) 解析モデル

- 構造モデル

断面積  $100 \text{ mm}^2$ 、長さ  $100 \text{ mm}$  の棒

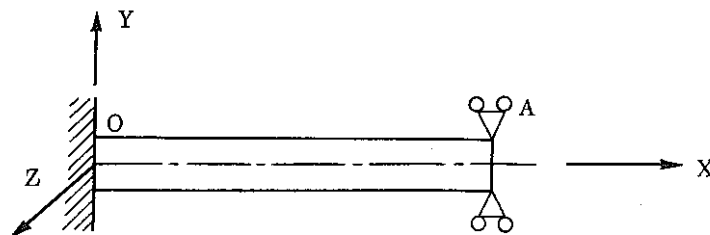


図1.190-1 構造モデル

- 使用要素

ROD2 : 3次元棒要素

- 有限要素モデル

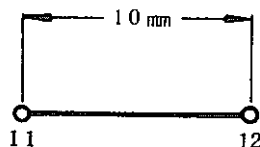


図1.190-2 有限要素モデル

#### b) 材料定数

- 材料は SUS304 を仮定。

弾性係数  $E = 20000 \text{ kg/mm}^2$

降伏応力  $\sigma_Y = 15 \text{ kg/mm}^2$

加工硬化係数  $H' = 240 \text{ kg/mm}^2$

移動硬化係数  $C = 160 \text{ kg/mm}^2$

c) 硬化則

組合せ硬化則

d) 境界条件

点Oにおいて  $u_x = u_y = u_z = 0$

点Aにおいて  $u_y = u_z = 0$

e) 負荷条件

節点12のX方向に表1.190-1に示す荷重 $P_X$ を負荷する。またADMODELにおいては発生応力 $\sigma_X$ を直接負荷する。

表1.190-1 負荷条件

	負荷荷重 $P_X$ (kg)	発生応力 $\sigma_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )
第一段階	1800.0	18.0
第二段階	-1800.0	-18.0
第三段階	2100.0	21.0

ただし、実際の解析においては弾塑性遷移領域および除荷の影響を避けるため、表1.190-2に示す荷重増分を与えるものとする。

表1.190-2 解析における荷重増分

	ステップ数	荷重増分 $\Delta P_X$ (kg)	応力増分 $\Delta \sigma_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )
第一段階	1	0.0	0.0
	2	1500.0	15.0
	3	300.0	3.0
第二段階	4	-0.1	-0.001
	5	-1799.9	-17.999
	6	-1500.0	-15.0
	7	-300.0	-3.0
第三段階	8	0.1	0.001
	9	1799.9	17.999
	10	1800.0	18.0
	11	300.0	3.0

f) 理論解

VP-32 参照。

(3) 解析結果

XMAT1, XMAT2により組合せ硬化モデルの組込みを行なったFINASとこれらのサブルーチンを用いたADMODELの解析結果を理論解と併せて表1.190-3に示す。またFINAS, ADMODELの解析により得られた応力-ひずみ関係を図1.190-3, 4に各々示す。

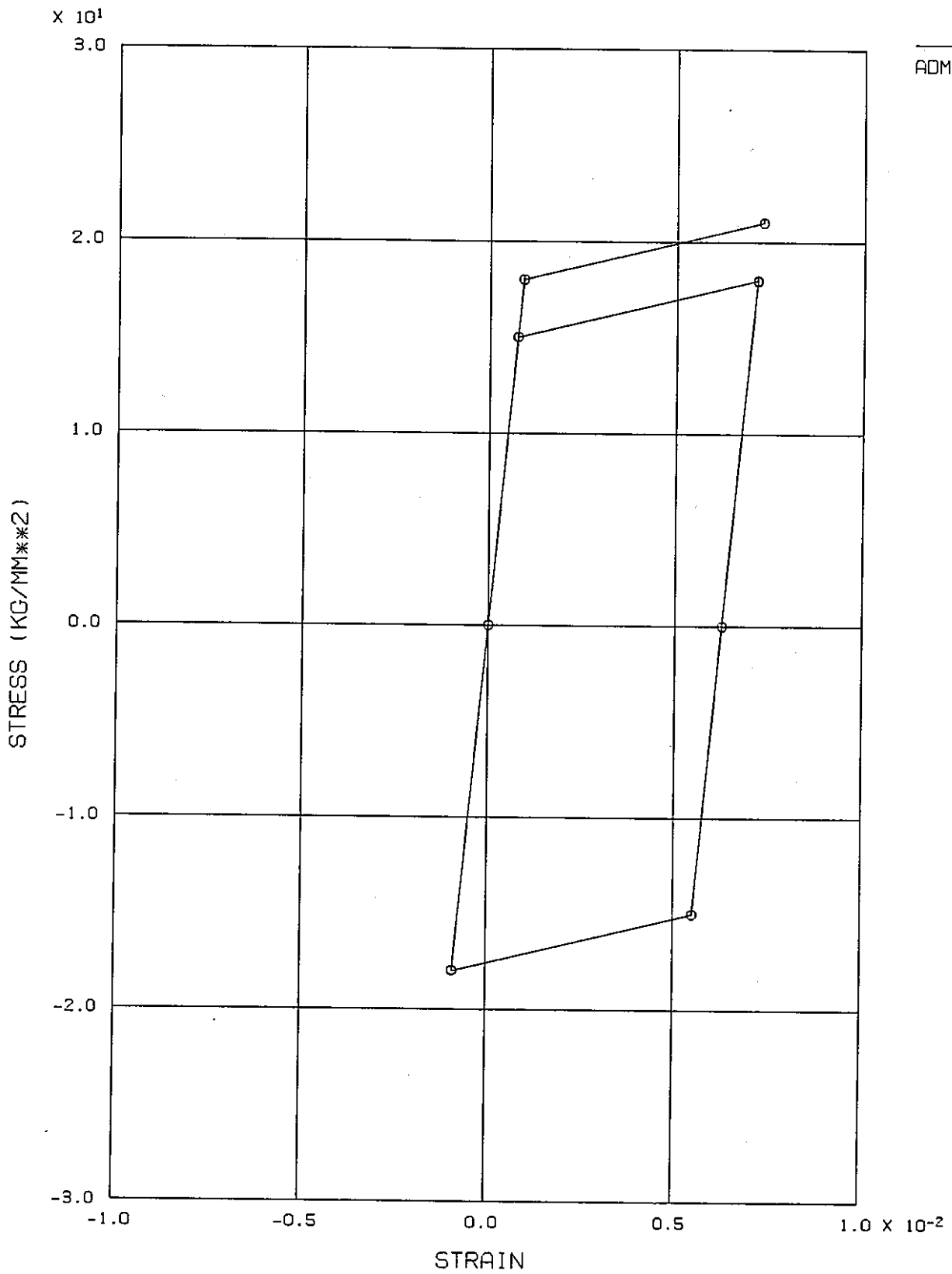
表1.190-3 解析結果

	成分	FINASの解	ADMODELの解	理論解
第一段階	$\sigma_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )	18.0	18.0	18.0
	$\alpha_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )	1.0	1.0	1.0
	$\epsilon_X$	7.15E-3	7.15E-3	7.15E-3
	$\epsilon_X^P$	6.25E-3	6.25E-3	6.25E-3
第二段階	$\sigma_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )	-18.0	-18.0	-18.0
	$\alpha_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )	-5.960E-8	-8.88178E-16	0.0
	$\epsilon_X$	-0.9E-3	-0.9E-3	-0.90E-3
	$\epsilon_X^P$	0.0	0.0	0.0
第三段階	$\sigma_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )	21.0	21.0	21.0
	$\alpha_X$ (kg/mm <sup>2</sup> )	1.0	1.0	1.0
	$\epsilon_X$	7.3E-3	7.3E-3	7.3E-3
	$\epsilon_X^P$	6.25E-3	6.25E-3	6.25E-3

(4) 考察

得られた解析結果はFINAS, ADMODEL, 理論解が完全に一致しており, FINASにおいて使用者定義の構成モデル組込み機能が正常に働くことが確認された。

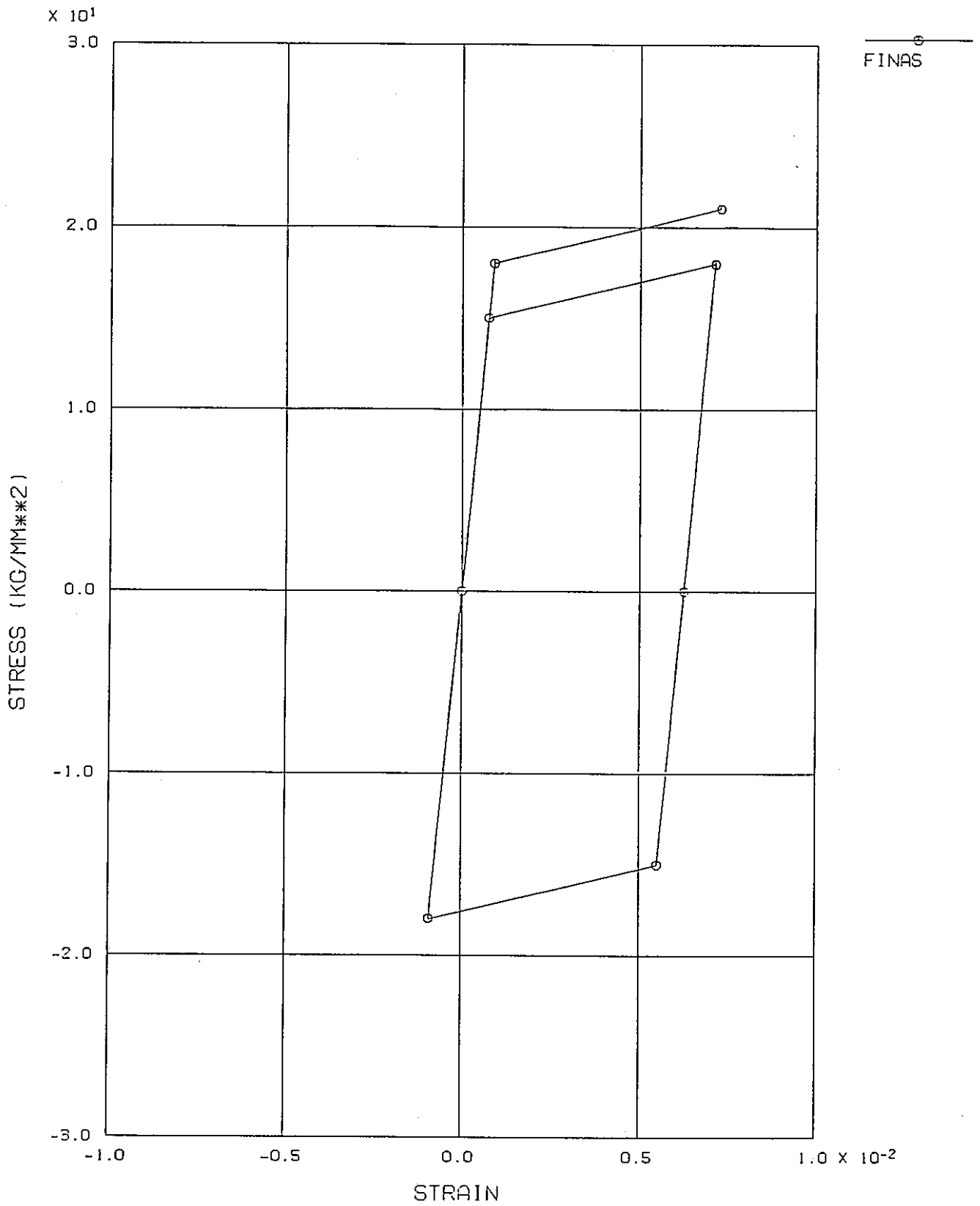
FINAS



STRESS-STRAIN RELATIONSHIP

図1.190-3 FINASによる応力-ひずみ関係

FINAS



STRESS-STRAIN RELATIONSHIP

図1.190-4 ADMODELによる応力-ひずみ関係



## 1.745 VP-745 減衰のある1自由度系の周波数応答問題

### (1) 目的

バネ減衰要素の一端に周期荷重が作用する場合の周波数応答変位を求め、理論解との比較を行なう。

### (2) 問題の設定

#### a) 解析モデル

- 有限要素モデル

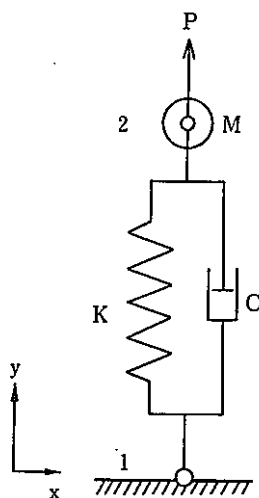


図1.745-1 有限要素モデル

- 使用要素

LCOMB2 : 3次元バネ減衰要素

#### b) 構造特性

バネ定数  $K=200 \text{ lb/in}$

質量  $M=0.5 \text{ lb}\cdot\text{sec}^2/\text{in}$

減衰定数

ケース1  $C=10 \text{ lb}\cdot\text{sec/in}$

ケース2  $C=6 \text{ lb}\cdot\text{sec/in}$

ケース3  $C=2 \text{ lb}\cdot\text{sec/in}$

#### c) 境界条件

点1において  $u_x = u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

点2において  $u_x = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

d) 負荷条件

点2においてy方向に負荷  $P \cdot e^{i\omega t}$  を与える。

ここで,  $P=200$  (lb)

$\omega=2\pi f$  (rad/sec)

$f=3$  (Hz)

e) 理論解

減衰のある1自由度系の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P \tag{1.745-1}$$

これに周期的荷重

$$P = \tilde{P} e^{i(\omega t + \psi)} (= \tilde{P} e^{i\psi} \cdot e^{i\omega t}) \tag{1.745-2}$$

が作用する場合の変位は次式で表わせるとする。

$$u = \tilde{u} e^{i(\omega t + \psi)} \tag{1.745-3}$$

この場合, 速度, 加速度はそれぞれ次式で示される。

$$\dot{u} = i\omega \tilde{u} e^{i\psi} \cdot e^{i\omega t} \tag{1.745-4}$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 \tilde{u} e^{i\psi} \cdot e^{i\omega t} \tag{1.745-5}$$

式(1.745-2)~(1.745-5)を式(1.745-1)に代入し, 共通項  $e^{i\omega t}$  を略すと次のようになる。

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k) \tilde{u} = \tilde{P} \tag{1.745-6}$$

これを  $\tilde{u}$  について複素数演算で解けばよい。

(3) 解析結果

ケース1, 2, 3について, 点2における周波数応答変位と位相角を, 理論解とともに表1.745-1に示す。

表1.745-1  $f=3$  Hzにおける応答変位

	FINASの解		理論解	
	変位 (in)	位相角 (deg)	変位 (in)	位相角 (deg)
ケース1 ( $c=10$ )	1.05365E+0	-83.2388	1.05365	-83.2388
ケース2 ( $c=6$ )	1.73485E+0	-78.8227	1.73485	-78.8227
ケース3 ( $c=2$ )	4.56362E+0	-59.3415	4.56362	-59.3415

(4) 考察

バネ減衰要素を用いた周波数応答の解は理論解と良く一致している。

## 結 語

本報告書は平成元年度に実施した FINAS 拡張、整備作業の内容を報告したものである。昭和51年より開発が始まり、以来10年余りが経過した。当初の5カ年計画による開発を完了後、実用使用と並行して5カ年の改良が行なわれ、昭和62年度から引き続き機能拡張を継続している。また、昭和60年9月から FINAS は一般にも開放され、FBR関連メーカーおよび一般メーカー等により利用されるようになった。

本年度の拡張、整備作業として、非弾性解析における任意構成モデルのためのサブルーチンの組み込み、弾塑性領域の数値積分法の適用、塑性クリープ統一型モデルの一般構造物への試用、大変形解析では荷重増分自動決定機能の適用、面接触解析機能の組み込み、破壊力学解析での破壊力学パラメータの追加およびき裂進展解析機能の組み込み仕様の検討、非線形流体構造連成解析の適用、無条件安定陽解法スキームの調査、使用説明書の電子化等が行なわれて、FINAS はより実際的で広範囲な機能を有する非線形構造解析プログラムへと発展している。今後の FINAS の拡張の課題として、非線形解析法の充実、ALE法による大変形解析機能の拡張、き裂進展解析機能の整備、非線形流体構造連成解析法の整備、面接触/面衝突の衝撃解析機能およびグラフィックスを利用したプレ/ポスト機能の充実等と考えられる。

本年度の拡張、整備作業を進めるにあたり動力炉・核燃料開発事業団大洗工学センター構造工学室、岩田耕司室長、月森和之氏より格別なご指導ならびにご支援を受けましたことに対して深甚なる謝意を表します。また、大洗工学センターの FINAS 利用者の方々からは数多くの有益な指摘やご助言をいただき深く謝意を表します。