PNC TJ940 84-01

FINAS：DA-8300 I

高速炉非弾性構造解析システム

“FINAS”（ファイナス） 改良報告書 （III）

昭和５９年６月

CRC センチュリリサーチセンタ株式会社

複製又はこの資料の入手については，下記にお問い合わせください。
〒311-13　茨城県東茨城郡大洗町成田町4002
動力炉・核燃料開発事業団
大洗工学センター　システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団（Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation）

PNC TJ940 84-01

FINAS：DA-83001

高速炉非弾性構造解析システム

“FINAS”（ファイナス） 改良報告書 (III)

昭和５９年６月

CRC センチュリリサーチセンタ株式会社

PNC TJ940 84-01
FINAS：DA-83001
1984年6月30日

高速炉非弾性構造解析システム“FINAS”改良報告書（Ⅲ）*

千葉隆久,** 浅井純比古**
上野睦郎,** 小笠原正人**
久保文男,** 吉田博治**
小林洋子**

要　　旨

本報告書は，高速増殖炉開発に伴なう構造解析上の問題を解決する有効な数値解析法として昭和51年度より5カ年間で開発された高速炉非弾性解析システム FINAS*** の改良・整備の成果について報告するものである。改良・整備は昭和56年度より始められており，ここで報告する内容は昭和58年度に得られた成果である。

FINAS は開発期間を終えて，汎用構造解析システムとして基本的な機能を備えることができたが，より広範囲の問題に対して答えることのできる有効なシステムとして改良と整備を実施している。本年度は主として大規模問題の動的ファイルアロケーション機能，非軸対称解析，熱伝導解析について改良・整備を行なった。また本年度から，日本原子力研究所においても FINAS の使用が開始された。

本報告書第Ⅰ編には改良・整備の詳細が述べられている。第Ⅱ編は解析理論と数値解法についてまとめたもので，第Ⅲ編はプログラム検証および応用例についてまとめたものである。

＊　本報告書は，センチュリ リサーチ センタ㈱が動力炉・核燃料開発事業団の委託により実施した研究の成果である。

＊＊　センチュリ リサーチ センタ株式会社

＊＊＊　FINAS（FBR Inelastic Structural Analysis System）

PNC TJ940 84-01
FINAS : DA-83001
JUNE 30, 1984

MAINTENANCE AND IMPROVEMENT OF FBR INELASTIC STRUCTURAL ANALYSIS SYSTEM "FINAS" (Ⅲ)*

Takahisa Chiba** Sumihiko Asai **
Mutsuro Ueno** Masato Ogasawara **
Fumio Kubo** Hiroji Yoshida **
Yoko Kobayashi **

Abstract

A general purpose finite element nonlinear analysis system FINAS*** has been development since July 1976 for structural design of fast breeder reactor (FBR) components. Maintenance and improvement for this system are continued since July 1981. The objective of this report is to show the results of maintenance and improvement which were carried out during July 1983 to Jun 1984.

FINAS is equipped with basic capabilities of a general purpose program as the results of the initial five years development. However enchancement and improvement of this system are under going to cover more widely class problems. In this year, dynamic files allocation for a large scale problem, non axi-symmetric analysis and heat transfer analysis are mainly improved in consideration of computational efficiency. Then FINAS is newly installed in Japan Atomic Energy Research Institute in August 1983.

The first part of this report is the result of maintenances and improvements obtained in this year. In second part, the theory of structual analysis and numerical method employed in FINAS are described. Finally, numerical examples which are the verification and application to realistic problems are illustrated.

---

* This performed by CRC under contract with Power Reactor and Nuclear Fuel Develop. Cor.

** Century Research Center Corporation (CRC)

*** FINAS (FBR Inelastic structural Analysis System)

目　　次

要　　旨 …… i

Abstract …… iii

序　　文 …… 1

第 I 編　FINAS 改良・整備

序 …… 3

1. システム全般 …… 4
2. 静的応力解析 …… 8
3. 熱伝導解析 …… 27
4. 動的解析 …… 31
5. 有限要素 …… 61
6. 入出力 …… 79
7. 前処理／後処理機能 …… 82
8. プログラム検証 …… 88
9. 利用者のための説明書整備 …… 93
10. プログラムの設置・更新 …… 99

第 II 編　FINAS における解析の理論と方法

序 …… 103

1. 有限要素解析の理論 …… 104
   - 1.1　はじめに …… 104
   - 1.2　微小変形解析 …… 105
   - 1.3　非弾性解析 …… 110
   - 1.4　大変形解析 …… 171
   - 1.5　座屈荷重解析 …… 184
   - 1.6　破壊力学解析 …… 189
   - 1.7　動的解析 …… 194
   - 1.8　熱伝導解析 …… 207
2. 数値解法 …… 214
   - 2.1　はじめに …… 214
   - 2.2　連立一次方程式の解法 …… 215
   - 2.3　固有値問題の解法とアルゴリズム …… 220

第 Ⅲ 編　FINASの検証と応用

序 …… 225

1. 検証のための解析 …… 226

VP-108　熱膨張による接触問題 …… 244

VP-109　摩擦を考慮した接触問題 …… 247

VP-110　繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題 …… 251

VP-111　弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題 …… 255

VP-112　弾性大変形接触問題 …… 258

VP-113　円管の曲げ問題 ── 軸対称要素における非軸対称負荷の問題 …… 261

VP-114　非軸対称荷重ジェネレーション問題 …… 264

VP-115　薄肉円筒の曲げ問題 ── 軸対称構造における非軸対称負荷の問題 …… 267

VP-523　輻射を含む定常熱伝導問題 …… 270

VP-524　熱伝導率の直交異方性を考慮した定常熱伝導問題 …… 273

VP-525　時間増分自動決定機能を利用した熱伝導問題 …… 277

VP-526　材料座標系を用いた熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題 …… 281

VP-527　使用者が作成したサブプログラムによる熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題 …… 284

VP-729　梁の固有値解析において固有値範囲を指定する問題 …… 287

VP-730　固有値範囲指定による片持ち梁のモーダル応答問題 …… 289

結　　語 …… 292

図　表　目　次

第 I 編

図 1－1　旧バージョンにおけるディスクスペース使用法 …… 5
図 1－2　新バージョンにおけるディスクスペース使用法 …… 6
図 1－3　メモリーレイアウト …… 7
図 2－1　軸対称体と円筒座標系 …… 9
図 2－2　構造モデル図 …… 9
図 2－3　境界条件と荷重条件 …… 9
図 2－4　有限要素モデル図 …… 10
図 2－5　解析モデル …… 12
図 2－6　有限要素モデル …… 12
図 2－7　変位（A点）と反力の関係 …… 12
図 2－8　解析モデル …… 13
図 2－9　変位 - 荷重曲線 …… 13
図 2-10　変形状態 …… 14
図 2-11　ABAQUS における荷重自動増分 …… 17
図 2-12　記　号 …… 18
図 2-13　弧張増分法のアルゴリズム …… 22
図 2-14　繰返しクリープ硬化則を用いた弾性クリープ問題 …… 23
図 2-15　応力の時間履歴 …… 23
図 2-16　ベローズの内外表面の応力分布 …… 25
図 3－1　直交異方性が考慮された定常熱伝導問題 …… 27
図 3－2　各断面に沿う温度分布 …… 28
図 3－3　非定常熱伝導問題 …… 29
図 3－4　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴 …… 29
図 3－5　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴（VP-507）…… 30
図 4－1　固有値範囲による固有値解法のアルゴリズム …… 33
図 4－2　片持ち梁 …… 38
図 4－3　要素分割 …… 39
図 4－4　ケース 1 における自由端変位の時刻歴(1) …… 41
図 4－5　ケース 1 における自由端変位の時刻歴(2) …… 42
図 4－6　ケース 2 における自由端変位の時刻歴(1) …… 43
図 4－7　ケース 2 における自由端変位の時刻歴(2) …… 44
図 4－8　ケース 3 における自由端変位の時刻歴(1) …… 45
図 4－9　ケース 3 における自由端変位の時刻歴(2) …… 46
図 4-10　ケース 4 における自由端変位の時刻歴(1) …… 47

図 4-11　ケース4における自由端変位の時刻歴(2) …… 48
図 4-12　弾性棒 …… 49
図 4-13　有限要素モデル …… 50
図 4-14　ケース1，モデル1における荷重載荷点変位の時刻歴(1) …… 51
図 4-15　ケース1，モデル1における荷重載荷点変位の時刻歴(2) …… 52
図 4-16　ケース1，モデル2における荷重載荷点変位の時刻歴(1) …… 53
図 4-17　ケース1，モデル2における荷重載荷点変位の時刻歴(2) …… 54
図 4-18　ケース2，モデル1における荷重載荷点変位の時刻歴 …… 55
図 4-19　ケース2，モデル2における荷重載荷点変位の時刻歴(1) …… 56
図 4-20　ケース2，モデル2における荷重載荷点変位の時刻歴(2) …… 57
図 4-21　Wilson らによる浮体ブロックの解析 …… 59
図 5－1　応力解析のための要素 …… 65
図 5－2　熱伝導解析のための要素 …… 68
図 6－1　応力解析の例 …… 81
図 6－2　熱伝導解析の例 …… 81
図 7－1　FNSLOAD と FINAS の実行 …… 83
図 7－2　構造モデル …… 84
図 7－3　θ 方向の荷重状態 …… 84
図 7－4　FNSLOADデータ …… 84
図 7－5　フーリエ級数展開状況 …… 85
図 7－6　FNSLOADデータより作成された FINAS データ …… 86
図 7－7　FINAS データと FNSLOAD データで作成されたデータの連絡 …… 86
図 7－8　応力コンター図の例 …… 87
図 7－9　周方向応力分布図の例 …… 87
表 2－1　円管中央部のたわみ …… 10
表 3－1　解析ステップ数の比較 …… 30
表 4－1　代表的有限要素の最大振動数w …… 37
表 4－2　負荷の角振動数 w_F と周期 T_F …… 38
表 4－3　片持ち梁の曲げに関する角振動数 w_B と周期 T_B …… 38
表 4－4　負荷履歴を離散化する時の時間増分 …… 39
表 4－5　ケース1で使用する積分時間増分 …… 39
表 4－6　ケース2で使用する積分時間増分 …… 40
表 4－7　ケース3で使用する積分時間増分 …… 40
表 4－8　ケース4で使用する積分時間増分 …… 40
表 4－9　負荷の角振動数 w_F と周期 T_F …… 49
表 4-10　棒の縦方向角振動数 w_L と周期 T_L …… 49
表 4-11　クリティカルな時間増分 …… 50
表 4-12　積分時間増分 …… 50

表 5－1　応力解析のための要素 …… 62
表 5－2　熱伝導解析のための要素 …… 66
表 5－3　要素の解析機能 …… 69
表 7－1　解析値と理論解 …… 85
表 8－1　58年度に解析したCP …… 89
表 8－2　58年度に解析したVP …… 91
表 9－1　FINAS 使用説明書Ｖ7.1 の更新項目 …… 94
表 9－2　基礎編静的解析例題の要約 …… 95
表 9－3　基礎編動的解析例題の要約 …… 96
表 9－4　基礎編熱伝導解析例題の要約 …… 96
表 9－5　基礎編ユーティリティプログラム利用例題の要約 …… 97
表 9－6　応用編静的解析例題の要約 …… 97
表 9－7　応用編動的解析例題の要約 …… 98
表 10－1　大洗工学センターにおける FINAS 更新履歴 …… 99
表 10－2　FINAS 設置状況 …… 100
表 10－3　主な要望事項に対する処理内容と処理バージョン …… 101

第 Ⅱ 編

図 1.2－1　有限要素モデル …… 105
図 1.3－1　時間硬化説とひずみ硬化説 …… 120
図 1.3－2　補助法則を用いたクリープ応答 …… 121
図 1.3－3　応力反転に対応するクリープ応答 …… 121
図 1.3－4　クリープひずみが両方の原点に近づく場合 …… 124
図 1.3－5　回復可能なクリープ硬化範囲とクリープ硬化変数の変化 …… 125
図 1.3－6　多軸応力状態でのクリープ硬化面 …… 127
図 1.3－7　降伏時 …… 160
図 1.3－8　除荷時 …… 161
図 1.3－9　比率γの計算 …… 162
図 1.3－10　遷移領域の処理 …… 167
図 1.4－1　固体の変形と座標軸 …… 171
図 1.4－2　大変形解析の加速法 …… 181
図 1.4－3　大変形解析の流れ …… 182
図 1.5－1　非線形座屈荷重解析の流れ …… 186
図 1.5－2　線形座屈荷重解析の流れ …… 187
図 1.6－1　き裂の基本変形モード …… 188
図 1.6－2　Ｊ積分 …… 190
図 1.6－3　FINAS におけるＪ積分 …… 191

図 1.6－4　破壊力学解析の流れ …… 192
図 1.7－1　動的解析手法の分類 …… 194
図 1.8－1　熱伝導解析のアルゴリズム …… 212
図 1.8－2　時間増分自動決定のアルゴリズム …… 213
図 2.3－1　サブスペース法の計算アルゴリズム …… 223
表 1.3－1　SUS 304 鋼のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数 …… 138
表 1.3－2　SUS 304 鋼の降伏応力，加工硬化係数 …… 139
表 1.3－3　SUS 304 鋼の弾塑性単調応力－ひずみ関係式 …… 140
表 1.3－4　SUS 304 鋼のクリープひずみ式 …… 141
表 1.3－5　SUS 316 鋼のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数 …… 142
表 1.3－6　SUS 316 鋼の降伏応力，加工硬化係数 …… 143
表 1.3－7　SUS 316 鋼の弾塑性単調応力－ひずみ関係式 …… 144
表 1.3－8　SUS 316 鋼のクリープひずみ式 …… 145
表 1.3－9　SUS 321 鋼伝熱管のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数 …… 146
表 1.3－10　SUS 321 鋼伝熱管の降伏応力，加工硬化係数 …… 147
表 1.3－11　SUS 321 鋼伝熱管の弾塑性単調応力－ひずみ関係式 …… 148
表 1.3－12　SUS 321 鋼伝熱管のクリープひずみ式 …… 149
表 1.3－13　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）板のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数 …… 150
表 1.3－14　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）板の降伏応力，加工硬化係数 …… 151
表 1.3－15　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）板の弾塑性単調応力－ひずみ関係式 …… 152
表 1.3－16　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）板のクリープひずみ式 …… 153
表 1.3－17　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数 …… 154
表 1.3－18　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管の降伏応力，加工硬化係数 …… 155
表 1.3－19　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管の弾塑性単調応力－ひずみ関係式 …… 156
表 1.3－20　2¼Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管のクリープひずみ式 …… 157
表 2.3－1　固有値問題の解法比較 …… 220

第 Ⅲ 編

図 1.108-1　構造モデル …… 244
図 1.108-2　有限要素モデル …… 244
図 1.109-1　構造モデル …… 247
図 1.109-2　有限要素モデル …… 247
図 1.110-1　構造モデル …… 251
図 1.110-2　有限要素モデル …… 251
図 1.110-3　負荷条件 …… 252
図 1.110-4　応力の時間履歴 …… 254
図 1.111-1　構造モデル …… 255
図 1.111-2　有限要素モデル …… 255

図 1.111-3　負荷履歴 …… 256
図 1.112-1　構造モデル …… 258
図 1.112-2　有限要素モデル …… 258
図 1.113-1　構造モデル …… 261
図 1.113-2　有限要素モデル …… 261
図 1.114-1　構造モデル …… 264
図 1.114-2　荷重条件 …… 264
図 1.114-3　各モードの傾向 …… 266
図 1.115-1　構造モデル …… 267
図 1.115-2　有限要素モデル …… 267
図 1.523-1　構造の寸法 …… 270
図 1.523-2　有限要素モデル …… 270
図 1.523-3　境界条件 …… 271
図 1.524-1　構造モデル …… 273
図 1.524-2　有限要素モデル …… 273
図 1.524-3　境界条件 …… 274
図 1.524-4　温度分布表示断面 …… 274
図 1.524-5　A-A′ 断面に沿う温度分布 …… 276
図 1.524-6　B-B′ 断面に沿う温度分布 …… 276
図 1.525-1　構造モデルの寸法 …… 277
図 1.525-2　有限要素モデル …… 277
図 1.525-3　境界条件 …… 278
図 1.525-4　ナトリウム温度の時間履歴 …… 278
図 1.525-5　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴（VP-507） …… 280
図 1.525-6　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴 …… 280
図 1.526-1　構造モデル …… 281
図 1.526-2　有限要素モデル …… 281
図 1.526-3　境界条件 …… 282
図 1.526-4　温度分布表示断面 …… 282
図 1.527-1　構造モデル …… 284
図 1.527-2　有限要素モデル …… 284
図 1.527-3　境界条件 …… 285
図 1.527-4　温度分布表示断面 …… 285
図 1.729-1　構造モデル …… 287
図 1.729-2　有限要素モデル …… 287
図 1.730-1　片持ち梁 …… 289
図 1.730-2　有限要素モデル …… 289
図 1.730-3　負荷条件 …… 290

表 1－1　静的解析VPの一覧表 …… 226
表 1－2　熱伝導解析VPの一覧表 …… 238
表 1－3　動的解析VPの一覧表 …… 241
表 1.108-1　FINAS の解と理論解との比較 …… 246
表 1.109-1　負荷条件 …… 248
表 1.109-2　変位の FINAS の解と理論解との比較 …… 250
表 1.109-3　要素力，ギャップ量，ひずみ量の FINAS の解と理論解との比較 …… 250
表 1.110-1　SUS 304 鋼クリープひずみ式 …… 253
表 1.111-1　3400 時間後の応力・ひずみ …… 257
表 1.112-1　FINAS の解と理論解との比較 …… 260
表 1.113-1　FINAS の解と理論解との比較 …… 263
表 1.114-1　FNSLOAD と理論解との比較 …… 265
表 1.115-1　FINAS の解と理論解との比較 …… 269
表 1.523-1　レンガ壁面の温度 …… 272
表 1.523-2　レンガ壁面の熱流量 …… 272
表 1.524-1　熱伝導率 …… 274
表 1.524-2　A-A′ 断面に沿う温度分布 …… 275
表 1.524-3　B-B′ 断面に沿う温度分布 …… 275
表 1.525-1　節点温度 T〔℃〕 …… 279
表 1.525-2　熱伝導要素中心における熱流束 q（$\mathrm{kcal/mm^2 \cdot sec}$） …… 279
表 1.525-3　熱伝達要素における熱流量 Q（$\mathrm{kcal/sec}$） …… 279
表 1.526-1　FINAS の解と ANSYS の解との比較〔℃〕 …… 283
表 1.527-1　FINAS の解と ANSYS の解との比較〔℃〕 …… 286
表 1.729-1　各ケースの固有値範囲 …… 288
表 1.729-2　FINAS と NASTRAN の解 …… 288
表 1.730-1　$k_i l$ の値 …… 290
表 1.730-2　固有振動数 f〔Hz〕 …… 291
表 1.730-3　自由端における y 方向変位 u_y〔in〕 …… 291

序　　文

高速炉非弾性構造解析システム FINAS（FBR Inelastic Structural Analysis System）は，国家プロジェクトとして開発が推進されている高速増殖炉における構造上の種々の問題に対して，解決のための有効な手段となるように昭和51年7月から5ケ年をかけて開発が行なわれ，引き続き改良・整備が行なわれている汎用構造解析システムである。

一般に原子力プラントは高い安全性が要求されており，安定的な運転を保つために，また破損の防止などのために，機器の信頼性に対する要求はきびしいものとなっている。高速増殖炉の場合には，材料の塑性特性やクリープ特性などの非弾性挙動を考慮に入れなければならないような高温領域で運転が行なわれるために，その要求はさらにきびしいものとなっており，構造解析上の手法も非線形解析など高度のものが必要とされる。高速増殖炉において遭遇する広範囲の構造物の解析を対象とするFINASではこの点を考慮し，5ケ年間の開発では非弾性解析機能の充実に力を注いできた。[1] この間の開発経緯および成果は，FINAS開発報告書として，各年度毎に動燃事業団に報告されてきた。[2),3),4),5),6)]

FINASの高速増殖炉開発のための実計算への適用は昭和53年10月よりCRC社のCDC 6600/CYBER 74，73によって始まった。昭和55年4月には動燃事業団大洗工学センターのFACOM M-190へのインストレーションが行なわれて，動燃事業団内部の技術者，研究者の直接の使用により広く行なわれるようになってきている。

FINASは，56年6月までの5ケ年間の開発期間を終えて，当初予定されていた項目の開発をほぼ完了し，汎用構造解析プログラムとして基本的な機能を備えることができた。しかしながら，今後，広く高速増殖炉の設計解析ならびに構造設計法の開発研究等に適用していくには，改良，整備を実施して，より有効なプログラムとしていかなければならないと考えられる。実際，動燃事業団内での利用が始まって以来，利用者より多くの機能追加，改良の要望等が多数FINASに対して寄せられてきた。

56年7月から始まったFINAS改良・整備作業[7),8)]は以上のような観点から，数カ年の計画で実施されるものである。主な改良・整備の項目は，実際的な解析作業において不十分な機能の拡張・整備，計算効率等の性能面の充実，解析手法の改良，前処理および後処理機能の充実，検証問題による信頼性の向上などが考えられている。また，FBR関連製造メーカー等でのFINASの利用に関連して，プログラムの機種非依存性および保守性の向上に努める必要がある。そして，利用者の利用の便を図るため，関連文書の充実も欠くことのできない事項である。

本報告書は58年10月から59年6月までのFINAS改良・整備作業の成果について述べたものである。第Ⅰ編では各作業項目について，改良・整備が必要となった背景と共にその成果を述べる。第Ⅱ編はFINASで採用している理論，手法を静的・動的解析および熱伝導解析，数値解法について示したもので，FINASの各解析機能の理論面における現況を明らかにするように記述されている。また，第Ⅲ編は本年度行なわれた検証問題および解析例の結果をまとめたものである。

なお，本報告書とは別に，FINASシステムの一連の説明書として，理論説明書，使用説明書，要素ライブラリ説明書，プログラム説明書，解析例題書が用意されており，FINASシステムの詳細が記されている。

〔参考文献〕

1）"高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発計画書"，SN 241 78-29，昭和53年

2）"高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書（Ⅰ）"，ZJ 240 77-01，昭和52年

3) "高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅱ)", SJ 240 78-01, 昭和53年
4) "高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅲ)", SJ 240 79-01, 昭和54年
5) "高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅳ)", SJ 240 80-01, 昭和55年
6) "高速炉非弾性構造解析システム FINAS 開発報告書(Ⅴ)", SJ 240 81-01, 昭和56年
7) "高速炉非弾性構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅰ)", SJ 240 82-01, 昭和57年
8) "高速炉非弾性構造解析システム FINAS 改良報告書(Ⅱ)", SJ 240 83-03, 昭和58年

第Ⅰ編　FINAS改良・整備

序

本編は，昭和58年度に行なわれたFINAS改良・整備作業の成果について，改良の必要とした背景，具体的な改良・整備の方法を述べたものである。 本年度は，主に大規模問題の動的ファイルアロケーション機能，非軸対称解析，動的解析について改良・整備を行なった。また，大洗工学センターにおけるFINAS利用についての問題点および利用に際して生じた要望についても，それらが生じた時点で内容の吟味が行なわれ，改良・整備の計画との調整の上，必要度の高いものについては当初の改良・整備に優先して対処が行なわれた。

以下に，各項目について，改良・整備の成果をまとめる。

I. システム全般

(1) I/Oルーチンの改良

57年度までのI/Oルーチン改良作業では，I/Oルーチン内で消費されるCPU時間の最小化が行なわれ，その改良の成果を得ていた。本年度の作業において，さらに次の2点に関し改良が行なわれた。

- ディスクスペースの利用効率を高める。これにより小規模問題における最少必要なディスクスペースの割り当てが可能となる。また同時に，大規模問題におけるディスクのスペース量からくる制約が緩和され，大型問題に対する適用性が高められる。

- ディスクI/Oの転送量を減少させる目的で，メモリーレジデントファイルをサポートする機能を追加する。

a) ディスクスペース利用の効率化

FINASの内部データは，データブロックという論理的なファイル単位で処理されており，各機能モジュールはこのデータブロックを介して他のモジュールとのデータ受け渡しを行なっている。データブロックは，外部記憶装置上（一般的にはディスク装置上）に記録されており，モジュール内で必要に応じて外部記憶装置から読み込まれ，また必要に応じて書き出される。そして，これら入出力の実行はすべてFINAS独自のI/Oサブルーチンパッケージ，FFCPを介して行なわれている。

データブロックの個数は，現バージョンでは100を超すに至っているが，これら多数のデータブロックとしてそれを記憶するディスク装置との対応づけも，FINAS内部のI/Oルーチンが実行時に動的に行なうようになっている。すなわち，FINAS内部ではジョブコントロールカードで定義されているファイルユニットのすべてが管理されており，必要に応じて空いているファイルユニットの一つを，一つのデータブロックに割り当てられるようになっている。

このような構成は，外部記憶装置に対する非依存性を高めるとともに，解析処理の流れをデータブロックと機能モジュールという論理的な単位だけでとらえることにより，外部記憶装置の台数や物理的諸元を意識することなく，プログラムの拡張，保守を容易にするために行なわれた。

ところで，各データブロックのサイズであるが，これはデータブロックの内容と問題の規模に応じて千差万別である。例えば，要素剛性マトリクスのデータブロックは要素数に比例して増大するものであるし，三角化された後の全体剛性マトリクスのデータブロックは未知自由度数に比例あるいはそれ以上の比率で増大するものである。これに対し，要素特性データとか，プリント出力の制御表等のデータブロックはもとより大した量にはならず，また問題の規模に無関係で，ほぼ一定の量にしかならない。従って，問題が大型化すればする程，データブロックのサイズの大小には大きな差がつくことになる。

一方，FINASプログラムの実行環境であるFACOM OSⅣ/F4 オペレーティングシステムの下では，ディスク装置の使用に先立って，トラックとかシリンダ単位で所用のスペース量をオペレーティングシステムに通知し，ディスクスペースの割り当てを受けることが必要となっている。プログラム実行中に割り当てを受けたスペースをすべて使い果たした場合，オペレーティングシステムはある程度までは追加割当てを認めてくれるものの，際限なくスペースの追加ができるわけではない。

前述したようにFINASでは，データブロックとファイルユニットとの対応づけはプログラム実行中に動的に行なわれるので，大きなサイズのデータブロックがどのファイルユニットに対応づけられるかは不定である。このためバージョン7.1までのFINASでは，中規模程度の問題を想定し，その場合の最も大きなサイズのデータブロックに合わせて全ファイルユニットのスペース割当てを受けていた。この場合，図1-1に示すように，サイズの小さなデータブロックでディスクスペースの無駄が生じていた。また，特に大型の問題を解こうとする場合に，いくつかのデータブロックで割当てスペースが不足し，実行が中断された。

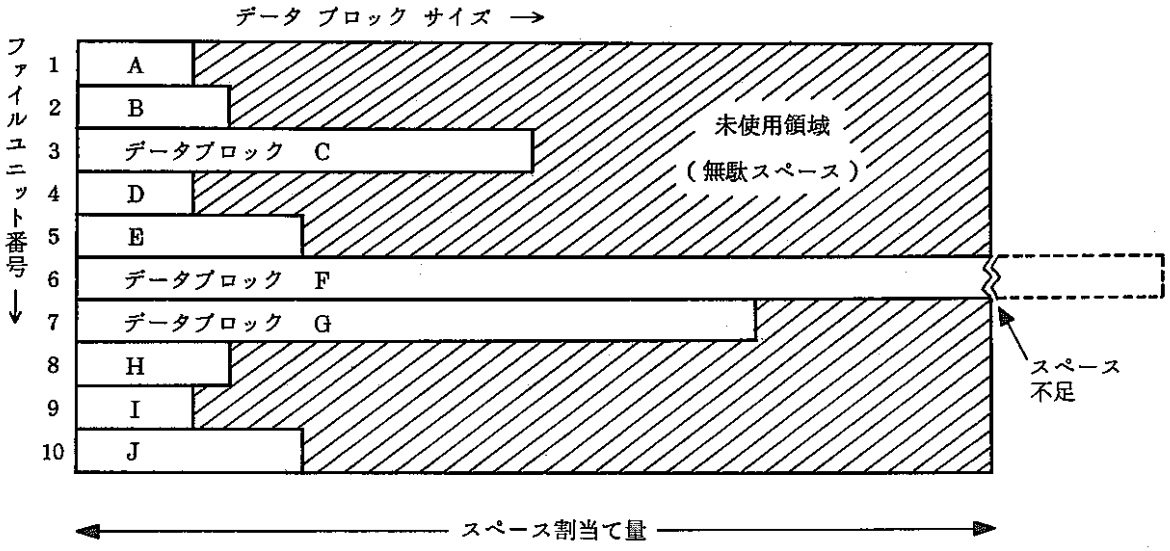


図1-1 旧バージョンにおけるディスクスペース使用法

58年度改良作業では，上記の欠点を除くためにディスクファイルユニットの使用法が次のように改められた。

まず，ディスクファイルユニット全体が一次ファイルユニット群，二次ファイルユニット群，三次ファイルユニット群の3つのグループに分けて管理される。

一次ファイルユニットは小さなサイズのデータブロックに合わせた小容量のスペース割当てがなされており，データブロックはまず一次ユニットに対応づけられる。もともと，100個を超すデータブロックの大多数はサイズの小さなものであり，それらは一次ユニットの割当てスペース内で収まる場合がほとんどである。

一次ユニットの割当てスペース内に収まらないデーブロックについては，一次ユニットからはみ出した分を2次ユニットに収容する。実際，一次ユニットに収まらないデータブロックは，要素剛性マトリクス，要素応力/歪のデータテーブル，三角化後の全体剛性マトリクス等，限られたものだけであり，二次ファイルユニットの個数は，一次ファイルユニットの個数に比べてずっと少なくてよい。ただし，スペース割当て量は一次ファイルユニットの10倍程度確保しておく必要がある。

三次ファイルユニットは，一種の安全弁のようなもので，二次ファイルユニットからあふれた分を収容するため

のファイルユニットである。従って，小規模問題の場合には省略してもよいし，また超大型問題の場合でも，必要に応じて二次ファイルユニットまたは三次ファイルユニットの個数かスペース量を増加するだけでよいことになる。

図1-2は一次，二次，三次ファイルユニットの使用を図1-1と対比して示したもので，ディスクスペースの無駄が少なくなることが解かる。

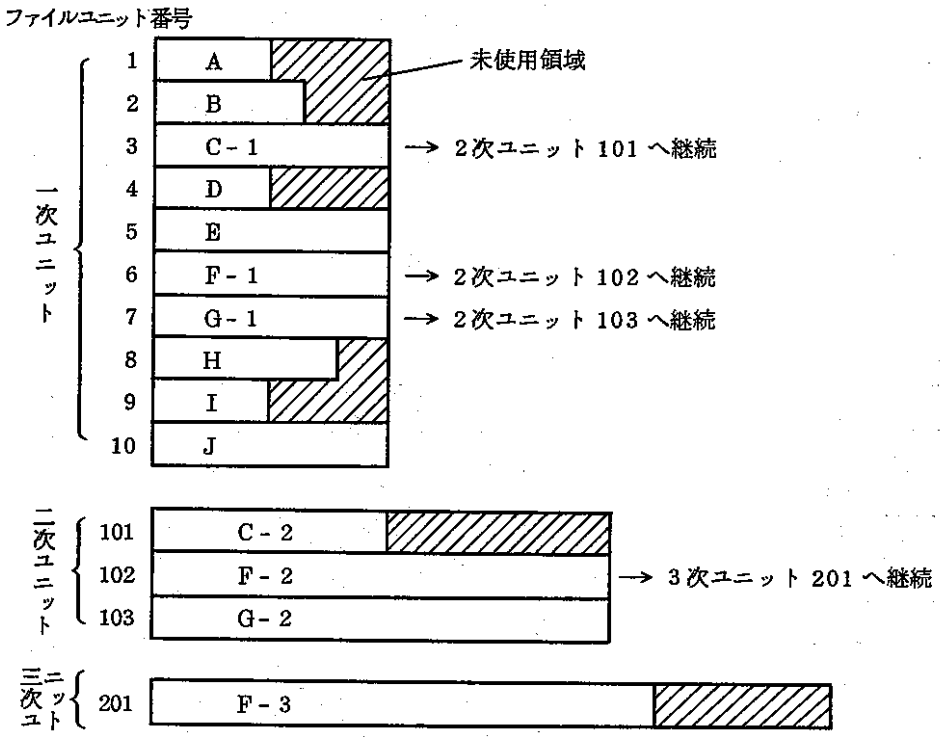


図1-2　新バージョンにおけるディスクスペース使用法

b）メモリーレジデントファイルのサポート

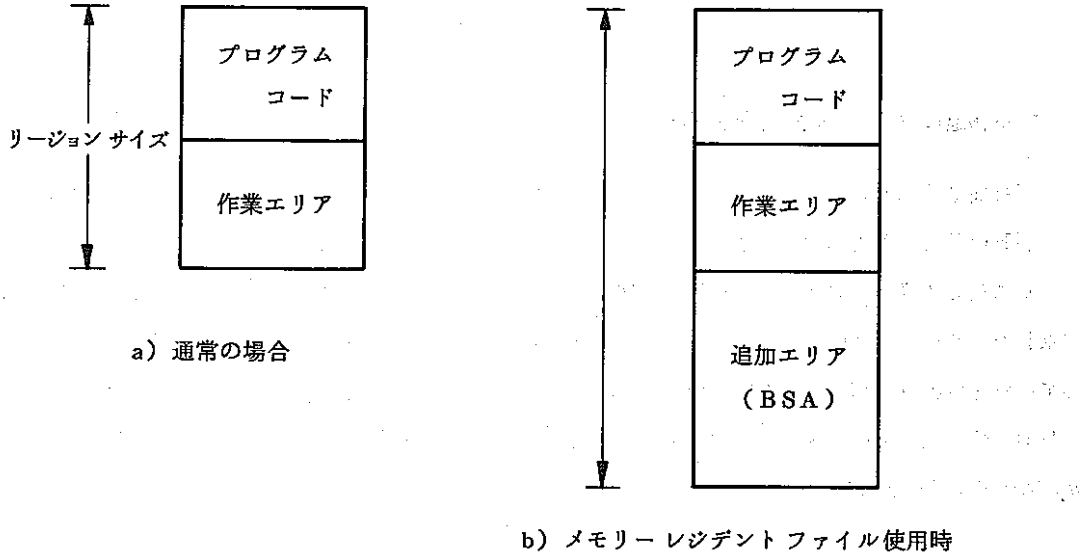
FINASプログラムの開発当初，各機能モジュールの独立性を高めるためと，小さなメモリーしか持たない計算機上でも実行できるようにとの配慮から，現在あるようなプログラム構成，すなわちデータブロックを仲介として各機能モジュールが順次処理を加えて行くという構成がとられた。その後，現在に至るまでの間の半導体技術の進歩，特にメモリー素子の大容量化と高速化により，大型計算機では16メガバイト以上のメモリーを実装しているものも珍しくなくなっている。このような大量のメモリーを利用してデータブロック入出力の効率化をはかったものが，メモリーレジデントファイルである。

メモリーレジデントファイルを使用する場合には，図1-3 b）に示すように，メモリー内の追加領域を使用する。この追加領域はBSA（Backing Storage Area）といい，ジョブコントロールカード上のパラメータで確保する。前節で述べたとおり，FINAS内部データの入出力はFFCPが一括管理しているが，BSAが確保されている場合にはそのエリアの管理もFFCPが行なう。

データブロックを書き出す場合，FFCPは必要なブロッキング処理を行なった後，バッファー内のデータをディスクへ転送するが，この時BSA内に空きがあれば，転送先はディスクではなくBSA内の空きスペースへ転送し，ディスクへの転送は行なわれない。逆に，データブロックを読む場合，BSA内に所望のデータがあれば，ディスクをアクセスすることなく直ぐにBSAからバッファーへデータを転送し，必要なデブロッキング処理を行な

って，データをモジュールに引き渡すようになっている。

これにより，十分なＢＳＡが与えられている場合にはディスクアクセスは全くなくなり，実行時間の大幅な短縮が期待できる。また，ＢＳＡの大きさが全データブロックを収容するのに不十分な場合でも，ディスクへ転送されるデータブロックはＢＳＡに収容しきれない分だけであるので，全体的にはディスク入出力の量を減らすのに効果的である。



a）通常の場合

b）メモリー レジデント ファイル使用時

図 1-3　メモリー レイアウト

(2)　メモリーの減少

近年の計算機では，メモリーの大容量化により，プログラムのメモリー使用量について意識する必要はなくなってきているが，プログラムがコンパクトであることは望ましいことである。したがって，プログラムコード部分のメモリー使用量を減らすために，次の４点について見直しと改良が行なわれた。

a）開発作業用モジュールおよびサブドメイン関連モジュールの整理

b）MALPACK サブルーチンの一元化と組込み化

c）オーバーレイセグメント構造の再検討

d）要素関連サブルーチン内で使用している小さなマトリックス用作業エリアの一元化

以上の結果，プログラムコード部分全体の約２割に相当する９０Ｋバイトのメモリーが節約され，そのメモリースペースは作業用エリアあるいはメモリー レジデント ファイル用のエリアに利用可能となった。

2. 静的応力解析

(1) 軸対称構造における非軸対称荷重解析機能

軸対称構造物に非軸対称荷重が作用する問題の解析機能および軸対称調和荷重要素が開発された。この機能は弾性および弾性熱応力解析において適用可能である。荷重および変位を回転（θ）方向に Fourier 級数展開することにより，θ に対して変数分離される。線形弾性理論では，この調和成分 n に対して，それぞれ独立な関係式が成立する。すなわち，変位と同様にひずみ，応力，平衡方程式等も，θ に対して変数分離される。したがって，調和成分 n に対してそれぞれ独立に求められた解の総和をとることにより，解決すべき問題の解が求められる。

軸対称体に対しては，図 2-1 に示す円筒座標系 （R, Z, θ）を用いて，荷重 f_R, f_θ, f_Z および変位 u_R, u_θ, u_Z は次のように表わされる。

$$\{f\} \equiv \begin{Bmatrix} f_R \\ f_Z \\ f_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{m} f_{R,n}^{s} \cos n\theta + \sum_{n=0}^{m} f_{R,n}^{a} \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{m} f_{Z,n}^{s} \cos n\theta + \sum_{n=0}^{m} f_{Z,n}^{a} \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{m} f_{\theta,n}^{s} \sin n\theta + \sum_{n=0}^{m} f_{\theta,n}^{a} \cos n\theta \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \{f_n^s\} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{m} \{f_n^a\} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \qquad (2-1)$$

$$\{u\} \equiv \begin{Bmatrix} u_R \\ u_Z \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{m} u_{R,n}^{s} \cos n\theta + \sum_{n=0}^{m} u_{R,n}^{a} \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{m} u_{Z,n}^{s} \cos n\theta + \sum_{n=0}^{m} u_{Z,n}^{a} \sin n\theta \\ \sum_{n=0}^{m} u_{\theta,n}^{s} \sin n\theta + \sum_{n=0}^{m} u_{\theta,n}^{a} \cos n\theta \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \{u_n^s\} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{m} \{u_n^a\} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \qquad (2-2)$$

ここで m, n はそれぞれ調和成分の総数およびモードの番号である。また，$f_{R,n}^{s}$, $f_{Z,n}^{s}$, $f_{\theta,n}^{s}$, $u_{R,n}^{s}$, $u_{Z,n}^{s}$, $u_{\theta,n}^{s}$ は対称モードの調和成分 n に対する荷重および変位の振幅（最大値）を表わし，$f_{R,n}^{a}$, $f_{Z,n}^{a}$, $f_{\theta,n}^{a}$, $u_{R,n}^{a}$, $u_{Z,n}^{a}$, $u_{\theta,n}^{a}$ は反対称モードの調和成分 n に対する荷重および変位の振幅を表わす。したがって，調和成分 n に対する対称モード，反対称モードの剛性マトリックスをそれぞれ $[K_n^s]$, $[K_n^a]$ とすると，平衡方程式は次式で表

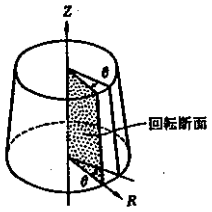


図 2-1　軸対称体と円筒座標系

わされる。

$$\{f\}=\sum_{n=0}^{m}[K_n^s]\{u_n^s\}\begin{pmatrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{pmatrix}+\sum_{n=0}^{m}[K_n^a]\{u_n^a\}\begin{pmatrix}\sin n\theta\\ \cos n\theta\end{pmatrix} \qquad (2-3)$$

したがって，調和成分nに対する平衡方程式は次式となる。

$$\left.\begin{aligned}\{f_n^s\}&=[K_n^s]\{u_n^s\}\\ \{f_n^a\}&=[K_n^a]\{u_n^a\}\end{aligned}\right\} \qquad (2-4)$$

これを解くことにより，調和成分nに対する解が得られる。

なお，軸対称調和荷重要素として，次に示す5種類の要素を開発した。

QNAX8　：　8節点四辺形軸対称調和荷重要素

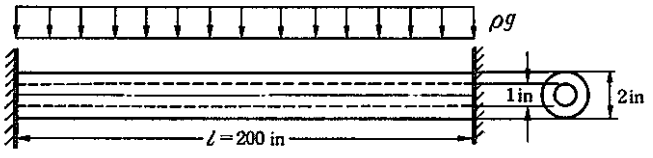
TNAX6　：　6節点三角形軸対称調和荷重要素

QNAX4　：　4節点四辺形軸対称調和荷重要素

TNAX3　：　3節点三角形軸対称調和荷重要素

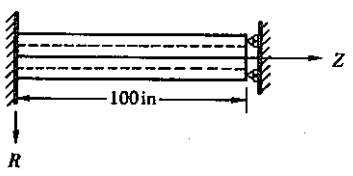
NCONC2：　2節点円錐台シェル調和荷重要素

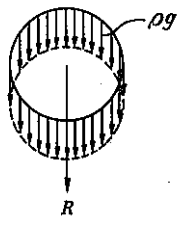
例として，両端固定の中空円管の自重による曲げ問題について FINAS の解と理論解を示す。図2-2の½モデルを作成し，8節点四辺形軸対称調和荷重要素 QNAX8 によりモデル化した。



$d_0 = 2$ in
$d_i = 1$ in
$\ell = 200$ in

図 2-2　構造モデル図





$E = 30\times10^6$ psi
$\rho = 0.00073$ lb·sec^2/in^4
$g = 386$ in/sec^2

図 2-3　境界条件と荷重条件

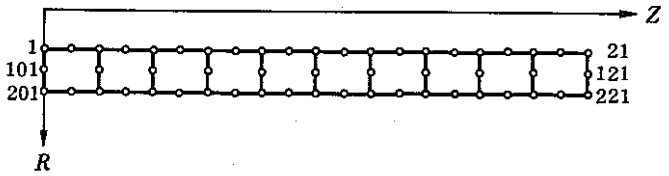


図 2-4　有限要素モデル図

表 2-1　円管中央部のたわみ

	FINAS の解	理　論　解
u_R　($\theta = 0°$)	1.24598 E－01	0.125236
u_θ　($\theta = 90°$)	－1.24599 E－01	－0.125236

(2)　荷重増分自動決定機能の予備調査

FINAS では接線剛性を用いた増分形式で解析が行なわれており，材料非線形あるいは幾何学的非線形解析においては，あらかじめ利用者が妥当と思われる 1 ステップ当たりの荷重あるいは変位の増分量を定義しなければならない。FINAS は利用者の与えた増分量にしたがって解析を行ない，材料非線形問題では，接線剛性近似による誤差を次のステップにおいて残差荷重修正ベクトルとして補正を行なう。幾何学的非線形問題では，利用者の与えた増分ステップ内で釣合いのための収束計算を修正 Newton-Raphson 法により行なっているが，いずれの場合にも各ステップの増分量は利用者の定義した増分量に規定される。

非線形問題において，あらかじめ適切な増分量を選択するためには，解こうとする問題に関する十分な知識と洞察を必要とする。より広範なプログラムの利用を考えた場合，プログラムで自動的に増分量を決定することは有効なことである。ここでの調査では，幾何学的非線形性を考慮した熱弾塑性領域における荷重増分量の自動決定のアルゴリズムについて検討する。検討は次の 2 点について行なう。

- 解析経路の制御
- 増分量の自動決定

飛び移り現象などの幾何学非線形解析においては，荷重・変位曲線は連続であるが極大値および極小値を持ち，たわみがこれら極値に達すると不安定現象がおこり，飛び移りが生じる。このような極値に到達した後の不安定現象を解析する場合には，荷重による解析経路の制御ではなく，変位による制御を行なわなければならない。しかし，より一般的な非線形挙動を対象とする場合には変位だけによる制御では十分でなく，荷重，変位共に考慮した制御が必要となる。本調査では，この解析経路の制御に関して，汎用プログラムで最近採用されてきている弧長増分法（ arc length method ）を中心に検討を行なう。

a）汎用有限要素プログラムにおける荷重増分自動決定機能

ここでは，他の汎用有限要素プログラムにおける荷重増分の自動決定機能の調査を行なう。対象としたプログラムは MARC（ K1 バージョン ）および ABAQUS（ バージョン 4.4 ）である。現在のところ ANSYS，MSC/NASTRAN には荷重増分の自動決定機能は組み込まれていない。

i) MARC（K1バージョン）

MARCでは，K1バージョンでこの機能が組み込まれた。MARCでは，熱荷重がない場合とある場合では異なった方法により荷重増分を決定している。熱荷重がない場合には，履歴を定義するデータグループ内で自動決定をする荷重ステップに「AUTO INCREMENT」データを挿入する。このステップで与える荷重はそのステップの総増分量で，プログラムで自動的にそれを細分割する。「AUTO INCREMENT」データは履歴の中に何回も現われてよく，そのたびに与えられた増分量を自動的に分割する。

「AUTO INCREMENT」データで入力する制御パラメータは以下のとおりである。

γ ： 最初の分割ステップで用いる荷重の総増分量に対する比

m_{inc} ： 細分割されて作られるステップの最大制限数

m_{itr} ： 細分割されたステップで行なう収束計算の最大制限回数。未定義の場合は5。

$\gamma_{\max}$ ： 各細分割されたステップで作用する荷重増分の総荷重増分に対する比。未定義の場合には1.0となる。

「AUTO INCREMENT」データは熱荷重のない弾塑性解析あるいは大変形解析に有効で，また，それらを組み合わせた例えば塑性を考慮した飛び移り問題を取り扱うことができる。各ステップの増分量は変位増分ベクトルの長さによって制御しており，そのベクトルの長さは直前の細分割されたステップにおける収束回数に基づいている。自動増分は，与えられた総増分量あるいは作成される細分ステップの制限値に達したら終了する。各細分ステップ内での収束計算に対する制限は，「CONTROL」データによって利用者は与えることができる。「CONTROL」データで与えることのできるデータは以下のとおりである。

m_{stp} ： 1回の計算で解析を行なう増分ステップの最大値。入力されなければ4。

m_{itr} ： 塑性あるいは他の非線形性に対して行なう収束計算の最大制限値。未定義の場合は3。

n_{itr} ： 塑性あるいは他の非線形性に対して行なう収束計算の最小制限値。未定義の場合は0。

k_{tst} ： 収束を判定する方法に対する指定

0の時　残差

1の時　変位

変位で判定する場合には，常に少なくとも1回の収束計算を必要とする。

k_{err} ： 誤差の評価の方法

0の時　相対誤差

1の時　絶対誤差

k_{itr} ： 収束計算の方法。デフォルトは Full Newton-Raphson 法

1の時　Full Newton-Raphson 法

2の時　修正 Newton-Raphson 法

3の時　ひずみ修正を用いた Newton-Raphson 法

k_{nps} ： 非正定値マトリックスの場合の処理。1の時は非正定値マトリックスの場合を制限する。

ε ： 許容誤差

- 相対誤差による残差チェックの場合

  最大反力に対する最大残差荷重。未定義のとき0.1

- 絶対誤差による残差チェックの場合

  残差荷重の最大許容値。未定義の場合は0.0であるが，その場合，残差荷重のチェ

ックは行なわない。

・相対誤差による変位チェックの場合

変位増分の変化率の最大許容値。未定義の場合は 0.1

各細分化されたステップ内で収束を行ない，上記の収束計算の制限値に達した場合には，その時点で計算を終了する。また，ここで用いている方法についての理論的な背景については，現在のところ明らかでない。以下では，MARC の例題書に記述されている例を要約する。

最初の例は，シェル・ルーフに雪荷重が載荷される場合の例である。図 2-5，6 は解析モデル，有限要素モデルである。材料は弾 - 完全塑性体であるとし，幾何学的非線形をも考慮している。解析では，MARC の標準的な手法である Newton-Raphson 法による収束計算を用いており，前述の「AUTO INCREMENT」オプションにより荷重増分の自動決定を行なっている。荷重増分自動決定機能により 9 つの増分ステップが作成されたが，その時点で構造すべてが完全に塑性状態になり，次のステップでは収束計算の制限回数を超え，解析は終了している。

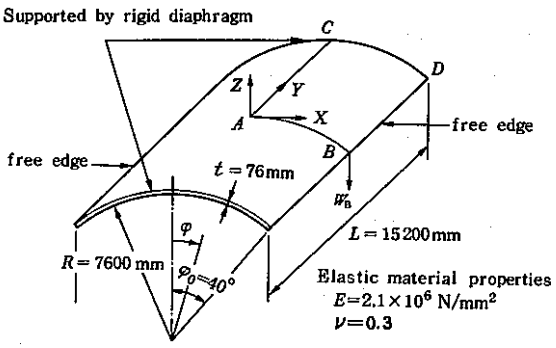


図 2-5　解析モデル

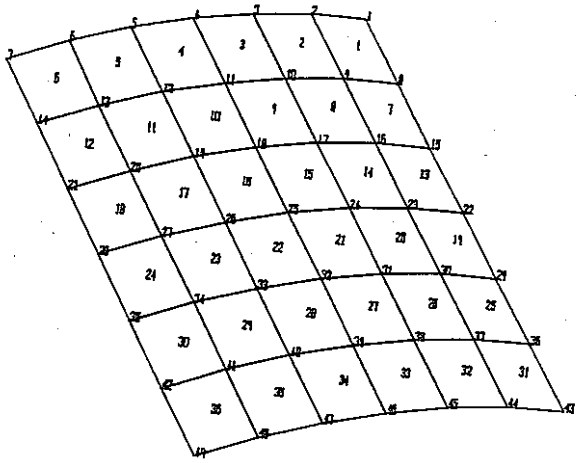


図 2-6　有限要素モデル

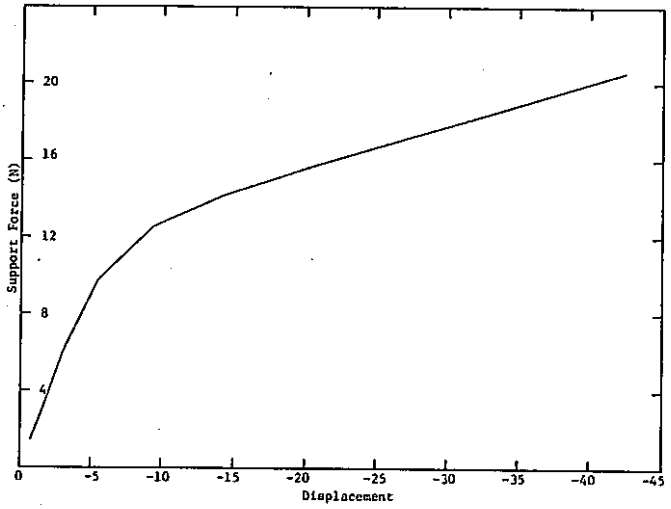


図 2-7　変位（A点）と反力の関係

次の例は，頂点に集中荷重が作用する円形アーチの弾性大変形解析の例である。ここでの解析では移動ラグランジェ形式の大変形解析を行なっており，荷重増分自動決定機能により，崩壊荷重に達するまでの挙動を求めている。図 2-8 は解析モデルを示しており，図 2-9 は頂点における荷重・変位関係を示したものである。 与えた荷重は 1,200 lb であり，最初の増分はその 10 %の 120 lb，最大増分ステップ 300 で解析を行なっている。極値に到達後，290 lb で崩壊が生じている。増分ステップ数は計 75 回であった。図 2-9 は途中の変形状態を表わしている。

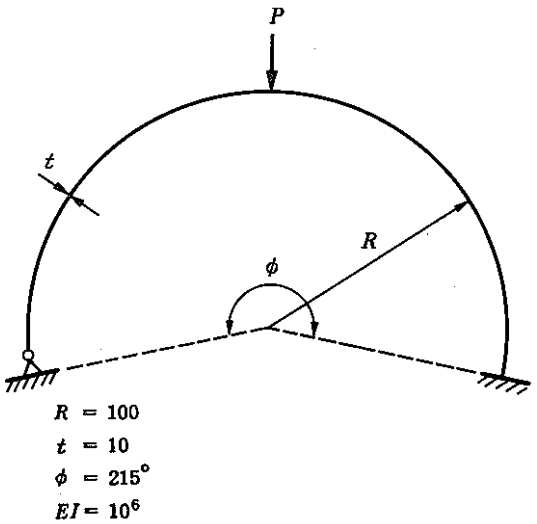


図 2-8　解析モデル

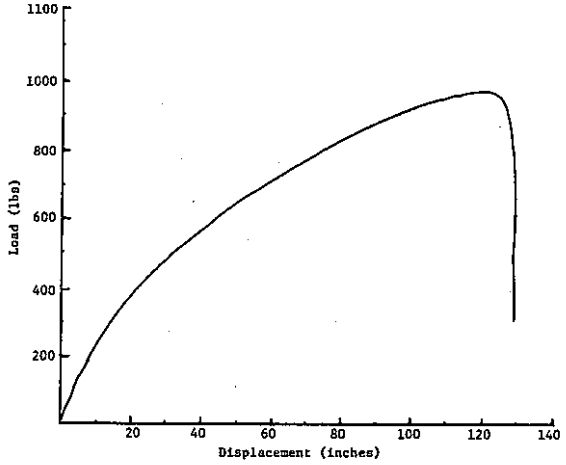


図 2-9　変位－荷重曲線

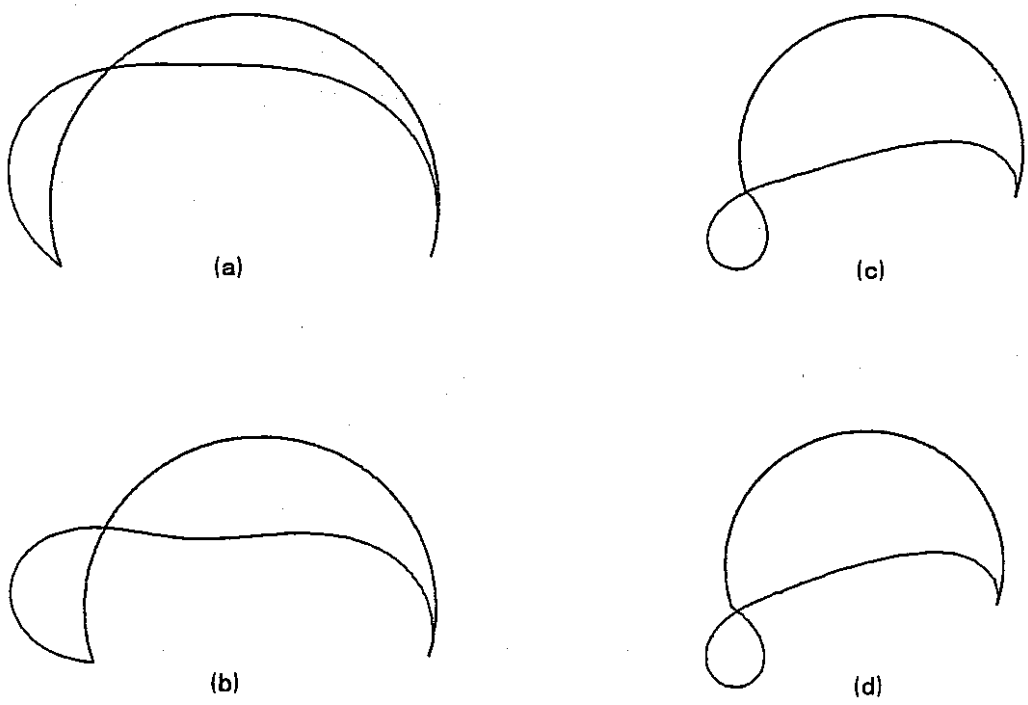


図 2−10　変形状態

前述のように，各ステップの増分量の決定は変位増分ベクトルによっているので，MARC では，変位コントロール法によっているものと思われる。

次に，熱荷重がある場合の自動増分の方法を述べる。この場合には「AUTO THERM」データを用いるが，ここで用いている方法は，利用者の入力した温度履歴データをもとに，全構造内の温度の変化がこのデータで与えた温度変化の最大許容値になるように，利用者の温度履歴データを線形式を用いて再分割するものである。「AUTO THERM」データで入力する制御データを以下に述べる。

ΔT_{max} ：　全構造内での温度変化の最大許容値。

m_{inc} ：　再分割してできる増分ステップの最大制限数。入力されなければ 50 である。

増分量を決定するアルゴリズムは非常に簡単であるが，利用者が与える ΔT_{max} を決定するには，解こうとする問題に対する十分な知識を必要とする。使用説明書では，これに関し次の目安を与えている。

$$\Delta T_{max} \approx \sigma_Y / E\alpha \times (20 \sim 50\%)$$

ここで，σ_Y は降伏応力，E はヤング係数，α は線膨張係数である。

ii）ABAQUS（バージョン 4.4）

ABAQUS の静的応力解析では，利用者が直接に増分量を与えることにより解析を行なうステップを指定する他に，プログラムで自動的に増分量を決定する機能が組み込まれている。以下に，そのアルゴリズムの概要を述べる。

ABAQUS では履歴の中の一つの単位をステップと呼び，その単位毎に ＊STEP カードを入力する。このカードで与える自動増分決定機能に関係するパラメータは以下のものである。

m_{inc} ： このステップを細分割する場合の最大制限数。入力されない場合は10。

m_{itr} ： 細分割された増分計算で行なう収束計算の最大回数。入力されなければ6。

各ステップでは，解析の種類を選択するデータが必要であるが，静的応力解析では *STATIC カードを入力する。このカードで与えるパラメータは以下のとおりである。

ε_f ： 収束判定のための許容誤差。許容値内に変位が規定されている節点を除くすべての節点のすべての力がおさまったならば収束したとみなす。通常は代表的な作用力に対し，十分小さく（比で 10^{-2}～10^{-4}）とる。このパラメータは必須パラメータである。

ε_m ： ε_f と同様に使用されるもので，モーメントに対して用いられる。入力されなければ，モーメントについての判定は行なわれない。ε_m は通常 ε_f に代表的な要素の大きさを掛けて求める。ε_m は梁とシェルについてのみ必要である。

$\gamma_{\max}$ ： 解析を行なうべき荷重係数の上限値。係数がこの値を超えたら解析は終了する。

理論説明書のこの機能に関する記述では，上記のパラメータの他に，細分割してできる増分ステップの数の最小制限数および増分量の増減のためのパラメータについて述べられているが，現在のバージョンではそれらに対する入力は行なうことはできない。

ABAQUS では，非線形方程式を full Newton-Raphson 法を用いた収束計算により解析する。各増分ステップの収束計算において，収束計算の回数が3回になってもまだ収束しない場合には残差の最大値をもとに，以降の収束では収束速度が一様であるとして，収束する回数を予想する。$R_{(i)}$ を i 回目の収束計算における最大残差であるとすると，比率 λ を次式で表わす。

$$\lambda=\frac{R_{(4)}}{R_{(3)}}=\frac{R_{(5)}}{R_{(4)}}=\cdots\cdots=\frac{R_{(i)}}{R_{(i-1)}} \qquad (2-5)$$

したがって

$$R_{(i)}=\lambda R_{(i-1)}=\lambda^2 R_{(i-2)}=\cdots\cdots=\lambda^{i-3}R_{(3)} \qquad (2-6)$$

最大残差が ε_f 以下になったときに収束したとみなすとすれば，i 回目の収束計算において収束する予想回数は

$$\varepsilon_f=R_{(n)}=\lambda^{(n-i)}R_{(i)}=\left[\frac{R_{(i)}}{R_{(i-1)}}\right]^{(n-i)}R_{(i)} \qquad (2-7)$$

したがって

$$n=i+\ln\left(\frac{\varepsilon_f}{R_{(i)}}\right)\Big/\ln\left(\frac{R_{(i)}}{R_{(i-1)}}\right) \qquad (2-8)$$

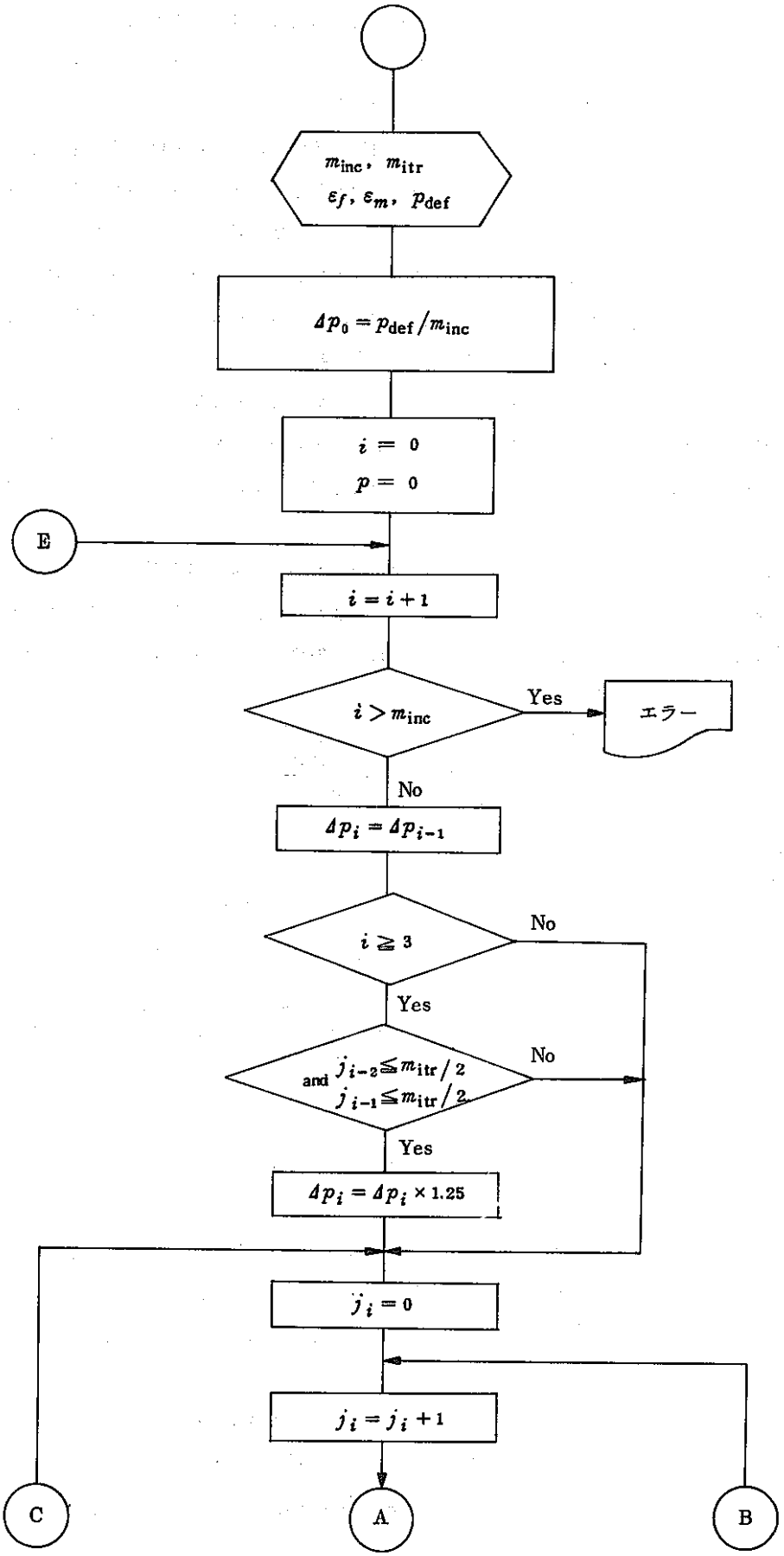
式（2-8）で表わされる収束予想回数 n を用いて，以下に示すアルゴリズムにより細分割する増分量を決定している。

a．ステップで与えられる荷重あるいは変位の総増分量を m_{inc} で割り，最初の細分ステップの増分量とする。

b．細分ステップが3回の収束計算で収束しない場合には，4回目の最初で上記の収束予想回数 n を求める。n が m_{itr} 以内であれば，収束計算を続行する。

c．n が m_{itr} 以上であれば，増分量が大きすぎるとしてその大きさを25％小さくする。そして，その増分の開始時にもどり計算を再開する。この場合，このステップで行なわれた収束計算はすてられる。

d．2つの連続した細分ステップにおいて，収束が $m_{\mathrm{itr}}/2$ より少ない回数により行なわれたならば，次のステップは増分量を25％増加する。


m_{inc}, m_{itr}
ε_f, ε_m, p_{def}
$\Delta p_0 = p_{def} / m_{inc}$
$i = 0$
$p = 0$
E
$i = i + 1$
$i > m_{inc}$
Yes
エラー
No
$\Delta p_i = \Delta p_{i-1}$
$i \geqq 3$
No
Yes
and $j_{i-2} \leqq m_{itr}/2$
$j_{i-1} \leqq m_{itr}/2$
No
Yes
$\Delta p_i = \Delta p_i \times 1.25$
$j_i = 0$
$j_i = j_i + 1$
C
A
B

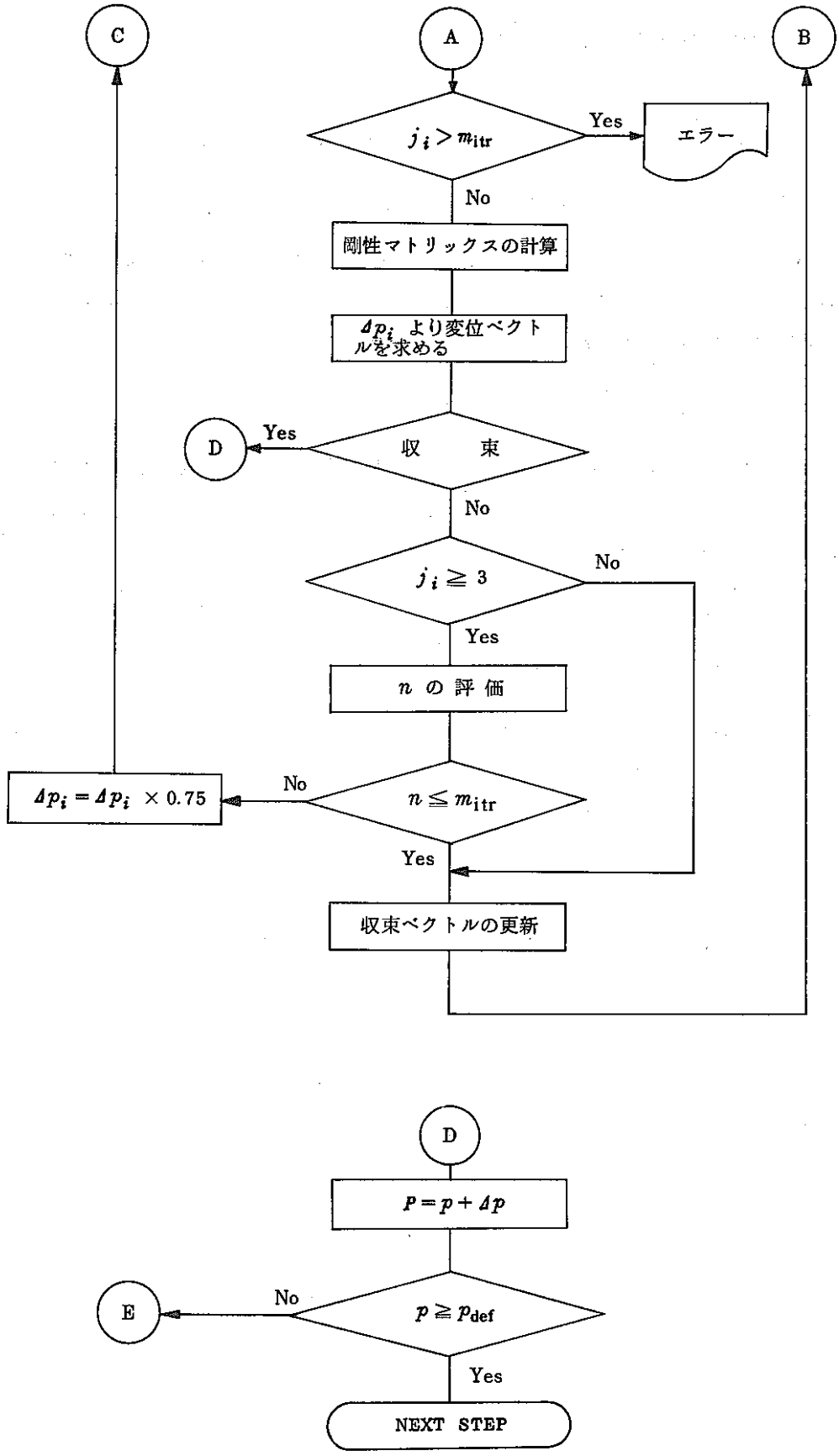


図 2−11　ABAQUS における荷重自動増分

b）荷重増分手法の調査

ここでは，計算経路の制御の方法について述べる。

i）記　号

非線形問題においてステップ i における増分形の平衡方程式を次のように表わす。

$$[K]^i \Delta\{u\}^i = \Delta\{p\}^i + \{R\}^i \qquad (2\text{-}9)$$

ここで，$[K]$ は剛性マトリックス，$\Delta\{u\}$，$\Delta\{p\}$ は変位，荷重増分ベクトル，$\{R\}$ は増分前の状態における残差荷重ベクトルである。与えられた荷重を $\{P\}$ として，各ステップにおける累積荷重ベクトル $\{p\}^i$ が $\{P\}$ に対する比率 λ^i により定義できるものとする。

$$\{p\}^i = \lambda^i \{P\} \qquad (2\text{-}10)$$

ステップ $i-1$ から i への増分内において，ステップの初期状態（$j=0$）から収束過程 j までの間の累積増分荷重を $\Delta\{p\}_j^i$，収束過程 $j-1$ から j への荷重増分を $\delta\{p\}_j^i$ で表わす。したがって，収束過程 j における累積荷重 $\{p\}_j^i$ は次のように表わすことができる。

$$\{p\}_j^i = \{p\}_0^i + \Delta\{p\}_j^i = \{p\}_0^i + \Delta\{p\}_{j-1}^i + \delta\{p\}_j^i \qquad (2\text{-}11)$$

同様に比例係数 λ_j^i，変位 $\{u\}_j^i$ も次のように表わす。

$$\lambda_j^i = \lambda_0^i + \Delta\lambda_j^i = \lambda_0^i + \Delta\lambda_{j-1}^i + \delta\lambda_j^i \qquad (2\text{-}12)$$

$$\{u\}_j^i = \{u\}_0^i + \Delta\{u\}_j^i = \{u\}_0^i + \Delta\{u\}_{j-1}^i + \delta\{u\}_j^i \qquad (2\text{-}13)$$

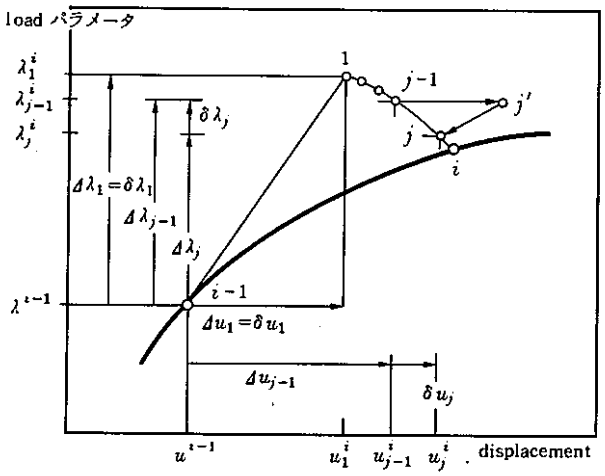


図2-12　記　号

ii）変位コントロール法

変位コントロール法は極限点における特異性をさけるために Argyris により提案されたもので，この方法では，

一つの変位成分を計算経路の制御のためのパラメータとして選択し，このパラメータの値を規定して，対応する荷重レベルを求める。

制御のために選択した変位成分を u_2 とし，簡単のために式(2-9)の平衡方程式を u_2 が最後にくるように並べ換え，式(2-10)を用いると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{Bmatrix}^i = \Delta\lambda^i \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^i \tag{2-14}$$

上式を変換すると，

$$\begin{bmatrix} K_{11} & -P_1 \\ K_{21} & -P_2 \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}^i - \begin{Bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{Bmatrix}^i \Delta u_2^i \tag{2-15}$$

明らかに，上式では係数マトリックスの対称性が失なわれている。上式の第1式は，

$$[K_{11}]^i \Delta\{u_1\}^i = \Delta\lambda^i \{P_1\} + \{R_1\}^i - \{K_{12}\}^i \Delta u_2^i \tag{2-16}$$

ここで，$\Delta\{u_1\}^i$ を次式でおきかえる。

$$\Delta\{u_1\}^i = \Delta\lambda^i \{u_1^{\mathrm{I}}\}^i + \Delta\{u_1^{\mathrm{II}}\}^i \tag{2-17}$$

ただし，$\Delta\{u_1^{\mathrm{I}}\}^i$，$\Delta\{u_1^{\mathrm{II}}\}^i$ は次式で与えられる。

$$[K_{11}]^i \{u_1^{\mathrm{I}}\}^i = \{P_1\} \tag{2-18}$$

$$[K_{11}]^i \Delta\{u_1^{\mathrm{II}}\}^i = \{R_1\}^i - \{K_{12}\}^i \Delta u_2^i \tag{2-19}$$

式(2-19)を式(2-15)の第2式に代入すると，$\Delta\lambda^i$ を求めることができる。

$$\Delta\lambda^i = \frac{-R_2^i + \llcorner K_{21} \lrcorner^i \Delta\{u_1^{\mathrm{II}}\}^i + K_{22}^i \Delta u_2^i}{P_2 - \llcorner K_{21} \lrcorner^i \{u_1^{\mathrm{I}}\}^i} \tag{2-20}$$

式(2-15)の非対称方程式を解くかわりに，式(2-16)を用いて，対称な $[K_{11}]^i$ マトリックスについて2つの荷重項を同時に解くことにより解を求めることができる。

この方法による変位コントロール法は，最初 Pian と Tong により不釣合い力を考慮しない形で提案された。不釣合い力を考慮する形では Sobir と Lock が定式化を行なっている。上述の定式化では連立方程式における係数マトリックスが $[K]^i$ から $[K_{11}]^i$ に修正されているが，Batoz と Dhatt はもともとの剛性マトリックス $[K]^i$ を用いる方法を提案している。

もともとの剛性マトリックス $[K]^i$ を用いた場合には，規定変位自由度 u_2 を含んだ式(2-19)をもとに定式化を行なう。変位ベクトル $\Delta\{u\}^i$ を式(2-17)に対応して次式で表わす。

$$\Delta\{u\}^i = \Delta\lambda^i \{u^{\mathrm{I}}\}^i + \Delta\{u^{\mathrm{II}}\}^i \tag{2-21}$$

ここで，

$$[K]^i \{u^{\mathrm{I}}\}^i = \{P\} \tag{2-22}$$

$$[K]^i \Delta\{u^{\mathrm{II}}\}^i = \{R\}^i \tag{2-23}$$

規定自由度 u_2 についても式(2-21)の関係が与えられる。

$$\Delta u_2^i = \Delta\lambda\,(u_2^{\mathrm{I}})^i + (\Delta u_2^{\mathrm{II}})^i \tag{2-24}$$

したがって，荷重係数 $\Delta\lambda^i$ は次のようになる。

$$\Delta\lambda^i = \frac{\Delta u_2^i - (\Delta u_2^{\mathrm{II}})^i}{(u_2^{\mathrm{I}})^i} \tag{2-25}$$

ただし，式(2-22)，(2-23)の連立一次方程式では，u_2 については未知自由度として取り扱う。

ステップ i 内で収束計算を行なう場合には，各収束サイクル間の荷重係数の増分 $\delta\lambda_j^i$ は次のようになる。

$$\delta\lambda_j^i = \begin{cases} \dfrac{\Delta u_2^i - (\delta u_2^{\mathrm{II}})_j^i}{(u_2^{\mathrm{I}})_j^i} & (j=1) \\ \dfrac{(\delta u_2^{\mathrm{II}})_j^i}{(u_2^{\mathrm{I}})_j^i} & (j>1) \end{cases} \tag{2-26}$$

ただし，

$$[K]_j^i \{u^{\mathrm{I}}\}_j^i = \{P\} \tag{2-27}$$

$$[K]_j^i \delta\{u^{\mathrm{II}}\}_j^i = \{R\}_j^i \tag{2-28}$$

iii) 弧長増分法

係数 α，β によりスケーリングされた変位荷重空間（αu，βP）において，変位荷重曲線に沿う長さの増分 ΔS を次式で定義する。

$$\alpha^2 \Delta\{u\}^T \cdot \Delta\{u\} + \beta^2 \Delta\{P\}^T \cdot \Delta\{P\} = \Delta S^2 \tag{2-29}$$

上式において α，β は適切に選択された既知のスカラー量であるとする。式(2-10)を増分形にして上式に代入すると，ステップにおける弧の長さの増分 ΔS^i が求まる。

$$\alpha^2 (\Delta\{u\}^i)^T \cdot \Delta\{u\}^i + \beta^2 (\Delta\lambda^i)^2 \{P\}^T \{P\} = (\Delta S^i)^2 \tag{2-30}$$

弧長増分法は上式を用いて，長さの増分 ΔS^i を適切な値になるように $\Delta\lambda^i$ を制御することにより，荷重増分を制御する方法である。解くべき平衡方程式は次のようになる。

$$[K]^i \Delta\{u\}^i = \Delta\lambda^i \{P\} + \{R\}^i \tag{2-31}$$

この場合には，式(2-30)で表わされる付帯条件を伴なっているので，ラグランジェ乗数法あるいはペナルティ法の適用が考えられるが，いずれも適切でない。ここでは式(2-21)と同様に Wessels によって提案された2段階法を適用する。

$$\Delta\{u\}^i = \Delta\lambda^i \{u^{\mathrm{I}}\}^i + \Delta\{u^{\mathrm{II}}\}^i \tag{2-32}$$

ただし，

$$[K]^i \{u^{\mathrm{I}}\}^i = \{P\} \tag{2-33}$$

$$[K]^i \Delta\{u^{\mathrm{II}}\}^i = \{R\}^i \tag{2-34}$$

式（2-33），（2-34）は係数マトリックスが同じであるため，同時に連立方程式を解くことができる。求まった $\{u^{\mathrm{I}}\}^i$，$\Delta\{u^{\mathrm{II}}\}^i$ より，式（2-30），（2-32）を用いて，次式で表わされる2次式を解くことにより，規定された弧の長さ ΔS^i に対する荷重係数増分 $\Delta\lambda^i$ を求めることができる。

$$a(\Delta\lambda^i)^2 + 2b\Delta\lambda^i + c = 0 \tag{2-35}$$

ただし，

$$\begin{aligned} a &= \alpha^2(\{u^{\mathrm{I}}\}^i)^T\{u^{\mathrm{I}}\}^i + \beta^2\{P\}^T\{P\} \\ b &= (\{u^{\mathrm{I}}\}^i)^T\Delta\{u^{\mathrm{II}}\}^i \\ c &= (\Delta\{u^{\mathrm{II}}\})^T\Delta\{u^{\mathrm{II}}\} - (\Delta S^i)^2 \end{aligned} \tag{2-36}$$

収束計算を行なう場合には，1回目の収束計算では式（2-35）により荷重係数増分 $\delta\lambda_1^i$ を拘束し，2回目以降の収束計算では，適切な拘束条件を与えて $\delta\lambda_j^i$ を求める。この拘束条件の一つには，各収束サイクルにおいても常に弧の長さを ΔS^i に規定する方法があり，球拘束（Spherical Constraint）と呼ばれている。簡便には，1回目の収束計算で求まった変位荷重空間（αu，βP）における増分ベクトル（δu_j^i，$\beta\delta\lambda_1^i P$）に直交する平面内に各収束サイクルの増分ベクトルが存在するように拘束するもので，法平面拘束（normal plane constraint）と呼ばれる。以下にこの場合の定式を示す。1回目の増分ベクトルに直交するという条件は次式で表わされる。

$$\alpha^2(\delta\{u\}_1^i)^T\delta\{u\}_j^i + \beta^2\delta\lambda_1^i\delta\lambda_j^i\{P\}^T\{P\} = 0 \tag{2-37}$$

収束サイクル j における式（2-31）の関係を式（2-37）に代入して行なう。

$$\alpha^2\delta\lambda_j^i(\delta\{u\}_1^i)^T\{u^{\mathrm{I}}\}_j^i + \alpha^2(\delta\{u\}_1^i)^T\delta\{u^{\mathrm{II}}\}_j^i + \beta^2\delta\lambda_1^i\delta\lambda_j^i\{P\}^T\{P\} = 0 \tag{2-38}$$

上式を $\delta\lambda_j^i$ について解くと次のようになる。

$$\delta\lambda_j^i = -\frac{\alpha^2(\delta\{u\}_1^i)^T\delta\{u^{\mathrm{II}}\}_j^i}{\alpha^2(\delta\{u\}_1^i)^T\{u^{\mathrm{I}}\}_j^i + \beta^2\delta\lambda_1^i\{P\}^T\{P\}} \tag{2-39}$$

修正 Newton-Raphson 法を用いるならば，式（2-33），（2-34）の剛性マトリックスは最初の収束計算で1回だけ計算すればよく，したがってその場合，$\{u^{\mathrm{I}}\}_j^i$ は収束過程で不変である。これを $\{u^{\mathrm{I}}\}^i$ とすると，上式は以下のようになる。

$$\delta\lambda_j^i = -\frac{\alpha^2(\delta\{u\}_1^i)^T\delta\{u^{\mathrm{II}}\}_j^i}{\alpha^2(\delta\{u\}_1^i)^T\{u^{\mathrm{I}}\}^i + \beta^2\delta\lambda_1^i\{P\}^T\{P\}} \tag{2-40}$$

図2-13に弧張増分法のアルゴリズムを示す。

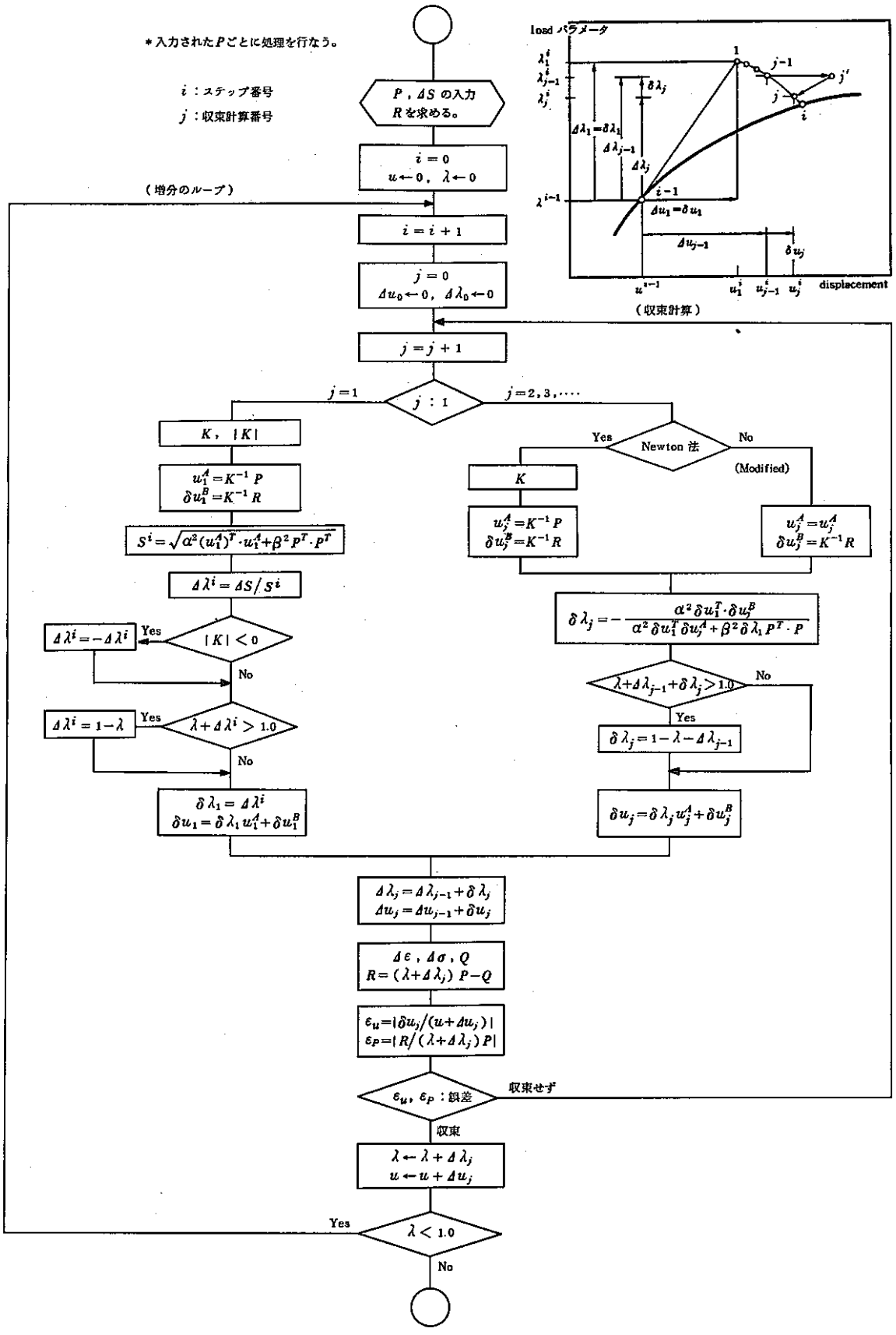


図 2-13　弧張増分法のアルゴリズム

(3) スウェリング解析機能の適用範囲の拡張

スウェリング解析機能は従来，熱弾性領域においてだけ適用可能であったが，今回の改良により適用範囲が拡張されて，熱弾塑性，クリープおよび熱弾塑性クリープ領域においてもスウェリング解析が可能となった。

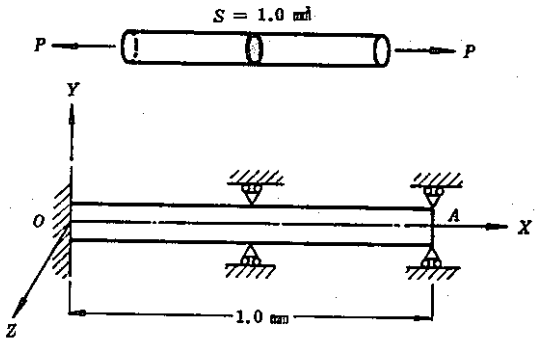
(4) 繰返しクリープ硬化則の整備

応力反転が生じるような繰返し負荷において，材料のクリープ硬化は部分的に回復しながら，繰返しとともに進展して行く。そして定常状態に達すると，クリープ硬化は各サイクル内で一定の硬化範囲を往復するだけで進展しない。このようなクリープ硬化モデルを取り扱う繰返しクリープ硬化則の整備が行なわれた。

（計算例）

繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題の解析結果を以下に示す。

断面積 1.0 mm^2 の棒



材料定数

- 弾性特性，クリープ式（$\alpha_R = 7.0$）ともに SUS 304 鋼
- 初期クリープひずみ硬化量 $\bar{\varepsilon}^H = 0.02$

負荷条件

- 規定変位　$u_X = 1.5669 \times 10^{-3}$mm
- 熱 荷 重　$T = 550$°C 一定
- クリープ時間　$t = 10$ 時間

図 2-14　繰返しクリープ硬化則を用いた弾性クリープ問題

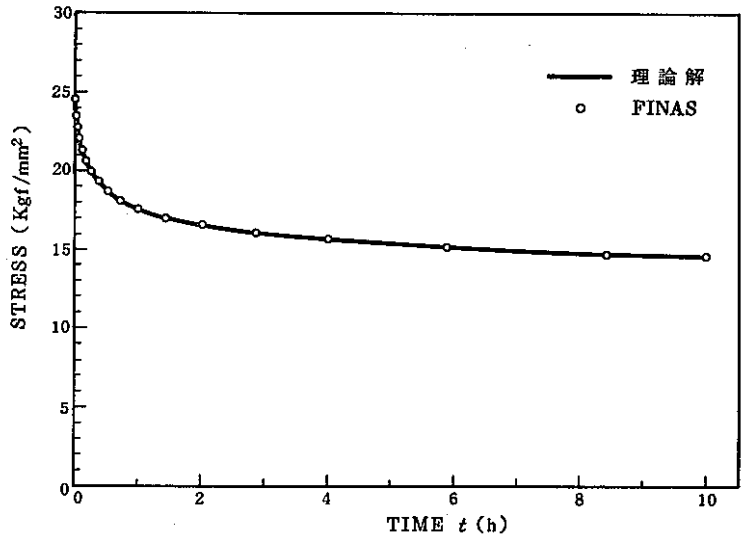


図 2-15　応力の時間履歴

(5) 要素の改良および拡張

a） AXSHEL2 要素の改良

2節点軸対称シェル要素 AXSHEL2 の改良と計算例について説明する。AXSHEL2 を曲面のモデル化に使用した時，応力とひずみの分布に乱れがみられることが指摘されていた。これは，変位 - ひずみ変換マトリックスでの定式化における仮定を設けること，例えば曲率の導関数や方向余弦の1階微分の評価に問題があると思われる。

改良の指針として補間関数に Hermite の3次式を厳密に適用して定式化を行なった。軸対称シェルにおいて軸方向 S，厚さ方向 Z の位置における変位-ひずみ関係式は次のように与えられる。

$$\varepsilon_{\varphi}^{Z}=\frac{\partial u}{\partial S}+\frac{w}{R_1}+Z\left\{-\frac{\partial^2 w}{\partial S^2}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial S}+u\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{R_1}\right)\right\}$$

$$\varepsilon_{\theta}^{Z}=\frac{1}{R_0}(\alpha u+\beta w)+Z\frac{\alpha}{R_0}\left(\frac{u}{R_1}-\frac{\partial w}{\partial S}\right)$$

ここで，$\varepsilon_{\varphi}^{Z}$ と ε_{θ}^{Z} は軸方向ひずみと周方向ひずみを表わし，u と w は軸方向変位とこれに直交する面外変位を表わす。R_1 と R_0 は曲率半径と回転半径，α と β は全体座標系から局所系への方向余弦である。補間関数として Hermite の3次式を適用して有限要素定式化を行なった。

（計算例）

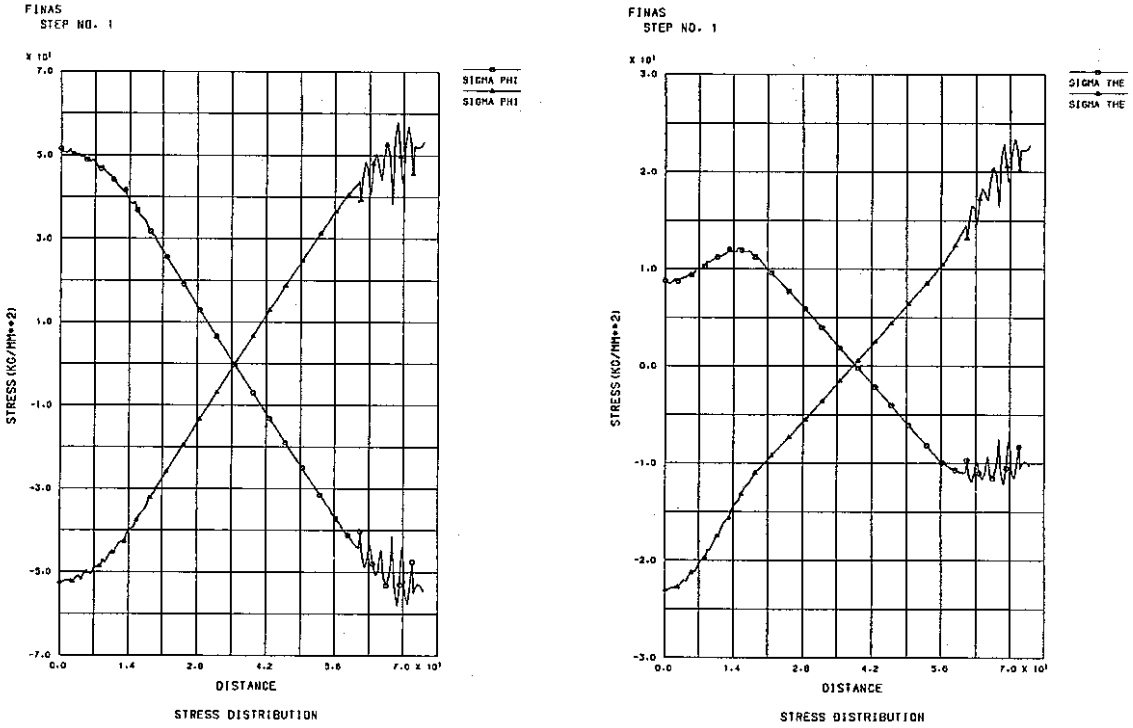
ベローズの半山モデルに対して，AXSHEL2 要素によりモデル化を行なって解析し，改良前と改良後の内外表面における軸方向，周方向応力分布の比較を行なった。

図 2-16 からわかるように，従来の要素では応力の分布に乱れが見られたが，改良により改善された。

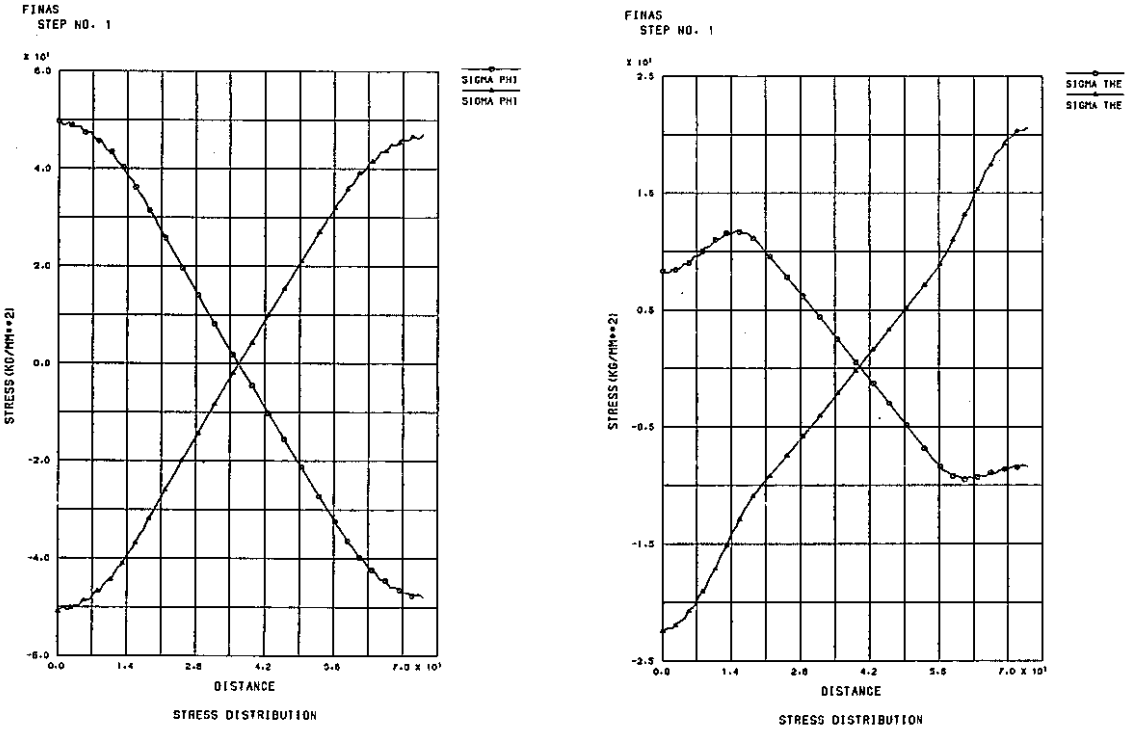
b） 改良および拡張

要素の改良として，4節点四辺形平板シェル要素 QFLA4R の面の法線回り剛性として仮想の剛性を導入した。従来の要素では法線回転剛性を持たないので，境界条件に特別の考慮が必要であり，使用上で不便を与えることがあった。改良の方法としては，Zienkiewiz の仮想回転剛性を法線回りの剛性に仮定することで特異性を除いた。

機能拡張としては，8節点四辺形軸対称要素 QAX8，4節点四辺形軸対称要素 QAX4，20節点六面体要素 HEX20 が大変形解析可能となった。



(a) 従来の AXSHEL2 要素



(b) 改良後の AXSHEL2 要素

図 2-16　ベローズ内外表面の応力分布

(6) 接触問題解析機能の整備

接触問題解析のための２次元接触要素 CONT2 が組み込まれた。

この要素は接触面での垂直方向および水平方向のせん断剛性をもち，接触面のすべりに関してはクーロン摩擦が考慮できる。

3. 熱伝導解析

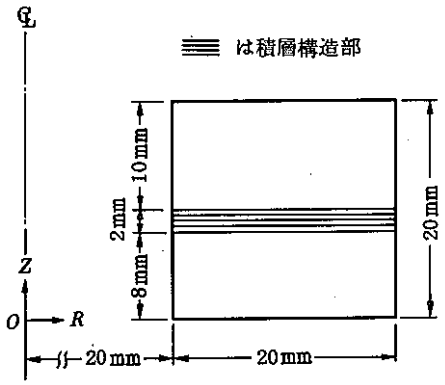
(1) 異方性の導入

熱伝導係数は空間座標に対して異なる値，すなわち異方性を有しているケースもあるが，従来 FINAS では熱伝導係数は等方向のものしか取り扱うことができなかった。しかし，今回の改良により熱伝導係数の直交異方性の入力が可能となり，その異方性の主軸が空間座標軸に一致する場合と一致しない場合の取り扱いが可能となった。

（計算例）

熱伝導率の直交異方性が考慮された定常熱伝導問題の解析結果を以下に示す。

構造は仮想の軸対称構造とする。



・材料定数

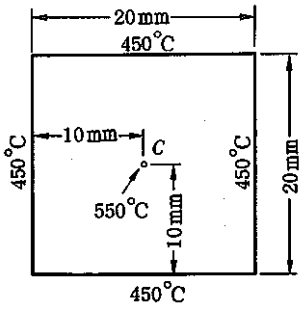
積層構造部：直交異方性

他 の 部 分：等方性

熱伝導率（ kcal/mm・sec・℃ ）

	成　分	450℃	500℃	550℃
積層構造部	k_R	4.86×10^{-6}	5.02×10^{-6}	5.18×10^{-6}
	k_Z	4.86×10^{-7}	5.02×10^{-7}	5.18×10^{-7}
他の構造部	k_R, k_Z	4.86×10^{-6}	5.02×10^{-6}	5.18×10^{-6}

・境界条件

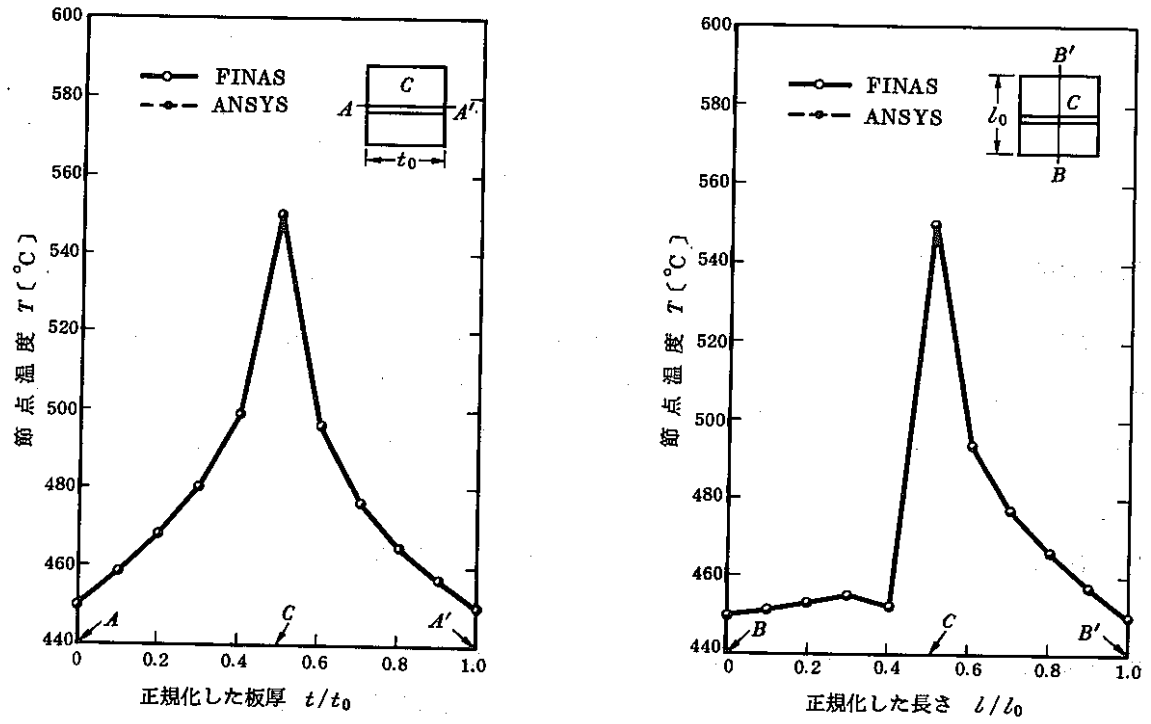


構造周辺　　：T_P^{out} ＝450℃

断面中心（C点）：T_P^{in} ＝550℃

図 3-1　直交異方性が考慮された定常熱伝導問題

・解析結果



a) A−A′ 断面　　b) B−B′ 断面

図3-2　各断面に沿う温度分布

(2) 輻射解析機能の改良

熱伝導解析において境界において輻射をうけるとき，平衡条件式は絶対温度の単位で与えられる。今回の改良により輻射解析の温度単位として摂氏（℃），華氏（°F），絶対温度（°K または °R）などで指定できるようになった。これにより，材料データライブラリーを用いたモデルでも輻射解析が可能となった。

(3) 時間増分自動決定機能の組み込み

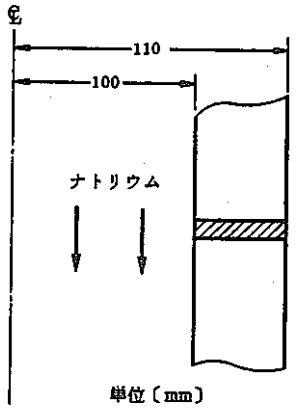
非定常熱伝導解析における時間増分は，単位時間当りの温度変化に依存しており，温度変化率が大きい場合には細かく，小さい場合には粗くするのが一般的である。しかし，実際の解析では温度変化率を定量的に予想することはむずかしいために，解析者にとって時間増分を決定することは大きな負担となっている。

この負担を軽減するために，昨年度の調査，検討によって報告した方法，すなわち，前3ステップの結果から次のステップで一定の基準値を満足する時間増分を推定し，くり返し計算によりその時間増分を修正する時間増分自動決定機能が組み込まれた。

（計算例）

時間増分自動決定機能を利用した非定常熱伝導問題の解析結果を以下に示す。

内半径 100mmの肉厚円筒を軸対称モデルとして扱う。



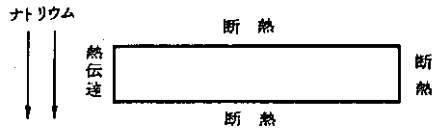
・材料定数

熱伝導率　$k = 4.86\times10^{-6}$ kcal/mm·sec·℃

比　熱　$c = 0.133$ kcal/kg·℃

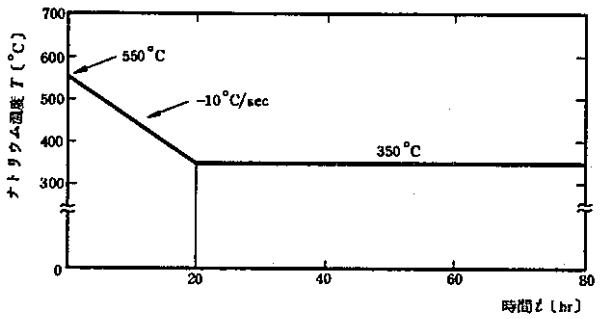
密　度　$\rho = 7.83\times10^{-6}$ kg/mm^3

・境界条件



・入熱条件

熱伝達係数　$h = 4.2\times10^{-6}$ kcal/mm^2·sec·℃



円筒およびナトリウムの温度が550℃一定の定常状態からナトリウムの温度を急激に降下させる。

図 3-3　非定常熱伝導問題

・解析結果

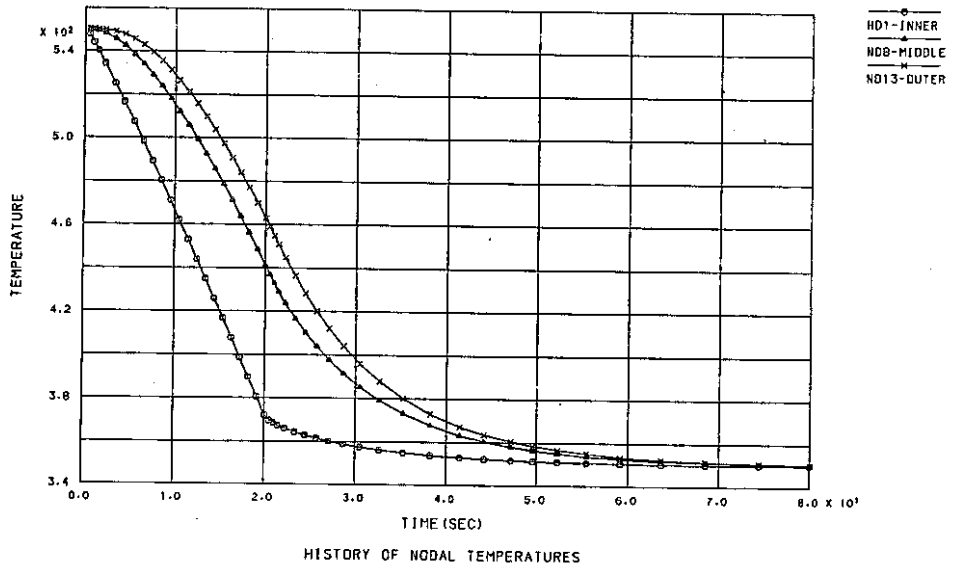


図 3-4　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴

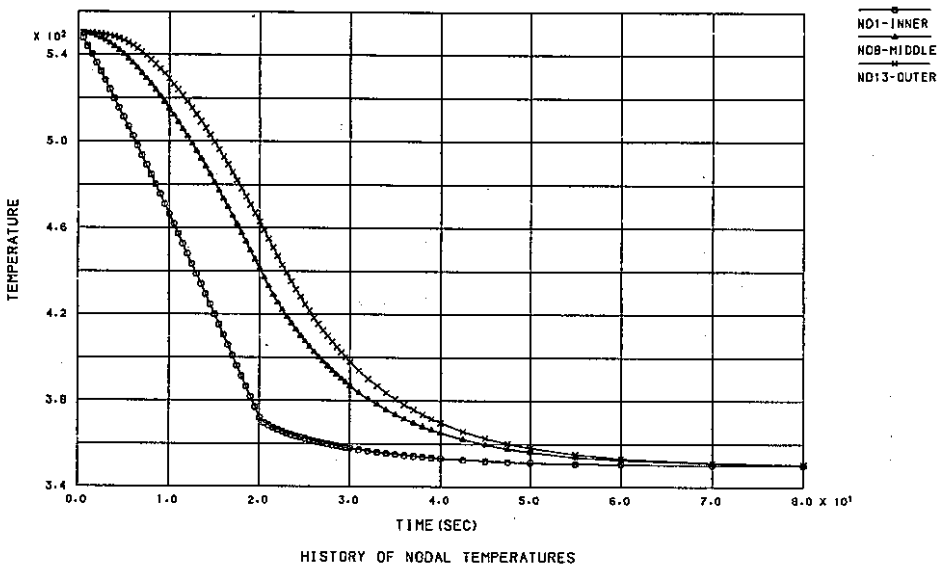


図3-5　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴（VP-507）

表3-1　解析ステップ数の比較

時間増分自動決定	46ステップ	0.59
解析者が定義 VP-507	78ステップ	1

4. 動的解析

(1) 固有値範囲の指定

FINAS では，固有値問題の解法にサブスペース法を用いている。この解法は，最小から複数個の固有値と固有ベクトルを，同時に反復法により求めるものである。この解法をもとにして，固有値範囲 λ_1 から λ_2（$\lambda_1 < \lambda_2$） のすべての固有値を求めるアルゴリズムについて以下に述べる。

一般化固有値問題を次式により表わす。

$$[A]\{\phi\} = \lambda[B]\{\phi\} \qquad (4-1)$$

ここで，$[A]$，$[B]$ は正値対称マトリックスである。

まず，Strum 列法により，固有値範囲 λ_1 から λ_2 の固有値の数 P を求める。これは，Strum 列の次の性質を利用する。

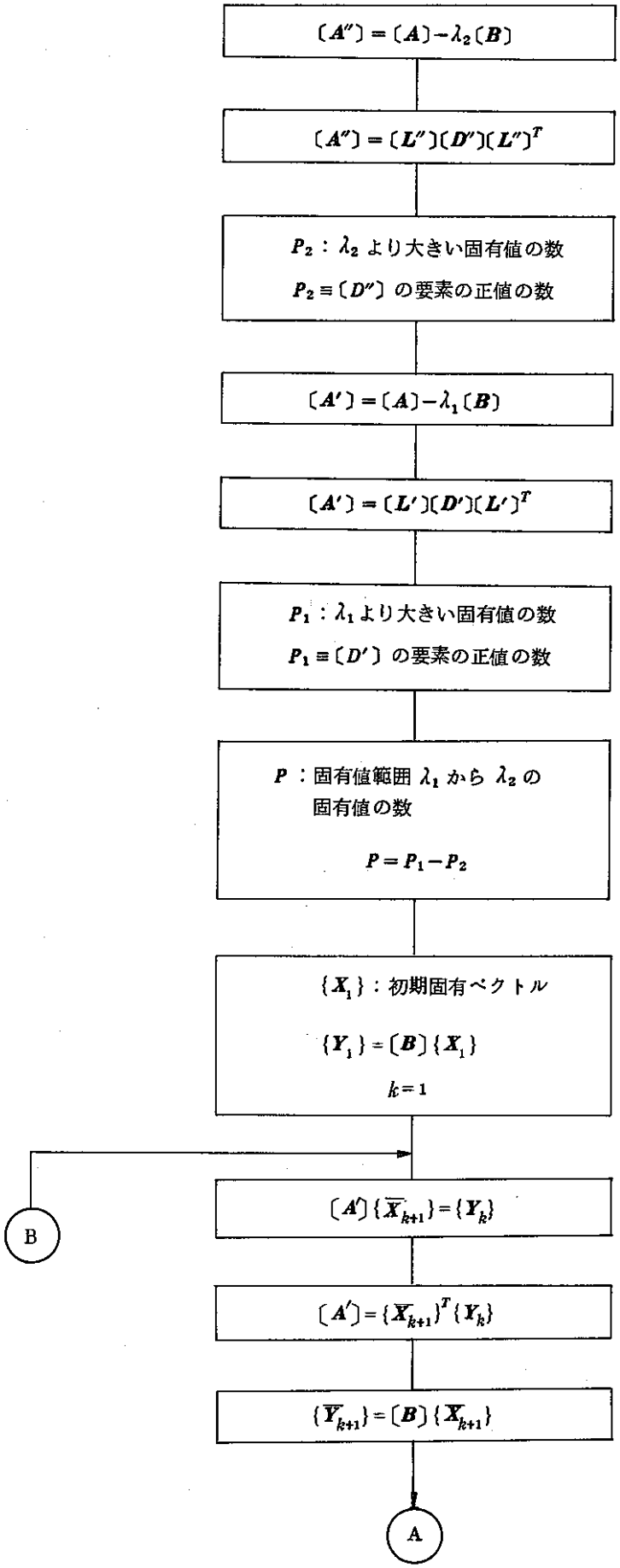
実対称マトリックス $([A]-\lambda_0[B])$ を $[L][D][L]^T$ と分解したときのマトリックス $[D]$ の要素の正値の数は，λ_0 より大きい固有値の数と一致し，負値の数は λ_0 より小さい固有値の数と一致する。

したがって，マトリックス $([A]-\lambda_1[B])$ を LDL^T 分解し，マトリックス $[D]$ の要素の正値の数から λ_1 より大きい固有値の数 P_1 を求め，さらにマトリックス $([A]-\lambda_2[B])$ についても同様にして，λ_2 より大きい固有値の数 P_2 を求める。固有値範囲 λ_1 から λ_2 の固有値の数は $P=P_1-P_2$ となり，固有値 λ_1 より大きい P 個の固有値および固有ベクトルを求めればよいことがわかる。

つぎに，サブスペース法により，原点を λ_1 だけシフトして P 個の固有値を求める。

$$([A]-\lambda_1[B])\{\phi\} = (\lambda-\lambda_1)[B]\{\phi\} \qquad (4-2)$$

これによって求まった固有値に原点のシフト量 λ_1 を加えることにより，求めるべき固有値 λ が得られる。ここで，式（4-2）のマトリックス $([A]-\lambda_1[B])$ は，固有値の数を求める段階ですでに LDL^T 分解されているため，サブスペース法では これを利用すればよい。


$[A''] = [A] - \lambda_2 [B]$
$[A''] = [L''][D''][L'']^T$
P_2 : λ_2 より大きい固有値の数
$P_2 \equiv [D'']$ の要素の正値の数
$[A'] = [A] - \lambda_1 [B]$
$[A'] = [L'][D'][L']^T$
P_1 : λ_1 より大きい固有値の数
$P_1 \equiv [D']$ の要素の正値の数
P : 固有値範囲 λ_1 から λ_2 の固有値の数
$P = P_1 - P_2$
$\{X_1\}$: 初期固有ベクトル
$\{Y_1\} = [B]\{X_1\}$
$k = 1$
B
$[A'']\{\overline{X}_{k+1}\} = \{Y_k\}$
$[A'] = \{\overline{X}_{k+1}\}^T\{Y_k\}$
$\{\overline{Y}_{k+1}\} = [B]\{\overline{X}_{k+1}\}$
A

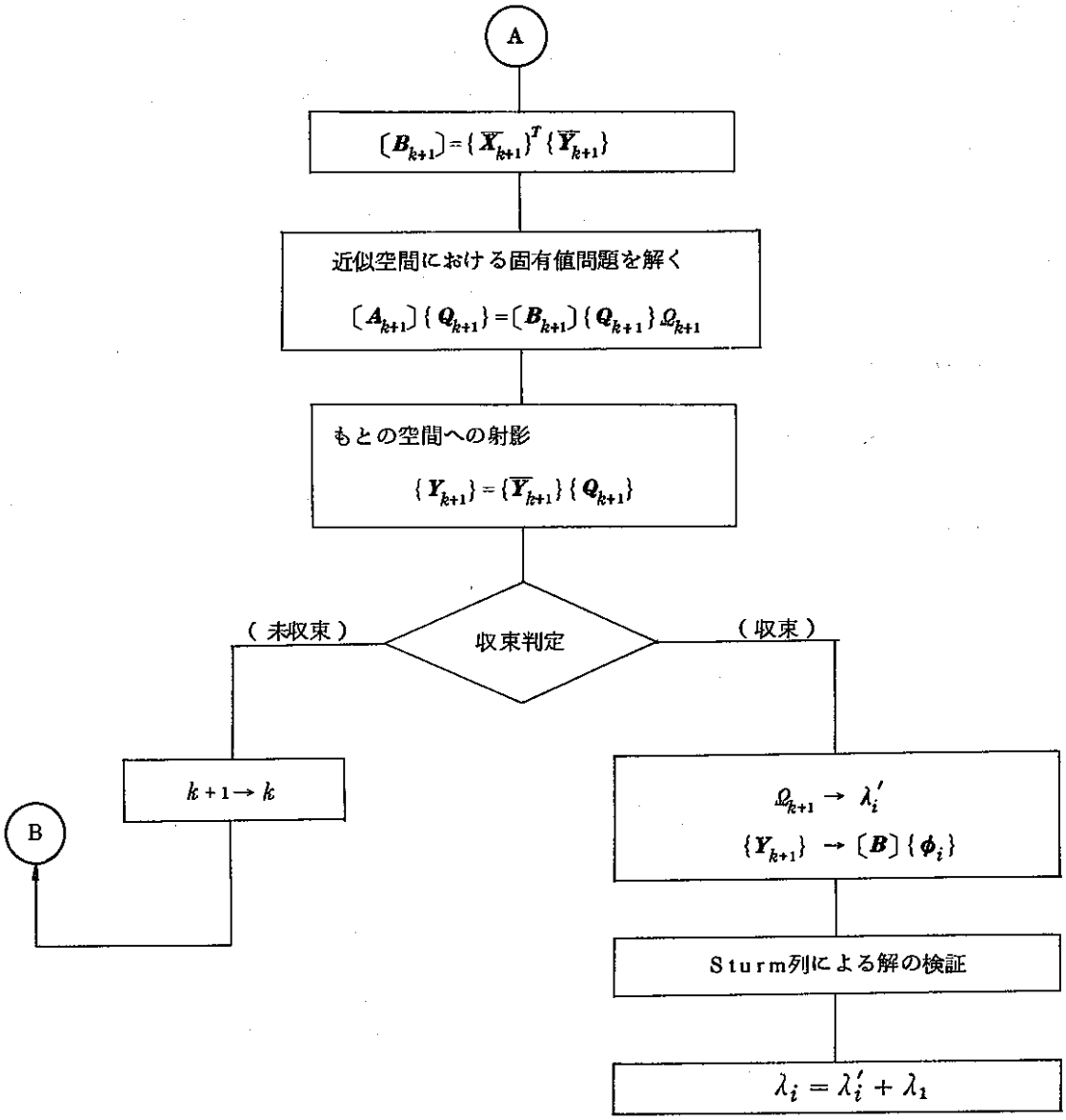


図 4-1　固有値範囲による固有値解法のアルゴリズム

(2)　時間増分自動決定機能の予備検討

a）代表的時間積分法の定式と特徴

現在 FINAS では，時間積分スキームとして Newmark の β 法および Wilson の θ 法の 2 つの陰的方法（ implicit method ）が用意されている。ここでは，上述の 2 つの方法を含む陰的解法の定式と特徴をまとめ，さらに近年，非線形振動（特に衝撃問題）において広く用いられるようになった陽的解法についても調査する。

i）陽的解法と陰的解法

空間を有限要素離散した場合の動的問題に対する支配方程式は次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{P\} \qquad (4-3)$$

上式は時間に関する連立常微分方程式であるから，数値解法においては時間に関して何らかの離散が必要となる。

一般に直接積分法と呼ばれる方法では，式(4-3)における時間に関する微分作用素を差分離散することを基本としている。また，差分離散において，ある時刻の微分作用素をそのステップおよび1つ前のステップの値によって差分近似する方法を単段階法，過去のステップを2つ以上用いる方法を多段階法とよんでいる。ここでは，次の差分離散について考察する。

$$\{u\}^{i+1} = \{u\}^{(i)} + \Delta t\{\dot{u}\}^{(i)} + \frac{1}{2}\Delta t^2\left[\alpha\{\ddot{u}\}^{(i)} + (1-\alpha)\{\ddot{u}\}^{(i+1)}\right]$$
$$\{\dot{u}\}^{(i+1)} = \{\dot{u}\}^{(i)} + \Delta t\left[(1-\beta)\{\ddot{u}\}^{(i)} + \beta\{\ddot{u}\}^{(i+1)}\right] \qquad (4-4)$$

式(4-3)をステップ$(i+1)$について考えると次のようになる。

$$[M]^{(i+1)}\{\ddot{u}\}^{(i+1)} + [C]^{(i+1)}\{\dot{u}\}^{(i+1)} + [K]^{(i+1)}\{u\}^{(i+1)} = \{P\}^{(i+1)} \qquad (4-5)$$

式(4-5)に式(4-4)を代入すると次式が得られる。

$$[A]^{(i+1)}\{\ddot{u}\}^{(i+1)} = \{b\}^{(i)} \qquad (4-6)$$

ここで，

$$[A]^{(i+1)} = [M]^{(i+1)} + \Delta t\beta[C]^{(i+1)} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2(1-\alpha)[K]^{(i+1)}$$
$$\{b\}^{(i)} = \{P\}^{(i)} - \left(\Delta t(1-\beta)[C]^{(i+1)} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\alpha[K]^{(i+1)}\right)\{\ddot{u}\}^{(i)}$$
$$-\left([C]^{(i+1)} + \Delta t[K]^{(i+1)}\right)\{\dot{u}\}^{(i)} - [K]^{(i+1)}\{u\}^{(i)} \qquad (4-7)$$

式(4-4)において$\beta=0$，$\alpha=1$とした場合の差分離散は次のようになる。

$$\{u\}_{\exp}^{(i+1)} = \{u\}^{(i)} + \Delta t\{\dot{u}\}^{(i)} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\{\ddot{u}\}^{(i)}$$
$$\{\dot{u}\}_{\exp}^{(i+1)} = \{\dot{u}\}^{(i)} + \Delta t\{\ddot{u}\}^{(i)} \qquad (4-8)$$

また，式(4-6)における左辺係数マトリックスは次のようになる。

$$[A]_{\exp}^{(i+1)} = [M]^{(i+1)} \qquad (4-9)$$

式(4-8)，(4-9)から明らかなように，あるステップにおける変数を1つ前のステップの値および時間間隔で表わした場合，式(4-6)の左辺係数行列は質量マトリックスと等しくなる。そして〔M〕として集中質量係を採用すると，このアルゴリズムは連立方程式の解法を含まない。このような差分離散を用いたものを「陽的解法」と呼ぶ。

陽的解法を導かない，すなわち差分離散を導かない方法は陰的解法と呼ばれる。たとえば，FINASで採用している Newmark のβ法は式(4-4)を基礎としたものであり，$\alpha=0.5$，$\beta=0.5$は台形則である。これらの方法はステップiと$i+1$の間において加速度を線形補間しているので，「線形加速度法」とも呼ばれている。Wilson のθ法もこの分類に入るものであるが，iと$i+\theta$（$\theta \geqq 1$）を用いてその間の加速度を次式により線形補間している。

$$\{\ddot{u}\}^{i+1} = \{\ddot{u}\}^{(i)} + \frac{\tau}{\theta \Delta t}\left(\{\ddot{u}\}^{(i+\theta)} - \{\ddot{u}\}^{(i)}\right) \tag{4-10}$$

θ の値は通常 1.4 が用いられている。また，Hilber-Hughes-Taylor 法では，式 (4-4) において α と β を次のようにおいている。

$$\begin{aligned} &\alpha = 1 - \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \\ &\beta = \frac{1}{2} - \gamma \\ &-\frac{1}{3} \leqq \gamma \leqq 0 \end{aligned} \tag{4-11}$$

ここで，γ は人工粘性に対する係数であり，$\gamma = 0$ としたものは台形則と一致する。

ii) 陰的解法の基本的性質

陰的解法の基本的性質を考慮するため，次の一次元問題を考える。

$$M\ddot{u} + Ku = P \tag{4-12}$$

ここで，式 (4-4) にしたがって次の仮定を用いる。

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= u^{(i)} + \Delta t\, \dot{u}^{(i)} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left[\alpha \ddot{u}^{(i)} + (1-\alpha)\ddot{u}^{(i+1)}\right] \\ \dot{u}^{(i+1)} &= \dot{u}^{(i)} + \Delta t \left[(1-\beta)\ddot{u}^{(i)} + \beta \ddot{u}^{(i+1)}\right] \end{aligned} \tag{4-13}$$

ここで，

$$u^{(i)} = c_1 z^i \quad ; \quad \dot{u}^{(i)} = c_2 z^i \tag{4-14}$$

として特性方程式を求めると次のようになる。

$$z^2 - \frac{2 + \psi\left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right)}{1 + \frac{1}{2}\psi(1-\alpha)} z + \frac{1 + \psi\left(1 - \beta - \frac{1}{2}\alpha\right)}{1 + \psi(1-\alpha)} = 0 \tag{4-15}$$

ここで，

$$\psi = \sqrt{\frac{K}{M}}\,\Delta t \tag{4-16}$$

系が振動することを考えると式 (4-14) より z は虚根を持つ必要があり，また，系を保存するためには $|z| = 1$ でなければならない。$|z| = 1$ であるためには，任意の ψ に対して式 (4-15) の左第 3 項が 1 となる必要がある。したがって β は次の値となる。

$$\beta = \frac{1}{2} \tag{4-17}$$

また，式 (4-15) に式 (4-17) を代入し，z が虚根を持つためには，次式が満足されなければならない。

$$\left| \frac{1-\frac{1}{2}\alpha\psi}{1+\frac{1}{2}\psi(1-\alpha)} \right| < 1 \qquad (4\text{-}18)$$

たとえば台形則の場合，αは½であるから明らかに上式は満足される。一般に陰的解法として用いるものは，上式を満足するようにα，βの値が定められている。この無条件安定性は線形問題に対して証明されているが，非線形問題についてはそのまま適用することはできない。しかし，微小変形問題における非線形問題に対するNewmark 型の方法の無条件安定性は証明されている。ここで陰的解法の特徴を列挙すると次のとおりである。

(1) 線形問題に対しては無条件安定である。

(2) 連立方程式の求解が各々のステップで必要となる（線形振動で一定の時間増分を用いる場合はこの限りではない）。

(3) 構造物の地震応答解析のように低次モードがその振動系を支配するような場合（Stiff System）には計算効率が良く安定した解が得られる。

(4) 人工粘性の導入により高次振動モードの減衰効果をコントロールできる（Hilber-Hughes-Taylor 法）。

(5) 材料非線形問題における除荷時の収束性に問題がある（可変計量スキームとの混用により回避できる）。

iii) 陽的解法の基本的性質

ここでは，陰的解法の場合と同様な考察を行うこととし，陽的解法の離散としては次の中央差分スキームを考える。

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= -u^{(i-1)} + 2u^{(i)} + \Delta t^2 \ddot{u}^{(i)} \\ \dot{u}^{(i)} &= \frac{1}{2\Delta t}\left(u^{(i+1)} - u^{(i)}\right) \end{aligned} \qquad (4\text{-}19)$$

このスキームに対する特性方程式は次のようになる。

$$z^2 - 2\left(1-\frac{1}{2}\psi\right)z + 1 = 0 \qquad (4\text{-}20)$$

ここで，上式が虚根を持つためには次式が成立しなければならない。

$$\left| 1-\frac{\psi}{2} \right| < 1 \qquad (4\text{-}21)$$

したがって，

$$0 < \Delta t < \frac{2}{w} \qquad (4\text{-}22)$$

上式は Courant 条件に対応するものであり，ここで

$$w = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad (4\text{-}23)$$

式（4-22）は中央差分スキームにおける安定条件であり，このスキームの条件安定を意味している。減衰を含む

場合には，式(4-22)は次のようになる。

$$0 < \Delta t < \frac{2}{w}\left(\sqrt{\mu^2+1}-\mu\right) \tag{4-24}$$

ここで，臨界減衰を c_{cr} とすると，

$$c = \mu c_{cr} \tag{4-25}$$

である。一般に多自由度系ではwとしては最大の振動系を考えればよいが，系の最大振動数はその構成する有限要素の最大値によって上限があるので，各々の要素について考えればよい。代表的有限要素の最大角振動数は文献〔3〕に与えられており，表4-1のようになる。 ここで，陽的解法の特徴を要約すると次のようになる。

(1) 条件安定である(時間増分の選択に注意を要する)。

(2) 計算アルゴリズムが簡単である。

(3) 1つの増分に対する計算時間は陰的解法と比較して非常に少ないが，増分回数は多くなる。

表4-1 代表的有限要素の最大振動数w

バネ・集中質量	$\sqrt{\dfrac{k^a\,(M_1+M_2)}{M_1 M_2}}$
バネ・分布質量	$\dfrac{2c}{l}$
梁一様質量	$\dfrac{2c}{l}$ or $\sqrt{\dfrac{48c^2 I}{l^2}\left[\dfrac{1}{Al^2}+\dfrac{3}{12I+Al^2}\right]}$
板	$\dfrac{2c}{L}$ or $\dfrac{4ch}{L^2}$

A ： 断面積

c ： 弾性波の伝播の速度

h ： 板厚

I ： 断面二次モーメント

k ： バネ係数

L ： 要素対角

M_i ： 集中質量

l ： 要素長さ

b) 空間離散と時間増分の関係

熱方程式に対する空間離散と時間離散の適合性の測度として，Courant 条件を別の観点から評価し，Courant 条件を安定性の測度としてでなく空間離散に対する時間離散の基準として用いた研究がある。ここでは，この考え方を動的問題に対して応用する。すなわち，空間メッシュに対応する時間増分として Courant 条件を用いることを出発とする。この考え方は構造の振動現象を解明することを目的とし，構造モデルの表現し得る振動数および振

動モードは Courant 条件によって与えられる時間増分によって適切に表現し得ることに基づいている。この考え方では，有限要素モデルと外的荷重の周期特性は適切であるという仮定が基本である。以下，この考え方を採用した場合の具体例として２つの代表的振動モデルを考察する。

c）解 析 例

i）梁の曲げ振動

ここでは，片持ち梁の自由端に作用する負荷が調和関数で与えられる場合を例にとり，Newmark の β 法を用いた負荷履歴および時間積分の離散化が解に与える影響について調査を行なう。

・解析条件

構 造

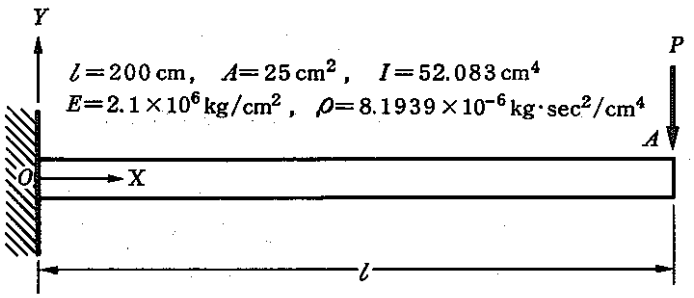


図 4-2　片持ち梁

負荷条件

$$P = P_0 \sin(w_F t) \qquad (0 \leqq t \leqq 0.5\ \mathrm{sec})$$

$$P_0 = 25\,\mathrm{kg}$$

表 4-2　負荷の角振動数 w_F と周期 T_F

	ケース１	ケース２	ケース３	ケース４
w_F〔 rad/sec 〕	196.3	785.4	1570.8	3141.6
T_F〔 sec 〕	32.0×10^{-3}	8.0×10^{-3}	4.0×10^{-3}	2.0×10^{-3}

表 4-3　片持ち梁の曲げに関する角振動数 w_B と周期 T_B

	モード１	モード２	モード３	モード４	モード５	モード６
w_B〔 rad/sec〕	64.2	402.5	1127.1	2208.8	3650.9	5454.1
T_B〔 sec〕	97.8×10^{-3}	15.61×10^{-3}	5.574×10^{-3}	2.8446×10^{-3}	1.7210×10^{-3}	1.1520×10^{-3}

備考　$\dfrac{w_{B_1}+w_{B_2}}{2}=233.4$，$\dfrac{w_{B_2}+w_{B_3}}{2}=764.8$，$\dfrac{w_{B_3}+w_{B_4}}{2}=1667.9$

$\dfrac{w_{B_4}+w_{B_5}}{2}=2929.8$，$\dfrac{w_{B_5}+w_{B_6}}{2}=4552.5$

要素分割とクリティカルな時間増分

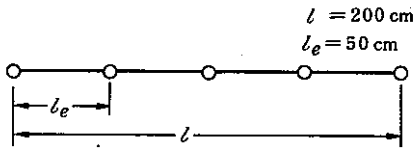


図4-3　要素分割

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1\times10^{6}}{8.1939\times10^{-6}}} = 506.249\times10^{3}\ \mathrm{cm/sec}$$

$$w_{\max}^{\mathrm{ben}} = \frac{48c^{2}I}{\ell_e^{2}}\left[\frac{1}{A\ell_e^{2}} + \frac{3}{12I+A\ell_e^{2}}\right] = 4.03\times10^{3}\ \mathrm{rad/sec}$$

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{w_{\max}^{\mathrm{ben}}} = 4.96\times10^{-4} \fallingdotseq 0.5\times10^{-3}\ \mathrm{sec}$$

負荷履歴の離散化と時間積分における時間増分

表4-4　負荷履歴を離散化する時の時間増分

		ケース1	ケース2	ケース3	ケース4
T_F〔sec〕		32.0×10^{-3}	8.0×10^{-3}	4.0×10^{-3}	2.0×10^{-3}
$\Delta t_F =$〔sec〕	$T_F/4$	—	2.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.5×10^{-3}
	$T_F/8$	4.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.5×10^{-3}	0.25×10^{-3}
	$T_F/16$	2.0×10^{-3}	0.5×10^{-3}	0.25×10^{-3}	0.125×10^{-3}

表4-5　ケース1で使用する積分時間増分

Δt_F〔sec〕 ＼ Δt_I〔sec〕		$8\,\Delta t_{cr}$	$4\,\Delta t_{cr}$	Δt_{cr}
		4.0×10^{-3}	2.0×10^{-3}	0.5×10^{-3}
$\frac{1}{4}\,T_F$	8.0×10^{-3}			
$\frac{1}{8}\,T_F$	4.0×10^{-3}	○		○
$\frac{1}{16}\,T_F$	2.0×10^{-3}		○	○

$T_F = 32.0\times10^{-3}$sec

表 4-6　ケース 2 で使用する積分時間増分

Δt_F〔sec〕 ＼ Δt_I〔sec〕		$4\,\Delta t_{cr}$	$2\,\Delta t_{cr}$	Δt_{cr}
		2.0×10^{-3}	1.0×10^{-3}	0.5×10^{-3}
$\frac{1}{4}\,T_F$	2.0×10^{-3}			○
$\frac{1}{8}\,T_F$	1.0×10^{-3}		○	○
$\frac{1}{16}\,T_F$	0.5×10^{-3}			○

$T_F = 8.0\times10^{-3}$sec

表 4-7　ケース 3 で使用する積分時間増分

Δt_F〔sec〕 ＼ Δt_I〔sec〕		$2\,\Delta t_{cr}$	Δt_{cr}	$\frac{1}{2}\,\Delta t_{cr}$
		1.0×10^{-3}	0.5×10^{-3}	0.25×10^{-3}
$\frac{1}{4}\,T_F$	1.0×10^{-3}		○	
$\frac{1}{8}\,T_F$	0.5×10^{-3}		○	○
$\frac{1}{16}\,T_F$	0.25×10^{-3}			○

$T_F = 4.0\times10^{-3}$sec

表 4-8　ケース 4 で使用する積分時間増分

Δt_F〔sec〕 ＼ Δt_I〔sec〕		Δt_{cr}	$\frac{1}{2}\,\Delta t_{cr}$	$\frac{1}{4}\,\Delta t_{cr}$
		0.5×10^{-3}	0.25×10^{-3}	0.125×10^{-3}
$\frac{1}{4}\,T_F$	0.5×10^{-3}	○	○	
$\frac{1}{8}\,T_F$	0.25×10^{-3}		○	
$\frac{1}{16}\,T_F$	0.125×10^{-3}			○

$T_F = 2.0\times10^{-3}$sec

• 解析結果

図 4-4　ケース 1 における自由端変位の時刻歴 (1)

図 4-5　ケース 1 における自由端変位の時刻歴 (2)

図 4-6　ケース 2 における自由端変位の時刻歴 (1)

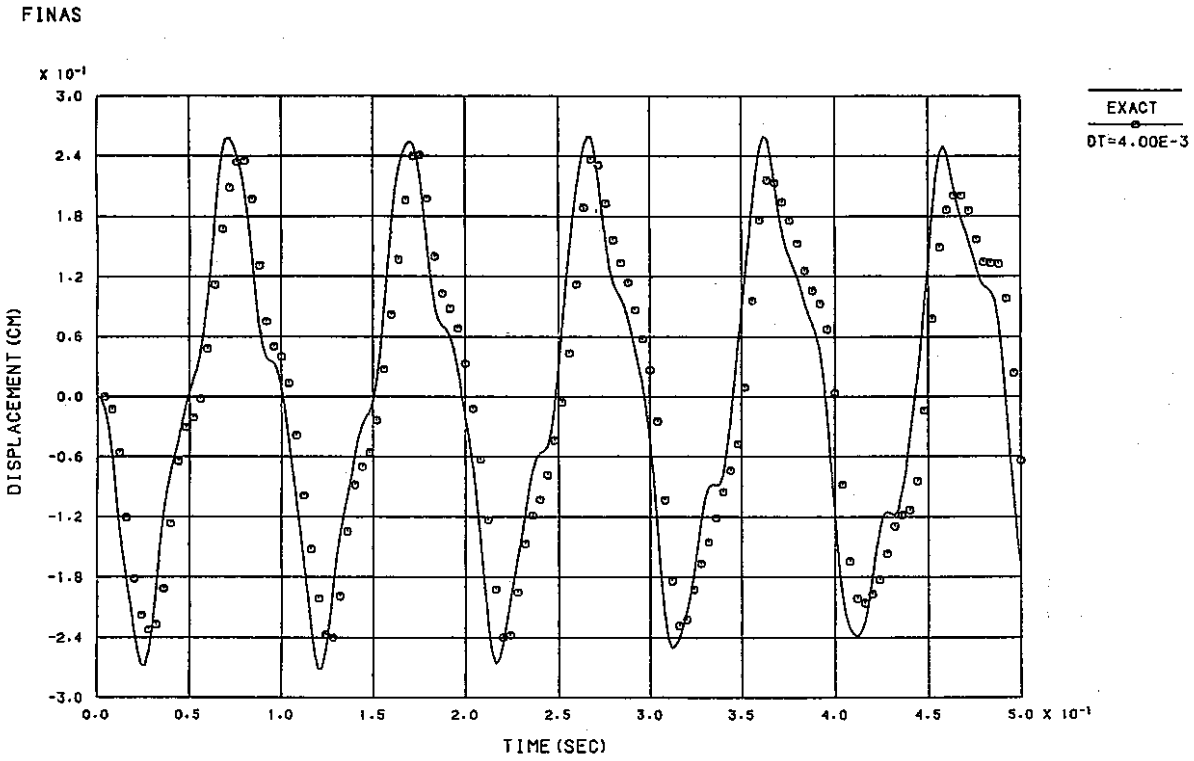
図 4-7　ケース 2 における自由端変位の時刻歴 (2)

図 4-8　ケース 3 における自由端変位の時刻歴 (1)

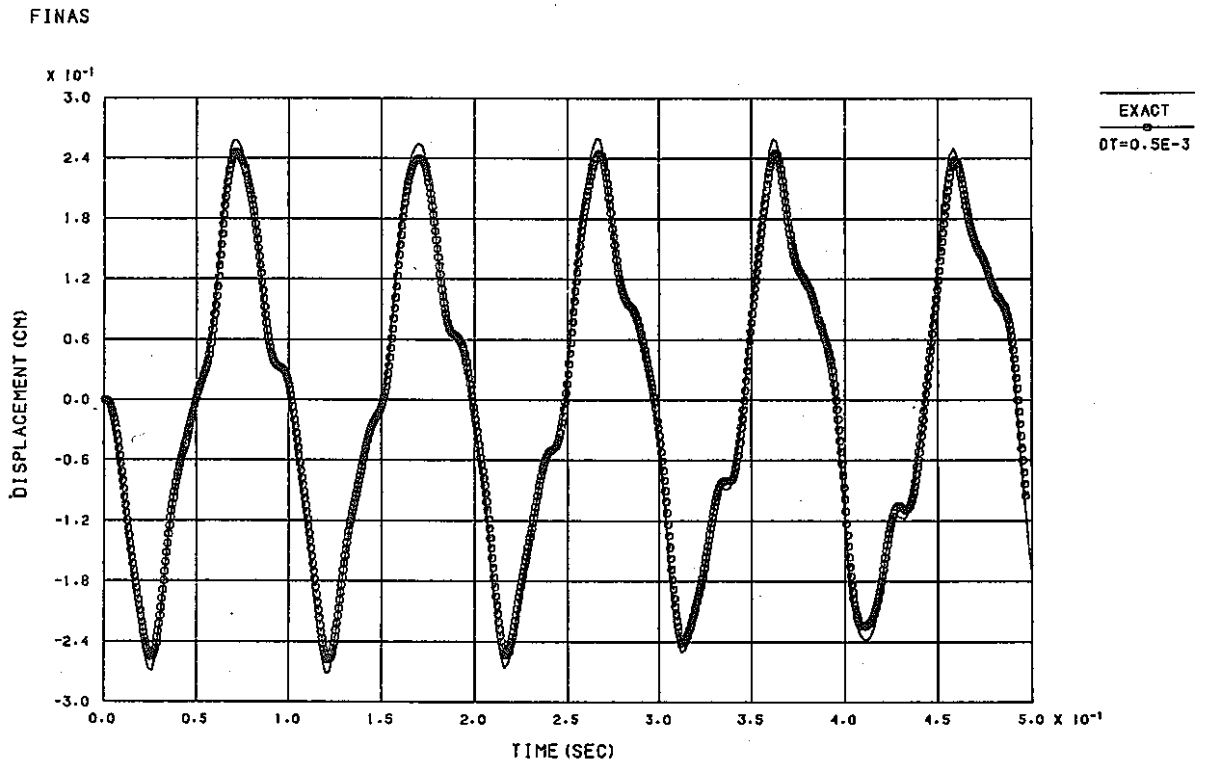
図 4-9　ケース 3 における自由端変位の時刻歴 (2)

図 4-10　ケース 4 における自由端変位の時刻歴 (1)

図 4-11　ケース 4 における自由端変位の時刻歴 (2)

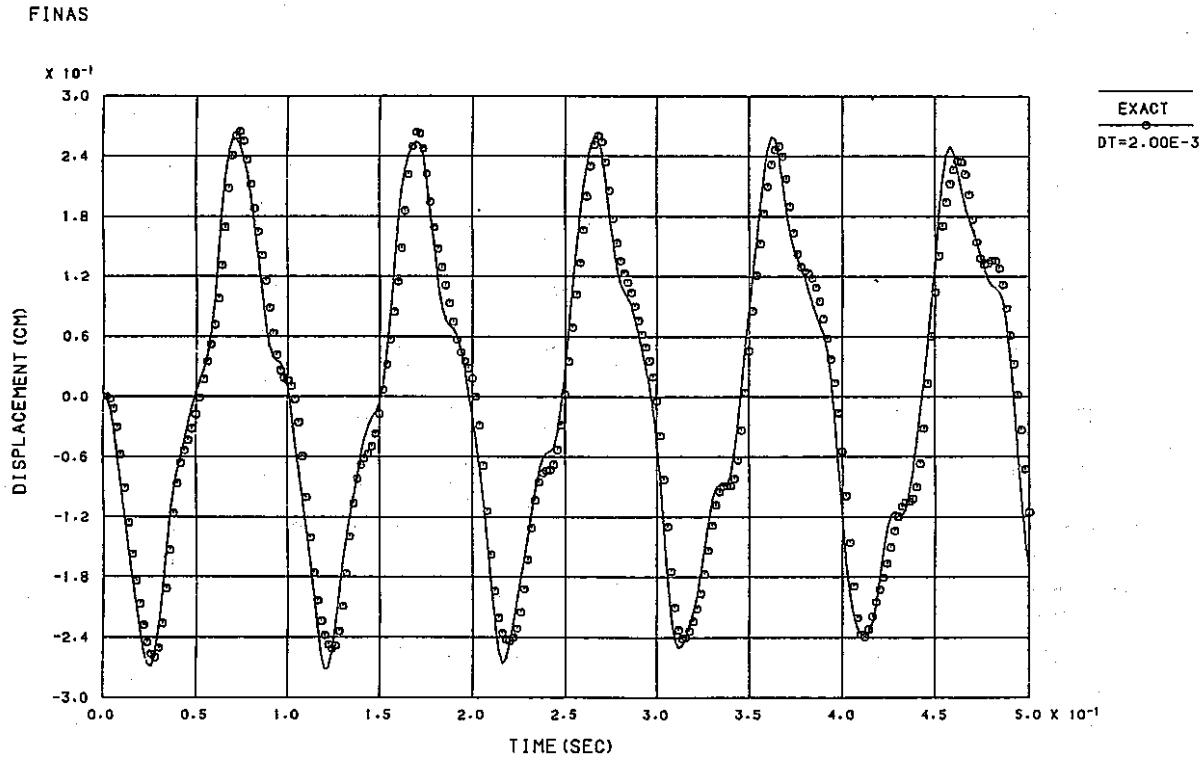


a) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = 8 \Delta t_{cr}$

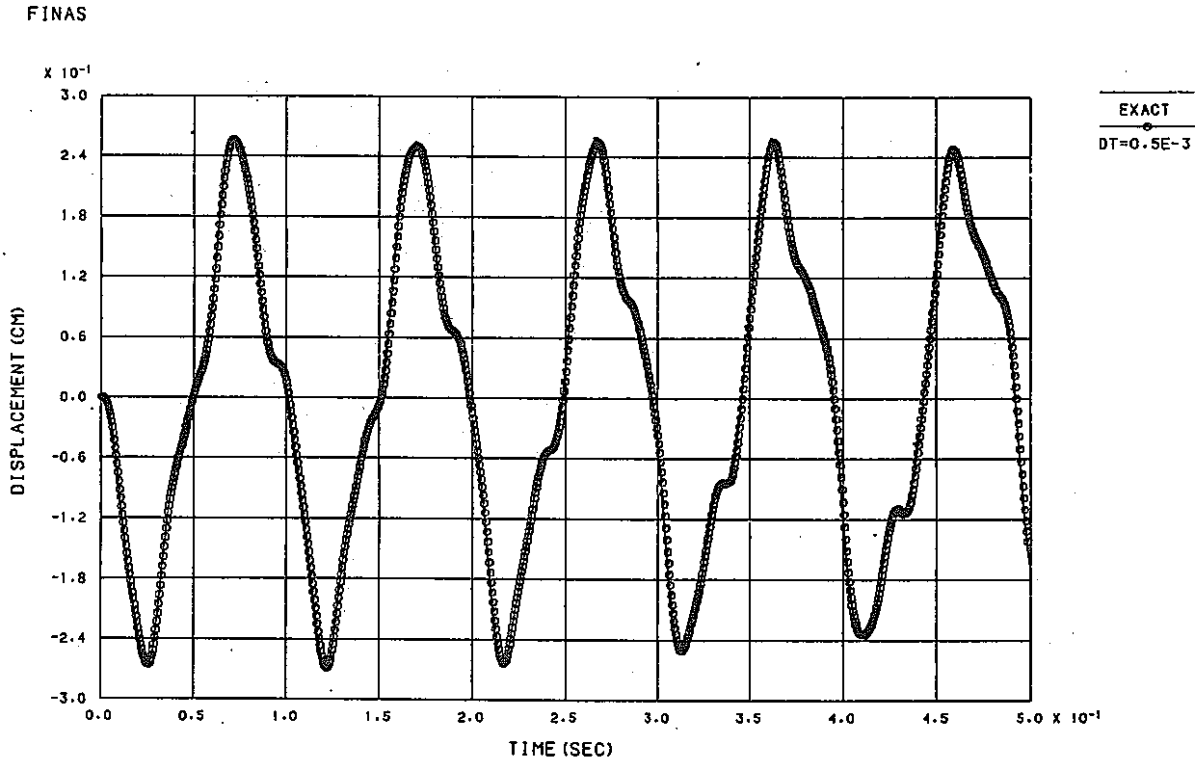


b) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

図 4-4　ケース 1 における自由端変位の時刻歴 (1)

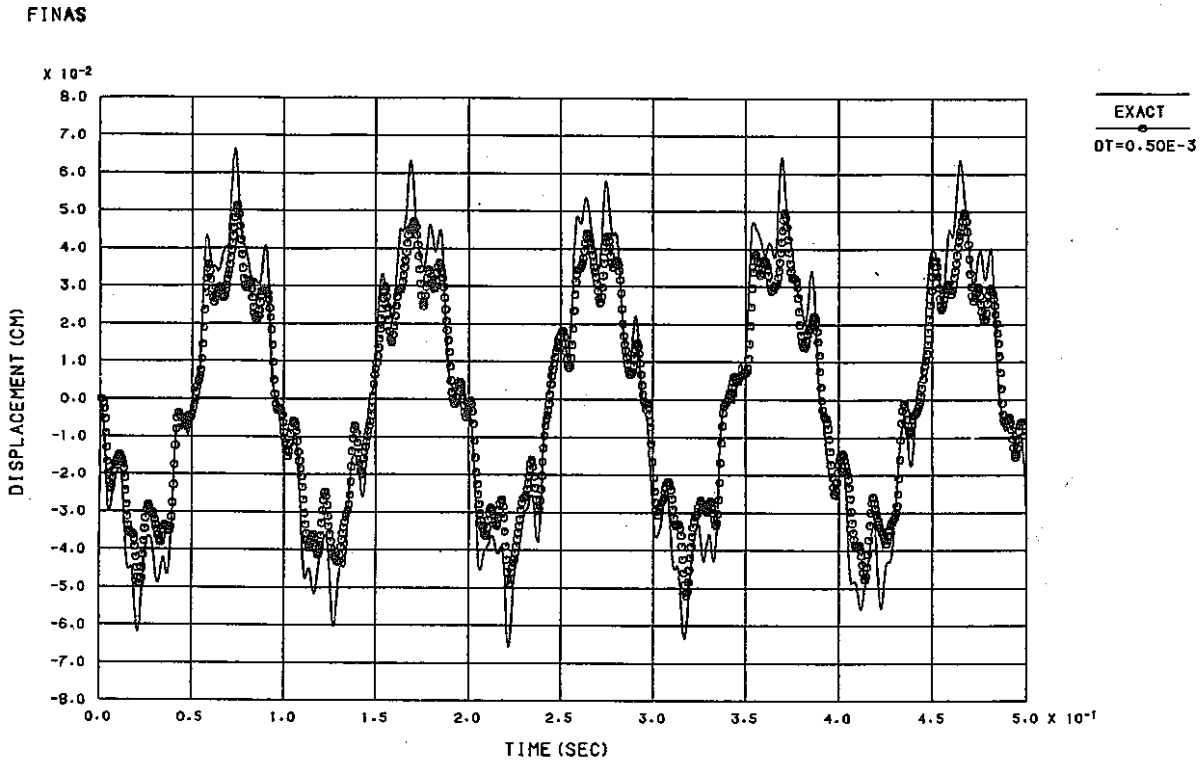


a) $\Delta t_F = \frac{1}{16} T_F$, $\Delta t_I = 4 \Delta t_{cr}$

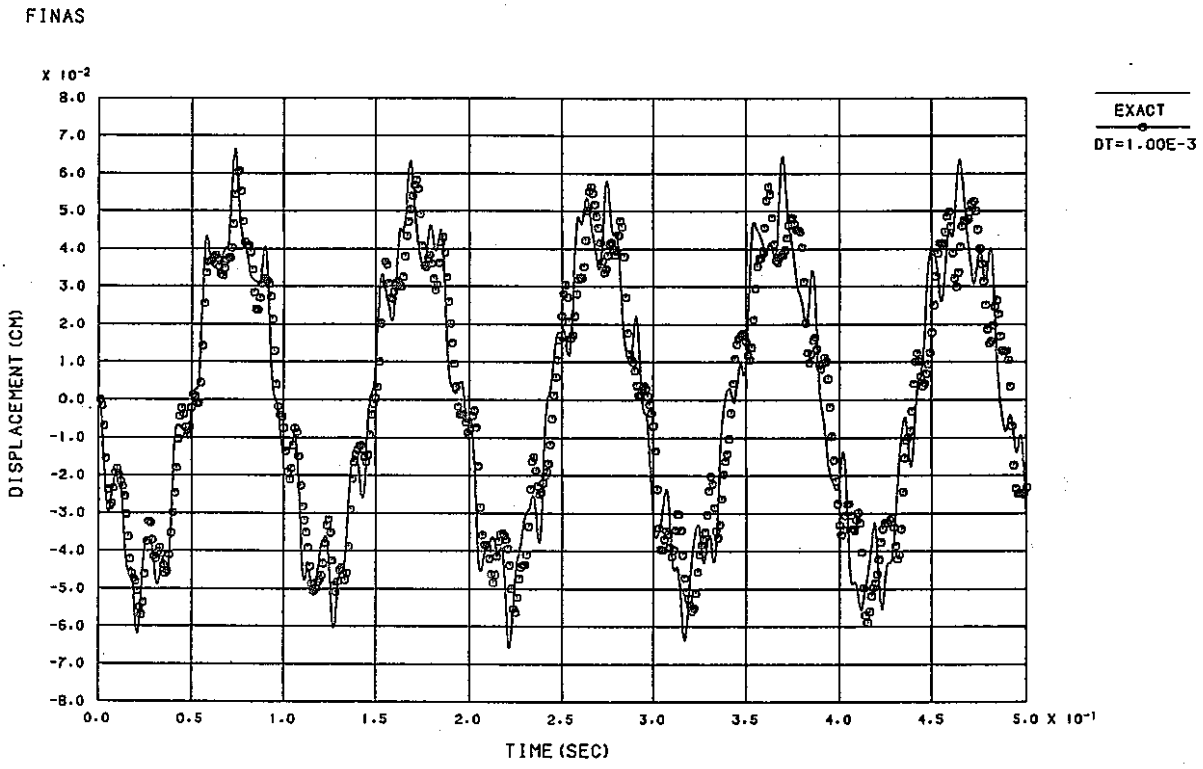


b) $\Delta t_F = \frac{1}{16} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

図4-5　ケース1における自由端変位の時刻歴(2)

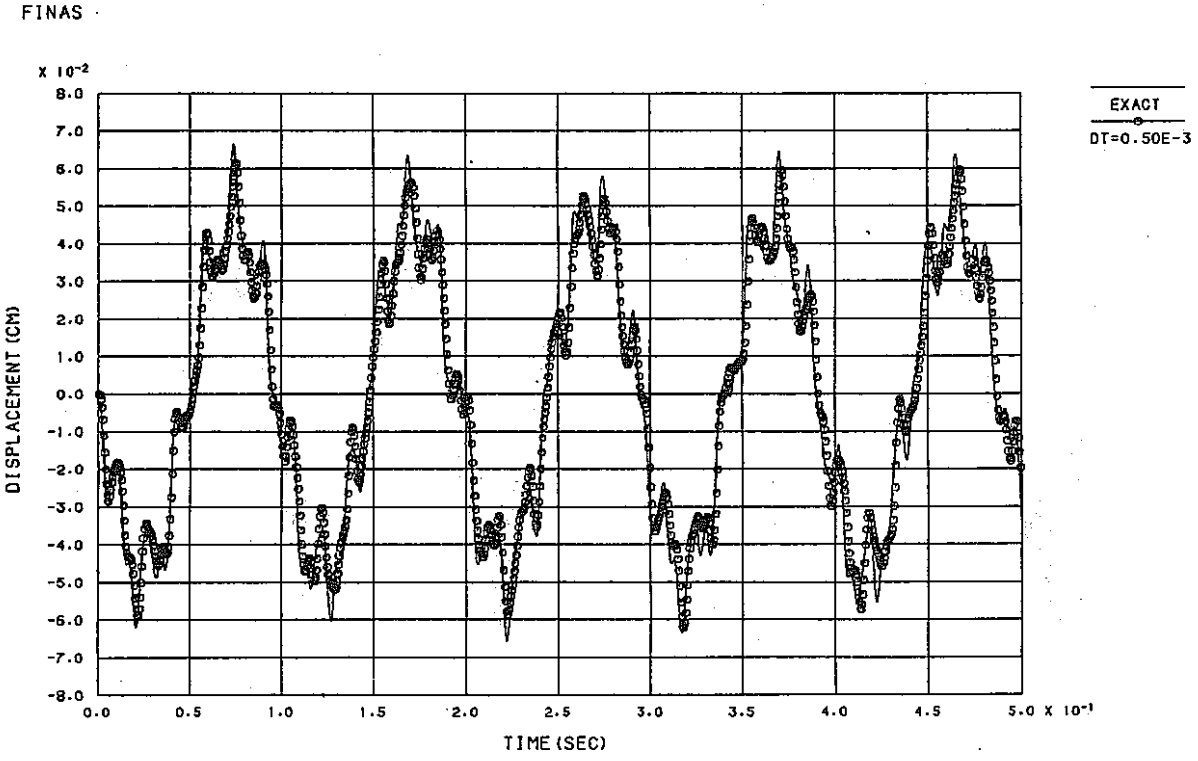


a) $\Delta t_F = \frac{1}{4} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

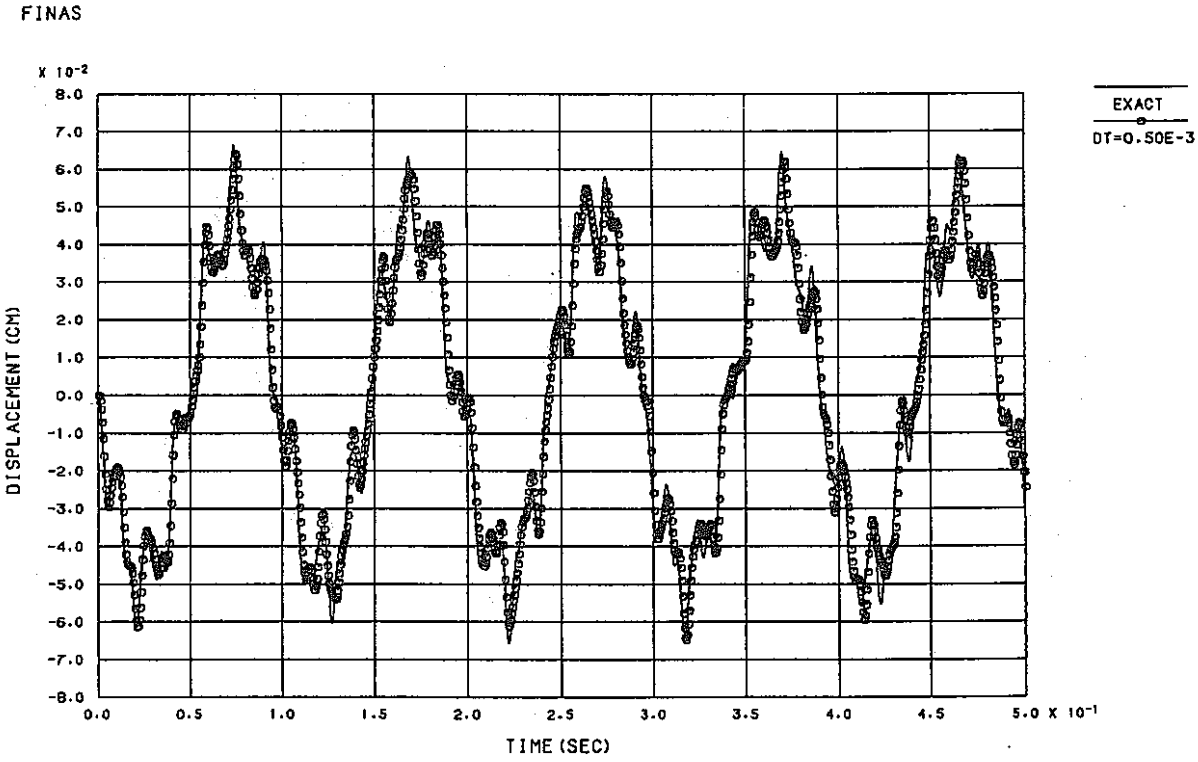


b) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = 2\Delta t_{cr}$

図4-6　ケース2における自由端変位の時刻歴(1)

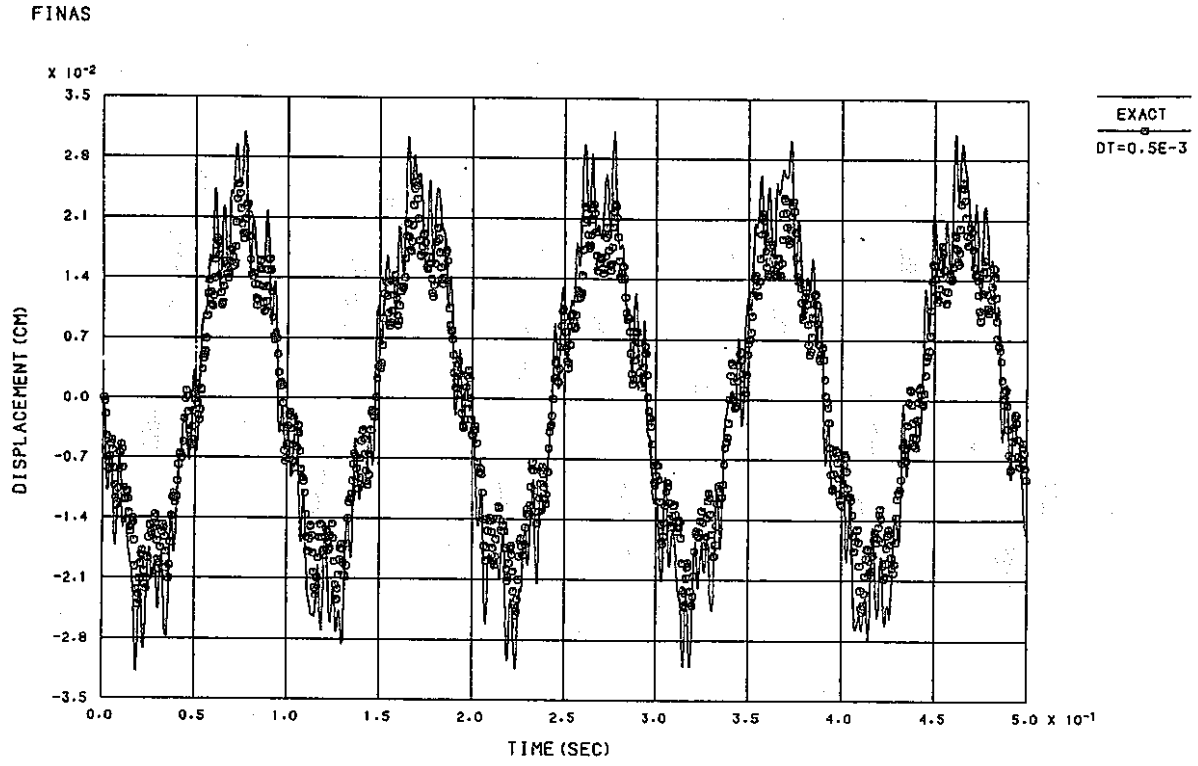


a) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

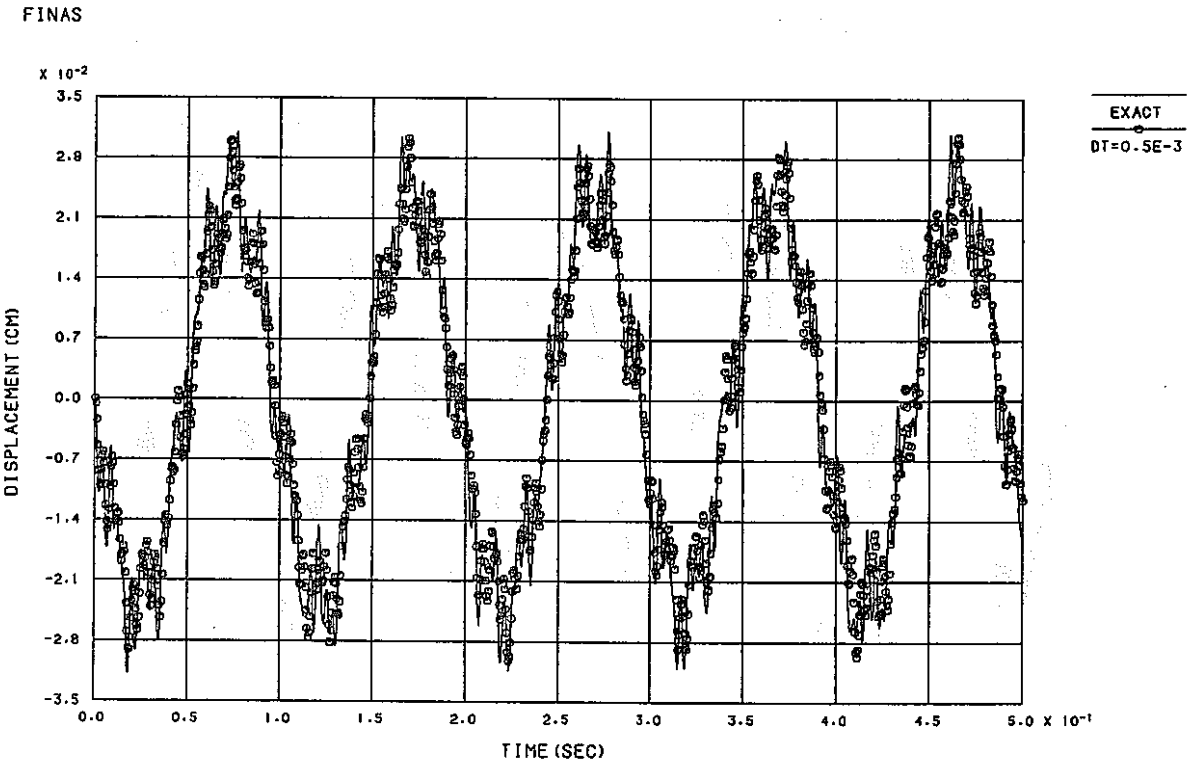


b) $\Delta t_F = \frac{1}{16} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

図 4-7　ケース 2 における自由端変位の時刻歴 (2)

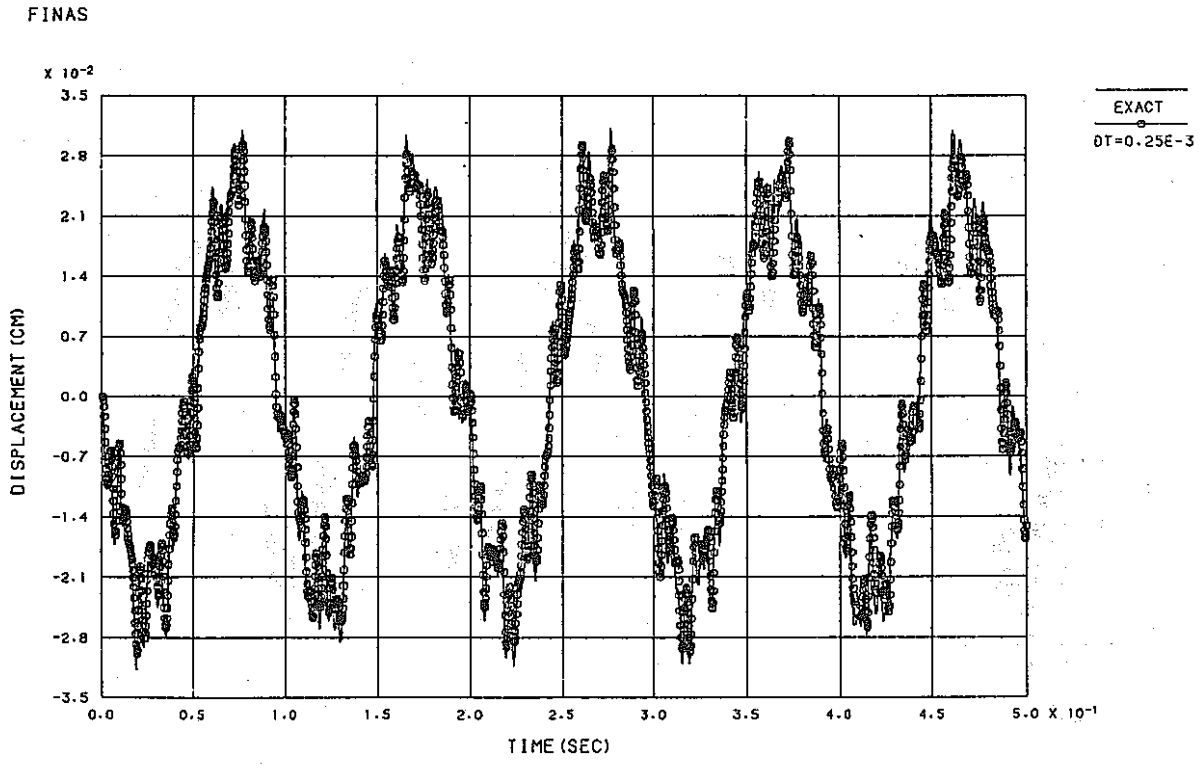


a) $\Delta t_F = \frac{1}{4} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

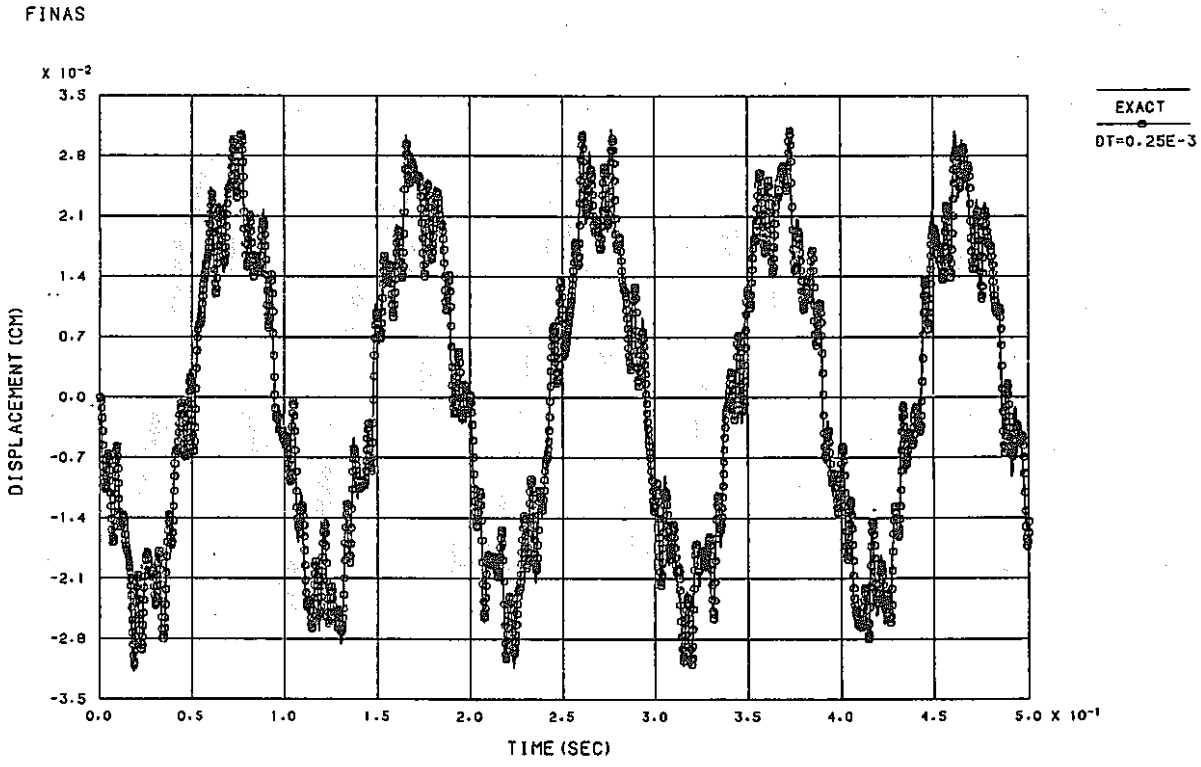


b) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

図 4-8　ケース 3 における自由端変位の時刻歴 (1)

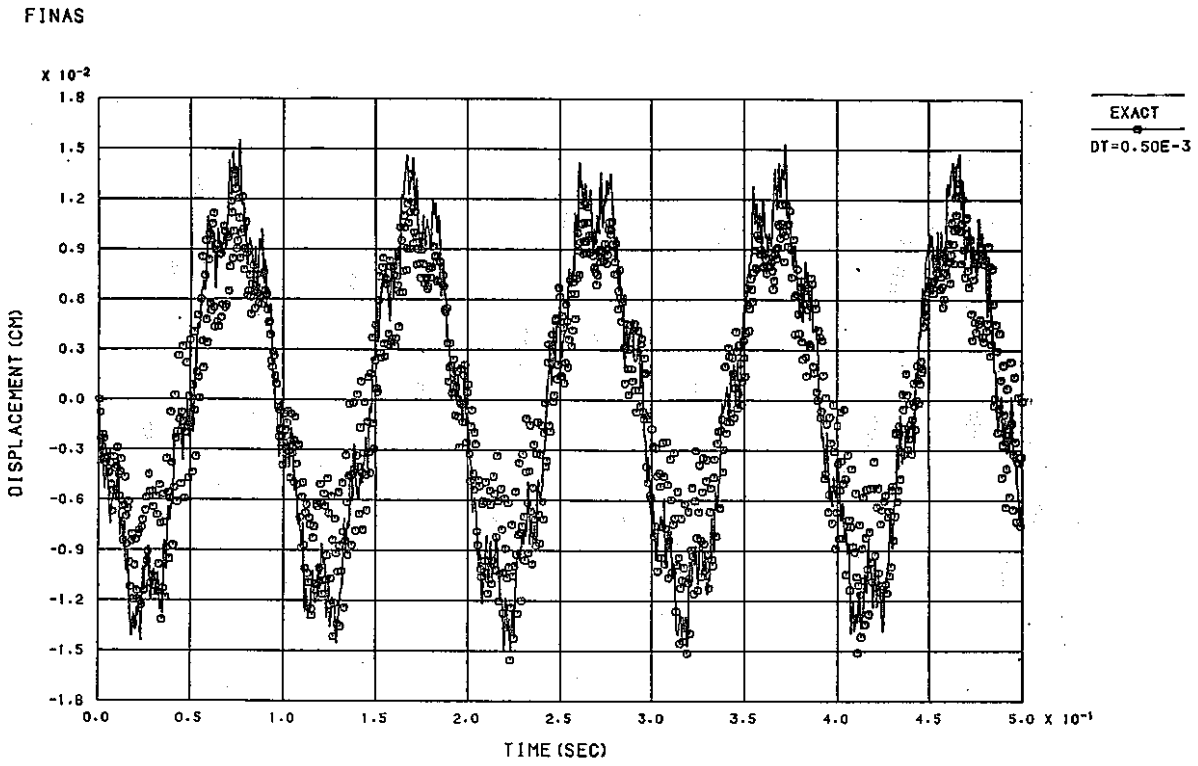


a) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = \frac{1}{2} \Delta t_{cr}$

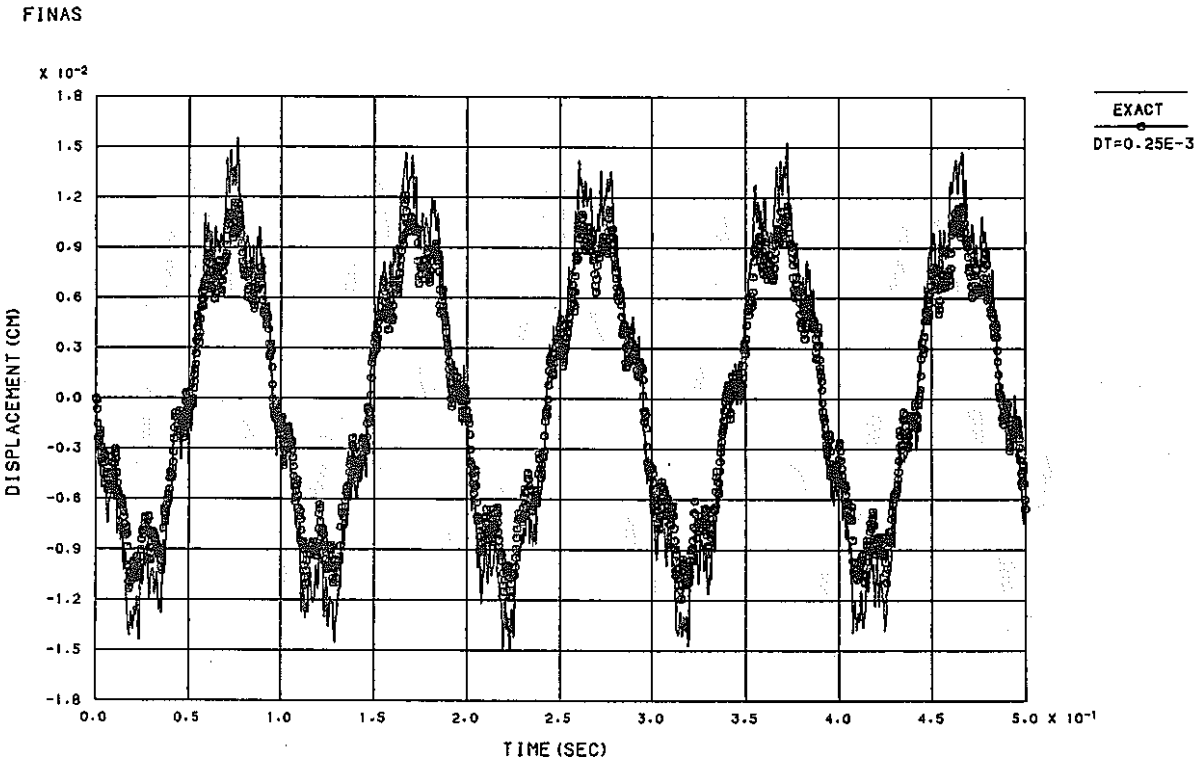


b) $\Delta t_F = \frac{1}{16} T_F$, $\Delta t_I = \frac{1}{2} \Delta t_{cr}$

図4-9　ケース3における自由端変位の時刻歴(2)

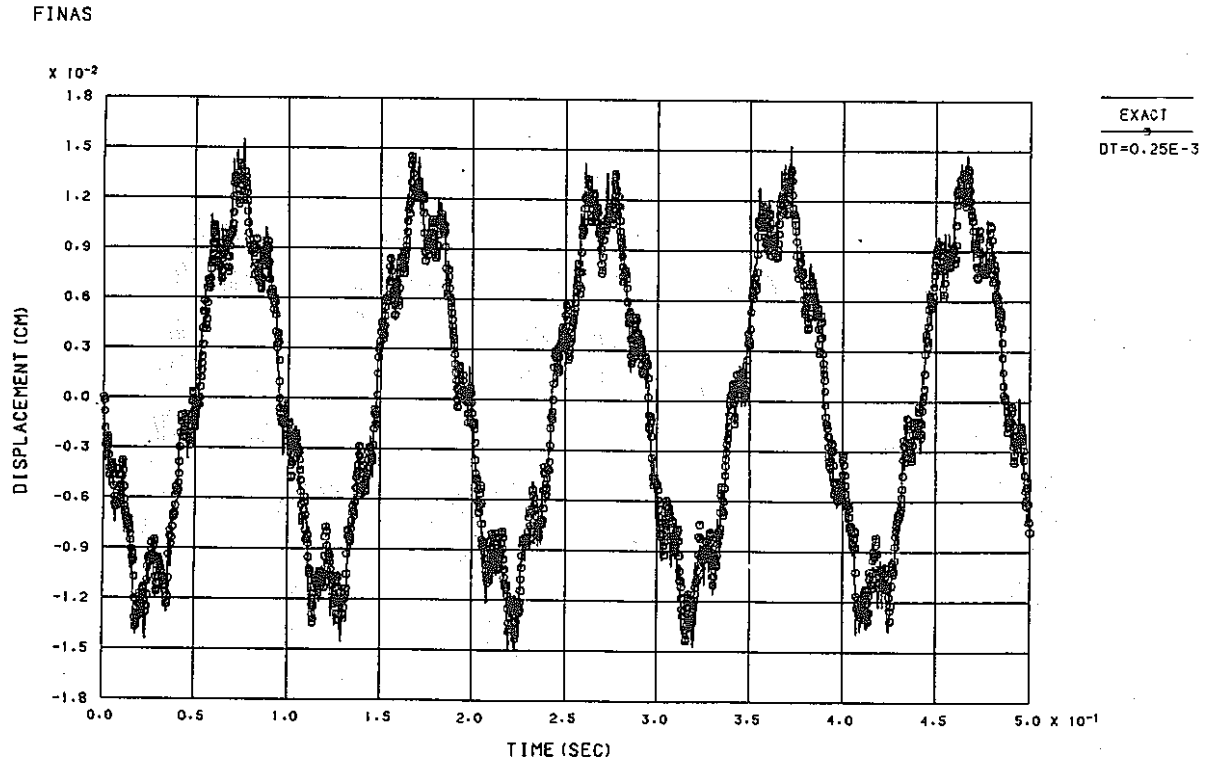


a) $\Delta t_F = \frac{1}{4} T_F$, $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$

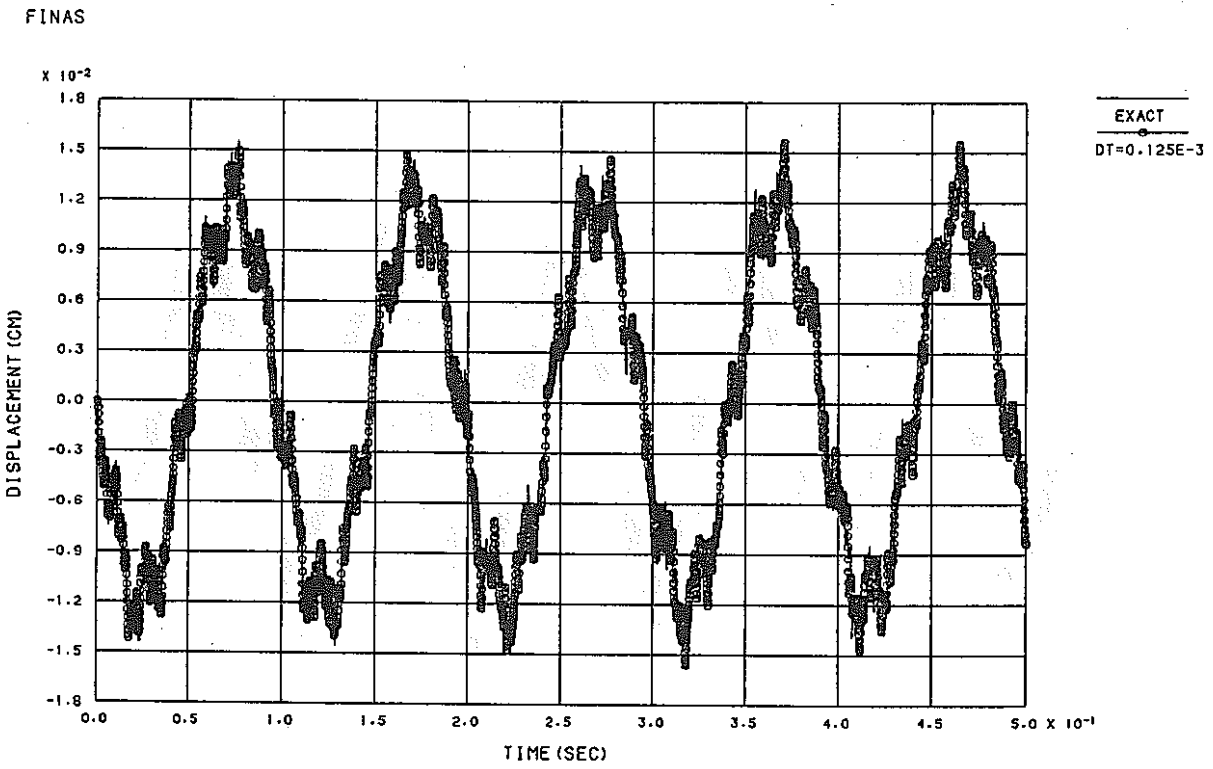


b) $\Delta t_F = \frac{1}{4} T_F$, $\Delta t_I = \frac{1}{2} \Delta t_{cr}$

図 4-10　ケース 4 における自由端変位の時刻歴 (1)



a) $\Delta t_F = \frac{1}{8} T_F$, $\Delta t_I = \frac{1}{2} \Delta t_{cr}$



b) $\Delta t_F = \frac{1}{16} T_F$, $\Delta t_I = \frac{1}{4} \Delta t_{cr}$

図 4-11　ケース 4 における自由端変位の時刻歴 (2)

・考　察

各ケースとも，クリティカルな積分時間増分を用いた解は厳密解と解が一致している。負荷の振動数が低い場合は，積分時間増分をクリティカルな値より大きくすることができるが，振動数が高いと時間増分が大きくなるにしたがい解の精度が低下する。また，同じ積分時間増分を用いても，負荷を離散する時間間隔が粗いと解の精度が悪くなる。

ii）棒の縦振動

一端固定の弾性棒の自由端に縦方向の調和荷重が作用する場合について動的解析を行ない，負荷の振動数，有限要素分割および積分時間増分と解との関係の調査を行なう。

・解析条件

構　造

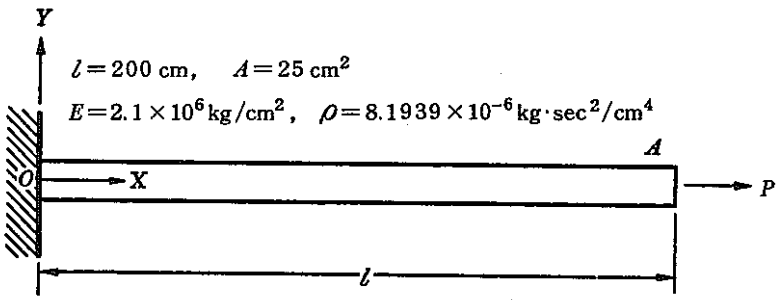


図 4−12　弾性棒

負荷条件

$$P = P_0 \sin\ (w_F t)$$

$$P_0 = 25 \text{ kg}$$

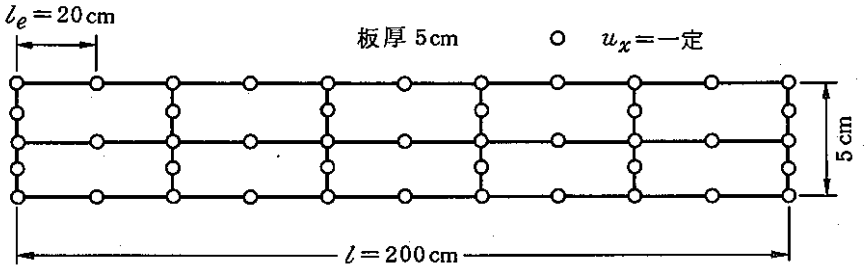
表 4−9　負荷の角振動数 w_F と周期 T_F

	ケース 1	ケース 2
w_F〔rad/sec〕	6283	15708
T_F〔sec〕	1.0×10^{-3}	0.4×10^{-3}

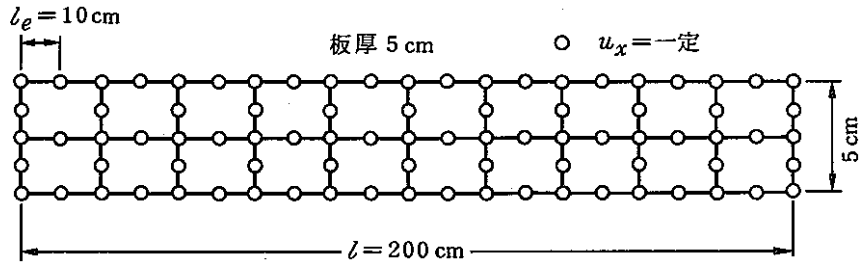
表 4−10　棒の縦方向角振動数 w_L と周期 T_L

	モード 1	モード 2	モード 3	モード 4
w_L〔rad/sec〕	3976	11928	19880	27833
T_L〔sec〕	1.58×10^{-3}	5.27×10^{-3}	3.16×10^{-3}	2.26×10^{-3}
備考 $w_{Li}=\frac{\pi c}{2l}(2i-1)$，$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$，$\frac{w_{L1}+w_{L2}}{2}=7952$，$\frac{w_{L2}+w_{L3}}{2}=15904$				

要素分割とクリティカル時間増分



a）モデル 1



b）モデル 2

図 4-13　有限要素モデル

表 4-11　クリティカルな時間増分

	l_e〔cm〕	Δt_{cr}〔sec〕
モデル 1	20.0	0.04×10^{-3}
モデル 2	10.0	0.02×10^{-3}

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=506.249\times10^{3}\,\mathrm{cm/sec}$$

$$w_{\max}^{\mathrm{men}}=\frac{2c}{l_e}$$

$$\Delta t_{cr}=\frac{2}{w_{\max}^{\mathrm{men}}}$$

時間積分における時間増分

表 4-12　積分時間増分

	$8\Delta t_{cr}$	$4\Delta t_{cr}$	$2\Delta t_{cr}$	Δt_{cr}
モデル 1	—	0.16×10^{-3}	0.8×10^{-3}	0.4×10^{-3}
モデル 2	0.16×10^{-3}	0.8×10^{-3}	0.4×10^{-3}	0.2×10^{-3}

・解析結果

図 4-14　ケース 1，モデル 1 における荷重載荷点変位の時刻歴 (1)

図 4-15　ケース 1，モデル 1 における荷重載荷点変位の時刻歴 (2)

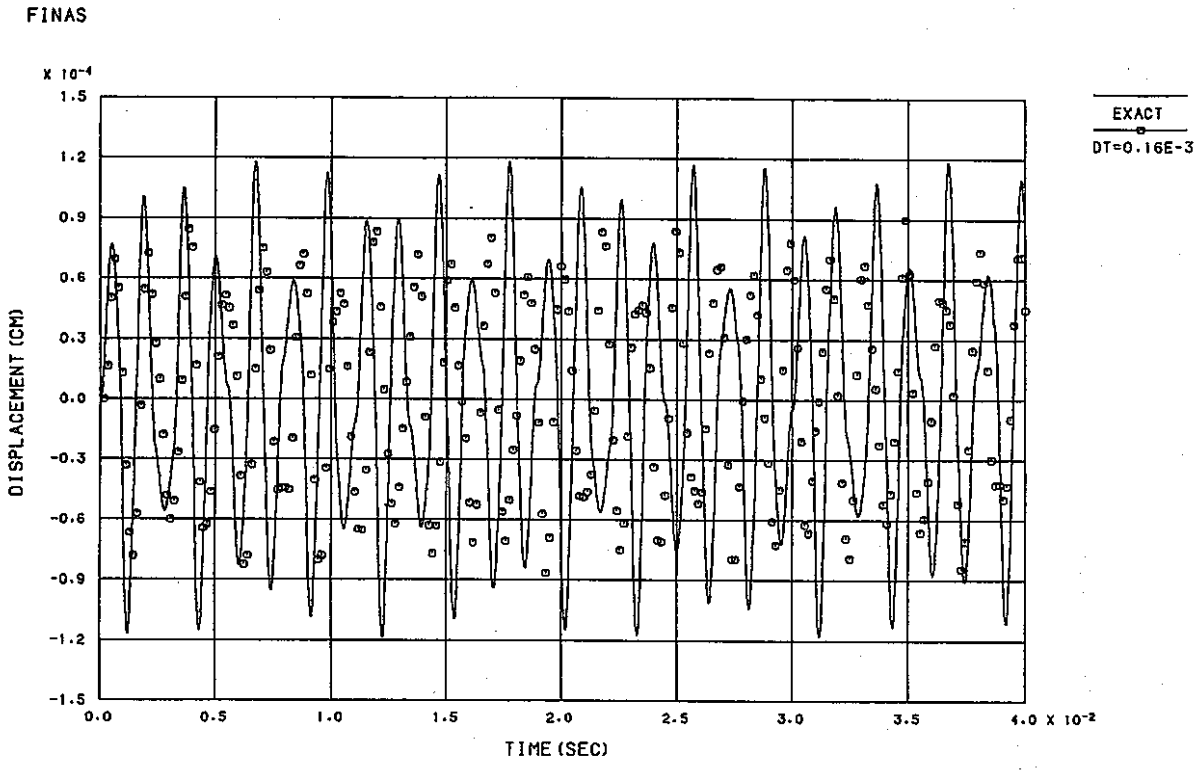
図 4-16　ケース 1，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (1)

図 4-17　ケース 1，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (2)

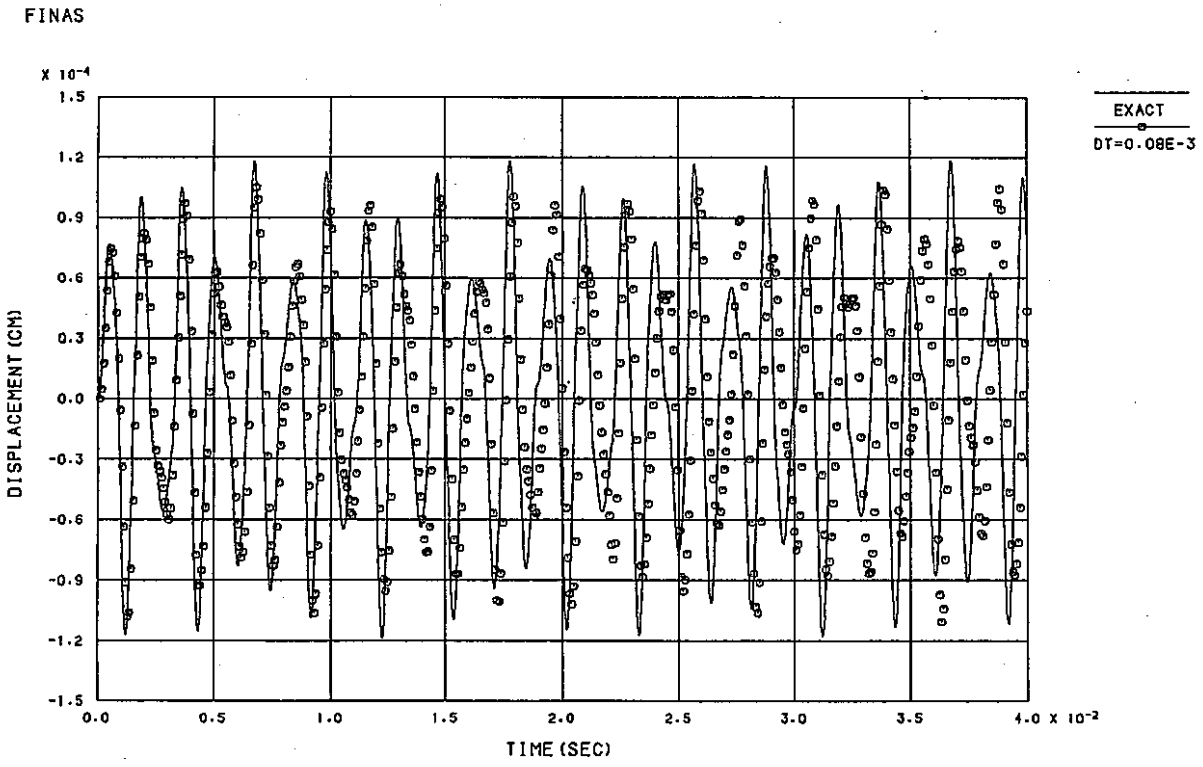
図 4-18　ケース 2，モデル 1 における荷重載荷点変位の時刻歴

図 4-19　ケース 2，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (1)

図 4-20　ケース 2，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (2)

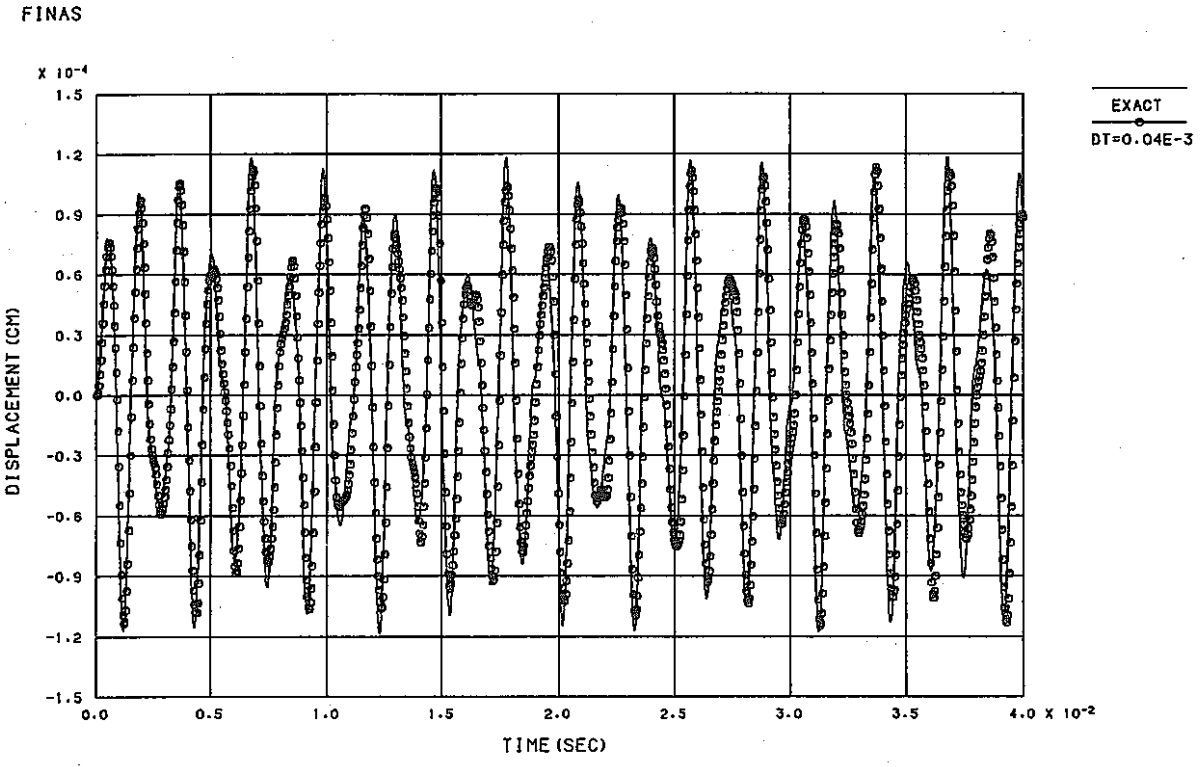


a) $\Delta t_I = 4\,\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 6.25$



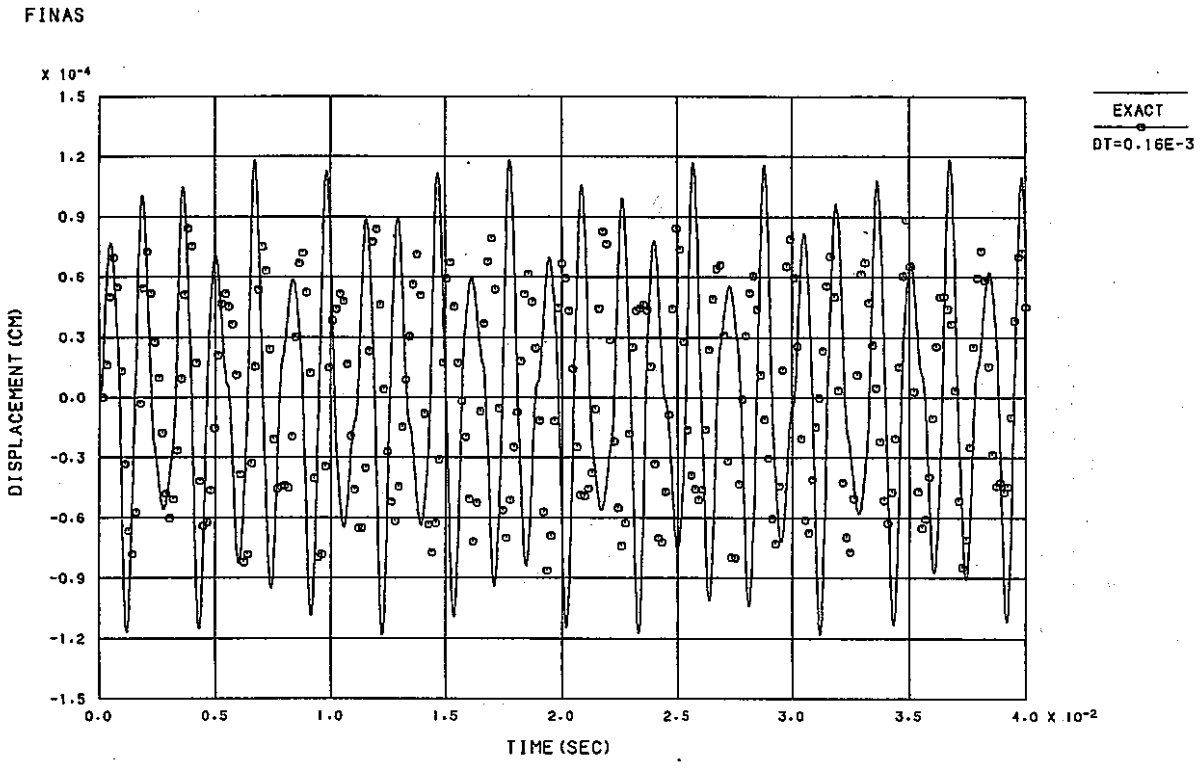
b) $\Delta t_I = 2\,\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 12.5$

図4-14　ケース1，モデル1における荷重載荷点変位の時刻歴(1)

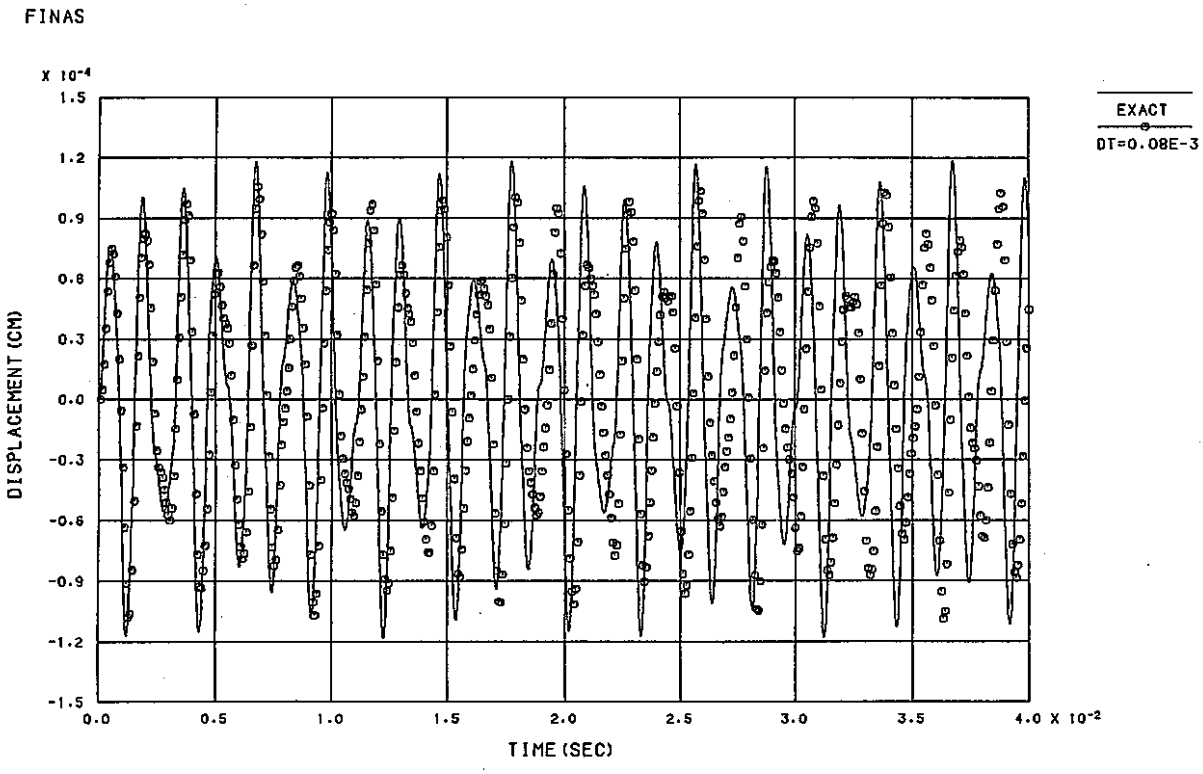


a) $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 25$

図 4-15　ケース 1，モデル 1 における荷重載荷点変位の時刻歴 (2)

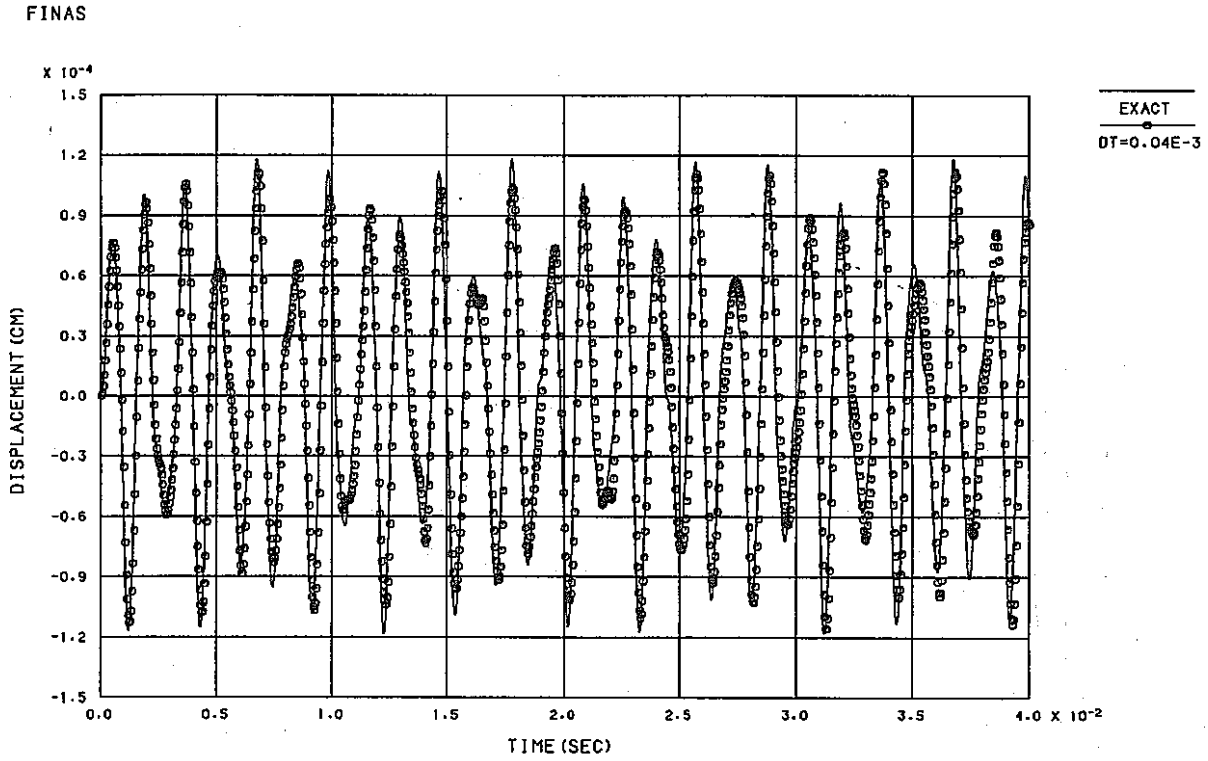


a) $\Delta t_I = 8\,\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 6.25$

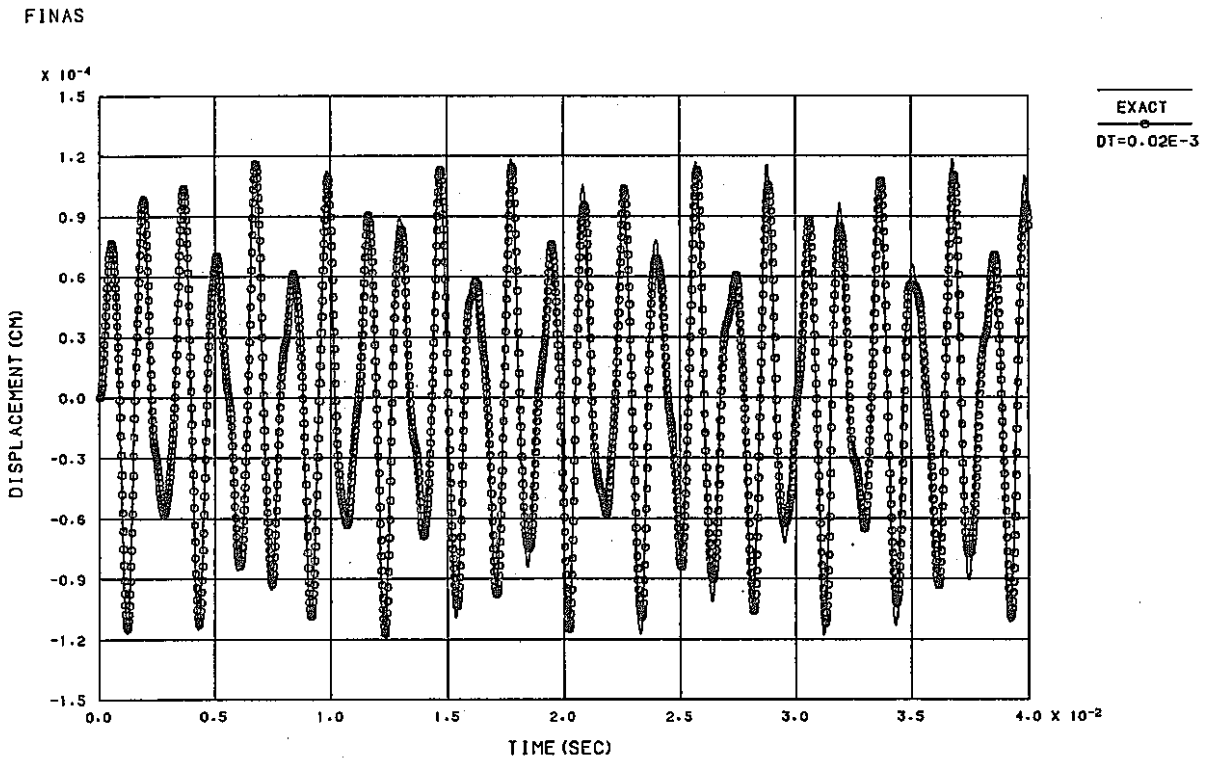


b) $\Delta t_I = 4\,\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 12.5$

図 4-16　ケース 1，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (1)

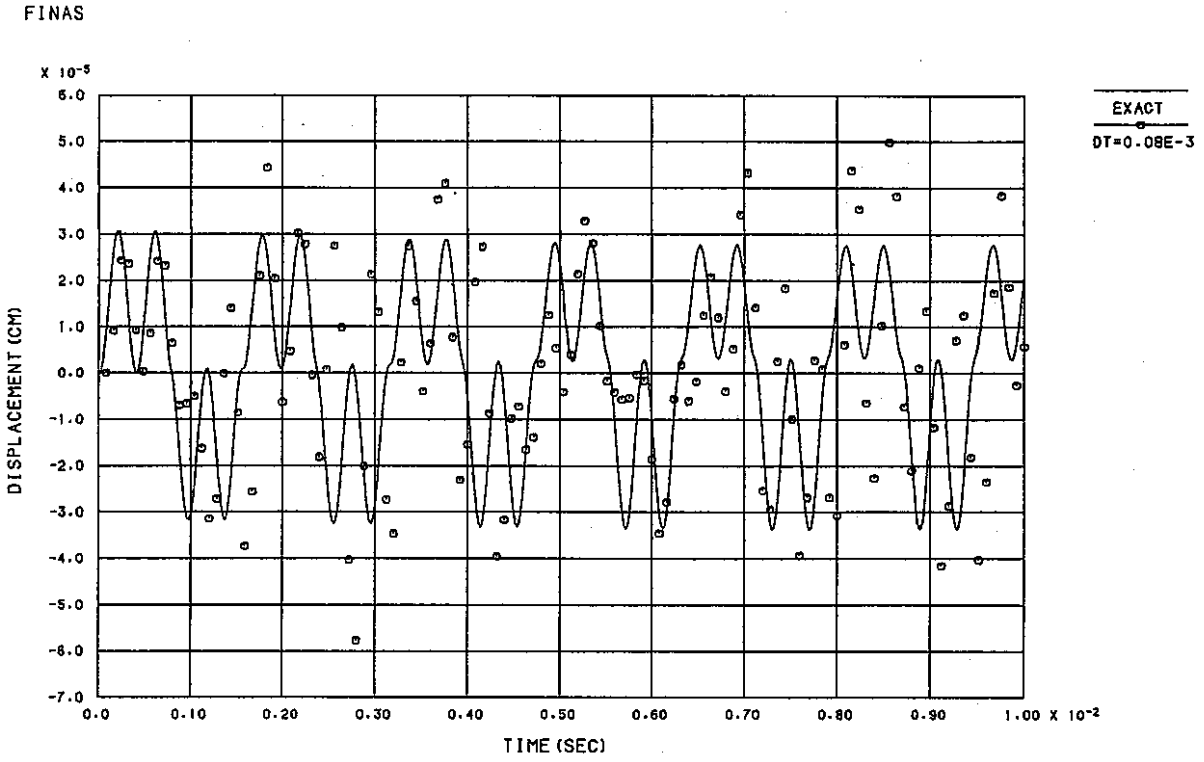


a) $\Delta t_I = 2\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 25$

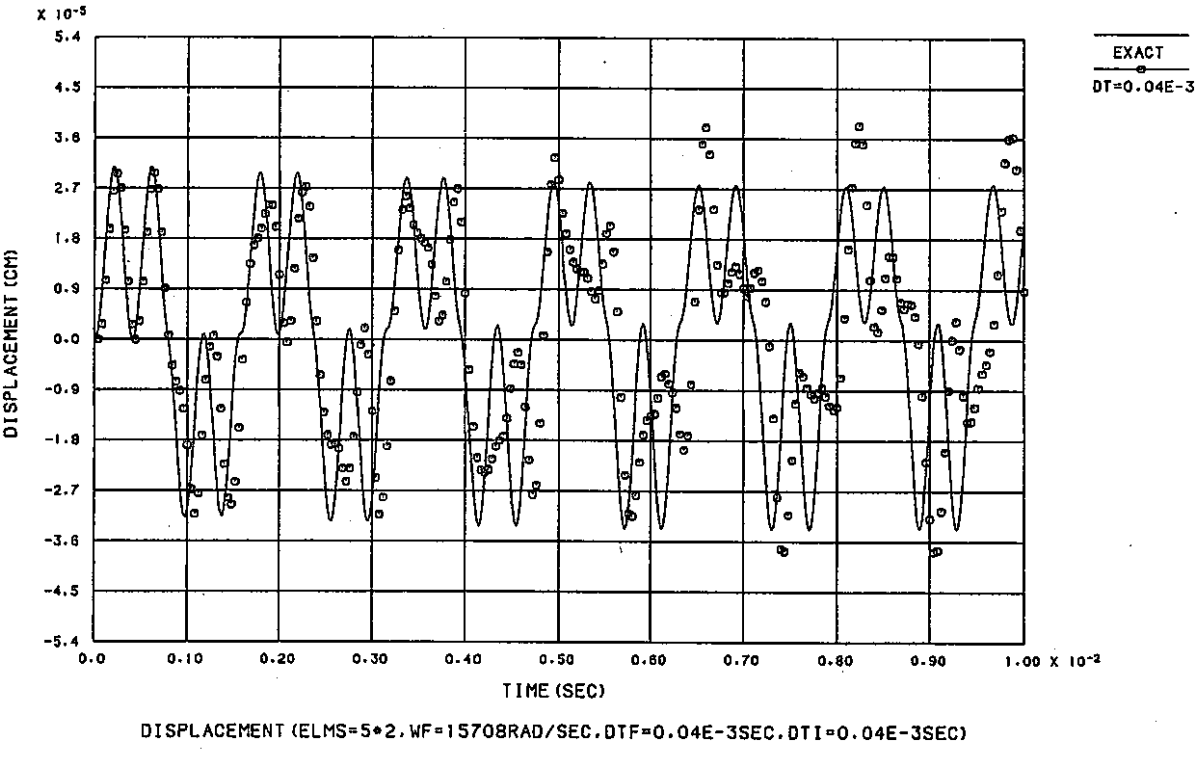


b) $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 50$

図 4-17　ケース 1，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (2)

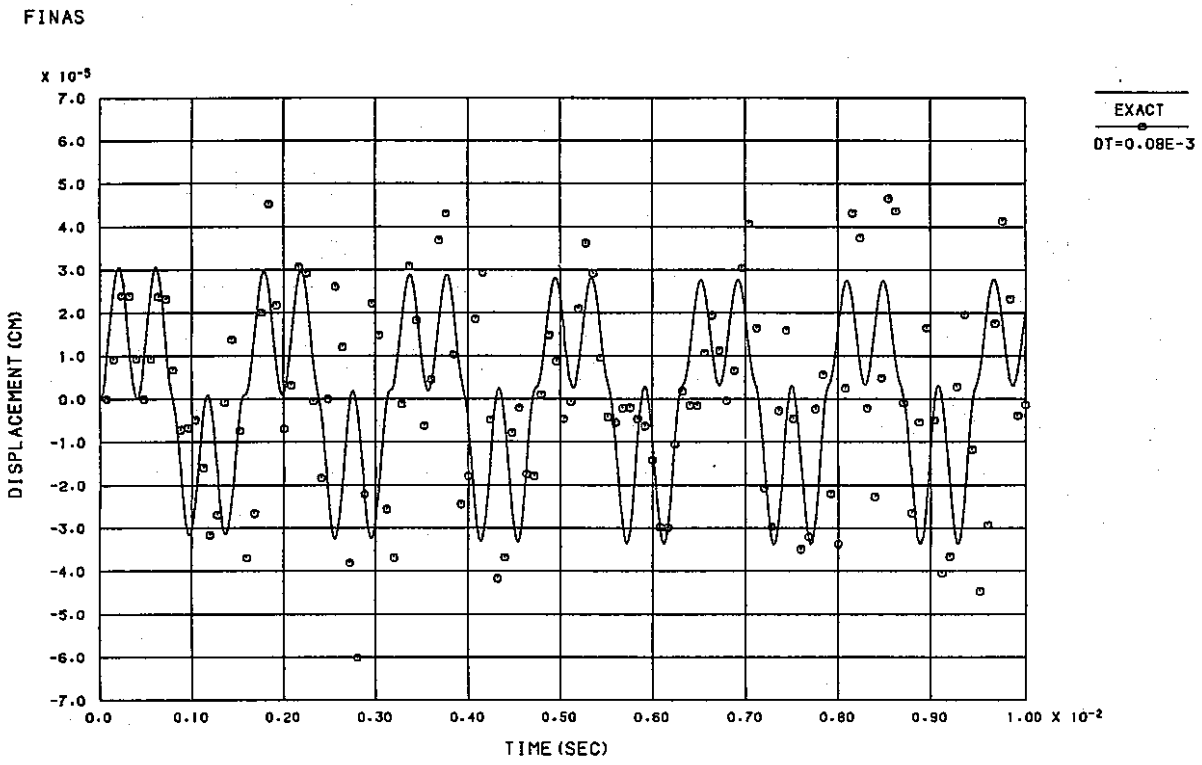


a) $\Delta t_I = 2\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 5$

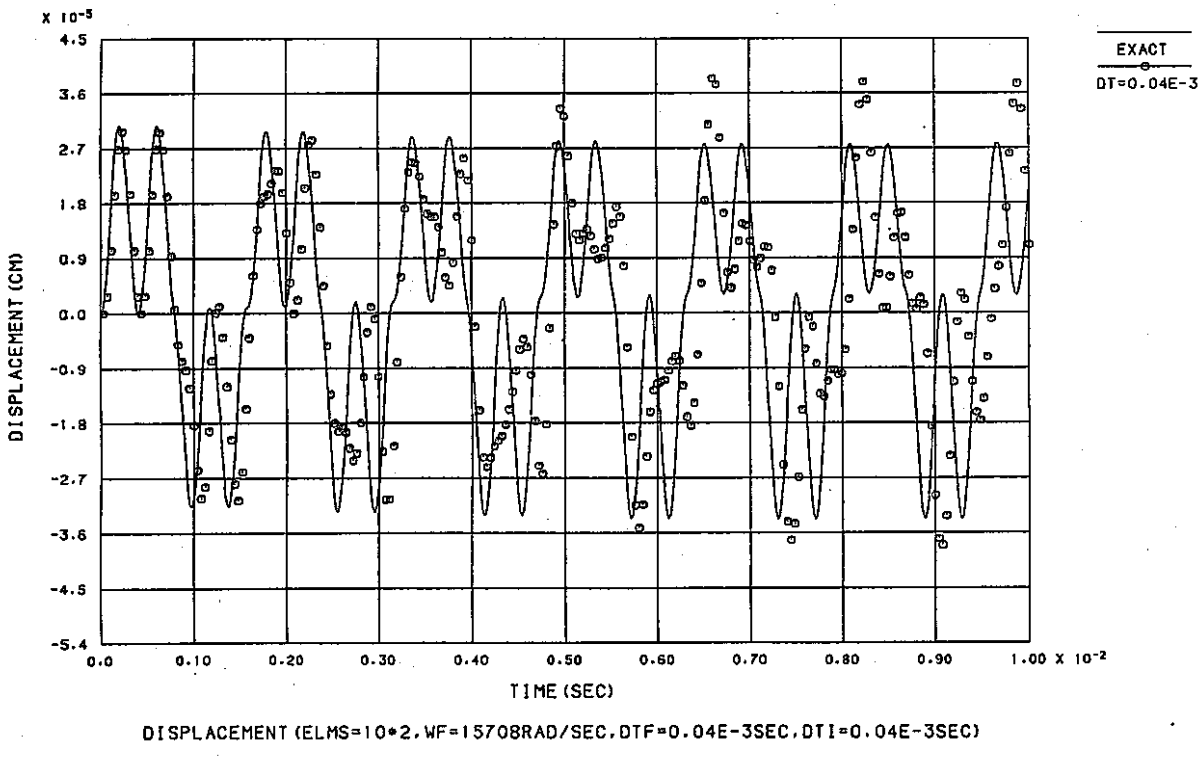


b) $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 10$

図4-18　ケース2，モデル1における荷重載荷点変位の時刻歴

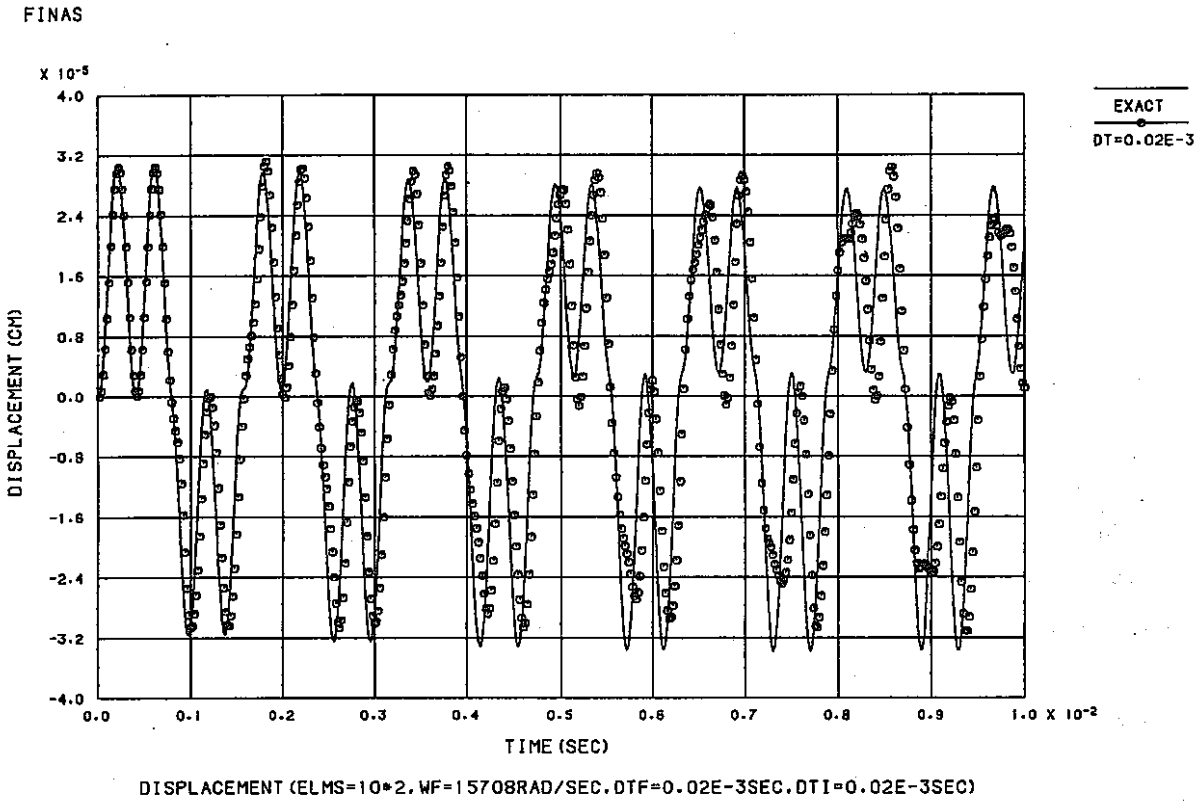


a) $\Delta t_I = 4\,\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 5$



b) $\Delta t_I = 2\,\Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 10$

図 4-19　ケース 2，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (1)



a) $\Delta t_I = \Delta t_{cr}$, $T_F/\Delta t_F = 20$

図 4-20　ケース 2，モデル 2 における荷重載荷点変位の時刻歴 (2)

・考　察

負荷の振動数が低い場合は，積分時間増分をクリティカルな値にとれば精度が高い解が得られているが，振動数が高い場合には解の精度が低下している。このことは，与えられた問題に対して，解析に使用した有限要素モデルが幾分粗かったことを意味している。

c）時間増分の選択

与えられた問題に対して適切な空間離散が行なわれている場合は，次の方法によって積分時間増分の選択を行なう。まず，各要素ごとに代表長さを決定し，表 4-1 に基づいて各要素ごとにクリティカルな時間増分 $\Delta t^{cr}_{(i)}$ を計算する。ここで，要素の代表長さは要素を構成する辺の最も短い長さであり，中間節点がある場合は，角の節点と中間節点との最小距離である。次に各要素ごとに求めたクリティカルな時間増分との差を重みとして，次式でクリティカルな時間増分の重み平均を求める。

$$\Delta t^{*}_{cr} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta t^{cr}_{(i)} \left(\Delta t^{cr}_{\max} - \Delta t^{cr}_{(i)} \right)}{\sum_{i=1}^{m} \left(\Delta t^{cr}_{\max} - \Delta t^{cr}_{(i)} \right)} \qquad \left(\Delta t^{cr}_{(i)} \neq \Delta t^{cr}_{\max} \right) \qquad (4\text{-}26)$$

ここで，

m　：要素数

$\Delta t_{(i)}^{cr}$　：i 番目の要素について計算したクリティカルな時間増分

$\Delta t_{\max}^{cr} = \mathrm{Max}\,(\Delta t_{(i)}^{cr})$

そして，式（4-26）で求めた値に係数を乗じたものを積分時間増分とする。

$$\Delta t_I = \alpha \Delta t_{cr}^{*} \qquad (\alpha > 0) \tag{4-27}$$

αの値のデフォルト値については，引き続き調査が必要である。

d）まとめ

ここでは，動的解析の調査および空間離散に対応した時間離散について考察したが，陰的解法を採用しても，健全な解を得るための時間増分は陽的解法の数値的安定条件に関係づけられることを例題とともに示した。今後，この基準は更に多くの問題を解析することにより裏付けられるが，一方，FINAS の数値積分スキームとして陽的スキームの機能を備え，種々比較することも必要と思われる。

（参考文献）

1. Fried "Numerical Solution of Differential Equations" Academic Press, 1979.
2. Huges "A Note on the Stability of Newmark's Algorithm in Nonlinear Structural Dynamics" IJNME Vol.11, 1977.
3. T. B. Belytschko "Computational Methods for Transient Analysis" セミナーテキスト「有限要素法に関する最近の動向」, 1982.
4. 武田 "非定常熱方程式に対する有限要素モデルと時間ステップに関する考察" 第11回マトリックス構造解析法研究論文集，日本鋼構造協会，1977.

(3) 流体と構造との連成解析

流体 - 構造連成における動的挙動は，原子力格納容器などで非常に重要な問題である。地震などの動的荷重をうける流体貯蔵容器などがこの例である。流体 - 構造連成問題の有限要素法解析の手法はいくつか提案されているが，基本的に次の3方法に分類される。すなわち，付加質量手法，オイラー定式手法，ラグランジェ定式手法である。

付加質量手法は，流体と構造の接触面に流体の仮想質量を加える。一般的に付加質量を求める仮定としては，構造の撓性と非圧縮性流体をベースにしている。この方法は流体の剛性を無視しているので，控え目の解となっている。

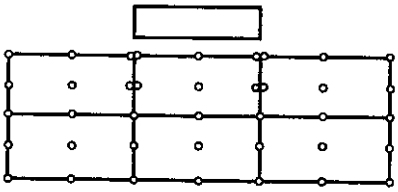
オイラー定式手法では，流体の挙動は圧力ポテンシャルの項で定義される。流体の挙動は，解析関数または圧力を節点自由度にもつ有限要素で定式化することができる。この方法では流体と構造との相互力を求めることになり，両構造を同時に解くために平衡方程式は非対称方程式となる特色がある。これは Zienkiewiz などが提案したもので，流体 - 構造の連成解法として一般的に採用されている。

ラグランジェ定式手法は流体の挙動を変位で表わすもので，これにより流体と構造との適合は自動的に満足する。この方法の利点は，特別な接面方程式が必要でなく，平衡方程式も対称形を保持するので，既存の構造解析プログラに組み込むことが容易な点である。

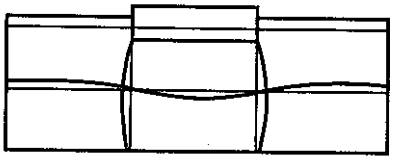
現在まで多くのラグランジェ要素が提案されているが，これらの多くは零エネルギー変形モードの影響をうけている。メッシュをこまかくすると，零エネルギーの"砂時計"や"回転"モードの発生する傾向が強くなる。この零エネルギーモードは低減積分法と材料の零せん断係数より発生していると思われる。一方，高次の積分法を使用するこは流体要素の剛性を高め，低周波のスロッシング挙動に必要となるモードを除去する傾向がある。

Wilson らが提案した新しいラグランジェ手法は，ゼロエネルギーモードを選択的に除去して，適切な挙動の流体要素を定式化している。また，各積分点では零流体回転の拘束を導入している。2×2点の積分による9節点ラグランジェ流体要素は積分点で4つの回転拘束をするもので，Wilson の手法での基本要素である。

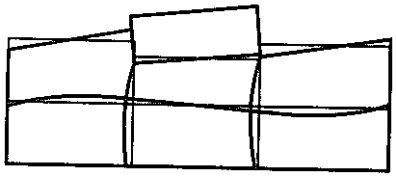
FINAS の流体－構造連成解析の機能開発では，Wilson の提案したラグランジェ手法がアルゴリズム，数値的およびプログラム化において最も優れた方法であると思われる。図4-21は，Wilson らによる浮体と流体連成の解析例である。



(a) 流体の有限要素モデル



(b) 浮体自重による静的解析



(c) 浮体－流体構造の基本モード

図4-21 Wilson らによる浮体ブロックの解析

〔参考文献〕

1. H. M. Westergaard, "Water pressures on dams during earthquakes", Trans. Am. Soc. Civ. Eng. (1931).
2. H. N. Abramson, (Ed.), "The dynamic behavior of liquids in moving storage containers", Report No. SP-106, National Aeronautics and Space Administration (1966).
3. O. C. Zienkiewicz, "Finite Element Method in Continuum Mechanics", McGraw-Hill, 1967.
4. R. W. Clough, A. Niwa and D. P. Clough, "Experimental seismic studies of cylindrical tanks", Struct. Eng. J., ASCE ST12, December (1979).
5. J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher and C. Taylor, "Finite Elements in Fluids", vols. I and II, Wiley, New York, 1975.
6. J. F. Hall and A. K. Chopra, "Two-dimensional dynamic behavior of concrete and embankment dams

including hydrodynamic effects ", Earthquake Eng. Struct. Dynam. 10, 305-332 (1982).

7. A. K. Chopra and P. Chakrabarti, " Earthquake analysis of concrete gravity dams including dam-water-foundation rock interation ", Earthquake Eng. Struct. Dynam. 9, 363-383 (1981).
8. R. H. McNeal, R. Citerly and M. Chargin, " A new method for analyzing fluid-structure interaction using MSC/NASTRAN ", Fifth Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paper B4/9, Aug. 13-17 (1979).
9. A. Combescure, R. J. Gilbert, F. Jeanipierre, A. Hoffman and M. Livolant, " Fluid-structure interaction — a general method in the Ceasant programs ", Int. Conf. on Engineering Applications of the Finite Element Method, Hovik, Norway, May (1979).
10. E. L. Wilson and A. K. Chopra, " Earthquake analysis of reservoir-dam systems ", Fourth World Conf. of Earthquake Engineering, Santiago, Chile, Jan. (1969).
11. O. C. Zienkiewicz and P. Bettes, " Fluid-structure dynamic interaction and wave forces, an introduction to numerical treatment ", Int. J. num. Meth. Engng, 13, 1-16 (1978).
12. T. Belytschko, " Methods and programs for analysis of fluid-structure systems ", Nucl. Eng. Des. 42, 41-52 (1977).
13. K. J. Bathe and V. Sonnad, " On effective implicit time integration in analysis of fluid-structure problems ", Int. J. num. Meth. Engng, 15, 943-948 (1980).
14. M. A. Hamdi and T. Ousset, " A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems ", Int. J. num. Meth. Engng, 13, 139-150 (1978).
15. E. L. Wilson and M. Khalvati, " Finite element for the dynamic analysis of fluid-solid systems ", Int. J. num. Meth. Engng, 19, 1657-1668 (1983).

5. 有限要素

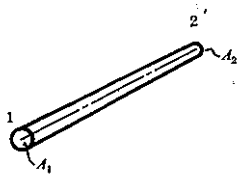
FINAS の要素ライブラリには応力解析のための要素と熱伝導解析のための要素が登録されており，構造に応じた要素が選択できるようになっている。今回の改良および整備作業により応力解析のための要素としては，接触問題のための２次元接触要素 CONT2，軸対称構造物における非軸対称負荷問題のための８節点四辺形軸対称調和荷重要素 QNAX8，６節点三角形軸対称調和荷重要素 TNAX6，２節点円錐台軸対称調和荷重要素 NCONC2，４節点四辺形軸対称調和荷重要素 QNAX4 および３節点三角形軸対称調和荷重要素 TNAX3，要素面の法線回りの剛性として Zienkiewicz の仮想剛性を仮定した４節点四変形平板シェル要素 QFLA4 を組み込む。熱伝導解析のための要素としては，２節点輻射リンク要素 RLINK2 を組み入れた。

表5-1，図5-1は応力解析のための要素，表5-2，図5-2は熱伝導解析のための要素をまとめたものである。表中の次元は要素を構成する節点の自由度を表わし，１D，２D，３Dは１次元，２次元，３次元の意味である。また，節点自由度 u_i は基準座標系の i 方向変位，θ_i は i 軸まわりの回転角を表わしている。解析タイプはその要素が行なうことができる解析の種類を表わし，Eは弾性，Pは塑性，Cはクリープ，Tは熱応力の意味である。表5-3は各要素の解析機能を示したもので，○印は解析可能であることを示す。

表5－1　応力解析のための要素

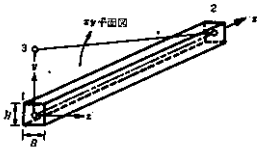
分類	要素名称	略称	次元	節点自由度	応力場	解析タイプ	コード
軸対称	8節点四辺形軸対称要素	QAX8	2D	u_R, u_Z	軸対称応力場	EPCT	1
棒	3次元棒要素	ROD2	3D	u_X, u_Y, u_Z	単軸応力場	EPCT	2
梁	3次元矩形断面梁要素	BEAM2	3D	u_X, u_Y, u_Z, θ_X, θ_Y, θ_Z	梁応力場	EPCT	3
軸対称	6節点三角形軸対称要素	TAX6	2D	u_R, u_Z	軸対称応力場	EPCT	4
平面	8節点四辺形平面応力要素	QMEM8	3D	u_X, u_Y, u_Z	平面応力場	EPCT	5
平面	6節点三角形平面応力要素	TMEM6	3D	u_X, u_Y, u_Z	平面応力場	EPCT	6
立体	20節点六面体要素	HEX20	3D	u_X, u_Y, u_Z	3次元応力場	EPCT	7
板	4節点四辺形板曲げ低減積分要素	QPLA4R	2D	u_Z, θ_X, θ_Y	シェル応力場（5成分）	EPCT	9
シェル	4節点四辺形平板シェル低減積分要素	QFLA4R	3D	u_X, u_Y, u_Z, θ_X, θ_Y, θ_Z	シェル応力場（5成分）	EPCT	11
配管	6節点配管要素	ELBOW6	3D		シェル応力場（3成分）	EPC	18
軸対称	4節点四辺形軸対称要素	QAX4	2D	u_R, u_Z	軸対称応力場	EPCT	19
平面	4節点四辺形平面応力低減積分要素	QMEM4R	2D	u_X, u_Y	平面応力場	EPCT	21
板	3節点三角形板曲げ要素	TPLA3	2D	u_Z, θ_X, θ_Y	平面応力場	EPCT	8
シェル	3節点三角形平板シェル要素	TFLA3	3D	u_X, u_Y, u_Z, θ_X, θ_Y, θ_Z	平面応力場	EPCT	10
シェル	2節点曲線軸対称シェル要素	AXSHEL2	2D	u_R, u_Z $\partial u_R/\partial S$, $\partial u_Z/\partial S$	軸対称シェル応力場	EPCT	13
立体	15節点五面体要素	PENT15	3D	u_X, u_Y, u_Z	3次元応力場	EPCT	16
配管	6節点配管低減積分要素	ELBOW6R	3D	u_1, ……, u_{13} v, w, θ_l, θ_s	シェル応力場（5成分）	EPCT	18

分類	要素名称	略称	次元	節点自由度	応力場	解析タイプ	コード
配管	3節点配管低減積分要素	ELBOW3R	3D	Δu, $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ v, w, θ_l	シェル応力場（3成分）	EPCT	12
配管	2節点配管要素	PIPE2	3D	$u_X, u_Y, u_Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$	梁応力場	ET	14
平面	3節点三角形平面応力要素	TMEM3	2D	u_X, u_Y	平面応力場	EPCT	20
軸対称	3節点三角形軸対称要素	TAX3	2D	u_R, u_Z	軸対称応力場	EPCT	22
シェル	2節点円錐台シェル要素	CONIC2	2D	u_R, u_Z, θ	軸対称シェル応力場	EPCT	23
平面	4節点四辺形平面応力要素	QMEM4	2D	u_X, u_Y	平面応力場	EPCT	28
軸対称	4節点四辺形軸対称低減積分要素	QAX4R	2D	u_R, u_Z	軸対称応力場	EPCT	27
梁	3次元弾性梁要素	SBEAM2	3D	$u_X, u_Y, u_Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$	梁応力場	ET	15
平面	8節点四辺形平面ひずみ要素	QPLAN8	2D	u_X, u_Y, u_Z	平面ひずみ応力場	EPCT	24
平面	9節点四辺形一般化平面ひずみ要素	QPLAN9	2D	節点1～8 u_X, u_Y 節点9 θ_X, θ_Y, θ_Z	平面ひずみ応力場	EPCT	25
結合	3次元バネ・減衰要素	LCOMB2	3D	u_X, u_Y, u_Z, θ_X, θ_Y, θ_Z	——	E	26
接触	2次元接触要素	CONT2	2D	u_X, u_Y		E	29
軸対称	8節点四辺形軸対称調和荷重要素	QNAX8	2D	u_R, u_Z, u_θ	3次元応力場	ET	31
軸対称	6節点三角形軸対称調和荷重要素	TNAX6	2D	u_R, u_Z, u_θ	3次元応力場	ET	32
シェル	2節点円錐台軸対称調和荷重要素	NCONC2	2D	u_R, u_Z, u_θ, β	シェル応力場（3成分）	ET	33
軸対称	4節点四辺形軸対称調和荷重要素	QNAX4	2D	u_R, u_Z, u_θ	3次元応力場	ET	34
軸対称	3節点三角形軸対称調和荷重要素	TNAX3	2D	u_R, u_Z, u_θ	3次元応力場	ET	35
シェル	4節点四辺形平板シェル要素	QFLA4	3D	u_X, u_Y, u_Z, θ_X, θ_Y, θ_Z	シェル応力場（3成分）	EPCT	41



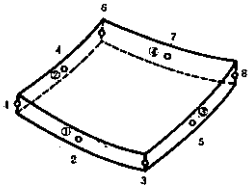
単軸棒要素

ROD 2



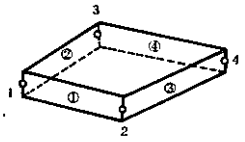
3次元矩形断面梁要素

BEAM 2



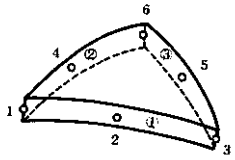
8節点四辺形平面応力要素

QMEM 8



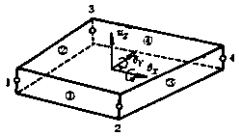
4節点四辺形平面応力
低減積分要素

QMEM4 R



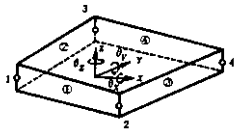
6節点三角形平面応力要素

TMEM 6



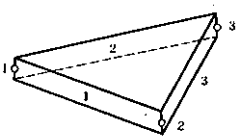
4節点四辺形板曲げ
低減積分要素

QPLA 4 R



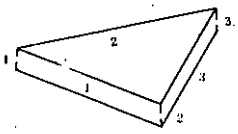
4節点四辺形平面シェル
低減積分要素

QFLA 4 R



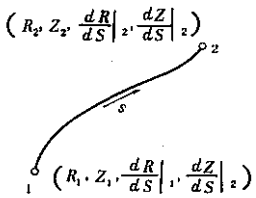
3節点三角形板曲げ要素

TPLA 3



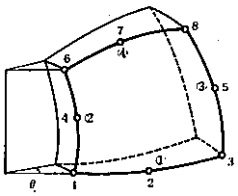
3節点三角形平面
シェル要素

TFLA 3



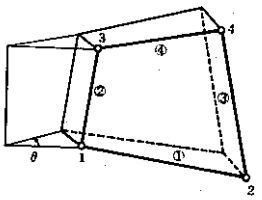
2節点曲線軸対称
シェル要素

AXSHEL 2



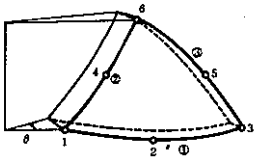
8節点四辺形軸対称要素

QAX 8



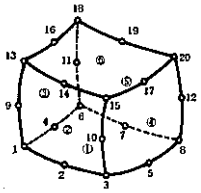
4節点四辺形軸対称要素

QAX 4



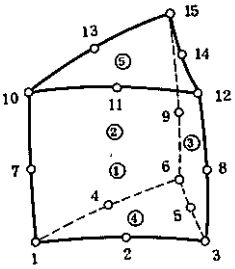
6節点三角形軸対称要素

TAX 6



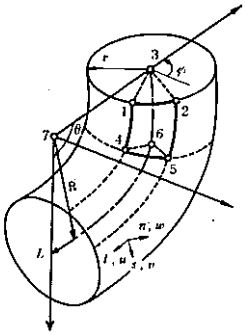
20節点六面体要素

HEX 20



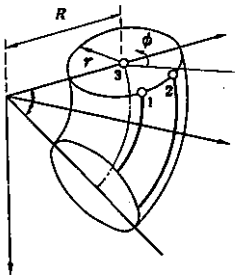
15節点五面体要素

PENT 15



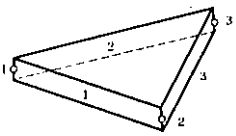
6節点配管要素

ELBOW6, ELBOW6 R



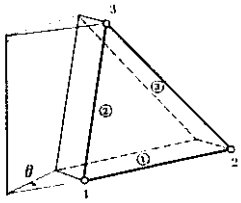
3節点配管低減積分要素

ELBOW3 R



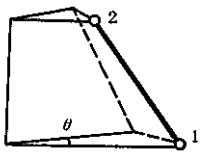
3節点三角形平面応力要素

TMEM 3



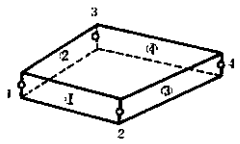
3節点三角形軸対称要素

TAX 3



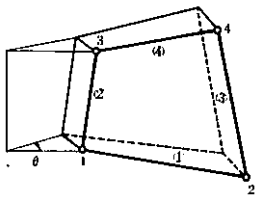
2節点円錐台シェル要素

CONIC 2



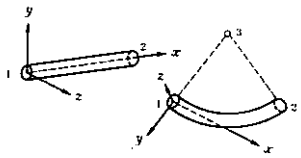
4節点四辺形平面応力要素

QMEM 4



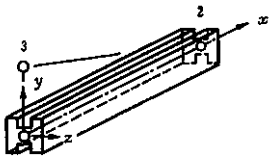
4節点四辺形軸対称低減積分要素

QAX4R



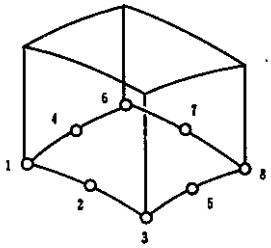
2節点配管要素

PIPE 2



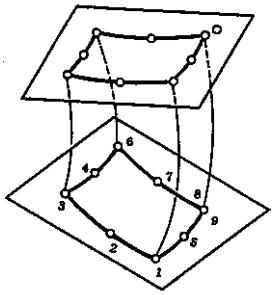
3次元弾性梁要素

SBEAM 2



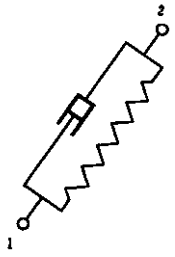
8節点平面ひずみ要素

QPLAN 8



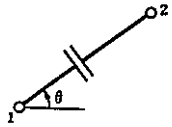
9節点一般化平面ひずみ要素

QPLAN 9



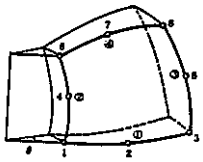
3次元バネ・減衰要素

LCOMB 2



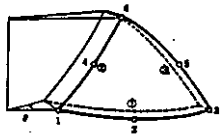
2次元接触要素

CONT 2



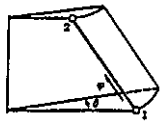
8節点四辺形軸対称
調和荷重要素

QNAX 8



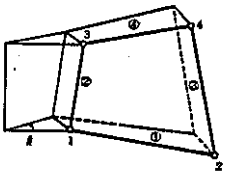
6節点三角形軸対称
調和荷重要素

TNAX 6



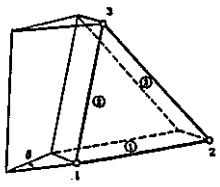
2節点円錐台軸対称
調和荷重要素

NCONC 2



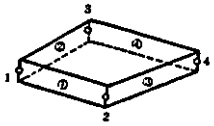
4節点四辺形軸対称調和荷重要素

QNAX 4



3節点三角形軸対称調和荷重要素

TNAX 3



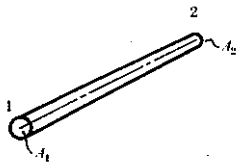
4節点四辺形平板シェル要素

QFLA 4

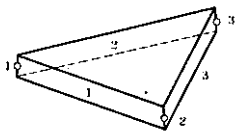
図5−1　応力解析のための要素

表5－2　熱伝導解析のための要素

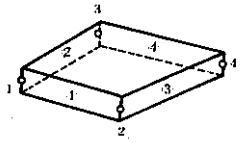
分類		要素名称	略称	次元
熱伝導	棒	熱伝導棒要素	HROD 2	3D
	平板	熱伝導3節点三角形平面要素	HTMEM 3	2D
		熱伝導6節点三角形平面要素	HTMEM 6	3D
		熱伝導4節点四辺形平面要素	HQMEM 4	2D
		熱伝導8節点四辺形平面要素	HQMEM 8	3D
	軸対称	熱伝導3節点三角形軸対称要素	HTAX 3	2D
		熱伝導6節点三角形軸対称要素	HTAX 6	2D
		熱伝導4節点四辺形軸対称要素	HTAX 4	2D
		熱伝導8節点四辺形軸対称要素	HTAX 8	2D
	立体	熱伝導15節点五面体要素	HPENT 15	3D
		熱伝導20節点六面体要素	HHEX 20	3D
熱伝達	辺	熱伝達2節点辺要素	FLIN 2	2D
		熱伝達3節点辺要素	FCLIN 3	3D
	軸対称	熱伝達2節点軸対称要素	FLAX 2	2D
		熱伝達3節点軸対称要素	FCAX 3	2D
	面	熱伝達6節点三角形面要素	FTFAC 6	3D
		熱伝達8節点四辺形面要素	FQFAC 8	3D
熱伝達リンク	棒	熱伝達リンク棒要素	CRLINK 2	3D
	平板	熱伝達リンク4節点四辺形平面要素	CMLINK 4	2D
		熱伝達リンク6節点四辺形平面要素	CMLINK 6	3D
	軸対称	熱伝達リンク4節点四辺形軸対称要素	CALINK 4	2D
		熱伝達リンク6節点四辺形軸対称要素	CALINK 6	2D
	立体	熱伝達リンク12節点五面体要素	CSLINK 12	3D
		熱伝達リンク16節点六面体要素	CSLINK 16	3D
輻射リンク	棒	輻射リンク2節点要素	RLINK 2	3D



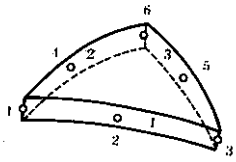
熱伝導棒要素
HROD 2



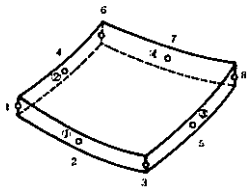
熱伝導 3 節点三角形平面要素
HTMEM 3



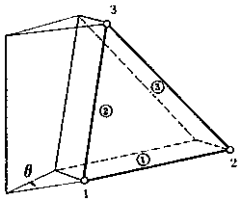
熱伝導 4 節点四辺形平面要素
HQMEM 4



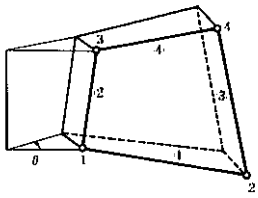
熱伝導 6 節点三角形平面要素
HTMEM 6



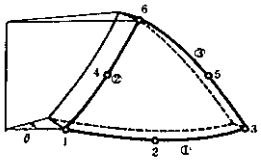
熱伝導 8 節点四辺形平面要素
HQMEM 8



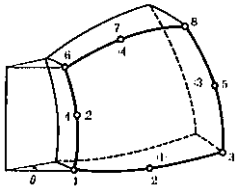
熱伝導3節点三角形軸対称要素
HTAX 3



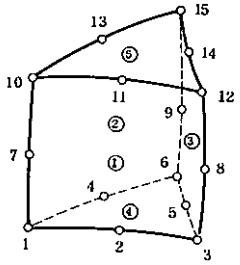
熱伝導 4 節点四辺形
軸対称要素
HQAX 4



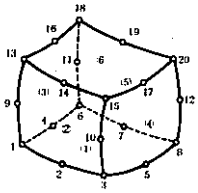
熱伝導6節点三角形軸対称要素
HTAX 6



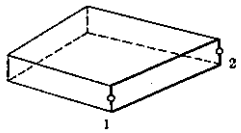
熱伝導 8 節点四辺形軸対称要素
HQAX 8



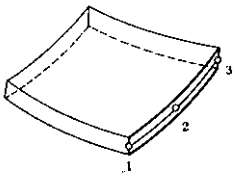
熱伝導 15 節点五面体要素
HPENT 15



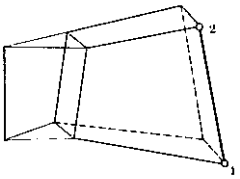
熱伝導 20 節点六面体要素
HHEX 20



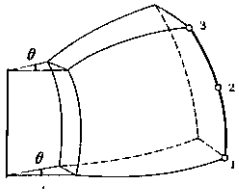
熱伝達 2 節点辺要素
FLIN 2



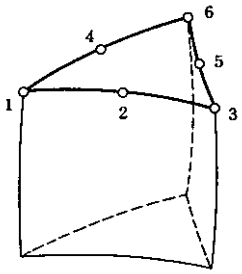
熱伝達 3 節点辺要素
FCLIN3



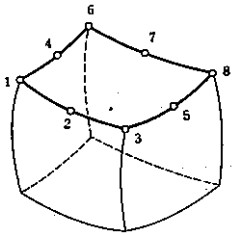
熱伝達2節点軸対称要素
FLAX 2



熱伝達3節点軸対称要素
FCAX3

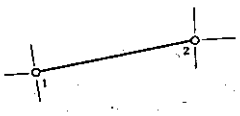


熱伝達6節点三角形 面要素
FTFAC 6



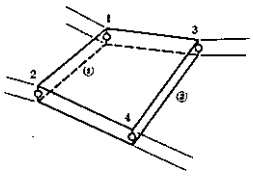
熱伝達８節点四辺形面要素

FQFAC 8



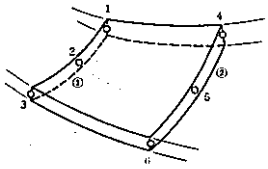
熱伝達リンク棒要素

CRLINK 2



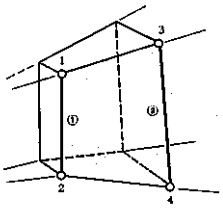
熱伝達リンク４節点
四辺形平面要素

CMLINK 4



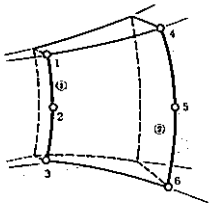
熱伝達リンク６節点
四辺形平面要素

CMLINK 6



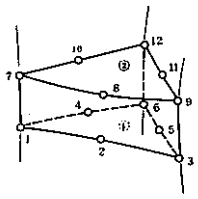
熱伝達リンク４節点
四辺形軸対称要素

CALINK 4



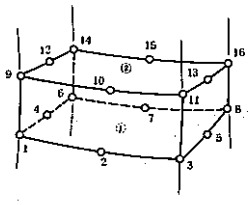
熱伝達リンク６節点
四辺形軸対称要素

CALINK 6



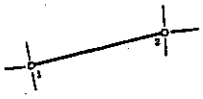
熱伝達リンク12節点
五面体要素

CSLINK 12



熱伝達リンク16節点
六面体要素

CSLINK 16



輻射リンク２節点要素

図５－２　熱伝導解析のための要素

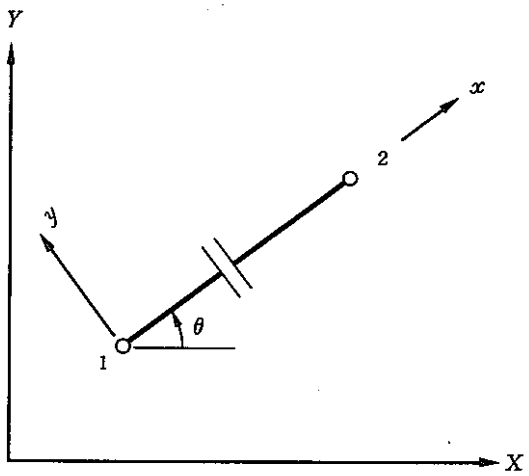
表5−3　要素の解析機能

○……解析可能

		熱弾性解析	熱弾塑性解析	熱弾塑性クリープ解析	スウェリング解析	塑性とクリープの連成	大変形解析	座屈荷重解析	破壊力学解析	接触解析	動的モード解析	動的直接積分解析	定常温度解析	非定常温度解析
棒・梁	ROD2	○	○	○	○	○	○	○			○	○		
	SBEAM2	○									○	○		
	BEAM2	○	○	○	○		○	○			○	○		
	HROD2												○	○
平板	TMEM3	○	○	○	○									
	QMEM4	○	○	○	○									
	QMEM4R	○	○	○	○									
	TMEM6	○	○	○	○						○	○		
	QMEM8	○	○	○	○				○		○	○		
	HTMEM3												○	○
	HQMEM4												○	○
	HTMEM6												○	○
	HQMEM8												○	○
平面ひずみ	QPLAN8	○	○	○					○					
	QPLAN9	○	○	○										
板曲げ・シェル	CONIC2	○	○	○	○		○	○			○	○		
	AXSHEL2	○	○	○	○									
	TPLA3	○	○	○	○									
	QPLA4R	○	○	○	○									
	TFLA3	○	○	○	○						○	○		
	QFLA4R	○	○	○	○		○	○			○	○		
	QFLA4	○	○	○										
	NCONC2	○												
軸対称	TAX3	○	○	○	○									
	QAX4	○	○	○	○	○	○	○						
	QAX4R	○	○	○	○	○								
	TAX6	○	○	○	○						○	○		
	QAX8	○	○	○	○	○	○	○			○	○		
	QNAX8	○												
	TNAX8	○												
	QNAX4	○												
	TNAX3	○												

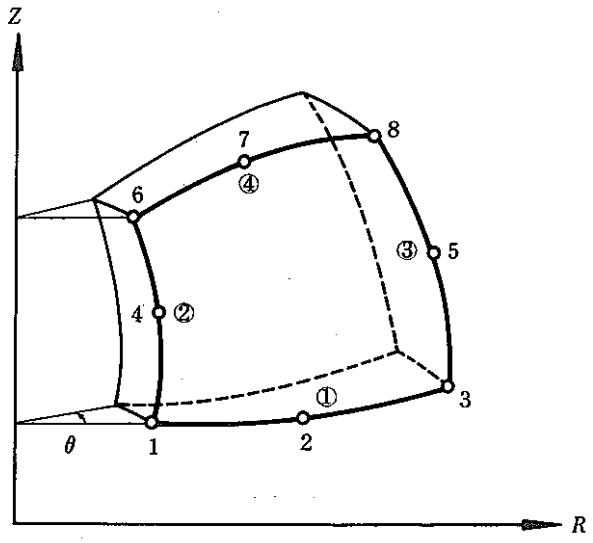
		熱弾性解析	熱弾塑性解析	熱弾塑性クリープ解析	スウェリング解析	塑性とクリープの連成	大変形解析	座屈荷重解析	破壊力学解析	接触解析	動的モード解析	動的直接積分解析	定常温度解析	非定常温度解析
軸対称	HTAX3												○	○
	HQAX4												○	○
	HTAX6												○	○
	HQAX8												○	○
立体	PENT15	○	○	○	○						○	○		
	HEX20	○	○	○	○	○	○	○			○	○		
	HPENT15												○	○
	HHEX20												○	○
配管	ELBOW6	○	○	○	○									
	ELBOW6R	○	○	○	○		○	○						
	ELBOW3R	○	○	○	○		○	○						
	PIPE2	○									○	○		
熱伝達	FLIN2												○	○
	FCLIN3												○	○
	FLAX2												○	○
	FCAX3												○	○
	FTFAC6												○	○
	FQFAC8												○	○
熱伝達リンク	CRLINK2												○	○
	CMLINK4												○	○
	CMLINK6												○	○
	CALINK4												○	○
	CALINK6												○	○
	CSLINK12												○	○
	CSLINK16												○	○
結合	LCOMB2	○									○	○		
接触	CONT2	○					○							

(1)　2次元接触要素　CONT 2



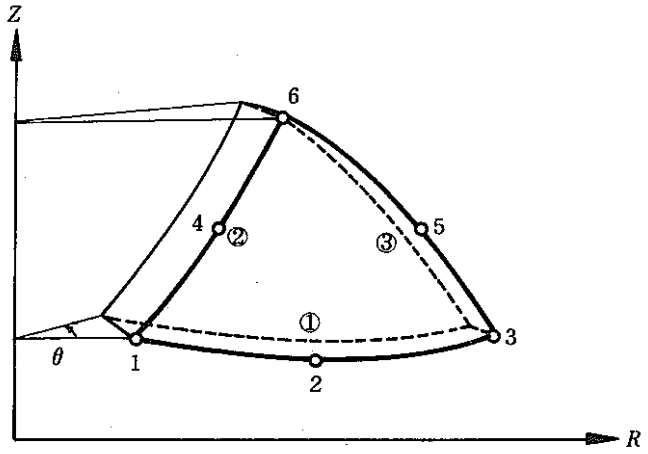
形　　状	2次元接触要素
節　点　数	2
節点座標	X, Y 座標
節点自由度	自由度番号　$1=u_X$, $2=u_Y$
要素特性	接触面での初期状態，垂直方向剛性 k_g，水平方向剛性 k_f，ギャップの大きさ g，要素座標系を定義するための角度 θ

(2)　8節点四辺形軸対称調和荷重要素　QNAX 8



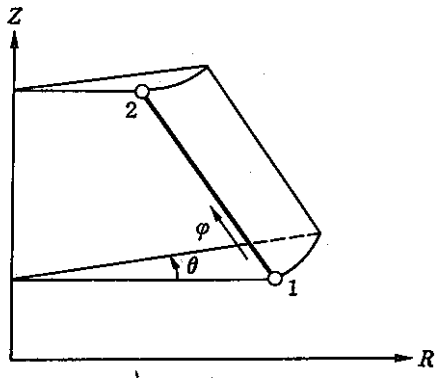
形　　状	四辺形軸対称要素
節　点　数	8
節点座標	R, Z 座標
節点自由度	自由度番号　$1=u_R$,　$2=u_Z$,　$3=u_\theta$
変位関数	回転断面上　　Serendipity の2次元2次補間
	θ 方向　　n次の Fourier 級数
積　分　点	9（3×3）
応力成分	σ_R, σ_Z, σ_θ, τ_{RZ}, $\tau_{Z\theta}$, $\tau_{\theta R}$
ひずみ成分	ε_R, ε_Z, ε_θ, γ_{RZ}, $\gamma_{Z\theta}$, $\gamma_{\theta R}$

(3)　6節点三角形軸対称調和荷重要素　TNAX 6



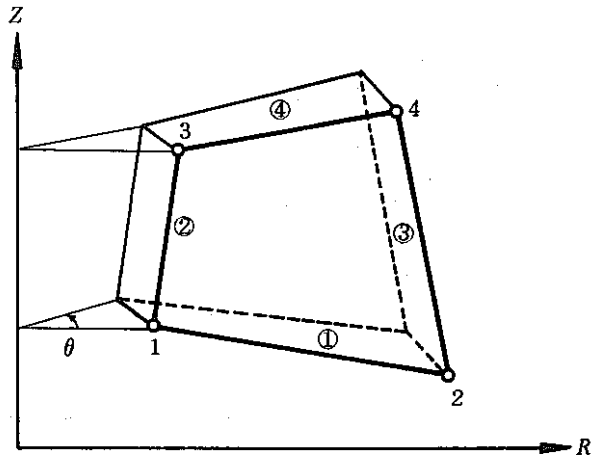
形　　状	三角形軸対称要素
節 点 数	6
節点座標	R, Z 座標
節点自由度	自由度番号　$1=u_R$, $2=u_Z$, $3=u_\theta$
変位関数	回転断面上　完全2次式
	θ 方 向　n次の Fourier 級数
積 分 点	7
応力成分	σ_R, σ_Z, σ_θ, τ_{RZ}, $\tau_{Z\theta}$, $\tau_{\theta R}$
ひずみ成分	ε_R, ε_Z, ε_θ, γ_{RZ}, $\gamma_{Z\theta}$, $\gamma_{\theta R}$

(4)　2節点円錐台軸対称調和荷重要素　NCONC 2



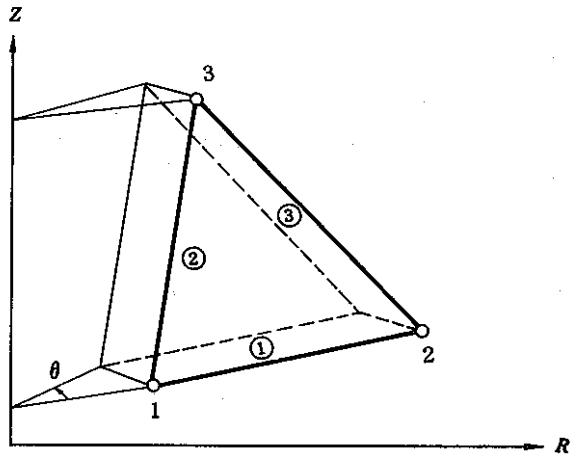
形　　状	軸対称直線要素
節 点 数	2
節点座標	R, Z 座標
節点自由度	自由度番号　$1=u_R$, $2=u_Z$, $3=u_\theta$, $4=\beta$
変位関数	回転断面上　軸方向変位u，θ 方向変位vは Lagrange の1次式，たわみwは Hermite の3次式
	θ 方向　n次の Fourier 級数
積 分 点	25（軸方向 5点，厚さ方向 5点）
応力成分	σ_φ, σ_θ, $\tau_{\varphi\theta}$
ひずみ成分	ε_φ, ε_θ, $\varepsilon_{\varphi\theta}$
幾何形状	厚さt

(5)　4節点四辺形軸対称調和荷重要素　QNAX 4



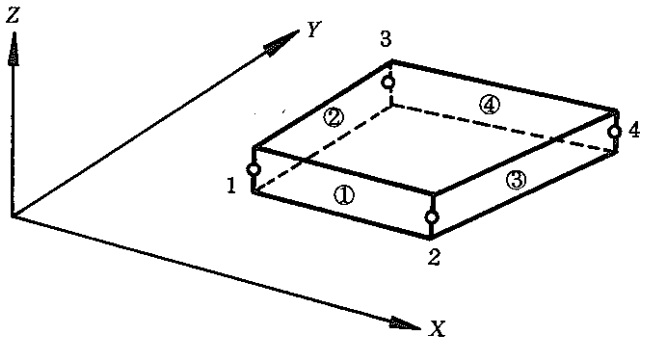
形　　状	軸対称四辺形要素
節　点　数	4
節点座標	R, Z 座標
節点自由度	自由度番号　$1=u_R$, $2=u_Z$, $3=u_\theta$
変位関数	回転断面上　Lagrange の2次元1次補間式
	θ 方向　n次の Fourier 級数
積　分　点	9（3×3）
応力成分	σ_R, σ_Z, σ_θ, τ_{RZ}, $\tau_{Z\theta}$, $\tau_{\theta R}$
ひずみ成分	ε_R, ε_Z, ε_θ, γ_{RZ}, $\gamma_{Z\theta}$, $\gamma_{\theta R}$

(6)　3節点三角形軸対称調和荷重要素　TNAX 3



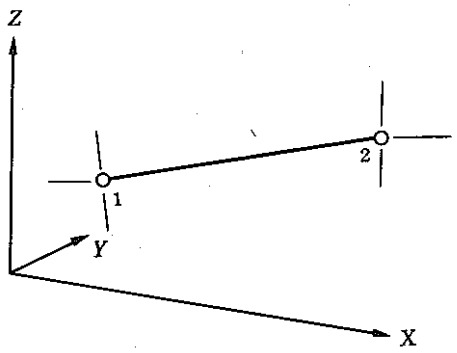
形　　状	軸対称三角形要素
節 点 数	3
節点座標	R, Z 座標
節点自由度	自由度番号　　$1=u_R$,　$2=u_Z$,　$3=u_\theta$
変位関数	回転断面上　　1次多項式
	θ 方 向　　n次の Fourier 級数
積 分 点	4
応力成分	σ_R, σ_Z, σ_θ, τ_{RZ}, $\tau_{Z\theta}$, $\tau_{\theta R}$
ひずみ成分	ε_R, ε_Z, ε_θ, γ_{RZ}, $\gamma_{Z\theta}$, $\gamma_{\theta R}$

(7)　4節点四辺形平板シェル要素　QFLA4



形　　状	3次元四辺形平板要素
節　点　数	4
節点座標	各節点でX，Y，Z座標
節点自由度	各節点で u_X, u_Y, u_Z, θ_X, θ_Y, θ_Z
変位関数	面内変位は1次式，面外変位は3次式
積　分　点	45点（面内 5点，面外 9点）
応力成分	σ_x, σ_y, τ_{xy}
ひずみ成分	ε_x, ε_y, γ_{xy}
幾何形状	板厚 t
要素特性	要素面の法線回りの剛性として Zienkiewicz の仮想剛性を仮定

(8) 輻射リンク２節点要素　RLINK2



形　　状	３次元棒要素
節　点　数	2
節点座標	各節点で X，Y，Z 座標
補間関数	形状については１次式
積　分　点	1
熱　流　量	輻射による熱流量
幾何形状	断面 A，スティファン・ボルツマン定数 σ，放射係数 ε，形態係数 F

6. 入出力

6.1 入力機能

(1) 入力データ論理チェック機能の改良

前年度に引き続き，利用者が入力したデータのエラーチェック機能を強化するために，データ入力処理の段階で解析の種類に応じて必要なデータと不必要なデータの検出および各入力データ項目間の入力されたデータの整合性のチェック機能が改良された。不必要なデータが入力された場合には，警告メッセージが出力されて計算は行なわれるが，必要なデータが入力されない場合には，エラーメッセージが出力されて計算はストップする。

また，本年度の改良で追加されたデータについても，開発者が使用している未公開の入力データあるいは入力フィールドがあり，これらのデータおよびフィールドから利用者を保護するためのチェック機能の改良も行なわれた。

(2) データ入力方法の整備

前年度に引き続き，FINAS の各解析機能についてデータ入力形式および様式の見直しが行なわれ，以下に示す項目について，データ入力の変更および新たなデータの追加が行なわれた。

a) 解析をコントロールするデータへの新たなデータの追加

接触問題解析機能，非定常熱伝導解析の時間増分自動決定機能を使用する場合の解析条件等を定義するためのデータとして，CONTACT カード，AUTO HEAT カードが組み込まれた。

b) 熱伝導解析における入力データの改良

異方性を有する熱伝導係数の取り扱いができるように MATERIAL データの改良，また非定常熱伝導解析のステップにおいて時間増分自動決定機能が使用できるように HISTORY データの改良が行なわれた。

c) 静的応力解析における入力データの改良

軸対称構造物における非軸対称負荷解析の機能の開発に伴い，以下の入力データが設けられた。すなわち，解析をコントロールするデータの STATIC カードにおいて，パラメータとして NONAX が設けられた。また，モデル・データとして，負荷条件を定義する NONAXCASE データが設けられた。

6.2 出力機能

(1) 解析モデルに関する諸情報の出力

解析モデルに関して，次の項目について使用実績等がプリント出力される機能が組み込まれた。

- 解析モデルのタイプ，荷重ステップ数，要素数，要素名，節点数
- 解析モデルの自由度数，アクティブカラム数
- 各モジュールの実行時間および解析全体の CPU 時間
- 解析で使用したワークファイルの容量
- 解析で作成されたリスタート・テープ容量

(2) データチェックラン機能の整備

解析モデルの計算に先立ち，その解析モデルに関して，ソルバーモジュールで要する時間，リスタートテープの容量，解析全体で使用するワークファイルのディスク容量等の予想値をプリント出力するデータチェックラン機能が整備された。

(3) プリント，ポストおよびプロット出力機能の改良

- 静的解析において，主ひずみおよび熱ひずみを除いた全ひずみのプリント出力
- モーダル応答解析において，刺激係数と有効質量のプリント出力
- 変位座標系のポストテープ出力
- 非軸対称荷重解析のためのポストテープ出力の追加
- ＸＹプロット出力機能において，シンボルだけをプロット出力するオプションの追加

(4) COM への出力

FINAS で計算された結果は，現在ラインプリンタあるいはレーザープリンタへ出力されているが，更に PNC 大洗工学センタで利用されている COM への出力が可能となった。

〔解析モデルに関する諸情報の出力例〕

・応力解析

```
                    F I N A S    E X E C U T I O N    S U M M A R Y

 ANALYSIS MODEL INFORMATION
      ANALYSIS TYPE . . . . . . . . . . . . .  STATIC  EP
      NUMBER OF LOAD STEPS . . . . . . . . .      6
      NUMBER OF ELEMENTS . . . . . . . . . .    376          (     376=MMEM&R  )
      NUMBER OF NODES . . . . . . . . . . . .   472
      NUMBER OF UNKNOWN FREEDOMS . . . . . .    786
      MAXIMUM NUMBER OF ACTIVE COLUMNS . . .     56
      AVERAGE NUMBER OF ACTIVE COLUMNS . . .     43.3

 EXECUTION TIME LOG (CPU TIMES IN SECONDS)
      ELEMENT MATRICES FORMATION . . . . . .    24.8          ( 14.99 % )
      LOAD VECTOR FORMATION . . . . . . . . .    3.8          (  2.31 % )
      MATRIX ASSEMBLY AND DECOMPOSITION . . .   45.3          ( 27.35 % )
      STRESS DATA RECOVERY  AND UPDATING
          LOAD VECTOR FOR NONLINEARITIES  . .   60.2          ( 36.33 % )
      ACTIVE COLUMN OPTIMIZATION . . . . . .    11.6          (  7.00 % )
      OTHERS (DATA INPUT, PRINT OUT, ETC.). .   19.9          ( 12.02 % )
      TOTAL EXECUTION TIME . . . . . . . . .  165.7 SECONDS

 STORAGE DEVICE INFORMATION
      DISK SPACE UTILIZED FOR WORK . . . . .    306 TRACKS
      AMOUNT OF NEW RESTART TAPE FILE . . . .    28 TRACKS
```

図 6－1　応力解析の例

・熱伝導解析

```
                    F I N A S    E X E C U T I O N    S U M M A R Y

 ANALYSIS MODEL INFORMATION
      ANALYSIS TYPE . . . . . . . . . . . . .  HEAT
      NUMBER OF LOAD STEPS . . . . . . . . .     20
      NUMBER OF ELEMENTS . . . . . . . . . .    210          (     200=MMAX4   )
                                                             (      10=FLAX2   )
      NUMBER OF NODES . . . . . . . . . . . .   231
      NUMBER OF UNKNOWN FREEDOMS . . . . . .    231
      MAXIMUM NUMBER OF ACTIVE COLUMNS . . .     13
      AVERAGE NUMBER OF ACTIVE COLUMNS . . .     12.2

 EXECUTION TIME LOG (CPU TIMES IN SECONDS)
      ELEMENT MATRICES FORMATION . . . . . .    80.8          ( 49.68 % )
      LOAD VECTOR FORMATION . . . . . . . . .    0.0          (  0.0  % )
      MATRIX ASSEMBLY AND DECOMPOSITION . . .   17.8          ( 10.95 % )
      COMPUTATION OF HEAT FLOW AND FLUX . . .   40.2          ( 24.74 % )
      ACTIVE COLUMN OPTIMIZATION . . . . . .     1.0          (  0.60 % )
      OTHERS (DATA INPUT, PRINT OUT, ETC.). .   22.8          ( 14.03 % )
      TOTAL EXECUTION TIME . . . . . . . . .  162.5 SECONDS

 STORAGE DEVICE INFORMATION
      DISK SPACE UTILIZED FOR WORK . . . . .    122 TRACKS
      AMOUNT OF NEW RESTART TAPE FILE . . . .    68 TRACKS
```

図 6－2　熱伝導解析の例

7. 前処理／後処理機能

(1) 前処理機能

(a) 荷重履歴作成プログラム FNSLOAD

荷重履歴作成プログラム FNSLOAD は，FINAS のデータの一部である荷重および変位境界条件，そして荷重履歴データを簡便に作成するプログラムである。FNSLOAD で作成するデータは次のとおりである。

BOUNDARY データ
FASTENING データ
FORCE データ
TEMPERATURE データ
HISTORY データ
NONAXCASE データ

複雑な荷重履歴データでは，FINAS に入力する HISTORY データは多量となり，ユーザーの負担も多くなりがちである。FNSLOAD は，このような場合に少数のデータで容易に作成することができるプログラムである。

2章で述べたように，静的応力解析のための軸対称構造における非軸対称荷重作成機能を利用する場合，この非軸対称荷重解析では，荷重，温度，変位境界条件等をフーリエ展開し，三角関数ごとに解析を行なうものである。

ここで作成したプログラムの非軸対称荷重解析用ジェネレーション機能は，与えられた荷重等を利用者が指示した項においてフーリエ級数展開を行ない，FINAS の入力データの一部である荷重および変位，そして荷重履歴データを作成するものである。したがって利用者は，軸対称構造の周方向の荷重あるいは変位の分布をその位置と強度の組の点列で与えることによって定義する。その点列群を FNSLOAD では，利用者が指示した項数によりフーリエ展開し，FINAS の入力データの荷重，変位および荷重履歴データを作成するものである。

本プログラムは，FINAS の実行形式と同じようにあらかじめ利用者が FNSLOAD のデータを作成しておいて利用するバッチ形式の他，FNSLOAD の実行時に必要に応じて利用者が入力データを与えるインターラクティブ形式でも利用可能である。

図 7-1 は FNSLOAD と FINAS の関係を示す。

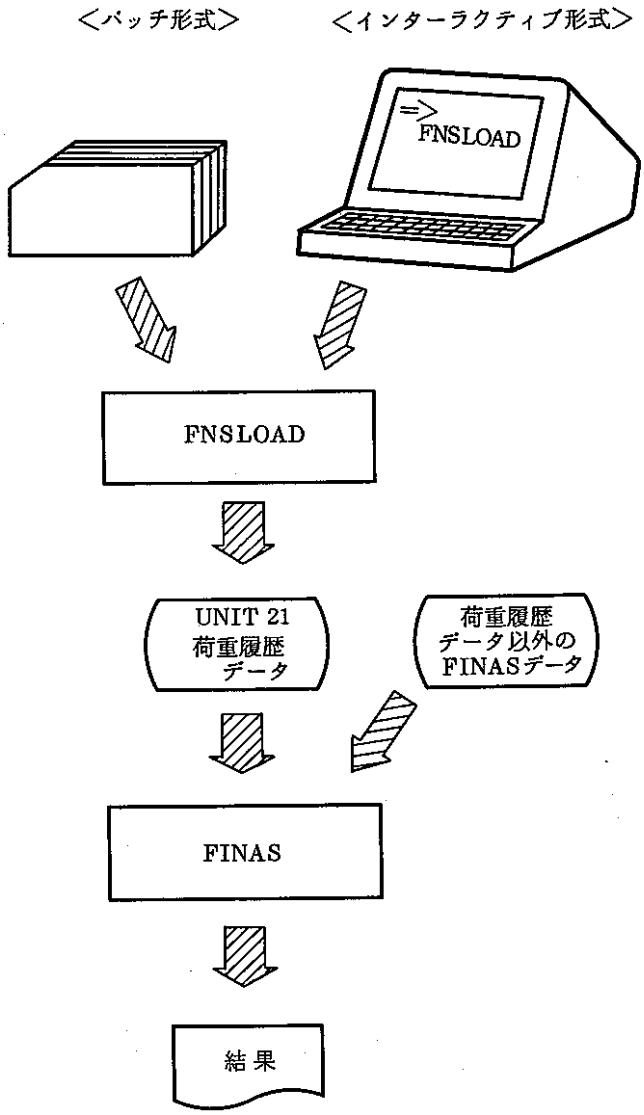


図7－1　FNSLOADとFINASの実行

FNSLOADデータの入力方法は，バッチ形式の場合には前もって利用者がプログラムを作成しておくという従来どおりの方法であるが，インターラクティブ形式では，FNSLOADの実行に入ると管面に「=>」記号が出力されるので，この状態で利用者はデータを入力する。なお，FNSLOADで作成されたプロットファイルは，出力についてはプロット出力および作成された荷重履歴データ出力が行なわれる。プロット出力はFINASプレビュープログラムFNSTEKにより管面に出力される。

利用者がバッチあるいはインターラクティブ形式でFNSLOADを実行すると，ユニット21へFINASのデータの一部である荷重履歴データが出力される。この荷重履歴データは，「＝READ 21」をFINASデータの入力されるべき位置に組み込むことによって連結される。

(b) FNSLOADの利用例

図7-2に示されるような軸対称の塔構造物に作用する非軸対称荷重を受ける場合のデータ作成を行なう。図7-3は0°から360°までの荷重状態を示したもので，非軸対称の圧力が作用している。

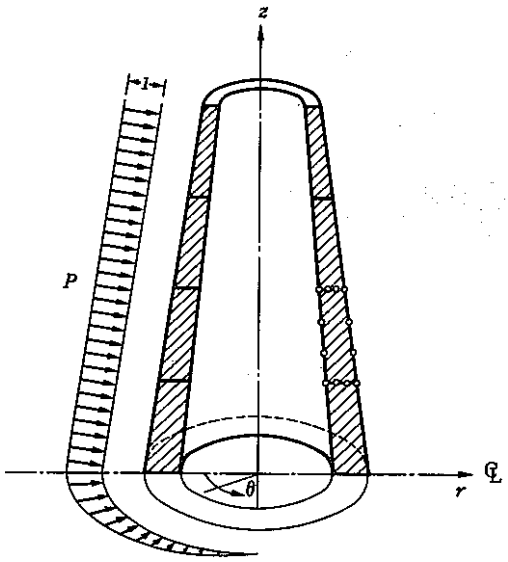


図7－2　構造モデル

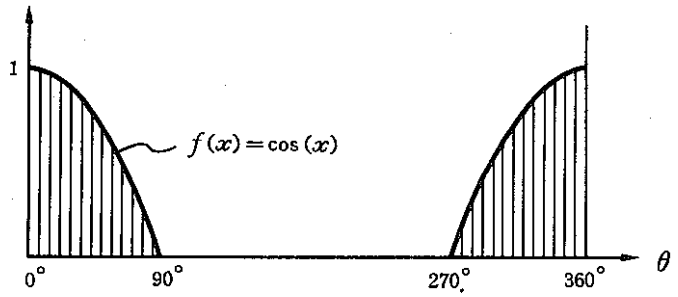


図7－3　θ方向の荷重状態

以上のモデルを解析する場合の FNSLOAD データを図7-4に示す。

```
1  ¥
2  ¥          FNSLOAD PROGRAM FOR NON-AXIAL ANALYSIS
3  ¥
4  FNSLOAD
5  TABLE 1 ( 0 360 10 )
6  TABLE 2 1          0.9848077 0.9396926 0.8660254 0.7660444 0.6427876 ,
7          0.5        0.3420201 0.1736481 0         0         0         ,
8          0          0         0         0         0         0         ;
9          0          0         0         0         0         0         ,
10         0          0         0         0         0.1736481 0.3420201 ,
11         0.5        0.6427876 0.7660444 0.8660254 0.9396926 0.9848077 ,
12         1
13 ¥
14 MODE 1 CONST    COS ( 1 4 )
15 HARM  1 ANGLE   1 VALUE 2 MODE 1
16 ¥
17 PLOT    HARM    1
18 ¥
19 FORCE
20 ELM     ( 1 8 ) TYPE 1 PARM 3 HARM 1 1.0 1.0
21 BOUNDARY
22 NODE    ( 1 11 10 ) ( 1 3 )
23 NONAXCASE ALL
24 FINAS
25 ¥
26 PRINT ALL
27 ¥
28 ENDLOAD
```

図7－4　FNSLOAD データ

表7-1は，非軸対称荷重作成プログラム FNSLOAD を実行させたときのフーリエ展開解析値および理論値との比較を表わしたものである。また，図7-5は，入力データとそのデータを使って解析した場合の状態を示したものである。

この例では，COSIN カーブを用いて第4項までフーリエ級数展開を行ない，正しく表示されていることが確認できた。

表7－1　解析値と理論値

	解　析　値	理　論　値
CONSTANT	3.175E－01	3.183×10^{-1}
COS　1	4.987E－01	0.5
COS　2	2.117E－01	2.122×10^{-1}
COS　3	－8.819E－07	0.0
COS　4	－4.234E－02	-4.244×10^{-2}

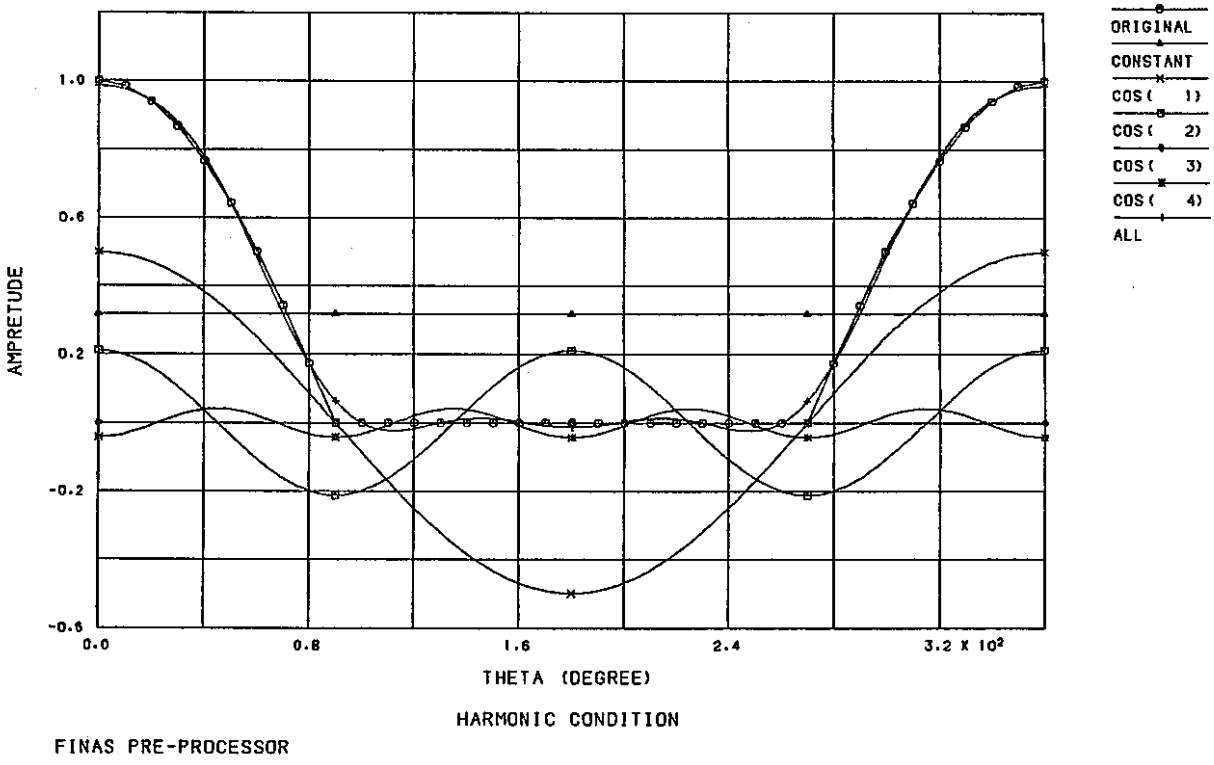


図7－5　フーリエ級数展開状況

また，図7-6は FNSLOAD データを実行して， UNIT 21 へ作成された FINAS の荷重，変位および荷重履歴データを示す。

```
FORCE
    1
          1    1              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    2              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    3              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    4              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    5              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    6              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    7              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
          1    8              3    1    2 1.000E+00 1.000E+00
BOUNBARY
    1
               1              0    1      0.0
               1              0    2      0.0
               1              0    3      0.0
              11              0    1      0.0
              11              0    2      0.0
              11              0    3      0.0
NONAXCASE
HARMONIC  SYM      0
          FORC     1 3.175E-01
          BOUN     1 1.000E+00
HARMONIC  SYM      1
          FORC     1 4.987E-01
          BOUN     1 1.000E+00
HARMONIC  SYM      2
          FORC     1 2.117E-01
          BOUN     1 1.000E+00
HARMONIC  SYM      3
          FORC     1-8.819E-07
          BOUN     1 1.000E+00
HARMONIC  SYM      4
          FORC     1-4.234E-02
          BOUN     1 1.000E+00
```

図7-6　FNSLOAD データより作成された FINAS データ

荷重履歴プログラム FNSLOAD を実行して作成された FINAS データを他の FINAS データに連結した例を図7-7に示す。

```
FINAS
TITLE      HARMONIC FUNCTION GENERATING
STATIC     E     NONAX
MODEL
NODE
    1                    15.0       0.0                    8         1    9
    9                     8.0      72.0
   11                    22.0       0.0                    8         1   19
   19                    11.0      72.0
ELEMENT TYPE
    1     QNAX4          1
CONNECTION
    1    1          1    1   11    2   12                    8    1
MATERIAL
    1
          F          2.1E3
         NU          0.3
=READ 21
END MODEL
END FINAS
```

図7-7　F1NAS データと FNSLOAD で作成されたデータの連結

(2) 後処理機能

軸対称構造物に非軸対称荷重を負荷する解析では，荷重および変位を回転（θ）方向に Fourier 級数展開することにより，θに対して変数分離できる。この調和成分ごとに，それぞれ独立な平衡方程式が得られ，これを解くことにより調和成分ごとに解が得られる。この解は対応する調和成分での振幅であるため，回転方向のある角度（θ）に着目し，これらの解を線形結合することにより，解くべき問題の解が得られる。

調和成分が1種類であれば線形結合の必要はないが，荷重が回転方向に複雑な分布をもつ場合には，調和成分の数も増えるため，何種類もの解の線形結合が必要となる。

このために FINAS では，非軸対称荷重解析の後処理用プログラムとして POSTHARM を開発する。このプログラムは，FINAS より出力されたポスト・ファイルを用いて次のような処理を行なう。

○プリント出力

- 指定した回転断面（θ）における変位，反力，応力/ひずみ，主応力の線形結合結果
- 指定した節点における変位，反力の回転方向の分布
- 指定した要素における応力/ひずみ，主応力の回転方向の分布

○プロット出力

- 指定した回転断面（θ）における変位図，コンター図，ベルトル図
- 指定した節点における変位，反力の回転方向の分布図
- 指定した要素における応力/ひずみ，主応力の回転方向の分布図

○ポスト・ファイル出力

- 指定した回転断面における線形結合結果のポスト・ファイル出力

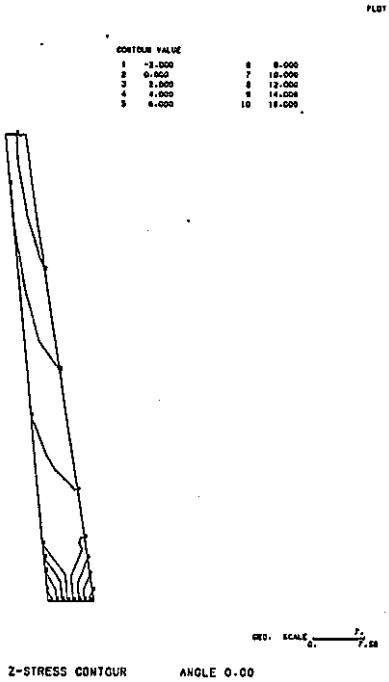


図 7−8　応力コンター図の例

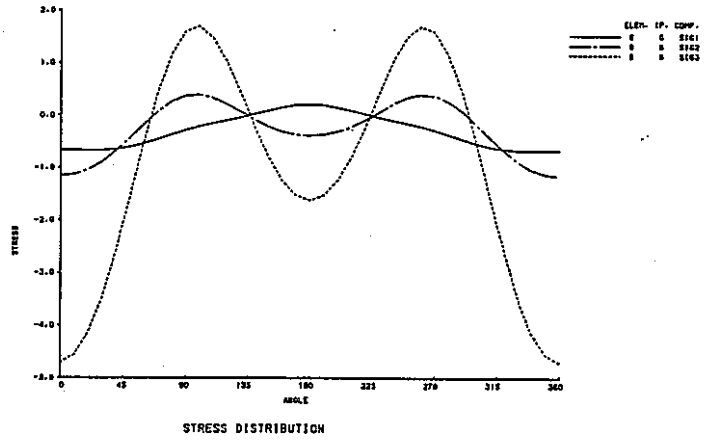


図 7−9　周方向応力分布図の例

8. プログラム検証

FINAS では，プログラム開発当初から系統的に検証が進められており，検証目的に応じてその問題は 4 つに分類されている。これらの問題は，CP（Check Problem），EP（Element Problem），VP（Verification Problem）および DP（Demonstration Problem）と称され，それぞれ次の目的を持っている。

CP ……プログラム作成者が各自のモジュール作成の過程でそのチェックのために設定する問題。あるいは既にユーザーに供されているプログラムにエラーが発見された時にプログラム修正が正しく行なわれたかどうかを確認する問題。

EP ……新たに開発した要素が仕様書どおりに作成されていることを確認し，その要素の特性を調査する問題。

VP …… FINAS の持つ各種機能が正しく作動するか，スキームが与える解が数学的に正解であり，かつ物理的に妥当であるかの検証を行なう問題。

DP …… FINAS の解析能力の総合評価と実際的な問題への応用を目的とし，ベンチマーク問題として既に解析が行なわれているもの，あるいは高速増殖炉の設計にあたり実際に出合う問題。

58 年度に解析した検証問題は CP 12 題，EP 30 題，VP 15 題であり，表 8-1 と表 8-2 に解析した CP と VP をそれぞれ示す。VP の内容と結果については第Ⅲ編を参照されたい。

表 8-1　58年度に解析した CP

No.	タ　イ　ト　ル	目　　的
CP-090	ユーザーサブルーチン XCREEP を使用した場合のクリープ硬化則の指定	ユーザーサブルーチン XCREEP を使用した場合にはクリープ硬化則の指定は必要ないが，指定しないとエラー・ストップが起こる。これに対するプログラム修正のチェックと，XCREEP を使用しない場合の硬化則の指定に関する入力データ論理チェックを行なう。
CP-091	2つの境界条件識別番号の使用	境界条件の自由度が変わらない2つの識別番号を用意して，ステップ1と2で別々の識別番号を参照して弾性解析を行なう。
CP-092	材料データを除いた場合の静的解析	材料データを必要としない要素に対してダミーの材料データを入力しなくても，静的解析が正常に行なわれるようにプログラムを修正し，その検証を行なう。
CP-093	材料データを除いた場合の動的解析	材料データを必要としない要素に対してダミーの材料データを入力しなくても，動的解析が正常に行なわれるようにプログラムを修正し，その検証を行なう。
CP-094	境界条件未定義の場合のエラーチェック	HISTORY データ内で BOUNDARY データを参照しない場合のメッセージ出力の改良を行ない，そのチェックを行なう。
CP-095	ファスニングデータにおいて節点自由度の変位が線形結合の場合の検証	ファスニングデータを使用して，節点自由度の線形結合を行なう場合，一つの線形結合式内に同一節点自由度が2回以上定義されたときにエラーストップが正しく行なわれるかどうかのチェックを行なう。
CP-096	村上・大野クリープ硬化則における入力データ変更の修正	村上・大野のクリープ硬化則を使用する場合の MATERIAL データで指定するラベルを MU RULE から R CREEP に変更し，このチェックを行なう。
CP-097	加速法をを用いた変位制御大変形解析	変位制御の大変形解析において，加速法が正しく作動するかどうかの確認を行なう。
CP-098	CONVECTION HEAT INPUT データのチェック	熱伝導要素に熱伝達境界を，あるいは熱伝達要素に入熱条件を与えた場合のエラーチェックが正しく行なわれるかどうかの検証を行なう。

版	タ　イ　ト　ル	目　　的
CP-099	HEAT INPUT データにリンク要素を使用したときのエラーチェック	熱伝達リンク要素に入熱条件を与えた場合，エラーチェックが正しく行なわれるかどうかの検証を行なう。
CP-100	線形直接積分法における RESULT カードの変更	線形直接積分法における " RESULT " カードの " CONTROL " データへの移行をチェックする。
CP-101	クリープ式の参照温度指定の検証	材料特性が温度依存のクリープ問題において，クリープ式の参照温度の指定を行なうと，弾性係数等の材料特性を参照する温度が正しく選択されるかどうかのテストを行なう。

表8-2　58年度に解析したVP

No	タイトル	目的
VP-108	熱膨張による接触問題	ギャップがある構造モデルにおいて，温度変化により熱膨張が生じた場合の弾性接触問題を解析し，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-109	摩擦を考慮した接触問題	摩擦が考慮されている構造モデルにおいて，すべりを生じさせる負荷が与えられる弾性接触問題を解析し，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-110	繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題	クリープの硬化則として繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題において，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-111	弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題	弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題を解析し，理論解と比較する。
VP-112	弾性大変形接触問題	ギャップが在る構造モデルにおいて，弾性大変形接触問題を解析し，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-113	円管の曲げ問題 ── 軸対称要素における非軸対称負荷の問題	軸対称構造物における非軸対称負荷機能を検証するために，円管の自重による曲げの問題により，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-114	非軸対称荷重ジェネレーション問題	荷重データジェネレーションプログラム FNSLOAD を用いて軸対称構造物に作用する非軸対称荷重のデータジェネレーションを行ない，FNSLOAD で求めた荷重分布と理論で求めた荷重分布の比較を行なう。
VP-115	薄肉円筒の曲げ問題 ── 軸対称構造における非軸対称負荷の問題	軸対称構造物における非軸対称負荷解析の機能を検証するために，薄肉円筒の自重による曲げの問題により，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-523	輻射を含む定常熱伝導問題	輻射を含む定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-524	熱伝導率の直交異方性を考慮した定常熱伝導問題	熱伝導率の直交異方性が考慮された定常熱伝導問導を解析し，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。

No.	タイトル	目的
VP-525	時間増分自動決定機能を利用した非定常熱伝導問題	厚肉円筒において，内部を流れる液体ナトリウムが急激に変化した場合の非定常熱伝導問題に関して時間増分自動決定機能を適用したFINASの解とANSYSの解との比較を行う。
VP-526	材料座標系を用いた熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題	熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない定常熱伝導問題を解析し，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-527	使用者が作成したサブプログラムによる熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題	熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない場合に，その材料座標系を定義するための使用者作成サブプログラムXMCORDを用いて定常熱伝導解析を行ないFINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-729	梁の固有値解析において固有値範囲を指定する問題	VP-701の梁の固有値問題に対して固有値範囲を指定した固有値解析機能が正しく作動するかの検証を行なう。
VP-730	固有値範囲指定による片持ち梁のモーダル応答問題	VP-708の片持ち梁のモーダル応答問題において固有値範囲指定機能が正しく作動するかの検証を行なう。

9. 利用者のための説明書整備

汎用プログラムを多くの人に広く使用してもらうためには，そのプログラムの機能，性能および信頼性が優れていることはいうまでもないが，その使い易さもこれと並ぶ重要な点である。FINAS では，この観点から，昭和54年4月に一般利用者向けの使用説明書（FINAS V 2.0）を作成し，以後毎年更新を重ねている。しかしながら，プログラムへの取り付き易さ，さらに進んだ使用法ということを考慮するならば，使用説明書だけでは十分とはいえない。利用者にFINASの入力データを容易に理解してもらうためには，解析した問題と解析に使用した入力データを示すことが肝要であり，また，FINASのもつ機能，性能を十分使いこなしてもらうためにはプログラムを支える理論とアルゴリズムを知ってもらうことが不可欠である。そのため，本年度は使用説明書の更新と併せて利用者向けの例題説明書と理論説明書の整備を行なった。

(1) 使用説明書

FINAS の機能拡張および機能修正による FINAS V 6.1 から V 7.0 および V 7.1 へのバージョンアップに伴い，昭和58年12月に使用説明書のバージョン7.1への更新が行なわれた。

更新項目を表9-1に示す。

表 9-1　FINAS 使用説明書 V7.1 の更新項目

1. 解析をコントロールするデータ
   a）従来，モデルデータで入力していた解析条件および解析手法の選択・指示を行なう CONTROL カードを，解析をコントロールするデータへ移行
   b）入力データチェック機能のみの実行指示を行なう DATA CHECK カードの追加
   c）モデルデータの詳細なイメージの出力に関する指示を行なう NOPRINT カードの追加
2. 弾性熱応力解析
   材料参照温度に関するオプションの拡張
3. 非弾性熱応力解析
   a）構成方程式に関する拡張および改良
      • クリープに関する硬化則において応力反転を考慮した村上・大野のひずみ硬化則の組み込み
   b）材料データライブラリ
      • 各種材料データライブラリにおいて単調応力 - ひずみ関係式の整備
   c）応力解析のための要素の組み込み
      • 9節点四辺形一般化平面ひずみ要素　QPLAN9
      • 3次元バネ減衰要素　LCOMB2
4. 熱伝導解析
   a）輻射解析機能の組み込み
      • 輻射リンク 2節点要素　RLINK 2
5. 動的解析
   a）TIME SERIES データで与える時系列データの中へ変位列の追加
   b）線形直接積分法における標準的な出力結果の変更
   c）動的解析のための要素の組み込み
      • 8節点四辺形平面応力要素　QMEM8
      • 6節点三角形平面応力要素　TMEM6
      • 20節点六面体要素　HEX20
      • 3節点三角形平板シェル要素　TFLA3
      • 15節点五面体要素　PENT15
      • 2節点配管要素　PIPE2
      • 3次元弾性梁要素　SBEAM2
      • 3次元バネ減衰要素　LCOMB2
6. 出力関係
   a）動的解析における要素力および最大要素力の出力オプションの追加
   b）XY プロット機能における反力の出力オプションの追加
7. 使用者作成のサブプログラム
   a）熱伝達係数を定義するサブプログラム XFILM のパラメータの変更
   b）輻射境界の特性データを定義するサブプログラム XRADIA の追加
8. エラーメッセージの追加および整備

(2) 例題説明書

例題説明書は基礎編と応用編から成り，基礎編は FINAS の入力データの基本構成を，応用編は実用的な問題におけるデータ作成法を示すことを主眼として編集されている。各例題は解析する問題の記述，有限要素モデル化，解析結果および入力データリストから構成されており，解析例題書は FINAS の使用法の習得と併せて有限要素法に対する初心者がその解析手法を学ぶことができるようになっている。基礎編に収められている例題は19題であり，応用編は10題である。これらの例題の要約を表9-2～表9-7に示す。

表9-2　基礎編静的解析例題の要約

タイトル	解析の種類								使用要素		主な機能項目
	線形		材料非線形		幾何学的非線形・座屈荷重			熱応力	分類	略称	
	弾性	多荷重処理	弾塑性	クリープ	大変形	線形座屈	非線形座屈				
トラスの弾性解析	○								棒	ROD2	節点集中荷重
内圧を受ける有孔円板の弾性解析	○								平面応力	QMEM4	分布荷重，円筒座標系
管厚方向に温度分布のある厚肉円筒の熱弾性解析	○							○	軸対称	QAX4	熱荷重，線形結合（フォーマットF1）
外圧を受ける浅い球形シェルの弾性解析	○								シェル	QFLA4R	球座標系，4節点要素の三角形化
並列に結合した2本棒の弾塑性解析			○						棒	ROD2	2種類の材料タイプ，等方硬化則
直列に結合した2本棒の弾性クリープ解析	○			○					棒	ROD2	材料データライブラリ（EPLAST LIB） 組み込みクリープ式（ノートン型） ひずみ硬化則，規定変位
管厚方向に温度分布のある厚肉円筒の熱弾塑性クリープ解析			○	○				○	軸対称	QAX4	リスタート，材料データライブラリ（EPLAST LIB，CREEP LIB），材料温度依存，ファスニング（フォーマットF2），オートクリープ
トラスの線形および非線形座屈荷重解析	○				○	○	○		棒	ROD2	座屈荷重

表 9-3　基礎編動的解析例題の要約

タイトル	解析の種類					使用要素		主な機能項目
	モーダル法			直接積分法				
	固有値	モーダル応答	スペクトル応答	線形	非線形	分類	略称	
集中質量系の固有値解析	○					結合	LCOMB2	固有値，付加質量
片持ち梁のモーダル応答解析		○				梁	SBEAM2	モーダル減衰
単純支持梁の応答スペクトル解析			○			梁	SBEAM2	変位スペクトル
片持ち梁の時間応答解析				○		梁	SBEAM2	比例減衰
初期変位のある１自由度系の自由振動解析				○		結合	LCOMB2	静的解析からのリスタート，自由振動，粘性減衰

表 9-4　基礎編熱伝導解析例題の要約

タイトル	解析の種類				使用要素		主な機能項目
	定常		非定常				
	線形	非線形	線形	非線形	分類	略称	
円筒の定常線形解析	○				軸対称	HQAX4 FLAX 2	熱伝達境界，熱流束
無限板の定常非線形解析		○			平板	HQMEM8	材料温度依存，規定温度
コールドショックとホットショックを受ける円筒の非定常解析		○		○	軸対称	HQAX4 FLAX 2	定常と非定常の連結，材料および熱伝達境界の温度依存
２重管の非定常解析			○		軸対称	HQAX4 FLAX 2 CALINK4	熱伝達リンク要素

表 9-5　基礎編ユーティリティ プログラム利用例題の要約

タイトル	FNSEDIT		主な機能項目
	インターフェイス	リスタートテープの編集	
熱衝撃を受ける厚肉円筒の弾性熱応力解析	○		熱応力解析するステップの選択
厚肉円筒の熱弾塑性クリープ解析におけるリスタートテープの編集とリスタートテープからの出力		○	2本のリスタートテープの編集，編集後のリスタートテープからの出力

表 9-6　応用編静的解析例題の要約

タイトル	解析の種類								使用要素		主な機能項目
	線形		材料非線形		幾何学的非線形・座屈荷重			熱応力	分類	略称	
	弾性	多荷重処理	弾塑性	クリープ	大変形	線形座屈	非線形座屈				
パイプ結合部の弾性解析	○								立体	HEX20	＝READ 21を用いた座標値の入力
面内曲げモーメントを受ける直管付きエルボの弾性解析	○								配管	ELBOW6R	線形結合，モーメント
配管の弾性多荷重解析		○							配管	PIPE2	荷重ケースの線形結合
一様円筒の熱ラチェッティング解析			○					○	軸対称	QAX4	移動硬化則，材料温度依存，繰り返し負荷
面内荷重を受けるリガメントの弾塑性解析			○						平面応力	QMEM4	等方硬化則，線形結合
梁の弾塑性クリープ解析			○	○					平面応力	QMEM8	組み合わせ硬化則，応力反転を考慮したクリープ硬化則，XCREEP，リスタートテープの編集，リスタートテープからの出力
球形シェルの弾性大変形解析	○				○				シェル	CONIC2	大変形
3点曲げ試験片の弾性破壊力学解析	○								平面ひずみ	QPLAN8	J積分，中間節点の1/4シフト

表 9−7　応用編動的解析例題の要約

タイトル	解析の種類					使用要素		主な機能項目
	モーダル法			直接積分法		分類	略称	
	固有値	モーダル応答	スペクトル応答	線形	非線形			
クーリングタワーの固有値解析	○					シェル	QFLA4R	固有値，分布質量系，集中質量系
3次元骨組構造の応答スペクトル解析			○			梁	SBEAM2	速度スペクトル，付加質量

(3) 理論説明書

FINAS のもつ解析機能は，静的応力解析，動的応力解析および熱伝導解析の機能に大別することができる。FINAS 理論説明書はこれらの解析に関する基礎理論と FINAS が備えている個々の機能およびアルゴリズムについて説明したものであり，FINAS の利用者が静的解析，動的解析および熱伝導解析に関する基礎力を養うと同時に，FINAS をより有効に使用するための知識を身につけることができるように編集されている。

10. プログラムの設置・更新

(1) 大洗工学センター

FINAS の動燃事業団大洗工学センターへの最初の設置は55年4月に行なわれ，以後更新が続けられている。プログラムの更新は年2回が原則であるが，エラーの発生，プログラムの改良など緊急を要する事態が生じた場合には，その都度対処を行なってプログラムの更新を実施し，大洗工学センターにおいて最新のバージョンが利用できるように計っている。

58年度におけるプログラムの更新は，59年5月上旬のオペレイティングシステム変更による対処を含めて表10-1に示されるように9回行なわれている。なお，FINAS は大洗工学センターの FACOM-M 200 および M 380 の両機種に設置されている。

表10-1　大洗工学センターにおける FINAS 更新履歴

更　新　日	バ ー ジ ョ ン
昭和58年 9月27日	V7.0 / ED01
昭和58年10月25日	V7.0 / ED01A
昭和58年11月29日	V7.1 / ED01
昭和59年 1月24日	V7.1 / ED01A
昭和59年 1月29日	V7.1 / ED01B
昭和59年 2月14日	V7.1 / ED01C
昭和59年 2月29日	V7.1 / ED01D
昭和59年 3月13日	V7.1 / ED01E
昭和59年 6月 4日	V7.1 / ED01F

(2) FBR メーカおよび公的機関

FINAS はＦＢＲの設計・製造の過程で発生する諸問題を解析する目的で開発されている汎用構造解析プログラムであり，より多くの人に使用してもらい，より多くの解析に貢献できることを目指している。また，解析プログラムは数多くの問題に直面し，解析経験を積み重ねることにより，その性能と信頼性を高めていくのが常である。このような見地から，57年度はFBRメーカへのFINASの設置の要請が動燃事業団からCRCへ出され，三菱重工業・神戸造船所および日立製作所・日立工場に設置が行なわれた。本年度は日本原子力研究所・多目的高温ガス実験炉設計室にインストールが行なわれた。

表10-2　FINAS 設置状況

設　置　場　所	設　置　日	機　　種
三菱重工業・神戸造船所	昭和58年4月12日	ＩBM 3033
日立製作所・日立工場	昭和58年4月20日	HITAC　M200H
日本原子力研究所 多目的高温ガス実験炉設計室	昭和58年10月26日	FACOM　M 380

(3) エラー対策

FINAS では開発当初から系統的にプログラムの検証を実施し，エラーの発生を未然に防ぐ努力を続けている。しかしながら，FINAS のような汎用プログラムではプログラムのすべてに渡って検証を行なうことは不可能であり，実際の解析中にエラーの発見されることがままあり，また，エラーではないが，このように直して欲しいという要望も解析作業を通じて起きてくる。この種の問題に対処するため，エラー対策要望書を作成し，各種エラー対策要望事項の処理を行なっている。エラーが発見された場合には，この書類に基づいて対策が講じられ，プログラムが修正される。そしてエラー修正が正しくなされていることを確認するため，CP（Check Problem：8章参照）の作成と解析が行なわれ，エラーの回復が認められた時点でマスターテープが更新され，同時に大洗工学センターのプログラム更新も行なわれる。この一連の作業は緊急メインテナンスと呼ばれ，定期的な年２回のプログラム更新の他に実施される。

なお，昭和58年度にエラー対策要望書に沿って処理された作業は24件であり，大洗工学センターに対して行なわれた緊急メインテナンスは６回である。

主な要望事項に対する処理の内容と，処理を行なったバージョンを表10-3に示す。

表 10−3　主な要望事項に対する処理内容と処理バージョン

No.	主な要望事項の処理内容	処理バージョン
82-60	固有値解析と節点荷重入力のモーダル応答解析における刺激係数と有効質量のプリント	V7.1 / ED01
82-64	出力をコントロールするデータが無い場合の END FINAS カードのプリント	V7.1 / ED01
82-84	サブドメイン関連ルーチンの MPL, TEXTLIB からの削除	V7.1 / ED01
82-87	大型問題における file 容量の不足の対処	V8.0 / ED01
82-88	角度の入力データが"度"か"ラジアン"かを使用説明書に明記	(UM-7.1)
82-94	熱応力解析における弾性多荷重処理機能の改良	V7.1 / ED01A
83-6	AXSHEL2 要素の改良	V7.1 / ED01
83-8	熱伝導要素に熱伝達境界を与えた時の USER ERROR の処理	V7.1 / ED01
83-14	SBEAM 2 にせん断変形を考慮しない解析機能を追加	V7.1 / ED01
83-17	ERROR NUMBER 202 の出力を削除	V7.1 / ED01A
83-22	クリープ解析で $\Delta t = 0$ の場合のユーザーサブルーチン XCREEP を呼ぶ処理の変更	V7.1 / ED01A
83-25	XYプロットにおいてシンボルのみのプロット出力オプションの追加	V7.1 / ED01A
83-31	QFLA4R, TFLA3 における法線回りの回転自由度の自動処理	V8.0 / ED01
83-39	輻射を考慮した熱伝導解析における材料参照温度のオプション追加	V7.1 / ED01E
83-41	材料データライブラリと材料データライブラリにないデータの使用方法に関して使用説明書の改良	(UM-8.0)
83-45	使用説明書のユーザーサブルーチン使用例の改良	(UM-8.0)

(4) FINAS ニュース

FINAS 改良・整備計画にしたがい，新たな要素や機能の追加，あるいは既存の機能の改良が進められている。そして，FINAS を多くの人々に使用してもらうためには，プログラムの現状を利用者に把握してもらうことが大切である。そこで，追加・改良された機能を利用者に提供することができるようになった場合には，FINAS ニュースによりその旨を FINAS の利用者に連絡している。FINAS ニュースには要素や機能に関するニュースの他，ジョブコントロールカード，FINAS 使用上の注意，使用説明書の改訂など FINAS を使用する上で必要となる情報が掲載されている。昭和58年度における FINAS ニュースの発行回数は下記の２回である。

83-01号	昭和58年10月12日	FINAS V7.0 のリリース
83-02号	昭和58年11月22日	FINAS V7.1 のリリース

(5) FINAS 講習会

FINAS は汎用構造解析プログラムとして開発，整備されてきているために，種々の解析機能が組み込まれ，それぞれの機能に対応した入力データが多々あり，利用者が初めて FINAS を用いて解析計算を行なうには難しい場合もある。そのために，FINAS に関してその機能および入力データの概要さらに解析例題や実習問題を組み込んだテキストが整備されており，このテキストを用いた初心者向けの講習会が行なわれている。昭和58年度における FINAS 講習会は下記のとおり開催された。

昭和59年６月28日，29日　　PNC 大洗工学センターにおいて

第II編　FINASにおける解析の理論と方法

序

本編では，FINAS システムの背景となる力学的理論，数値解法について説明する。第1章では有限要素法に基づく静的応力解析，動的応力解析および熱伝導解析の理論とアルゴリズムについて論ずる。第2章は数値解法に関する部分であり，現在，プログラムに組み込まれている連立一次方程式の解法および固有値問題の解法について述べる。

Ⅰ．有限要素解析の理論

1.1　はじめに

FINAS システムは，高速炉開発において生じる構造問題を解決するために，有限要素法の理論に基づき開発された汎用プログラムであり，本章ではその理論について説明する。1.2節は基礎理論である微小変形解析の理論を要約したものであり，1.3節では非弾性解析の構成方程式，システムに準備されている材料データライブラリおよび非弾性解析のアルゴリズムを説明する。幾何学的非線形解析については1.4節で大変形解析，1.5節で座屈荷重解析について理論とアルゴリズムを説明する。1.6節は破壊力学解析であり，1.7節が動的解析，1.8節が熱伝導解析である。1.6節～1.8節についても他の節と同様に理論と解法のアルゴリズムについて記述する。

1.2 微小変形解析

ここではFINASシステムの基本となっている有限要素法の理論について説明する。1.2.1節では解析すべき連続構造物と対応する有限要素モデルの考え方について説明し，1.2.2節，1.2.3節で基礎方程式を導く。なお，この章で説明する事項は基礎的なものであり，初めて有限要素解析に携わる利用者や有限要素解析の理論に詳しくない利用者のための手引きとして準備されたものである。

1.2.1 連続体と有限要素モデル

FINASでは解析すべき構造について，有限要素（finite element）の集まりからなる近似モデルを考え（図1.2−1参照），そのモデルについて数値的な解析を行なう。それぞれの有限要素は，それを構成する節点（node）と呼ばれる点において結合しているものと考える。なお，ここでは有限要素の結合によって組み立てられる近似モデルを全体モデルと呼ぶ。

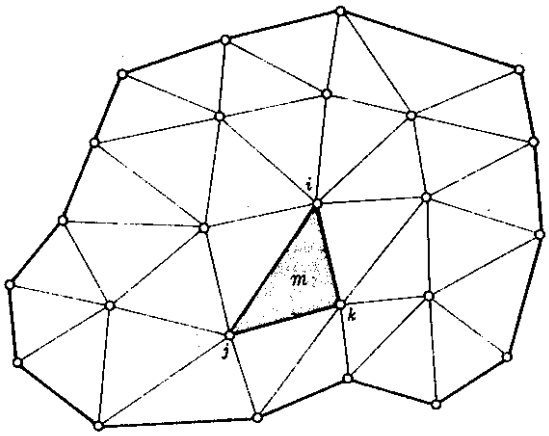


図1.2−1 有限要素モデル

ここで全体モデルを構成するすべての節点の座標を $\{\hat{X}\}$ とし，m番目の有限要素を構成するすべての節点の座標を $\{\hat{x}\}_m$ とすると，次の関係が成立する。

$$\{\hat{x}\}_m = [A]_m \{\hat{X}\} \qquad (1.2-1)$$

上式は全体モデルから1つの要素の形状を認識するための関係であり，$[A]_m$ は要素mの結合状態を表わすマトリックスと解釈できる。ここで全要素数をMとし，$\{\hat{x}\}$ を次のように定義する。

$$\{\hat{x}\} = \{\hat{x}_1\ \hat{x}_2 \cdots\cdots \hat{x}_M\} \qquad (1.2-2)$$

$\{\hat{x}\}$ はすべての要素についてその要素を構成する節点の座標を表わすものであり，式（1.2−1）の関係をすべての要素についてまとめることにより次式が得られる。

$$\{\hat{x}\} = [A]\{\hat{X}\} \qquad (1.2-3)$$

上述した関係は変位についても同様であり，全体モデルの節点変位を $\{\hat{U}\}$ とし，有限要素を構成する節点の変

位を $\{\hat{u}\}$ とすると，次の関係が成立する。

$$\{\hat{u}\}=[A]\{\hat{U}\} \qquad (\{\hat{u}\}_m=[A]_m\{\hat{U}\}) \tag{1.2-4}$$

上式は全体モデルの変位状態から個々の要素の変位状態を認識するための関係である。

仮想仕事の原理は，次のように表わすことができる。

$$\delta U=\delta W \tag{1.2-5}$$

ここで，δU は仮想ひずみエネルギであり，δW は外力のなす仮想仕事であり，次のように表わせる。

$$\delta U=\int_V \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV \tag{1.2-6}$$

$$\delta W=\int_V \delta\{u\}^T\{b\}dV+\int_S \delta\{u\}^T\{p\}dS \tag{1.2-7}$$

ここで，$\{\varepsilon\}$，$\{\sigma\}$ はひずみおよび応力を表わし，$\{u\}$ は変位，$\{b\}$，$\{p\}$ は物体力および表面力を表わす。

式（1.2−6），（1.2−7）は全体モデルについての積分を意味するが，ここでは個々の要素の寄与を総和することにより，次式のように表わせるものとする。

$$\delta U=\sum_m \delta U_m$$
$$\delta W=\sum_m \delta W_m \tag{1.2-8}$$

ここで，添字 m は m 番目の要素を意味し，次のように表わせる。

$$\delta U_m=\int_{v_m} \delta\{\varepsilon\}_m^T\{\sigma\}_m dv \tag{1.2-9}$$

$$\delta W_m=\int_{v_m} \delta\{u\}_m^T\{b\}_m dv+\int_{s_m} \delta\{u\}_m^T\{p\}_m ds \tag{1.2-10}$$

上式において，v_m は要素 m の体積であり，s_m は要素 m が表面 S の一部分を構成する場合のその表面を意味し，式（1.2−10）の右辺第2項は要素 m が表面 S の一部分を構成する場合にのみ意味を持つ。

1.2.2 有限要素に関する定式

1.2.1節では 全体モデルと個々の有限要素の関係について考察したが，ここでは1つの有限要素に着目し，その力学的関係について考える。

要素 m の内部における任意点の変位 $\{u\}_m$ は，その要素を構成する節点の変位 $\{\hat{u}\}_m$ を用いて表わせるものとする。

$$\{u\}_m=[\phi]_m\{\hat{u}\}_m \tag{1.2-11}$$

ここで，$[\phi]_m$ は要素 m の変位関数（displacement function）と呼ばれ，位置の関数である。

ひずみ－変位関係を一般的に表わすと，次のようになる。

$$\{\varepsilon\}_m=[D]_m\{u\}_m \qquad (1.2-12)$$

式（1.2−12）に式（1.2−11）を代入することにより，要素内部のひずみ状態がその要素を構成する節点の変位と次のように関係づけられる。

$$\{\varepsilon\}_m=[D]_m\{u\}_m=[D]_m[\phi]_m\{\hat{u}\}_m=[B]_m\{\hat{u}\}_m \qquad (1.2-13)$$

構成方程式を一般的に表わすと，次のように書ける。

$$\Delta\{\sigma\}_m=[E]_m\left(\Delta\{\varepsilon\}_m-\Delta\{\varepsilon\}_m^{(I)}\right) \qquad (1.2-14)$$

ここで，Δ は増分を表わし，$\{\sigma\}$ は応力，$\{\varepsilon\}^{(I)}$ は初期ひずみを表わし，$[E]_m$ は構成関係を表わすマトリックスで，1.3節において詳細に論じる。

要素の状態が $\{u\}_m^0$，$\{\sigma\}_m^0$，$\{\varepsilon\}_m^0$ から $\{u\}_m$，$\{\sigma\}_m$，$\{\varepsilon\}_m$ に変化した場合を与える。ただし，

$$\begin{aligned}\{u\}_m&=\{u\}_m^0+\Delta\{u\}_m\\ \{\sigma\}_m&=\{\sigma\}_m^0+\Delta\{\sigma\}_m\\ \{\varepsilon\}_m&=\{\varepsilon\}_m^0+\Delta\{\varepsilon\}_m\end{aligned} \qquad (1.2-15)$$

ここで，要素 m の仮想ひずみエネルギは式（1.2−9）に与えられているので，式（1.2−9）に式（1.2−13）から（1.2−15）の関係を代入すると，次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta U_m&=\int_{v_m}\delta\{\varepsilon\}_m^T\{\sigma\}_m dv=\delta\{\hat{u}\}_m^T\int_{v_m}[B]_m^T\{\sigma\}_m dv\\ &=\delta\{\hat{u}\}_m^T\left(\int_{v_m}[B]_m^T\{\sigma\}_m^0 dv+\int_{v_m}[B]_m^T\Delta\{\sigma\}_m dv\right)\\ &=\delta\{\hat{u}\}_m^T\left[\{\hat{q}\}_m+\int_{v_m}[B]_m^T[E]_m\left(\Delta\{\varepsilon\}_m-\Delta\{\varepsilon\}_m^{(I)}\right)dv\right]\\ &=\delta\{\hat{u}\}_m^T\left(\{\hat{q}\}_m+\int_{v_m}[B]_m^T[E]_m[B]_m dv\,\Delta\{\hat{u}\}_m\right.\\ &\qquad\left.-\int_{v_m}[B]_m^T[E]_m\Delta\{\varepsilon\}_m^{(I)}dv\right)\\ &=\delta\{\hat{u}\}_m^T\left([k]_m\Delta\{\hat{u}\}_m-\Delta\{\hat{p}\}_m^{(I)}+\{\hat{q}\}_m\right)\end{aligned} \qquad (1.2-16)$$

ここで，

$$[k]_m=\int_{v_m}[B]_m^T[E]_m[B]_m dv \qquad (1.2-17)$$

$$\Delta\{p\}_m^{(I)} = \int_{v_m} [B]_m^T [E]_m \Delta[\varepsilon]_m^{(I)}\, dv \qquad (1.2-18)$$

$$\{\hat{q}\}_m = \int_{v_m} [B]_m^T \{\sigma\}_m^0\, dv \qquad (1.2-19)$$

なお，$[k]_m$ は要素mの剛性マトリックス（stiffness matrix）と呼ばれる。

次に，要素mの外力のなす仮想仕事について考えてみる。外力についても次のように表わす。

$$\{b\}_m = \{b\}_m^0 + \Delta\{b\}_m \qquad (1.2-20)$$

$$\{p\}_m = \{p\}_m^0 + \Delta\{p\}_m \qquad (1.2-21)$$

したがって，式（1.2−10）は式（1.2−11）を考慮して，次のように表わせる。

$$\begin{aligned}\delta W_m &= \int_{v_m} \delta\{u\}_m^T \{b\}_m dv + \int_{S_m} \delta\{u\}_m^T \{p\}_m\, ds \\ &= \delta\{\hat{u}\}_m^T \left[\int_{v_m} [\phi]_m^T \left(\{b\}_m^0 + \Delta\{b\}_m \right) dv \right. \\ &\qquad \left. + \int_{S_m} [\phi]_m^T \left(\{p\}_m^0 + \Delta\{p\}_m \right) ds \right] \\ &= \delta\{\hat{u}\}_m^T \left(\{\hat{b}\}_m^0 + \Delta\{\hat{b}\}_m + \{\hat{p}\}_m^0 + \Delta\{\hat{p}\}_m \right)\end{aligned} \qquad (1.2-22)$$

ただし，

$$\begin{aligned}\{\hat{b}\}_m^0 &= \int_{v_m} [\phi]_m^T \{b\}_m^0\, dv \\ \Delta\{\hat{b}\}_m &= \int_{v_m} [\phi]_m^T \Delta\{b\}_m\, dv \\ \{\hat{p}\}_m^0 &= \int_{S_m} [\phi]_m^T \{p\}_m^0\, ds \\ \Delta\{p\}_m &= \int_{S_m} [\phi]_m^T \Delta\{p\}_m\, ds\end{aligned} \qquad (1.2-23)$$

1.2.3　全体モデルの支配方程式と解法

前節において１つの有限要素に着目し，仮想ひずみエネルギと外力のなす仮想仕事を導いたが，ここでは，すべての要素から組み立てられる全体モデルの支配方程式を導く。式（1.2−5），（1.2−8）より仮想仕事の原理を表わすと，次のようになる。

$$\sum_m \delta U_m = \sum_m \delta W_m \qquad (1.2-24)$$

式（1.2−24）に式（1.2−16），（1.2−22）を代入すると，次式が得られる。

$$\sum_m \delta\{\hat{u}\}_m^T [k]_m \Delta\{\hat{u}\}_m = \sum_m \delta\{\hat{u}\}_m^T \left(\Delta\{\hat{b}\}_m + \Delta\{\hat{p}\}_m + \Delta\{p\}_m^{(I)} + \{\hat{b}\}_m^0 + \{\hat{p}\}_m^0 - \{\hat{q}\}_m \right) \quad (1.2-25)$$

ここで，上式に式（1.2−4）を代入すると，次のようになる。

$$\delta\{\hat{U}\}^T \left(\sum_m [A]_m^T [k]_m [A]_m \right) \delta\{\hat{U}\} = \delta\{\hat{U}\}^T \sum_m [A]_m^T \left(\Delta\{\hat{b}\}_m + \Delta\{\hat{p}\}_m + \Delta\{\hat{p}\}_m^{(I)} + \{\hat{b}\}_m^0 + \{\hat{p}\}_m^0 - \{\hat{q}\}_m \right) \quad (1.2-26)$$

$\delta\{\hat{U}\}$ は任意であることを考慮すると，次式が得られる。

$$[K]\Delta\{\hat{U}\} = \Delta\{P\} + \{\hat{Q}\} \quad (1.2-27)$$

ただし，

$$[K] = \sum_m [A]_m^T [k]_m [A]_m$$

$$\Delta\{\hat{p}\} = \sum_m [A]_m^T \left(\Delta\{\hat{b}\}_m + \Delta\{p\}_m + \Delta\{\hat{p}\}_m^{(I)} \right) \quad (1.2-28)$$

$$\{\hat{Q}\} = \sum_m [A]_m^T \left(\{\hat{b}\}_m^0 + \{\hat{p}\}_m^0 - \{\hat{q}\}_m \right)$$

1.3 非弾性解析

原子炉コンポーネントの設計などにおいては，その環境としての温度の影響を無視できない場合が多い。このような構造物の解析は過去においては簡易解析法が中心であったが，有限要素法の発展と材料データの収集および設計コードの推移などにより，有限要素法を用いた詳細解析法も広く用いられるようになってきた。[1),2)] 現在までに，このような問題に対する有限要素法の理論も数多く発表されており，[3)～7)] さらに各種プログラムに用いられ，[8)] 種々の問題が解析されている。一方，解析に用いられる材料データ収集のための実験も進み，それによって構成方程式も検討されている。[7),9)]

ここでは，現在までに確立されている理論について応用面から，1.3.1節で熱弾塑性領域における構成方程式について，1.3.2節でクリープ領域における構成方程式について整理し説明する。そして1.3.3節でFINASに内蔵されている材料データライブラリについて説明する。

1.3.1 熱弾塑性解析における構成方程式

(1) 一般理論

a) ひずみの分解

全ひずみは，次式に示すような成分に分解できるものとする。

$$\Delta\{\varepsilon\} = \Delta\{\varepsilon^e\} + \Delta\{\varepsilon^p\} + \sum_i \Delta\{\varepsilon^i\} \qquad (1.3-1)$$

ただし，$i = T, C, S, I$ であり，添字eは"弾性"，Tは"温度"，pは"塑性"，Cは"クリープ"，Sは"スウェリング"，Iは"初期"を意味し，Δは増分を表わす。

ここで，個々の成分は，次式によって表わされるものとする。

$$\Delta\{\varepsilon^p\} = \Delta\lambda^p \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} \qquad (1.3-2)$$

$$\Delta\{\varepsilon^T\} = \int_T^{T+\Delta T} \alpha\, dT \cdot \{e_3\} \qquad (1.3-3)$$

$$\Delta\{\varepsilon^C\} = \Delta\lambda^C \left\{\frac{\partial \Phi^C}{\partial \sigma}\right\} \qquad (1.3-4)$$

$$\Delta\{\varepsilon^S\} = \Delta\lambda^S \{e_3\} \qquad (1.3-5)$$

ここで，Φ^pは塑性ポテンシャル，Φ^Cはクリープポテンシャル，αは熱膨張係数である。また，

$$\{e_3\}^T = \lfloor 1, 1, 1, 0, 0, 0 \rfloor \qquad (1.3-6)$$

であり，右肩のTは転置を表わす。なお，クリープおよびスウェリングについては，多くの構成方程式が提案されており，弾塑性挙動に比較して多様性があるので，ここでは次のように表わされるものとする。[11),12)]

$$\Delta\lambda^C = \Delta\bar{\varepsilon}^C\left(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^C, T, \Delta T, \cdots\cdots\right)$$
$$\Delta\lambda^S = \Delta\bar{\varepsilon}^S\left(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^S, T, \Delta T, \cdots\cdots\right) \qquad (1.3-7)$$

b) 熱弾性領域における構成方程式

熱弾性領域では，次の Hooke の法則が成立するものとする。

$$\{\sigma\} = [E^e]\{\varepsilon^e\} \qquad (1.3-8)$$

ここで，$[E^e]$ は材料の弾性挙動を表わす定数であり，温度 T の関数とする。

式（1.3－8）を増分形にすることにより，次式を得る。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e]\Delta\{\varepsilon^e\} + \{\Psi_T^e\}\Delta T \qquad (1.3-9)$$

ただし，

$$\{\Psi_T^e\} = \frac{\partial[E^e]}{\partial T}\{\varepsilon^e\} = [\dot{E}^e]\{\varepsilon^e\} \qquad (1.3-10)$$

であり，$\dot{}$は温度に関する微分を表わす。ここで，弾塑性ひずみを次の形で定義する。

$$\Delta\{\varepsilon^{ep}\} = \Delta\{\varepsilon^e\} + \Delta\{\varepsilon^p\} \qquad (1.3-11)$$

式（1.3－11）を考慮して，式（1.3－9）を次のように書き換える。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e]\left(\Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \Delta\{\varepsilon^p\}\right) + \{\Psi_T^e\}\Delta T \qquad (1.3-12)$$

c) 熱弾塑性領域における構成方程式

ここでは降伏関数を特別な形に限定せず，一般的な形のまま取り扱う。なお，降伏関数としては，次式を仮定する。

$$f^*(\sigma, \varepsilon^p, T, \xi_k) = 0 \qquad (1.3-13)$$

ただし，ξ_k は降伏面に関する付加的パラメータであり，また，associated な流れ則は non-associated な流れ則の特別な場合とも考えられるので，ここでは non-associated な場合のまま式を展開し，終りに associated な流れ則の場合を示す。負荷状態では，

$$\Delta f^* = \left\{\frac{\partial f^*}{\partial\sigma}\right\}^T\Delta\{\sigma\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial\varepsilon^p}\right\}^T\Delta\{\varepsilon^p\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f^*}{\partial\xi_k}\Delta\xi_k = 0 \qquad (1.3-14)$$

式（1.3－14）に式（1.3－12）を代入すると，次式が得られる。

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] - \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T\right) \Delta\{\varepsilon^p\}$$

$$+\left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\right) \Delta T + \frac{\partial f^*}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k = 0 \qquad (1.3\text{–}15)$$

流れ則 式(1.3－2)を式 (1.3－15) に代入し， $\Delta\lambda^p$ について解くと，次のようになる。

$$\Delta\lambda^p = \frac{\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \Delta\{\varepsilon^{ep}\}}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}}$$

$$+ \frac{\left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\right) \Delta T + \frac{\partial f^*}{\partial \xi_k} \Delta \xi_k}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3\text{–}16)$$

式 (1.3－16)， (1.3－2) を式(1.3－12) に代入して整理すると，次式が得られる。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^{ep}] \Delta\{\varepsilon^{ep}\} + \{\Psi_T^{ep}\} \Delta T + \{g_k^p\} \Delta \xi_k \qquad (1.3-17)$$

ここで，

$$[E^{ep}] = [E^e] + [E^p]$$

$$\{\Psi_T^{ep}\} = \{\Psi_T^e\} + \{\Psi_T^p\} \qquad (1.3\text{–}18)$$

であり， $\{\Psi_T^{ep}\}$ は材料定数の温度依存性から導かれるものである。

式 (1.3－18) の個々のマトリックスは，次のとおりである。

$$[E^p] = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3\text{–}19)$$

$$\{\Psi_T^p\} = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}\left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\right)}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3\text{–}20)$$

$$\{g_k^p\} = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}\frac{\partial f^*}{\partial \xi_k}}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3\text{–}21)$$

associated な流れ則の場合，$\varphi^p=f^*$ であり，たとえば，$[E^p]$ は次のようになる。

$$[E^p]=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T[E^e]}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T[E^e]\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-22)$$

(2) 等方硬化理論

ここでは，塑性ポテンシャル，降伏条件とも von Mises の関数を用いた場合について，$[E^e]$ および $\{\dot{W}_T^p\}$ を整理する。

等方硬化の場合，降伏関数は次のように表わせる。

$$f^*=\bar{\sigma}(\sigma)-\kappa(\varepsilon^p,\ T)=0 \qquad (1.3-23)$$

したがって，

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}=\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}=-\left\{\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p}\right\} \qquad (1.3-24)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial T}=-\frac{\partial \kappa}{\partial T}$$

と表わせるから，式(1.3−2)を考慮に入れると，

$$-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}=\left\{\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}=\frac{1}{\Delta\lambda^p}\left\{\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p}\right\}\Delta\{\varepsilon^p\}=\frac{\Delta\kappa}{\Delta\lambda^p} \qquad (1.3-25)$$

ここで，次式に定義する塑性仕事 ΔW^p を導入する。

$$\Delta W^p=\{\sigma\}^T\Delta\{\varepsilon^p\}=\Delta\lambda^p\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}=\Delta\lambda^p\bar{\sigma}=\bar{\sigma}\,\Delta\bar{\varepsilon}^p \qquad (1.3-26)$$

式(1.3−25)に式(1.3−26)で求まった $\Delta\lambda^p=\Delta\bar{\varepsilon}^p$ の関数を代入する。

$$-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}=\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\varepsilon}^p}=H' \qquad (1.3-27)$$

したがって，次式が得られる。

$$[E^p]=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T[E^e]}{H'+\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-28)$$

$$\{\Psi_T^p\} = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left(\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} - \frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)}{H' + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-29)$$

(3) 移動硬化理論

塑性ポテンシャル，降伏条件とも von Mises の関数を用いた場合について，$[E^p]$ および $\{\Psi_T^p\}$ を整理する。

移動硬化の場合，降伏関数は次のように表わせる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\sigma, \alpha) - \kappa(T) = 0 \qquad (1.3-30)$$

ここで，α は降伏面の移動を表わし，塑性ひずみおよび温度の関数とする。したがって，この場合，

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\} = \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} = -\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha}\right\}$$

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\} = \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p}\right\} \qquad (1.3-31)$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial T} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial \kappa}{\partial T}$$

ここで，

$$\Delta\{\alpha\} = [C]\Delta\{\varepsilon^p\}$$
$$[C] = [C]^T \qquad (1.3-32)$$

なるマトリックス $[C]$ が定められるならば，

$$\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p}\right\} = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon^p}\right]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha}\right\} = -[C]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} \qquad (1.3-33)$$

となるから，

$$-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\} = \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}[C]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} \qquad (1.3-34)$$

である。したがって，次式が得られる。

$$[E^p] = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]}{\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [C]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-35)$$

$$\{\Psi_T^p\} = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left(\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} - \frac{\partial \kappa}{\partial T}\right)}{\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [C]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-36)$$

Prager の移動硬化理論の場合，

$$\Delta\{a\} = C\Delta\{\varepsilon^p\} \qquad (1.3-37)$$

となるから，

$$-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\} = C\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} = \frac{3}{2}C \qquad (1.3-38)$$

が得られるので，$[E^p]$ は次のようになる。

$$[E^p] = -\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]}{\frac{3}{2}C + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-39)$$

一方，Ziegler の移動硬化理論の場合は，次のように表わせる。[3),5)]

$$\Delta\{a'\} = C\Delta\{\varepsilon^p\} \qquad (1.3-40)$$

ここで，$\{a'\}$ は $\{a\}$ の偏差成分を表わし，

$$\{a'\} = \{a\} - \frac{1}{3}\{e_3\}\{e_3\}^T\{a\} = \left[\frac{\partial a'}{\partial a}\right]\{a\} \qquad (1.3-41)$$

また，$\{\sigma'\}$ についても同様に，

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \frac{1}{3}\{e_3\}\{e_3\}^T\{\sigma\} = \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right]\{\sigma\} \qquad (1.3-42)$$

である。したがって，式（1.3−41），（1.3−42）より，次のようになる。

$$\left[\frac{\partial a'}{\partial a}\right] = \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right] = \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right]\left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right] \qquad (1.3-43)$$

Ziegler の移動硬化理論の場合を Prager の場合と比較するために，式（1.3−38）に対応する計算を行なうと，次のようになる。

$$-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\} = -\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$$

$$= -\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{a}'}{\partial \varepsilon^p}\right]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}'}\right\}\right)^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$$

$$= -C\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}'}\right\}^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$$

$$= -C\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}'}\right\}^T \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma'}\right\}$$

$$= -C\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}'}\right\}^T \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right]\left[\frac{\partial \sigma'}{\partial \sigma}\right]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma'}\right\}$$

$$= -C\left(\left[\frac{\partial \boldsymbol{a}'}{\partial \boldsymbol{a}}\right]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}'}\right\}\right)^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$$

$$= -C\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{a}}\right\}^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}$$

$$= C\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} = \frac{3}{2}C \qquad (1.3-44)$$

式（1.3−38），（1.3−44）を比較することにより，$[\boldsymbol{E}^p]$ は Prager 説の場合も Ziegler 説の場合も同一であることがわかる。

(4) 組み合せ硬化理論

移動硬化[3),11)]と等方硬化を組み合わせた場合の降伏関数は，次のようになる。

$$f^* = \bar{\sigma}(\sigma, \boldsymbol{a}) - \kappa(\varepsilon^p, T) = 0 \qquad (1.3-45)$$

この場合，移動硬化の場合と異なるのは，

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\} = \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p}\right\} - \left\{\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p}\right\} \qquad (1.3-46)$$

となることである。したがって，

$$-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\} = H' + \frac{3}{2}C \qquad (1.3-47)$$

この関係を式（1.3−22）に代入することにより，次式が求められる。

$$[\boldsymbol{E}^p] = -\frac{[\boldsymbol{E}^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [\boldsymbol{E}^e]}{H' + \frac{3}{2}C + \left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T [\boldsymbol{E}^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-48)$$

(5) ORNL 形式の硬化理論

ORNL 形式の硬化理論の場合，1回目の降伏時における $[E^p]$ は移動硬化理論の式（1.3－39）で表わし，2回目以降の降伏判定においては降伏応力に σ_Y^{10} を用い，移動硬化理論の C を C_{10} に置き換える。したがって，$[E^p]$ は次のように表わされる。

1回目のとき，

$$[E^p]=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^T[E^e]}{\frac{3}{2}C+\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^T[E^e]\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1.3-49)$$

2回目以降，

$$[E^p]=-\frac{[E^e]\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^T[E^e]}{\frac{3}{2}C_{10}+\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^T[E^e]\left\{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1.3-50)$$

ここで，σ_Y^{10}, C_{10} は ORNL が推奨しているところの 10 サイクル後の降伏応力と移動硬化係数である。

(6) 繰返し組み合せ硬化理論

ここでは，降伏曲面の大きさが塑性仕事あるいは累積塑性ひずみに依存する繰返し組み合せ硬化理論について説明する。$[E^p]$ および $\{\phi_T^p\}$ は移動硬化理論における式（1.3—35），式（1.3—36）が適用され，降伏曲面の大きさ κ は次式で表わされる。

$$\kappa=(1-\omega)\kappa(W^p,T)+\omega\kappa(\tilde{\varepsilon}^p,T) \qquad (1.3-51)$$

ここで，W^p は塑性仕事，$\tilde{\varepsilon}^p$ は累積相当塑性ひずみであり，それぞれ次式で表わされ，ω は 0 か 1 のいずれかの値をとる。

$$W^p=\int dW^p=\int\{\sigma'\}^T d\{\varepsilon^p\}$$
$$\tilde{\varepsilon}^p=\int d\tilde{\varepsilon}^p=\sqrt{\frac{2}{3}\Delta\{\varepsilon^p\}^T\Delta\{\varepsilon^p\}} \qquad (1.3-52)$$

ただし，$\{\sigma'\}$ は偏差応力である。したがって，繰返し組み合せ硬化理論では，負荷の各段階での連続的な降伏面の移動とともに，式（1.3—51）から降伏面の膨張も考慮する。また，ORNL の推奨する方法では，塑性負荷の増分間では降伏面の大きさを変化させないで増分終了後にこれを変化させる近似手法を適用している。そのために式（1.3—32）の代わりに次式を用いて $\Delta\{\alpha\}$ を求めている。

$$\Delta\{\alpha\}=[C]\Delta\{\varepsilon^p\}-\frac{\Delta\kappa}{\kappa}\{S\} \qquad (1.3-53)$$

ここで，$\{S\}$，$\Delta\kappa$ はそれぞれ次式で表わされるものである。

$$\{S\}=\{\sigma'\}-\{\alpha\}$$
$$\Delta\kappa=(1-\omega)\left[\frac{\partial\kappa}{\partial\tilde{\varepsilon}^p}\Delta\tilde{\varepsilon}^p+\frac{\partial\kappa}{\partial T}\Delta T\right]+\omega\left[\frac{\partial\kappa}{\partial W^p}\Delta W^p+\frac{\partial\kappa}{\partial T}\Delta T\right] \qquad (1.3-54)$$

1.3.2 クリープ領域における構成方程式

(1) クリープ構成方程式の定式化

金属のクリープ挙動は，その理論的な取扱いを容易にするために，弾塑性挙動とは独立に定式化されるのが普通である。このことは負荷が複雑でない場合には，実際の挙動とそれほど矛盾することはない。これに対して最近では，塑性とクリープの挙動を区別しないで統一的に非弾性挙動を記述する理論（unified theory）がいろいろと提案され，その有効性が示されてきている。しかし現時点で，どのモデルが優れているのかの一般的判断を下すことは，裏付けデータが少ないだけに非常に難しいといえる。このような現状から，FINASのクリープ解析の定式化では，弾塑性挙動との連成を考慮しないで，通常の状態方程式（state equation）による方法を用いることにする。

a) クリープの流れ則

クリープ挙動の解析的表示にあたって，次の仮定をする。[13)]

ⅰ）材料の等方性

ⅱ）クリープひずみについて非圧縮

ⅲ）クリープひずみは静水圧応力に無関係

ⅳ）クリープひずみ速度は偏差応力に比例

このような条件のもとで，クリープ構成方程式は次のように表示される。

$$\dot{\varepsilon}^c_{ij}=\lambda\,\sigma'_{ij} \qquad (1.3-55)$$

ここで，$\dot{\varepsilon}^c_{ij}$ はクリープひずみ速度テンソル，σ'_{ij} は偏差応力テンソルである。比例係数 λ は一般に偏差応力の不変量，クリープひずみの不変量，時間 t，温度 T などのスカラー関数によって表わされるものである。相当応力 $\bar{\sigma}$ は σ'_{ij} の第2不変量に比例し，相当クリープひずみ $\bar{\varepsilon}^c$ は ε^c_{ij} の第2不変量に比例する。すなわち，

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}\,\sigma'_{ij}\,\sigma'_{ij}}$$
$$\bar{\varepsilon}^c=\sqrt{\frac{2}{3}\,\varepsilon^c_{ij}\,\varepsilon^c_{ij}} \qquad (1.3-56)$$

こうして，λ は $\bar{\sigma}$，$\bar{\varepsilon}^c$，t および T によって表わすことができる。また，多軸に対する式が，単軸応力場に対しても適用されなければならないという条件から，次式が得られる。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^c}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \qquad (1.3-57)$$

ここで，$\dot{\bar{\varepsilon}}^c$ は単軸定応力クリープ則を相当応力と相当クリープひずみで置き換えたものを微分して求められる。要するに状態方程式タイプの構成方程式は式（1.3−57）で表わされる。ただし，式中の $\dot{\bar{\varepsilon}}^c$ の決定には単軸クリープ則を必要とする。

b) 単軸クリープ則

単軸クリープ則は一般に，クリープひずみを単軸定応力，時間および温度の関数として数学的に表示した形で与えられる。1次クリープおよび2次クリープを考慮すると，

$$\varepsilon^c = f(t, \sigma, T) = \varepsilon_t(t, \sigma, T) + \dot{\varepsilon}_s(\sigma, T)\, t \qquad (1.3-58)$$

ここで，$\varepsilon_t(t, \sigma, T)$ は1次クリープひずみ成分，$\dot{\varepsilon}_s(\sigma, T)\, t$ は2次クリープひずみ成分を示す。ただし，$\dot{\varepsilon}_s(\sigma, T)$ は定常クリープひずみ速度である。式（1.3−58）は一定温度における定応力クリープ試験を基礎として決定されるのが普通であるが，従来から多数の表示の形式が提案されている。

c) クリープ硬化則

単軸クリープ則よりクリープひずみ速度を定める場合に，何らかの硬化則が必要となる。過渡的な温度，応力状態に適用する硬化則として，次のような時間硬化説とひずみ硬化説の2つの代表的な定式がある。[1), 13)]

●時間硬化説

この説はクリープひずみ速度が，対象とする時点の応力，温度およびクリープ開始からの時間（クリープ時間ともいう）に依存すると仮定するもので（図1.3−1参照），次のような状態方程式で与えられる。

$$\dot{\varepsilon}^c = f(t, \sigma, T) \qquad (1.3-59)$$

●ひずみ硬化説

この説はクリープひずみ速度が，対象とする時点の応力，温度および累積クリープひずみに依存すると仮定し（図1.3−1参照），次のような状態方程式で与えられる。

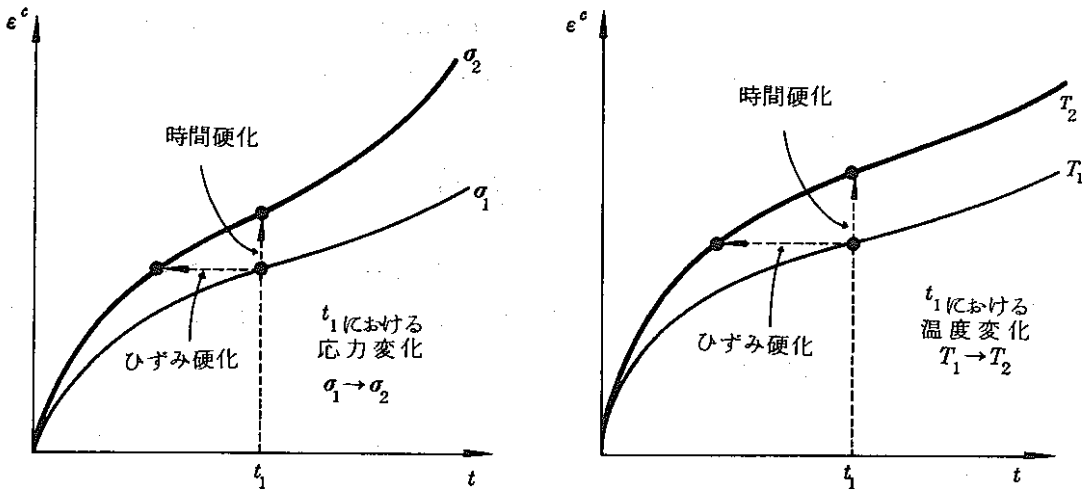
$$\dot{\varepsilon}^c = f(\varepsilon^c, \sigma, T) \qquad (1.3-60)$$

ひずみ硬化説に基づくクリープひずみ速度の表示式（1.3−60）は，通常，式（1.3−58）と（1.3−59）から時間 t を消去して求められる。たとえば，ε^c が次のような t のべキ乗型で与えられるとすると，

$$\varepsilon^c = f(\sigma, T)\, t^n \qquad (1.3-61)$$

時間硬化説の式は，

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\sigma, T)\, n\, t^{n-1} \qquad (1.3-62)$$



a) 応力変化　　b) 温度変化

図 1.3−1　時間硬化説とひずみ硬化説

ひずみ硬化説の式は，式(1.3−61) と式(1.3−62) から t を消去して，

$$\dot{\varepsilon}^c = n\left[f(\sigma, T)\right]^{\frac{1}{n}} (\varepsilon^c)^{\frac{n-1}{n}} \qquad (1.3-63)$$

となる。基本的なこの２つの硬化説の相違は，応力あるいは温度が変動する場合に生じるものであって，定温定応力のもとでは同一現象の異なった表現にすぎない。また，定常クリープだけを考える場合〔式(1.3-61)～(1.3-63)において$n=1$〕には，式(1.3-63) と式(1.3−62) は同等となり，変動する応力や温度のもとにおいても２つの硬化説による差は生じない。図 1.3−1 は応力と温度が変化した場合のそれぞれについて，時間硬化とひずみ硬化の両説の相違を示したものである。実験事実はひずみ硬化説に比較的近いといわれているが，この説では解析的取扱い (時間 t を消去して $\dot{\varepsilon}^c$ を求める操作) が複雑となることが多く，そのため，適用の簡単な時間硬化説がとられることもある。

d) 応力反転に対する硬化の補助法則

前述のひずみ硬化則は，応力の符号が反転するような荷重変動に対しては，不都合な結果が生じるために，ＯＲＮＬでは補助法則 (Ａｕｘｉｌｉａｒｙ Ｒｕｌｅ) なるものを設けて，これを適用している。ここでその補助法則について述べる。

●単軸応力場

応力反転に対する補助法則の考え方を説明するために，まず応力反転のある単軸の場合を考えてみる (図 1.3−2参照)。ここで，クリープひずみ速度は次式で表わされるものとする。

$$\dot{\varepsilon}^c = f(\varepsilon^H, \sigma, T) \qquad (1.3-64)$$

ここで，ε^H は現時点のクリープひずみ硬化量であり，次のステップにより求められる。

(i) 図 1.3−3 に示すように任意の時間において，クリープひずみの２つの基準原点 ε^+，ε^- を考える。

(ii) 初めに，処女材料に対して，$\varepsilon^+ = \varepsilon^- = 0$ と仮定する。

(iii) 引張応力，圧縮応力に対して式 (1.3−64) のクリープひずみ速度を決定するために ε^H を 次のよ

うにおく。

$$\varepsilon^H = \varepsilon - \varepsilon^+ \qquad (1.3-65)$$

$$\varepsilon^H = \varepsilon - \varepsilon^- \qquad (1.3-66)$$

ここで，εは現時点でのクリープひずみで，用いるひずみ硬化の方法により1次クリープひずみまたは全クリープひずみとなる。

(iv) i回目の応力反転が生じた時のεをε_iとおくと，n回目の応力反転後の原点は，次式で決定される。ただし，$\varepsilon_0 = 0$である。

$$\varepsilon^+ = \min_{i=0,\cdots,n} \varepsilon_i$$

$$\varepsilon^- = \max_{i=0,\cdots,n} \varepsilon_i \qquad (1.3-67)$$

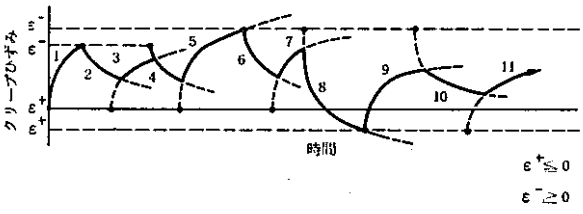


図 1.3-3　応力反転に対応するクリープ応答

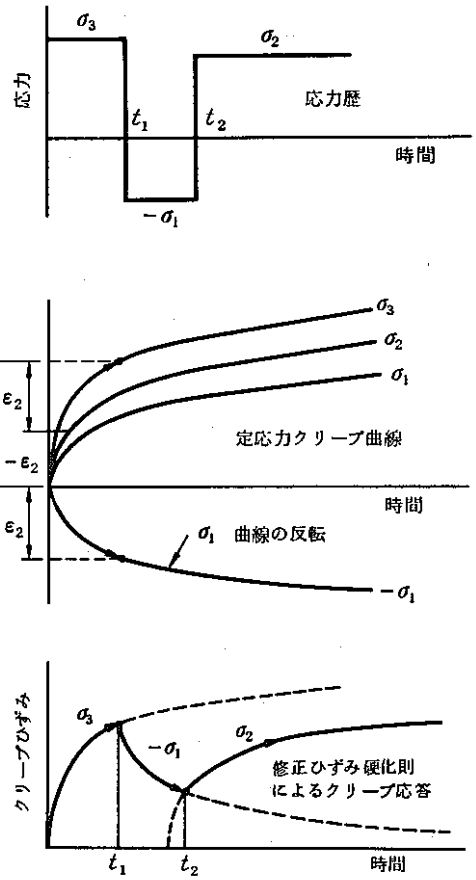


図 1.3-2　補助法則を用いたクリープ応答

●多軸応力場

多軸応力場に対して補助法則を考慮した構成方程式は，式(1.3-64)に対応して，次式で表わされる。

$$\dot{\varepsilon}^c_{ij} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^c(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}^H, T)}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \qquad (1.3-68)$$

多軸応力に対するひずみ硬化量$\bar{\varepsilon}^H$等は，次のように決定される。

(i) 記号の定義

多軸応力場におけるひずみ硬化量は$\bar{\varepsilon}^H$で表わすものとし，次のとおりである。

$$\text{ひずみ硬化量 } \bar{\varepsilon}^H = \begin{cases} \text{全クリープひずみによる硬化則のときは } \varepsilon^c_{ij} \text{ に基づく} \\ \text{1次クリープひずみによる硬化則のときは } \varepsilon^t_{ij} \text{ に基づく} \end{cases}$$

ここで，右肩のcは全クリープひずみ，tは1次クリープひずみを表わす。また，現在のひずみを

ε_{ij}^{I} で表わす。

$$\text{現在のひずみ } \varepsilon_{ij}^{I} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}^{c} & (\text{全クリープひずみによる硬化則のとき}) \\ \varepsilon_{ij}^{t} & (\text{1次クリープひずみによる硬化則のとき}) \end{cases}$$

ひずみの原点は ε_{ij}^{+}, ε_{ij}^{-} で表わし，これはクリープひずみ空間（ ε_{ij}^{c} または ε_{ij}^{t} ）におけるひずみの原点である。

なお，ひずみ原点間の距離 $\hat{\varepsilon}$ は，2つのひずみ原点間の相当ひずみ距離であり，次式で計算される。

$$\hat{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^{+} - \varepsilon_{ij}^{-}) (\varepsilon_{ij}^{+} - \varepsilon_{ij}^{-}) \right]^{1/2} \qquad (1.3-69)$$

ひずみ原点からの距離 G^{+}, G^{-} は，現在のひずみ ε_{ij}^{I} と基準ひずみ原点間の相当ひずみの距離であり，次式で求められる。

$$G^{+} = G(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}) = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}) (\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}) \right]^{1/2} \qquad (1.3-70)$$

$$G^{-} = G(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}) = \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}) (\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}) \right]^{1/2} \qquad (1.3-71)$$

(ii) 応力反転の定義

多軸応力状態では，応力の反転は，現在のひずみ原点（ ε_{ij}^{+} または ε_{ij}^{-} ）から測った相当クリープひずみが減少しはじめた時に起こるものと考える。クリープひずみ速度やクリープひずみ増分は偏差応力と平行であるから，応力反転の条件は偏差応力が現存の原点の方向へ向くことを意味する。

現在の原点が ε_{ij}^{+} である場合，応力の反転が生じるための条件は，次のとおりである。

$$(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}) \sigma_{ij}' < 0 \qquad (1.3-72)$$

クリープ変形では体積変化が起らないので，$\varepsilon_{kk}^{I} = 0$ であり，式（1.3－72）は，次式のように書き直すことができる。

$$(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}) \sigma_{ij} < 0 \qquad (1.3-73)$$

同様に，現在の原点が ε_{ij}^{-} である場合，応力の反転が生じるための条件は，次のとおりである。

$$(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}) \sigma_{ij} < 0 \qquad (1.3-74)$$

時間増分の始めに応力が反転している場合は，原点を変えてからクリープひずみ増分の計算を行う。

(iii) 初期無応力状態

初期の無応力状態に対しては，次のようにおく。

$$\varepsilon_{ij}^{+} = \varepsilon_{ij}^{-} = \hat{\varepsilon} = 0 \qquad (1.3-75)$$

なお，最初の応力反転が生じるまでの式（1.3－68）のひずみ硬化量 $\bar{\varepsilon}^{H}$ は，次式で計算する。

$$\bar{\varepsilon}^{H} = G\left(\varepsilon_{ij}^{I}\right) \qquad (1.3-76)$$

(Ⅳ) 応力反転の検証と $\bar{\varepsilon}^{H}$ を決定する一般的手順

a. ひずみ原点が ε_{ij}^{+} の場合

応力反転を式(1.3−73)で評価し，次に正のひずみ原点からの距離 G^{+} が ひずみ原点間の距離 $\hat{\varepsilon}$ より大きいかを調べる。すなわち，

$$G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}\right) > \hat{\varepsilon} \qquad (1.3-77)$$

ならば，ε_{ij}^{+} は変化させず，ε_{ij}^{-} を再定義する。

$$\varepsilon_{ij}^{-} = \varepsilon_{ij}^{I}, \quad \hat{\varepsilon} = G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}\right) \qquad (1.3-78)$$

逆に，式(1.3−77)が満足されないならば，ε_{ij}^{+}，ε_{ij}^{-} および $\hat{\varepsilon}$ はそのままである。ただし，応力反転に対応して，原点を ε_{ij}^{+} から ε_{ij}^{-} へ変化させて，次式で $\bar{\varepsilon}^{H}$ を求める。

$$\bar{\varepsilon}^{H} = G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}\right) \qquad (1.3-79)$$

b. ひずみ原点が ε_{ij}^{-} の場合

応力反転を式(1.3−74)で評価し，次に負のひずみ原点からの距離 G^{-} が ひずみ原点間の距離 $\hat{\varepsilon}$ より大きいかを調べる。すなわち，

$$G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}\right) > \hat{\varepsilon} \qquad (1.3-80)$$

ならば，ε_{ij}^{-} は変化させず，ε_{ij}^{+} を再定義する。

$$\varepsilon_{ij}^{+} = \varepsilon_{ij}^{I}, \quad \hat{\varepsilon} = G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}\right) \qquad (1.3-81)$$

逆に，式(1.3−80)が満足されないならば，ε_{ij}^{+}，ε_{ij}^{-} および $\hat{\varepsilon}$ はそのままである。ただし，応力反転に対応して原点を ε_{ij}^{-} から ε_{ij}^{+} へ変化させて，次式で $\bar{\varepsilon}^{H}$ を求める。

$$\bar{\varepsilon}^{H} = G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}\right) \qquad (1.3-82)$$

(Ⅴ) クリープひずみが原点 ε_{ij}^{+} と ε_{ij}^{-} に近づく場合

一般にクリープひずみは通常，現在のひずみ原点から離れる方向を向くが，図1.3−4に示すように，両方のひずみ原点に近づく場合が存在する。このような場合には，次式が成立する。

$$\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}\right)\sigma_{ij} < 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}\right)\sigma_{ij} < 0 \qquad (1.3-83)$$

したがって，ここでは，現在のひずみを ε_{ij}^{I} から最も離れている原点の方を，その時点のひずみ原点とする。もし，

$$G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{+}\right) \geqq G\left(\varepsilon_{ij}^{I} - \varepsilon_{ij}^{-}\right) \qquad (1.3-84)$$

ならば，ε_{ij}^{+} をその時点のひずみ原点として，$\bar{\varepsilon}^{H}$ は式(1.3−82)で求める。また，式(1.3−84)が成立しないならば，ε_{ij}^{-} をその時点のひずみ原点として $\bar{\varepsilon}^{H}$ は式(1.3−79)で求める。

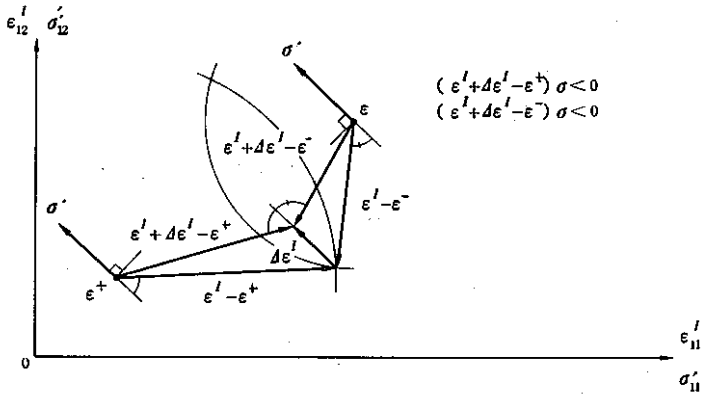


図 1.3-4　クリープひずみが両方の原点に近づく場合

e）村上のクリープひずみ硬化理論[18)]

応力方向の反転があるクリープひずみ硬化理論に対し，ORNL が提案する補助法則に関して d）で述べたが，ORNL の理論は，単軸応力状態と同じく 2 個のひずみ原点を多軸応力状態に対しても仮定し，これを基準にしてクリープ硬化量と応力反転を定義しているために，多軸応力状態への拡張にはいくつかの問題がある。すなわち，ORNL の理論は，このような理由から解析的な形に表現することができず，数理的取り扱いが簡単でない。さらに，クリープ変形の進行に伴って上述のひずみ原点を設定するとき，過去のクリープ履歴あるいは応力変化のわずかな違いによって，新しく定められるひずみ原点の位置が不連続に変化し，この結果，一意的な解析結果を与えないことがある。

ここでは，ひずみ硬化理論を一般の多軸応力状態に対して拡張することにより，ORNL の理論のような困難さを持たない村上の提案するクリープひずみ硬化論について述べる。

●単軸応力場

等方硬化を仮定したひずみ硬化理論は単軸クリープに対して次式らで表わされる。

$$\dot{\varepsilon}^C = f(\varepsilon^H, \sigma)\ \mathrm{sgn}\,[\sigma] \qquad (1.3-85)$$

$$\dot{\varepsilon}^H = |\dot{\varepsilon}^C| \qquad (1.3-86)$$

ここで，ε^C，σ はそれぞれクリープひずみと応力を示し，（ $\dot{}$ ）は時間に関する微分を表わす。さらに，sgn〔 〕は〔 〕内の引数の符号を意味する。また式（1.3－86）によって規定される硬化量 ε^H は応力が反転しても，クリープの進行とともに単調に増加し，材料の単調な硬化を表現している。そのために，応力符号の反転によって生じる過渡的な材料の軟化を考慮することができず，等方硬化を仮定したひずみ硬化理論では応力反転を伴うクリープを精度よく表現することはできない。

一般にクリープが進行すると，転位は可動性を失い材料は硬化する。不動化した転位は応力反転によって，可動性を回復する可逆的な部分と，それを回復せず不可逆的な転位構造を形成する部分からなる。このため応力の符号が反転すると，転位の可逆的な部分の再可動化により応力反転後に大きなクリープ速度が生じ材料が軟化する。そして再可動化した転位はそれまで不動化していた方向とは逆の方向へ運動する。したがって，応力反転後のあるひずみ範囲では，可逆的な転位の不可逆的な転位の移行は顕著でないと仮定できる。しかし，再可動化した転位は，応力反転後のクリープの進行とともに再び不動化し，このひずみ範囲を越え

ると不可逆的な転位構造の形成に寄与するようになる。

従って，上述のような可逆的な転位の再配列だけをもたらすひずみ範囲，すなわちクリープ硬化が回復可能なひずみ範囲を以下のように仮定する。

図1.3－5 (a)のように，一定応力 σ_1 によってクリープひずみ ε^C が進行する場合，この回復可能なひずみ範囲は図1.3－5 (b)の曲線 OA，OD で囲まれた部分のように変化する。いま時間 t におけるこのひずみ範囲は次式で表わされる。

$$g=|\varepsilon^C-\alpha|-\rho\leqq 0 \qquad (1.3-87)$$

ここで，α はひずみ範囲の中心の座標で，2ρ はその範囲の大きさを示す。

前述の仮定から，転位構造の不可逆的な変化が生じるのは，クリープひずみ ε^C が式（1.3－87）のひずみ範囲の境界上にあって，かつその外側に向って増加するときである。$g=0$ で定義されるひずみ境界を回復可能なクリープ硬化の境界（あるいは簡単にクリープ硬化境界）と呼ぶ。

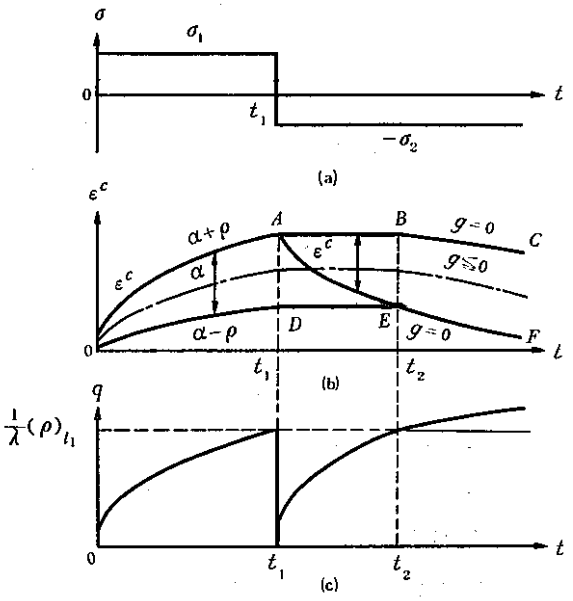


図1.3－5　回復可能なクリープ硬化範囲とクリープ硬化変数の変化

次に時間 t_1 で応力が σ_1 から $-\sigma_2$ へ反転するとする。式（1.3－87）のひずみ範囲では転位構造の不可逆な変化は生じないと仮定したから，時間 $t_1\leqq t\leqq t_2$ では回復可能なクリープ硬化の境界は変化せず，したがってそれは，図1.3－5 (b)の直線 AB，DE で与えられる。ここで，t_2 は応力反転後クリープひずみが反対側のクリープ境界Eに達したときの時間を示す。

時間 $t\geqq t_2$ では，クリープひずみがクリープ硬化境界上にあって外側に向って動くから，クリープ硬化境界は図1.3－5 (b)の曲線 BC，EF のように変化する。このように，クリープ硬化が回復可能なひずみ範囲はクリープひずみがクリープ硬化境界上にあって外側に向って動くときだけ大きくなる。したがって $\dot{\rho}$ は次式で表わすことができる。

$$\dot{\rho}=\begin{cases}\lambda|\dot{\varepsilon}^C| & g=0 \quad \text{かつ} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C>0 \qquad (1.3-88)\\ 0 & g<0 \quad \text{あるいは} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C<0 \qquad (1.3-89)\end{cases}$$

ここで，λ は ρ の発達の割合を示す材料定数である。さらに $g=0$ かつ $(\partial g/\partial \varepsilon^C)\,\varepsilon^C>0$ のとき，$dg=0$ が成立しなければならない。この条件に式（1.3－88）を代入すると，$\dot{\alpha}$ は次のように求められる。

$$\dot{\alpha}=\begin{cases}(1-\lambda)\,\dot{\varepsilon}^C & g=0 \quad \text{かつ} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C>0 \qquad (1.3-90)\\ 0 & g<0 \quad \text{あるいは} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C<0 \qquad (1.3-91)\end{cases}$$

次に硬化量 ε^H の変化について考える。図 1.3－5 (a) の OA 上では応力反転が生じないから，通常のひずみ硬化理論が成り立つと仮定すれば，式（1.3－86）と式（1.3－88）から次式が得られる。

$$\varepsilon^H=|\varepsilon^C|=\left(\frac{1}{\lambda}\right)\rho \qquad (0\leqq t\leqq t_1) \qquad (1.3-92)$$

時間 t_1 から $-\sigma_2$ へ反転する場合を考える。いま，応力反転により再可動化する転位密度が十分に大きく，したがって応力反転直後の $\dot{\varepsilon}^C$ は式（1.3－85）において $\varepsilon^H=0$ としたときの $\dot{\varepsilon}^C$ で近似できると仮定する。このとき ε^H は図 1.3－5 (c) に示すように時間 t_1 で瞬間的に 0 に減少した後に，クリープの進行に伴って再び増加する。時間 $t_1\leqq t\leqq t_2$ では不可逆な転位の再配列は生じないと仮定したから，図 1.3－5 (c) のように $t=t_2$ での硬化状態は応力反転直前の硬化状態に等しくなる。このとき，回復可能なクリープ硬化範囲での ε^H のこのような増加が ε^C の変化に比例すると仮定すれば，ε^H は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\varepsilon^H&=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\left[(\alpha+\rho)-\varepsilon^C\right]\\&=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\rho-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)(\varepsilon^C-\alpha) \qquad (t_1\leqq t\leqq t_2) \qquad (1.3-93)\end{aligned}$$

最後に，時間 $t\geqq t_2$ では ε^C がクリープ硬化境界上にあって外側に動くので，ε^C が OA 上にあるときと同様に通常のひずみ硬化理論を仮定すると ε^H は次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}\varepsilon^H&=|\varepsilon^C(t_1)|+|\varepsilon^C(t)-\varepsilon^C(t_2)|\\&=\left(\frac{1}{\lambda}\right)\rho \qquad (t_2\leqq t) \qquad (1.3-94)\end{aligned}$$

式（1.3－92），（1.3－93）および（1.3－94）は次のことを注意すれば，一つの式にまとめることができる。すなわち，時間 $0\leqq t\leqq t_1$ および $t_2\leqq t$ では $g=0$ が成立すると同時に σ と $(\varepsilon^C-\alpha)$ は同符号である。一方，時間 $t_1\leqq t\leqq t_2$ では ε^C がひずみ範囲 $g\leqq 0$ の中心を通過するまでは σ と $(\varepsilon^C-\alpha)$ は異符号であり，それ以後において同符号となる。したがって，式（1.3－92），（1.3－93），（1.3－94）は次式で統一的に表わすことができる。

$$\varepsilon^H=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\rho+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\mathrm{sgn}\left[\sigma(\varepsilon^C-\alpha)\right]|\varepsilon^C-\alpha| \qquad (1.3-95)$$

以上から，単軸応力状態において，クリープ硬化が回復可能なひずみ範囲を仮定することにより，材料の過渡的な軟化を考慮できる村上のクリープひずみ硬化理論が次のように整理できる。

$$\dot{\varepsilon}^C = f(\varepsilon^H, \sigma)\ \mathrm{sgn}[\sigma] \tag{1.3-96}$$

$$\varepsilon^H = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)\rho + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)\mathrm{sgn}[\sigma(\varepsilon^C-\alpha)]\,|\varepsilon^C-\alpha| \tag{1.3-97}$$

$$\dot{\rho} = \begin{cases} \lambda|\dot{\varepsilon}^C| & g=0 \quad \text{かつ} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C > 0 \\ 0 & g<0 \quad \text{あるいは} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C < 0 \end{cases} \tag{1.3-98}$$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} (1-\lambda)\dot{\varepsilon}^C & g=0 \quad \text{かつ} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C > 0 \\ 0 & g<0 \quad \text{あるいは} \quad \left(\dfrac{\partial g}{\partial \varepsilon^C}\right)\dot{\varepsilon}^C < 0 \end{cases} \tag{1.3-99}$$

$$g = |\varepsilon^C-\alpha| - \rho \tag{1.3-100}$$

●多軸応力場

前述の村上のクリープひずみ硬化理論を多軸状態へ拡張する。

初めに，式（1.3－87）で表わされる回復可能なひずみ範囲を図1.3－6の実線で示される中心 $\dot{\alpha}_{ij}$，半径 ρ の球，すなわち式（1.3－101）で近似する。ただし，考える負荷履歴は，逆負荷あるいは比例負荷からの偏りが著しくないとする。

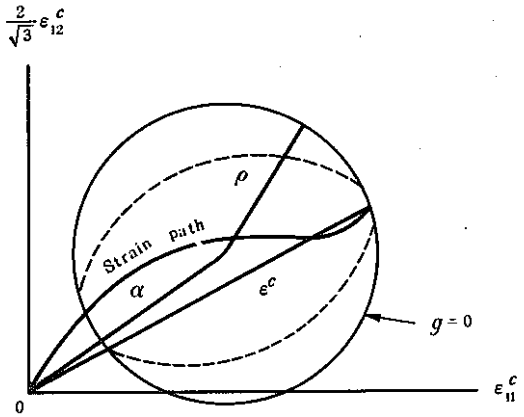


図1.3－6　多軸応力状態でのクリープ硬化面

$$g = \left[\frac{2}{3}(\varepsilon_{ij}^C-\alpha_{ij})(\varepsilon_{ij}^C-\alpha_{ij})\right]^{\frac{1}{2}} - \rho \leqq 0 \tag{1.3-101}$$

ここで，α_{ij} は2階の対称の偏差テンソルである。

式（1.3－101）で定義される回復可能なひずみ範囲が，膨張および移動するのは，クリープひずみ $\dot{\varepsilon}_{ij}^C$ が面 $g=0$（この面をクリープ硬化面と呼ぶ）上にあって，しかもクリープ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}^C$ が外向き法線成分を持つときだけである。

したがって，単軸状態での式（1.3－88），（1.3－89），（1.3－90），（1.3－91）で示される $\dot{\rho}$ と $\dot{\alpha}_{ij}$ は次のように書くことができる。

$$\dot{\rho}=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{3}}\ \dot{\varepsilon}^{C}_{ij}\,n_{ij} & g=0 \ \text{かつ}\ \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon^{C}_{ij}}\right)\varepsilon^{C}_{ij}>0 \qquad (1.3-102)\\ 0 & g<0 \ \text{あるいは}\ \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon^{C}_{ij}}\right)\varepsilon^{C}_{ij}\leqq 0 \qquad (1.3-103)\end{cases}$$

$$\dot{\alpha}_{ij}=\begin{cases}(1-\lambda)\,\dot{\varepsilon}^{C}_{kl}\,n_{kl}\,n_{ij} & g=0 \ \text{かつ}\ \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon^{C}_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}^{C}_{ij}>0 \qquad (1.3-104)\\ 0 & g<0 \ \text{あるいは}\ \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon^{C}_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}^{C}_{ij}\leqq 0 \qquad (1.3-105)\end{cases}$$

ここで，n_{ij} は次式で定義される。

$$n_{ij}=\frac{(\varepsilon^{C}_{ij}-\alpha_{ij})}{[(\varepsilon^{C}_{kl}-\alpha_{kl})(\varepsilon^{C}_{kl}-\alpha_{kl})]^{1/2}} \qquad (1.3-106)$$

$g=0$ のとき，n_{ij} はクリープ硬化面に対する単位外向き法線を示す。

次に，硬化量 ε^{H} について考える。q は単軸状態では転位の再可動化の効果により，応力反転とともに0に瞬間的に減少した。多軸状態では主応力方向の変化とともに活動すべり面が変化するから，このような材料の軟化によってもqは減少する。村上のクリープひずみ硬化理論では，クリープ硬化の方向性をクリープひずみ ε^{C}_{ij} とクリープ硬化面の中心 α_{ij} との差 $(\varepsilon^{C}_{ij}-\alpha_{ij})$ によって表わしている。したがって，硬化量 ε^{H} におけるひずみ履歴依存項は，偏差応力テンソル S_{ij} の方向への $(\varepsilon^{C}_{ij}-\alpha_{ij})$ の射影，すなわち，$(\varepsilon^{C}_{ij}-\alpha_{ij})S_{ij}/\bar{\sigma}$ に依存すると仮定できる。このとき式(1.3－95)は多軸状態に対して次のように拡張される。

$$\varepsilon^{H}=\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\rho+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)(\varepsilon^{C}_{ij}-\alpha_{ij})S_{ij}/\bar{\sigma} \qquad (1.3-107)$$

ここで，$\bar{\sigma}$ は次式で表わされる。

$$\bar{\sigma}=\left[\frac{3}{2}S_{ij}\,S_{ij}\right]^{1/2} \qquad (1.3-108)$$

最後に式(1.3－85)は，クリープ速度テンソルと偏差応力テンソルの非共軸性を無視し，これらのテンソル間の共線性を仮定すれば，多軸状態に対して次式で表わすことができる。

$$\dot{\varepsilon}^{C}_{ij}=\frac{3}{2}f(\varepsilon^{H},\bar{\sigma})S_{ij}/\bar{\sigma} \qquad (1.3-109)$$

(2) FINAS におけるクリープ則

FINAS においては，使用者はクリープ則の使用に際して，次の３つの選択が可能である。

ⅰ）内部に用意されている特定形式のクリープ則のパラメータの値を入力して使用する。

ⅱ）使用者が指定の形式に従ってサブプログラムを作成する。

ⅲ）特定材料について，内部に組み込まれている材料データライブラリを使用する。

以下では，内部に用意されている各クリープ則〔上記のⅰ)〕について説明を行なう。なお，材料データライブラリ〔上記のⅲ)〕については本編 1.3.5 節を参照されたい。

a) 1次クリープ表示式

1次クリープ表示式としては，ベキ乗表示と指数表示が利用できる。これらはクリープひずみ増分の形で与えられているため，それぞれについて時間硬化説による式とひずみ硬化による式が用意されている。すなわち，以下に示すとおりである。

●ベキ乗表示

$$\varepsilon_t=\beta(\sigma,T)\,t^{m(\sigma,T)}=A_1\sigma^{A_2}\exp\left(-\frac{A_3}{T}\right)t^{A_4} \qquad (1.3-110)$$

時間硬化説では，

$$\Delta\varepsilon_t=\beta\{(t+\Delta t)^{A_4}-t^{A_4}\} \qquad (1.3-111)$$

ひずみ硬化説では，

$$\Delta\varepsilon_t=\beta(\sigma,T)(\bar{t}+\Delta t)^{A_4}-\varepsilon_t \qquad (1.3-112)$$

ここで，$\bar{t}=(\varepsilon_t/\beta)^{1/A_4}$ は仮想的な時間。

●指数表示

$$\varepsilon_t=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{tk}=\sum_{k=1}^{n}A_2\{1-e^{-\gamma_k(\sigma,T)t}\} \qquad (1.3-113)$$

ここで，$\gamma_1(\sigma,T)=A_3\{\sinh(A_4\sigma)\}^{A_5}\exp\left(-\frac{A_6}{T}\right)$

時間硬化説では，

$$\Delta\varepsilon_t=\sum_{k=1}^{n}\Delta\varepsilon_{tk}=-\sum_{k=1}^{n}A_2\{e^{-\gamma_k(t+\Delta t)}-e^{-\gamma_k t}\} \qquad (1.3-114)$$

ひずみ硬化説では，

$$\Delta\varepsilon_t=\sum_{k=1}^{n}\Delta\varepsilon_{tk}=\sum_{k=1}^{n}\left[A_2\{1-e^{-\gamma_k(\bar{t}_k+\Delta t)}\}-\varepsilon_{tk}\right] \qquad (1.3-115)$$

ここで，$\bar{t}_k=\dfrac{1}{\gamma_k}\ln\left(1-\varepsilon_{tk}/A_2\right)$

ここでのひずみ硬化は簡易的に $\bar{t}_k$ を定めている。

b) 2次クリープ表示式

2次クリープひずみは，式(1.3−58)の右辺第2項で表わされるので，2次クリープひずみ増分は次式で与えられる。

$$\Delta\varepsilon_S=\dot{\varepsilon}_S(\sigma,T)\Delta t \tag{1.3−116}$$

$\dot{\varepsilon}_S$ の具体的な表示式には，次のものが含まれている。

$$\dot{\varepsilon}_S=A_{16}\exp\left(\frac{\sigma}{A_{17}}\right)\exp\left(-\frac{A_{18}}{T}\right) \tag{1.3−117}$$

$$\dot{\varepsilon}_S=A_{16}\,\sigma^{A_{17}}\exp\left(-\frac{A_{18}}{T}\right) \tag{1.3−118}$$

$$\dot{\varepsilon}_S=A_{16}\left\{\sinh\left(\frac{A_{17}}{T}\exp\left(-\frac{A_{18}}{T}\right)\right)\right\}^{A_{19}}\exp\left(-\frac{A_{20}}{T}\right) \tag{1.3−119}$$

$$\dot{\varepsilon}_S=A_{16}\{\sinh(A_{17}\sigma)\}^{A_{18}}\exp\left(-\frac{A_{19}}{T}\right) \tag{1.3−120}$$

$$\dot{\varepsilon}_S=A_{16}\exp(A_{17}T)\{\sinh(A_{18}\sigma)\}^{A_{19}}\exp\left(-\frac{A_{20}}{T}\right) \tag{1.3−121}$$

1.3.3 塑性とクリープの連成

(1) 塑性クリープ連成モデルの構成方程式

非弾性構成方程式では通常，非時間依存の弾塑性挙動と時間依存のクリープ挙動に対して別個の取扱いがなされるが，ここでは部分的ではあるが，クリープの塑性に及ぼす影響を考慮に入れたモデルに関する構成方程式について述べる。熱弾性領域において，次の Hooke の法則が成立するものとする。

$$\{\sigma\}=[E^e]\{\varepsilon^e\} \tag{1.3−122}$$

ここで，$\{\sigma\}$ は応力，$\{\varepsilon^e\}$ は弾性ひずみであり，$[E^e]$ は温度 T に依存する材料の弾性挙動を表わすマトリックスである。式(1.3−122)を増分形にすることにより次式を得る。

$$\Delta\{\sigma\}=[E^e]\Delta\{\varepsilon^e\}+\{\Psi_T^e\}\Delta T \tag{1.3−123}$$

ただし，

$$\{\Psi_T^e\} = \frac{\partial [E^e]}{\partial T}\{\varepsilon^e\} \qquad (1.3-124)$$

また，弾塑性ひずみ増分 $\Delta\{\varepsilon^{ep}\}$ を次の形で定義する。

$$\Delta\{\varepsilon^{ep}\} = \Delta\{\varepsilon^e\} + \Delta\{\varepsilon^p\} \qquad (1.3-125)$$

ただし，塑性ひずみ増分 $\Delta\{\varepsilon^p\}$ は塑性ポテンシャルを Φ^p とすると，次のように表わされるものとする。

$$\Delta\{\varepsilon^p\} = \Delta\lambda^p \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} \qquad (1.3-126)$$

式(1.3−125)を考慮して式(1.3−123)を次式のように書き換える。

$$\Delta\{\sigma\} = [E^e](\Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \Delta\{\varepsilon^p\}) + \{\Psi_T^e\}\Delta T \qquad (1.3-127)$$

いま，降伏関数を特別な形に限定せず，一般的な形のまま取り扱うものとし，降伏関数として，クリープひずみを考慮して次式を仮定する。

$$f^*(\sigma, \varepsilon^p, \varepsilon^c, T) = 0 \qquad (1.3-128)$$

負荷状態では次式が成立する。

$$\Delta f = \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T \Delta\{\sigma\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \Delta\{\varepsilon^p\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \Delta\{\varepsilon^c\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\Delta T \qquad (1.3-129)$$

式(1.3−129)に式(1.3−127)を代入すると次式が得られる。

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\Delta\{\varepsilon^{ep}\} - \left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e] - \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T\right)\Delta\{\varepsilon^p\}$$

$$+\left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\right)^T \Delta T + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c}\right\}^T \Delta\{\varepsilon^c\} = 0 \qquad (1.3-130)$$

ここで，流れ則の式(1.3−126)を式(1.3−130)に代入し，$\Delta\lambda^p$ について解くと次のようになる。

$$\Delta\lambda^p = \frac{\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\Delta\{\varepsilon^{ep}\}}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}}$$

$$+\frac{\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c}\right\}^T \Delta\{\varepsilon^c\} + \left(\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T \{\Psi_T^e\} + \frac{\partial f^*}{\partial T}\right)\Delta T}{-\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\} + \left\{\frac{\partial f^*}{\partial \sigma}\right\}^T [E^e]\left\{\frac{\partial \Phi^p}{\partial \sigma}\right\}} \qquad (1.3-131)$$

式(1.3−131)，式(1.3−126)を式(1.3−127)に代入し整理すると次式が得られる。

$$\Delta\{\sigma\}=[E^{ep}]\Delta\{\varepsilon^{ep}\}+[E^{c}]\Delta\{\varepsilon^{c}\}+\{\Psi_T^{ep}\}\Delta T \qquad (1.3-132)$$

ここで，

$$[E^{ep}]=[E^{e}]+[E^{p}] \qquad (1.3-133)$$

$$\{\Psi_T^{ep}\}=\{\Psi_T^{e}\}+\{\Psi_T^{p}\} \qquad (1.3-134)$$

であり，$\{\Psi_T^{ep}\}$ は材料定数の温度依存性から導かれるものである。式(1.3−133)，式(1.3−134)の個々のマトリックスは以下のようになる。

$$[E^{p}]=-\frac{[E^{e}]\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[E^{e}]}{-\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[E^{e}]\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1.3-135)$$

$$\{\Psi_T^{p}\}=-\frac{[E^{e}]\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}\left(\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{\Psi_T^{e}\}+\frac{\partial f^{*}}{\partial T}\right)}{-\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[E^{e}]\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1.3-136)$$

また，式(1.3−132)に示されているクリープひずみを考慮した場合に生じるマトリックス $[E^{c}]$ は次式で表わされる。

$$[E^{c}]=-\frac{[E^{e}]\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{c}}\right\}^{T}}{-\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[E^{e}]\left\{\frac{\partial\Phi^{p}}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1.3-137)$$

associated な流れ則の場合，$\Phi^{p}=f^{*}$ であり，たとえば，$[E^{p}]$ は次のようになる。

$$[E^{p}]=-\frac{[E^{e}]\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[E^{e}]}{-\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[E^{e}]\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1.3-138)$$

(2) 塑性クリープ連成の移動硬化モデル[14)]

塑性ポテンシャル，降伏条件ともMisesの関数を用いるとすると，塑性クリープの連成を考慮した移動硬化モデルの降伏関数は次のように表わされる。

$$f^{*}=\bar{\sigma}(\sigma,\alpha)-\kappa(T)=0 \qquad (1.3-139)$$

ここで，α は降伏面の移動を表わし，塑性ひずみ，クリープひずみおよび温度の関数として，次式で塑性とクリープ

の連成効果を評価するものとする。

$$\Delta\{\boldsymbol{a}\}=[\boldsymbol{C}]\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}^{p}\}+[\boldsymbol{H}]\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}^{c}\} \tag{1.3−140}$$

ただし，　　$[\boldsymbol{C}]=[\boldsymbol{C}]^{T}$，　$[\boldsymbol{H}]=[\boldsymbol{H}]^{T}$

ここで，$[\boldsymbol{C}]$は移動硬化係数のマトリックスであり，$[\boldsymbol{H}]$はクリープ変形に応じて降伏面の移動を考慮する材料特性パラメータのマトリックスである。$[\boldsymbol{H}]$は相当オリジンシフト応力$\overline{a}$の値により次のように与えられる。

$$\overline{a}=\sqrt{\frac{3}{2}\{\boldsymbol{a}\}^{T}\{\boldsymbol{a}\}}\leqq A\kappa \quad \text{のとき，} \quad [\boldsymbol{H}]=[\boldsymbol{C}]$$

$$\overline{a}>A\kappa \qquad \text{のとき，} \quad [\boldsymbol{H}]=[\boldsymbol{0}] \tag{1.3−141}$$

ただし，Aは温度，履歴，材料に依存するものである。式(1.3−139)，式(1.3−140)から次式が成立する。

$$\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}=\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}=-\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\boldsymbol{a}} \tag{1.3−142}$$

$$\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}=\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\} \tag{1.3−143}$$

$$\frac{\partial f^{*}}{\partial T}=\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial T}-\frac{\partial\kappa}{\partial T} \tag{1.3−144}$$

$$\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}=\left[\frac{\partial\boldsymbol{a}}{\partial\varepsilon^{p}}\right]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\boldsymbol{a}}\right\}=-[\boldsymbol{C}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\} \tag{1.3−145}$$

式(1.3−142)と式(1.3−143)より次式が得られる。

$$-\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial f^{*}}{\partial\sigma}\right\}=\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[\boldsymbol{C}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\} \tag{1.3−146}$$

したがって，$[\boldsymbol{E}^{p}]$，　$\{\Psi_{T}^{p}\}$は次のように表わされる。

$$[\boldsymbol{E}^{p}]=-\frac{[\boldsymbol{E}^{e}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[\boldsymbol{E}^{e}]}{\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[\boldsymbol{C}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[\boldsymbol{E}^{e}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}} \tag{1.3−147}$$

$$\{\Psi_{T}^{p}\}=-\frac{[\boldsymbol{E}^{e}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}\left(\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{\Psi_{T}^{e}\}+\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial T}-\frac{\partial\kappa}{\partial T}\right)}{\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[\boldsymbol{C}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}^{T}[\boldsymbol{E}^{e}]\left\{\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\sigma}\right\}} \tag{1.3−148}$$

一方，式(1.3−137)の右辺の分子における$\{\partial f^{*}/\partial\varepsilon^{c}\}$は式(1.3−142)を考慮すると次式で表わされる。

$$\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c}\right\}=\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon^c}\right]\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \alpha}\right\}=\left[\frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon^c}\right]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \alpha}\right\}=-[H]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\} \tag{1.3-149}$$

式(1.3-149)から式(1.3-137)の右辺の分子は次のようになる。

$$[E^e]\left\{\frac{\partial \varphi^p}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f^*}{\partial \varepsilon^c}\right\}^T=-[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T[H]=-\frac{3}{2}[E^e][H] \tag{1.3-150}$$

したがって，$[E^c]$は次式で表わされる。

$$[E^c]=\frac{\frac{3}{2}[E^e][H]}{\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T[C]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}+\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}^T[E^e]\left\{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma}\right\}} \tag{1.3-151}$$

(3) 塑性・クリープ連成の繰返し組み合せ硬化モデル[15)]

ここでは，塑性クリープの連成を考慮した場合の繰返し組み合せ硬化モデルについて説明する。Mises の降伏条件を使用する場合，初期降伏面および後続の降伏面は一般に次式で表わされる。

$$f^*=\bar{\sigma}(\sigma,\alpha)-\kappa=0 \tag{1.3-152}$$

ここで，αは降伏面の移動を表わし，クリープと塑性の連成を考慮して次式で与えられる。

$$\Delta\{\alpha\}=[C]\Delta\{\varepsilon^p\}+[H]\Delta\{\varepsilon^c\} \tag{1.3-153}$$

ただし，　　$[C]=[C]^T$，　$[H]=[H]^T$

ここで，$[C]$は移動硬化係数マトリックスであり，$[H]$はクリープ変形に応じて降伏面の移動を考慮する材料特性パラメータのマトリックスである。$[H]$は相当オリジンシフト応力$\bar{\alpha}$の値により次のように与えられる。

$$\bar{\alpha}=\sqrt{\frac{3}{2}\{\alpha\}^T\{\alpha\}}\leqq A\kappa \quad \text{のとき，} \quad [H]=[C]$$

$$\bar{\alpha}>A\kappa \quad \text{のとき，} \quad [H]=[0] \tag{1.3-154}$$

ただし，Aは温度，履歴，材料に依存するものである。また，κは塑性ひずみε^p，温度Tに依存して次式で表わされる。

$$\kappa=\kappa(\varepsilon^p,T) \tag{1.3-155}$$

繰返し組み合せ硬化モデルでは，降伏曲面の大きさを塑性仕事あるいは累積塑性ひずみの関数とする二つの考え方があり，この両者を同時に取り扱うために次式を考える。

$$\kappa=(1-\omega)\kappa(W^p,T)+\omega\kappa(\tilde{\varepsilon}^p,T) \tag{1.3-156}$$

ここで，W^p は塑性仕事，$\tilde{\varepsilon}^p$ は累積相当塑性ひずみであり，それぞれ次式で表わされる。ただし，ω は 0 か 1 のいずれかの値をとる。

$$W^p=\int \Delta W^p=\int \{\sigma'\}^T \Delta\{\varepsilon^p\} \tag{1.3-157}$$

$$\tilde{\varepsilon}^p=\int d\tilde{\varepsilon}^p=\int \sqrt{\frac{2}{3}\Delta\{\varepsilon^p\}^T\Delta\{\varepsilon^p\}} \tag{1.3-158}$$

ただし，$\{\sigma'\}$ は偏差応力である。したがって，負荷の各段階での連続的な降伏面の移動と膨張を式 (1.3-157) 式 (1.3-156) に基づいて表わし，材料の硬化あるいは軟化特性を考慮することができる。一方，ORNL の推奨する方法では，塑性負荷の増分間では降伏面の大きさを変化させないで増分終了後にこれを変化させる近似手法を適用している。そのために式 (1.3-153) の代りに次式を用いている。

$$\Delta\{\alpha\}=[C]\Delta\{\varepsilon^p\}+[H]\Delta\{\varepsilon^e\}-\frac{\Delta\kappa}{\kappa}\{S\} \tag{1.3-159}$$

ここで，$\{S\}$，$\Delta\kappa$ はそれぞれ次式で表わされるものである。

$$\{S\}=\{\sigma'\}-\{\alpha\} \tag{1.3-160}$$

$$\Delta\kappa=(1-\omega)\left[\frac{\partial\kappa}{\partial\tilde{\varepsilon}^p}\Delta\tilde{\varepsilon}^p+\frac{\partial\kappa}{\partial T}\Delta T\right]+\omega\left[\frac{\partial\kappa}{\partial W^p}\Delta W^p+\frac{\partial\kappa}{\partial T}\Delta T\right] \tag{1.3-161}$$

1.3.4 スウェリング

(1) 照射スウェリングの基礎

スウェリングは中性子照射を受ける材料が膨張する現象であり，高度に放射線を浴びる環境にある材料にとってはこれを考慮した設計が必要となることがある。通常，スウェリングひずみは中性子束流，温度および時間の関数として次の一般式で表わされている。

$$\bar{\varepsilon}^s=f(\phi,T,t) \tag{1.3-162}$$

ここで，ϕ は中性子束流，T は温度，t は時間を意味する。しかし，最近 J.F. Bates 等[15]は応力依存性を考慮した式を提案している。これを一般式で表わすと次のとおりである。

$$\bar{\varepsilon}^s=g(\phi,T,t,\sigma_H) \qquad (\sigma_H：\text{静水圧応力}) \tag{1.3-163}$$

一方，等方性材料において，スウェリングひずみ成分はクロネッカのデルタ δ_{ij} を用いて次式のように表わされる。

$$\varepsilon_{ij}^s=\delta_{ij}\bar{\varepsilon}^s \tag{1.3-164}$$

また，異方性を考慮すると式（1.3-164)は次式に書き換えることができる。

$$\varepsilon_{ij}^{s}=\delta_{ij}\,\overline{\varepsilon}_{(k)}^{s} \qquad (k=1,2,3) \tag{1.3-165}$$

これに伴い，式（1.3-162)，式（1.3-163)はそれぞれ次のように書き換えることができる。

$$\overline{\varepsilon}_{(i)}^{s}=f^{*}(i,\phi,T,t) \tag{1.3-166}$$

$$\overline{\varepsilon}_{(i)}^{s}=g^{*}(i,\phi,T,t,\sigma_{ij}) \tag{1.3-167}$$

ただし，i は座標軸，σ_{ij} は応力成分を表わす。

(2) 有限要素法における定式

スウェリングひずみベクトルの増分を $\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}^{s}\}$ で表わすと，要素に対するスウェリングひずみ荷重ベクトルの増分 $\Delta\{\boldsymbol{p}_{e}^{s}\}$ は次式で表わされる。

$$\Delta\{\boldsymbol{p}_{e}^{s}\}=\int_{vol}[\boldsymbol{B}]^{T}[\boldsymbol{D}]\,\Delta\{\boldsymbol{\varepsilon}^{s}\}\,dV \tag{1.3-168}$$

ここで，$[\boldsymbol{B}]$ はひずみ・変位マトリックス，$[\boldsymbol{D}]$ は応力・ひずみマトリックスである。また，構造全体においてスウェリングひずみ増分による荷重ベクトル増分 $\Delta\{\boldsymbol{P}^{s}\}$ は，N を要素数とすると次式で示される。

$$\Delta\{\boldsymbol{P}^{s}\}=\sum_{e=1}^{N}\Delta\{\boldsymbol{p}_{e}^{s}\} \tag{1.3-169}$$

構造全体の変位と荷重の関係は次のように表わされる。

$$[\boldsymbol{K}]\,\Delta\{\boldsymbol{U}\}=\Delta\{\boldsymbol{P}\}+\Delta\{\boldsymbol{P}^{s}\} \tag{1.3-170}$$

ここで，$[\boldsymbol{K}]$ は剛性マトリックス，$\Delta\{\boldsymbol{U}\}$ は変位ベクトル増分，$\Delta\{\boldsymbol{P}\}$ はスウェリングひずみ以外の荷重ベクトル増分である。

(3) FINASにおけるスウェリング

FINASではスウェリング解析のために，次の2つの方法を用意している。

Ⅰ）FINASに組み込まれているスウェリングひずみ式のパラメータの値を入力する。

Ⅱ）ユーザが指定の形式にしたがって，スウェリングひずみ式をサブルーチンで作成する。

以下では内部に用意されている各スウェリングひずみ式について説明を行なう。

a) 組込みのスウェリングひずみ表示式

- $\overline{\varepsilon}^{s}=c_{1}(\phi t)^{c_{2}}\,(c_{3}+c_{4}T+c_{5}T^{2}+c_{6}T^{3})$ (1.3-171)

ただし，c_{i}（$i=1\sim6$）は入力データ，ϕ は中性子束，t は時間，T は温度（絶対温度）である。

• $\overline{\varepsilon}^{s}=c_1\left[\frac{e^{A}}{1+e^{A}}\right]\left[\frac{c_2}{1+e^{B}}+\frac{c_3}{1+e^{C}}\right]\left(\frac{\phi t}{10^{22}}\right)^{N}$ (1.3−172)

$$N=\frac{2+3\,e^{D}}{1+e^{D}} \tag{1.3−173}$$

$$A=c_4(T-c_5) \tag{1.3−174}$$

$$B=c_6(T-c_7) \tag{1.3−175}$$

$$C=c_8(T-c_9) \tag{1.3−176}$$

$$D=c_{10}(T-c_{11}) \tag{1.3−177}$$

ただし，c_i（$i=1\sim11$）は入力データ，ϕは中性子束，tは時間，Tは温度（絶対温度）である。

• $\overline{\varepsilon}^{s}=A\left(\frac{\phi t}{10^{22}}\right)^{B}e^{C}$ (1.3−178)

$$A=c_1+c_2\ln\left(\frac{\phi t}{10^{22}}\right) \tag{1.3−179}$$

$$B=c_3+\frac{c_4}{T}+c_5\left(\frac{\phi t}{10^{22}}\right) \tag{1.3−180}$$

$$C=c_6+\frac{c_7}{T}+\frac{c_8}{T^{2}} \tag{1.3−181}$$

ただし，c_i（$i=1\sim8$）は入力データ，ϕは中性子束，tは時間，Tは温度（絶対温度）である。

• $\overline{\varepsilon}^{s}=A\left(\frac{\phi t}{10^{22}}\right)^{B}e^{C}$ (1.3−182)

$$A=c_1(T-c_2) \tag{1.3−183}$$

$$B=c_3+\frac{c_5}{T-c_4}+\frac{c_7}{(T-c_6)^{2}} \tag{1.3−184}$$

$$C=c_8+c_9T+\frac{c_{10}}{T} \tag{1.3−185}$$

ただし，c_i（$i=1\sim10$）は入力データ，ϕは中性子束，tは時間，Tは温度（絶対温度）である。

• $\overline{\varepsilon}^{s}=\dot{\varepsilon}^{s}(1.0+c_1\sigma_H)$ (1.3−186)

$$\dot{\varepsilon}^{s}=c_2e^{A}\left[\frac{\phi t}{c_3}+\frac{1}{B}\ln\left[\frac{e^{B(C-\phi t/c_3)}}{1+e^{BC}}\right]\right] \tag{1.3−187}$$

$$A=c_5+c_6(T+c_4)+c_7(T+c_4)^{2}+c_8(T+c_4)^{3}+c_9(T+c_4)^{4} \tag{1.3−188}$$

$$B=c_{10}+c_{11}(T+c_4) \tag{1.3−189}$$

$$C=\exp\{c_{12}+c_{13}(T+c_4)+c_{14}(T+c_4)^2+c_{15}(T+c_4)^3+c_{16}(T+c_4)^4\} \qquad (1.3-190)$$

ただし，c_i（$i=1\sim16$）は入力データ，ϕは中性子束，tは時間，Tは温度（絶対温度）である。

1.3.5 FINAS 材料データライブラリ

(1) オーステナイトステンレス鋼 SUS 304

材料データライブラリでのヤング係数およびポアソン比は EPICC データ集[16]，線膨張係数，降伏応力，加工硬化係数およびクリープ特性は動燃事業団による文献[17]から引用され登録されている。

ヤング係数，ポアソン比，線膨張係数については 20℃～650℃の範囲で表 1.3－1 の値が用いられ，降伏応力，加工硬化係数は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～650℃の範囲で表 1.3－2 の値が用いられる。各温度間は線形に補間し，この範囲外の温度では外挿を行なっている。さらに表 1.3－3 に示される単調応力－ひずみ関係式を使用することも可能である。また非弾性解析における塑性ポテンシャル，降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。なお，FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を 2/3 倍したものとしている。

クリープひずみは 425℃～650℃の範囲において，使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い表 1.3－4 の SUS 304 クリープひずみ式より計算する。なお，クリープひずみ式の応力適用範囲は 38.0 kg/mm^2 以下である。

表 1.3－1 SUS 304 鋼のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数

温　度 (℃)	ヤング係数 (kg/mm^2)	ポアソン比	線膨張係数 (1/℃)
20	1.98×10^4	0.266	15.15×10^{-6}
50	1.96×10^4	0.268	15.65×10^{-6}
100	1.94×10^4	0.272	16.48×10^{-6}
150	1.91×10^4	0.275	17.22×10^{-6}
200	1.88×10^4	0.279	17.85×10^{-6}
250	1.84×10^4	0.283	18.36×10^{-6}
300	1.80×10^4	0.287	18.79×10^{-6}
350	1.76×10^4	0.291	19.19×10^{-6}
400	1.72×10^4	0.295	19.57×10^{-6}
450	1.67×10^4	0.298	19.93×10^{-6}
500	1.62×10^4	0.302	20.28×10^{-6}
550	1.57×10^4	0.306	20.60×10^{-6}
600	1.52×10^4	0.310	20.87×10^{-6}
650	1.47×10^4	0.314	21.09×10^{-6}

表 1.3−2　SUS 304鋼の降伏応力，加工硬化係数

材料特性	最大想定ひずみレベル (%)	温度 (℃)						
		350	400	450	500	550	600	650
降伏応力 (kg/mm²)	.20	12.31	11.99	11.74	11.51	11.25	10.89	10.39
	.30	12.83	12.49	12.22	11.97	11.68	11.30	10.77
	.40	13.20	12.85	12.56	12.29	11.99	11.60	11.06
	.50	13.50	13.13	12.84	12.56	12.24	11.84	11.29
	.60	13.76	13.38	13.07	12.78	12.46	12.04	11.48
	.70	13.98	13.59	13.27	12.98	12.64	12.22	11.65
	.80	14.18	13.78	13.46	13.15	12.81	12.38	11.81
	.90	14.36	13.95	13.62	13.31	12.97	12.53	11.95
	1.00	14.53	14.11	13.78	13.46	13.11	12.66	12.07
	1.10	14.68	14.26	13.92	13.59	13.24	12.79	12.19
	1.20	14.82	14.40	14.05	13.72	13.36	12.91	12.31
	1.30	14.96	14.53	14.17	13.84	13.47	13.02	12.41
	1.40	15.08	14.65	14.29	13.95	13.58	13.12	12.51
	1.50	15.20	14.76	14.40	14.06	13.68	13.22	12.61
定常降伏応力 (kg/mm²)	.20			14.60	14.60	14.60	11.81	
	.30			17.62	17.62	17.62	14.12	
	.40			20.14	20.14	20.14	16.03	
	.50			22.51	22.51	22.51	17.83	
	.60			24.48	24.48	24.48	19.31	
	.70			26.37	26.37	26.37	20.73	
	.80			28.21	28.21	28.21	22.11	
	.90			29.82	29.82	29.82	23.31	
	1.00			31.20	31.20	31.20	24.33	
	1.10			32.46	32.46	32.46	25.25	
	1.20			33.68	33.68	33.68	26.15	
	1.30			34.82	34.82	34.82	26.98	
	1.40			35.76	35.76	35.76	27.67	
	1.50			36.67	36.67	36.67	28.32	
加工硬化係数 (kg/mm²)	.20	2248.2	2151.8	2064.0	1980.1	1896.1	1808.2	1713.1
	.30	1442.5	1385.6	1332.1	1280.3	1228.9	1176.5	1121.8
	.40	1096.2	1055.1	1015.9	977.8	940.0	901.9	862.6
	.50	898.8	866.3	835.1	804.6	774.5	744.1	713.1
	.60	769.4	742.4	716.4	690.8	665.5	640.1	614.4
	.70	677.3	654.1	631.6	609.5	587.6	565.7	543.5
	.80	607.9	587.5	567.6	548.1	528.8	509.4	489.9
	.90	553.5	535.2	517.4	499.9	482.5	465.1	447.6
	1.00	509.5	492.9	476.8	460.8	445.0	429.2	413.3
	1.10	473.1	457.9	443.1	428.5	413.9	399.4	384.9
	1.20	442.4	428.4	414.7	401.1	387.7	374.3	360.8
	1.30	416.1	403.1	390.3	377.7	365.2	352.7	340.1
	1.40	393.3	381.1	369.2	357.4	345.6	333.9	322.2
	1.50	373.3	361.9	350.6	339.5	328.5	317.4	306.4

表 1.3−3　SUS 304 鋼の単調応力−ひずみ関係式

(1)　$\sigma \leqq \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)　$\sigma > \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma - \sigma_P}{K} \right)^{\frac{1}{m}}$$

<使用単位>

ε_e (mm/mm),　　ε_p (mm/mm),　　σ (kg/mm^2)

<適用限界>

最大ひずみ　$(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{\max} \leqq 0.03$ (mm/mm)

温度 (℃) / パラメータ	$315 \leqq T \leqq 650$
E (kg/mm^2)	$2.10236 \times 10^4 - 9.71895\,T$
σ_P (kg/mm^2)	$\sigma_Y - K\,(0.002)^m$
σ_Y (kg/mm^2)	$(25.5655 - 5.58937 \times 10^{-2}\,T + 1.04384 \times 10^{-4}\,T^2 - 7.42535 \times 10^{-8}\,T^3) / \alpha_Y$
K (kg/mm^2)	$44.3068 - 1.78933 \times 10^{-2}\,T$
m	$0.279395 + 7.749 \times 10^{-5}\,T$
α_Y	MATERIAL データ B_{11} カードで指定した値。B_{11} カードの α_Y が無記入の場合は 1.0

表 1.3−4　SUS304鋼のクリープひずみ式

$$\varepsilon^c = c_1\{1-\exp(-r_1 t)\}+c_2\{1-\exp(-r_2 t)\}+\dot{\varepsilon}_m t$$

ここで

$$r_1 = 40.0\,t_R^{-0.6667},\quad r_2 = 14.799\,t_R^{-0.85439}$$

$$c_1 = 2.408\,\dot{\varepsilon}_m^{0.7908}/r_1,\quad c_2 = 0.81437\,\dot{\varepsilon}_m^{0.87084}/r_2$$

$$\dot{\varepsilon}_m = F t_R^{-1.1296}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0+B_1\log_{10}\sigma+B_2(\log_{10}\sigma)^2 \\ \qquad (2.0\leqq\sigma\leqq 38.0\text{のとき}) \\ \{B_0-B_2(\log_{10}2.0)^2\}+(B_1+2B_2\log_{10}2.0)\log_{10}\sigma \\ \qquad (0.01\leqq\sigma<2.0\text{のとき}) \end{cases}$$

ただし，$0\leqq\sigma<0.01$に対しては，$r_1=r_2=c_1=c_2=\dot{\varepsilon}_m=0$

〈使用単位〉　ε^c (mm/mm)，σ (kg/mm^2)，t (hr)，T(℃)

パラメータ ＼ 温度	$425\leqq T\leqq 650$
F	$65.48\exp\{-\frac{42750}{8.31(T+273.15)}\}$
B_0	$-16.07703+22968.2/(T+273.15)$
B_1	$-2665.10/(T+273.15)$
B_2	$-1763.01/(T+273.15)$
α_R	MATERIAL データ B_{12}カードで指定した値。B_{12}カードのα_Rが無記入の場合は1.0

(2) オーステナイトステンレス鋼 SUS 316

SUS 304 と同様の文献より引用され，弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表 1.3-5 は SUS 316 の 20℃～650℃の温度におけるヤング係数，ポアソン比，線膨張係数を示し，表 1.3-6 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～650℃の温度における降伏応力，加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し，範囲外の温度について外挿を行なう。また，表 1.3-7 は単調応力-ひずみ関係式を示したものである。なお，塑性解析での塑性ポテンシャル，降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また，FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を $\frac{2}{3}$ 倍したものとしている。

クリープひずみは 425℃～650℃の温度において，使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い，表 1.3-8 の SUS 316 クリープひずみ式より計算する。なお，クリープひずみ式の応力適用範囲は 38.0 kg/mm^2 以下である。

表 1.3-5　SUS 316鋼のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数

温　　度 (℃)	ヤング係数 (kg/mm^2)	ポアソン比	線膨張係数 ($1/℃$)
20	1.98×10^4	0.266	15.15×10^{-6}
50	1.96×10^4	0.268	15.65×10^{-6}
100	1.94×10^4	0.272	16.48×10^{-6}
150	1.91×10^4	0.275	17.22×10^{-6}
200	1.88×10^4	0.279	17.85×10^{-6}
250	1.84×10^4	0.283	18.36×10^{-6}
300	1.80×10^4	0.287	18.79×10^{-6}
350	1.76×10^4	0.291	19.19×10^{-6}
400	1.72×10^4	0.295	19.57×10^{-6}
450	1.67×10^4	0.298	19.93×10^{-6}
500	1.62×10^4	0.302	20.28×10^{-6}
550	1.57×10^4	0.306	20.60×10^{-6}
600	1.52×10^4	0.310	20.87×10^{-6}
650	1.47×10^4	0.314	21.08×10^{-6}

表 1.3−6　SUS316鋼の降伏応力，加工硬化係数

材料特性	最大想定ひずみレベル (%)	温度 (℃)						
		350	400	450	500	550	600	650
降伏応力 (kg/mm²)	.20	14.12	13.61	13.19	12.82	12.47	12.10	11.67
	.30	14.52	14.00	13.56	13.18	12.82	12.44	12.00
	.40	14.82	14.28	13.84	13.45	13.08	12.69	12.24
	.50	15.05	14.51	14.06	13.66	13.29	12.89	12.43
	.60	15.25	14.71	14.25	13.85	13.47	13.06	12.60
	.70	15.43	14.88	14.42	14.01	13.62	13.22	12.75
	.80	15.59	15.03	14.57	14.16	13.77	13.36	12.89
	.90	15.74	15.17	14.71	14.29	13.90	13.48	13.01
	1.00	15.87	15.31	14.83	14.42	14.02	13.60	13.12
	1.10	16.00	15.43	14.95	14.53	14.13	13.71	13.23
	1.20	16.11	15.54	15.06	14.64	14.24	13.81	13.33
	1.30	16.22	15.65	15.17	14.74	14.33	13.91	13.42
	1.40	16.33	15.75	15.27	14.84	14.43	14.00	13.51
	1.50	16.43	15.85	15.36	14.93	14.52	14.09	13.60
定常降伏応力 (kg/mm²)	.20			18.64	18.64	18.64	18.40	
	.30			22.27	22.27	22.27	21.50	
	.40			25.36	25.36	25.36	24.10	
	.50			28.06	28.06	28.06	26.34	
	.60			30.59	30.59	30.59	28.42	
	.70			32.79	32.79	32.79	30.21	
	.80			34.72	34.72	34.72	31.76	
	.90			36.56	36.56	36.56	33.22	
	1.00			38.23	38.23	38.23	34.53	
	1.10			39.83	39.83	39.83	35.79	
	1.20			41.17	41.17	41.17	36.83	
	1.30			42.46	42.46	42.46	37.81	
	1.40			43.70	43.70	43.70	38.75	
	1.50			44.83	44.83	44.83	39.61	
加工硬化係数 (kg/mm²)	.20	1826.6	1767.2	1714.8	1667.0	1621.2	1575.3	1526.9
	.30	1188.6	1155.1	1124.2	1095.0	1066.8	1038.7	1009.9
	.40	915.1	891.2	868.7	847.2	826.3	805.6	784.5
	.50	758.2	739.5	721.6	704.4	687.6	670.9	654.0
	.60	654.8	639.2	624.3	609.8	595.7	581.6	567.4
	.70	580.7	567.3	554.4	541.8	529.5	517.3	505.1
	.80	524.5	512.7	501.3	490.2	479.3	468.5	457.6
	.90	480.2	469.6	459.4	449.4	439.6	429.8	420.1
	1.00	444.2	434.6	425.3	416.3	407.3	398.4	389.5
	1.10	414.3	405.5	397.0	388.7	380.4	372.2	364.0
	1.20	389.0	380.9	373.0	365.3	357.6	350.0	342.4
	1.30	367.2	359.7	352.4	345.1	338.0	330.9	323.8
	1.40	348.3	341.3	334.4	327.6	320.9	314.2	307.6
	1.50	331.6	325.0	318.5	312.2	305.8	299.6	293.3

表 1.3-7　SUS 316 鋼の単調応力－ひずみ関係式

(1)　$\sigma \leqq \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)　$\sigma > \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma - \sigma_P}{K}\right)^{\frac{1}{m}}$$

＜使用単位＞

ε_e (mm/mm)，　ε_p (mm/mm)，　σ (kg/mm^2)

＜適用限界＞

最大ひずみ　$(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{max} \leqq 0.03$ (mm/mm)

パラメータ ＼ 温度 (℃)	$315 \leqq T \leqq 650$
E (kg/mm^2)	$2.10236 \times 10^4 - 9.71895\,T$
σ_P (kg/mm^2)	$\sigma_Y - K\,(0.002)^m$
σ_Y (kg/mm^2)	$(26.8073 - 5.04347\times10^{-2}T + 8.03961\times10^{-5}T^2 - 6.11282\times10^{-8}T^3)/\alpha_Y$
K (kg/mm^2)	$140.0909 - 9.69990\times10^{-3}T$
m	$0.326245 + 6.13276\times10^{-5}T$
α_Y	MATERIAL データ B_{11} カードで指定した値。B_{11} カードの α_Y が無記入の場合は 1.0

表 1.3−8　SUS316鋼のクリープひずみ式

$$\varepsilon^c = c_1\{1-\exp(-r_1 t)\}+c_2\{1-\exp(-r_2 t)\}+\dot{\varepsilon}_m t$$

ここで

$$r_1 = 252.6\,t_R^{-0.6667},\quad r_2 = 14.799\,t_R^{-0.85439}$$

$$c_1 = 6.558\,\dot{\varepsilon}_m^{0.7908}/r_1,\quad c_2 = 0.81437\,\dot{\varepsilon}_m^{0.87084}/r_2$$

$$\dot{\varepsilon}_m = F t_R^{-1.1639}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0+B_1\log_{10}\sigma+B_2(\log_{10}\sigma)^2 \\ \qquad (2.0\leqq\sigma\leqq 38.0\text{のとき}) \\ \{B_0-B_2(\log_{10}2.0)^2\}+(B_1+2B_2\log_{10}2.0)\log_{10}\sigma \\ \qquad (0.01\leqq\sigma<2.0\text{のとき}) \end{cases}$$

ただし，$0\leqq\sigma<0.01$に対しては，$r_1=r_2=c_1=c_2=\dot{\varepsilon}_m=0$

〈使用単位〉　ε^c (mm/mm)，σ (kg/mm²)，t (hr)，T(℃)

パラメータ ＼ 温度	$425\leqq T\leqq 650$
F	$32548\exp\{-\dfrac{85931}{8.31(T+273.15)}\}$
B_0	$-17.37762+22983.2/(T+273.15)$
B_1	$-798.521/(T+273.15)$
B_2	$-2163.93/(T+273.15)$
α_R	MATERIAL データ B_{12}カードで指定した値。B_{12}カードのα_Rが無記入の場合は1.0

(3) オーステナイトステンレス鋼 SUS 321 伝熱管

SUS 304 と同様の文献より引用され，弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表1.3-9 は SUS 321 の 20℃～650℃の温度におけるヤング係数，ポアソン比，線膨張係数を示し，表 1.3-10 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～650℃の温度における降伏応力，加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し，範囲外の温度について外挿を行なう。また，表1.3-11 は単調応力-ひずみ関係式を示したものである。なお，塑性解析での塑性ポテンシャル，降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また，FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を $\frac{2}{3}$ 倍したものとしている。

クリープひずみは 425℃～650℃の温度において，使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い，表 1.3-12 の SUS 321 クリープひずみ式より計算する。なお，クリープひずみ式の応力適用範囲は 46.0 kg/mm^2 以下である。

表 1.3-9　SUS 321 鋼伝熱管のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数

温　　度 (℃)	ヤング係数 (kg/mm^2)	ポアソン比	線膨張係数 (1/℃)
20	1.98×10^4	0.266	15.15×10^{-6}
50	1.96×10^4	0.268	15.65×10^{-6}
100	1.94×10^4	0.272	16.48×10^{-6}
150	1.91×10^4	0.275	17.22×10^{-6}
200	1.88×10^4	0.279	17.85×10^{-6}
250	1.84×10^4	0.283	18.36×10^{-6}
300	1.80×10^4	0.287	18.79×10^{-6}
350	1.76×10^4	0.291	19.19×10^{-6}
400	1.72×10^4	0.295	19.57×10^{-6}
450	1.67×10^4	0.298	19.93×10^{-6}
500	1.62×10^4	0.302	20.28×10^{-6}
550	1.57×10^4	0.306	20.60×10^{-6}
600	1.52×10^4	0.310	20.87×10^{-6}
650	1.47×10^4	0.314	21.09×10^{-6}

表 1.3−10　SUS321鋼伝熱管の降伏応力，加工硬化係数

材料特性	最大想定ひずみレベル (%)	温度 (℃)						
		350	400	450	500	550	600	650
降伏応力 (kg/mm^2)	.20	12.39	12.06	11.79	11.55	11.31	11.04	10.72
	.30	13.13	12.77	12.48	12.22	11.97	11.68	11.34
	.40	13.65	13.28	12.98	12.71	12.44	12.14	11.79
	.50	14.07	13.69	13.38	13.09	12.81	12.50	12.14
	.60	14.42	14.03	13.71	13.42	13.13	12.81	12.44
	.70	14.72	14.33	14.00	13.70	13.40	13.08	12.69
	.80	15.00	14.59	14.25	13.95	13.64	13.31	12.92
	.90	15.24	14.83	14.49	14.17	13.86	13.53	13.13
	1.00	15.47	15.05	14.70	14.38	14.07	13.72	13.32
	1.10	15.68	15.26	14.90	14.57	14.25	13.90	13.49
	1.20	15.87	15.45	15.08	14.75	14.43	14.07	13.66
	1.30	16.05	15.62	15.26	14.92	14.59	14.23	13.81
	1.40	16.23	15.79	15.42	15.08	14.74	14.38	13.96
	1.50	16.39	15.95	15.57	15.23	14.89	14.52	14.09
定常降伏応力 (kg/mm^2)	.20			14.32	14.32	14.32	14.32	
	.30			17.26	17.26	17.26	17.26	
	.40			19.77	19.77	19.77	19.77	
	.50			21.93	21.93	21.93	21.93	
	.60			23.90	23.90	23.90	23.90	
	.70			25.71	25.71	25.71	25.71	
	.80			27.31	27.31	27.31	27.31	
	.90			28.76	28.76	28.76	28.76	
	1.00			30.08	30.08	30.08	30.08	
	1.10			31.27	31.27	31.27	31.27	
	1.20			32.41	32.41	32.41	32.41	
	1.30			33.43	33.43	33.43	33.43	
	1.40			34.40	34.40	34.40	34.40	
	1.50			35.34	35.34	35.34	35.34	
加工硬化係数 (kg/mm^2)	.20	3279.4	3193.3	3114.9	3040.7	2966.9	2889.8	2805.4
	.30	2048.9	1994.7	1943.1	1892.8	1842.7	1791.4	1737.7
	.40	1536.1	1495.3	1455.8	1417.1	1378.3	1339.1	1298.5
	.50	1248.9	1215.6	1183.2	1151.2	1119.2	1086.9	1053.9
	.60	1062.8	1034.5	1006.7	979.2	951.8	924.1	895.9
	.70	931.4	906.5	882.1	857.9	833.7	809.3	784.5
	.80	833.0	810.7	788.8	767.1	745.3	723.4	701.3
	.90	756.2	736.0	716.1	696.2	676.4	656.5	636.4
	1.00	694.4	675.9	657.5	639.3	621.0	602.7	584.2
	1.10	643.4	626.3	609.2	592.3	575.4	558.4	541.2
	1.20	600.6	584.6	568.7	552.8	537.0	521.1	505.1
	1.30	564.0	549.0	534.0	519.1	504.2	489.3	474.2
	1.40	532.4	518.1	504.0	489.9	475.9	461.8	447.6
	1.50	504.7	491.2	477.8	464.4	451.1	437.7	424.2

表 1.3-11　SUS 321 鋼伝熱管の単調応力－ひずみ関係式

(1)　$\sigma \leqq \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)　$\sigma > \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma - \sigma_P}{K}\right)^{\frac{1}{m}}$$

<使用単位>

ε_e (mm/mm),　　ε_p (mm/mm),　　σ (kg/mm^2)

<適用限界>

最大ひずみ　$(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{max} \leqq 0.03$ (mm/mm)

温度 (℃) / パラメータ	$315 \leqq T \leqq 650$
E (kg/mm^2)	$2.10236 \times 10^4 - 9.71895\,T$
σ_P (kg/mm^2)	$\sigma_Y - K\,(0.002)^m$
σ_Y (kg/mm^2)	$(24.4905 - 380298 \times 10^{-2} T + 6.15139 \times 10^5 \times T^2 - 4.06897 \times 10^{-8} T^3)/\alpha_Y$
K (kg/mm^2)	$59.517 - 2.6872 \times 10^{-2} T$
m	0.3
α_Y	MATERIAL データ B_{11} カードで指定した値。B_{11} カードの α_Y が無記入の場合は 1.0

表 1.3-12 SUS321鋼伝熱管のクリープひずみ式

$$\varepsilon^c = c_1\{1-\exp(-r_1 t)\} + c_2\{1-\exp(-r_2 t)\} + \dot{\varepsilon}_m t$$

ここで

$$r_1 = 40.0\, t_R^{-0.6667},\quad r_2 = 14.799\, t_R^{-0.85439}$$

$$c_1 = 2.408\, \dot{\varepsilon}_m^{0.7908}/r_1,\quad c_2 = 0.81437\, \dot{\varepsilon}_m^{0.87084}/r_2$$

$$\dot{\varepsilon}_m = F t_R^{-1.2156}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10}\sigma + B_2(\log_{10}\sigma)^2 \\ \qquad (4.0 \leqq \sigma \leqq 46.0 \text{のとき}) \\ \{B_0 - B_2(\log_{10}4.0)^2\} + (B_1 + 2B_2\log_{10}4.0)\log_{10}\sigma \\ \qquad (0.01 \leqq \sigma < 4.0 \text{のとき}) \end{cases}$$

ただし，$0 \leqq \sigma < 0.01$に対しては，$r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\varepsilon}_m = 0$

〈使用単位〉　ε^c(mm/mm)，σ(kg/mm²)，t(hr)，T(℃)

パラメータ ＼ 温度	$425 \leqq T \leqq 650$
F	$13.955\exp\{-\frac{37782}{8.31(T+273.15)}\}$
B_0	$-16.46258+20089.0/(T+273.15)$
B_1	$-1953.03/(T+273.15)$
B_2	$-2954.61/(T+273.15)$
α_R	MATERIAL データ B_{12}カードで指定した値。B_{12}カードのα_Rが無記入の場合は1.0

（注）　鍛造材を除き適用

(4) $2\frac{1}{4}$ Cr－1Mo鋼（NT材）板

SUS 304 と同様の文献より引用され，弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表1.3－13は $2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）板の20℃～600℃の温度におけるヤング係数，ポアソン比，線膨張係数を示し，表1.3－14は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて350℃～550℃の温度における降伏応力，加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し，範囲外の温度について外挿を行なう。また，表1.3－15は単調応力－ひずみ関係式を示したものである。なお，塑性解析での塑性ポテンシャル，降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また，FINASプログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を $\frac{2}{3}$ 倍したものとしている。

クリープひずみは370℃～550℃の温度において，使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い，表1.3－16の $2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）板のクリープひずみ式より計算する。なお，クリープひずみ式の応力適用範囲は 35.0 kg/mm^2 以下である。

表1.3－13　$2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）板のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数

温　　度 (℃)	ヤング係数 (kg/mm^2)	ポアソン比	線膨張係数 (1/℃)
20	2.10×10^4	0.26	11.63×10^{-6}
50	2.09×10^4	0.28	12.05×10^{-6}
100	2.07×10^4	0.28	12.68×10^{-6}
150	2.04×10^4	0.29	13.24×10^{-6}
200	2.01×10^4	0.30	13.73×10^{-6}
250	1.98×10^4	0.30	14.14×10^{-6}
300	1.94×10^4	0.30	14.49×10^{-6}
350	1.89×10^4	0.30	14.75×10^{-6}
400	1.84×10^4	0.30	15.00×10^{-6}
450	1.77×10^4	0.30	15.20×10^{-6}
500	1.69×10^4	0.30	15.36×10^{-6}
550	1.58×10^4	0.29	15.49×10^{-6}
600	1.39×10^4	0.28	—

表 1.3－14　$2\frac{1}{4}$Cr-1Mo鋼(NT材)板の降伏応力，加工硬化係数

材料特性	最大想定ひずみレベル (%)	温度 (℃)				
		350	400	450	500	550
降伏応力 (kg/mm²)	.20	28.22	26.64	24.66	22.07	18.81
	.30	30.51	29.47	28.18	26.49	24.32
	.40	31.62	30.68	29.50	27.89	25.75
	.50	32.38	31.48	30.33	28.73	26.55
	.60	32.97	32.09	30.94	29.33	27.12
	.70	33.46	32.58	31.43	29.80	27.56
	.80	33.88	33.00	31.85	30.20	27.92
	.90	34.23	33.37	32.21	30.54	28.23
	1.00	34.57	33.69	32.52	30.84	28.50
	1.10	34.87	33.99	32.81	31.11	28.74
	1.20	35.14	34.26	33.07	31.35	28.95
	1.30	35.40	34.50	33.30	31.57	29.15
	1.40	35.63	34.73	33.52	31.77	29.33
	1.50	35.85	34.95	33.73	31.96	29.58
定常降伏応力 (kg/mm²)	.20			15.82	14.64	
	.30			18.19	16.68	
	.40			20.16	18.38	
	.50			21.89	19.85	
	.60			23.37	21.11	
	.70			24.78	22.31	
	.80			26.02	23.35	
	.90			27.07	24.24	
	1.00			28.01	25.02	
	1.10			28.76	25.63	
	1.20			29.52	26.26	
	1.30			30.06	26.69	
	1.40			30.56	27.09	
	1.50			31.03	27.47	
加工硬化係数 (kg/mm²)	.20	17787.9	24447.9	32767.5	42419.1	49881.4
	.30	4683.4	5040.4	5327.6	5423.2	5172.1
	.40	2761.9	2814.9	2814.5	2712.8	2473.0
	.50	1998.4	1986.4	1936.3	1821.7	1628.4
	.60	1585.0	1551.6	1489.5	1381.3	1220.2
	.70	1323.7	1282.3	1217.9	1118.3	979.8
	.80	1142.6	1098.2	1034.8	943.1	821.1
	.90	1009.1	963.9	902.5	817.7	708.3
	1.00	906.5	861.3	802.3	723.3	624.0
	1.10	824.8	780.2	723.5	649.6	558.4
	1.20	758.0	714.4	659.9	590.4	505.9
	1.30	702.4	659.8	607.5	541.7	462.9
	1.40	655.3	613.7	563.3	501.0	427.0
	1.50	614.8	574.2	525.7	466.3	396.5

表1.3-15　$2\frac{1}{4}$Cr-1Mo 鋼（NT材）板の単調応力-ひずみ関係式

(1)　$\sigma \leqq \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)　$\sigma > \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma - \sigma_P}{K}\right)^{\frac{1}{m}}$$

<使用単位>

ε_e（mm/mm），　ε_p（mm/mm），　σ（kg/mm^2）

<適用限界>

最大ひずみ　$(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{max} \leqq 0.03$（mm/mm）

パラメータ ＼ 温度（℃）	$300 \leqq T \leqq 550$
E（kg/mm^2）	$2.43\times10^{4} - 0.15\times10^{2}T$
σ_P（kg/mm^2）	$\sigma_Y - K(0.002)^m$
σ_Y（kg/mm^2）	$(42.9566 - 4.59888\times10^{-2}T + 1.47316\times10^{-4}T^2 - 1.93388\times10^{-7}T^3)/\alpha_Y$
K（kg/mm^2）	$83.0 - 8.75\times10^{-2}T$
m	$0.417 - 5.125\times10^{-4}T$
α_Y	MATERIAL データ B_{11} カードで指定した値。B_{11} カードの α_Y が無記入の場合は1.0

表 1.3−16　$2\frac{1}{4}$ Cr−1Mo鋼(NT材)板のクリープひずみ式

$$\varepsilon^c = c_1\{1-\exp(-r_1 t)\} + c_2\{1-\exp(-r_2 t)\} + \dot{\varepsilon}_m t$$

ここで

$$r_1 = 97.514\, t_R^{-0.81537},\quad r_2 = 27.7\, t_R^{-0.9125}$$

$$c_1 = 2.1550\,\dot{\varepsilon}_m^{0.89966}/r_1,\quad c_2 = 1.1606\,\dot{\varepsilon}_m^{0.96696}/r_2$$

$$\dot{\varepsilon}_m = F t_R^{-0.974}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1\log_{10}\sigma + B_2(\log_{10}\sigma)^2 \\ \qquad (2.7 \leqq \sigma \leqq 35.0 \text{のとき}) \\ \{B_0 - B_2(\log_{10}2.7)^2\} + (B_1 + 2B_2\log_{10}2.7)\log_{10}\sigma \\ \qquad (0.01 \leqq \sigma < 2.7 \text{のとき}) \end{cases}$$

ただし，$0 \leqq \sigma < 0.01$に対しては，$r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\varepsilon}_m = 0$

〈使用単位〉　ε^c (mm/mm)，σ (kg/mm²)，t (hr)，T (℃)

パラメータ ＼ 温度	$370 \leqq T \leqq 550$
F	$1187.1\exp\{-\frac{68457}{8.31(T+273.15)}\}$
B_0	$-18.56995+21575.95/(T+273.15)$
B_1	$-589.395/(T+273.15)$
B_2	$-2182.62/(T+273.15)$
α_R	MATERIAL データ B_{12}カードで指定した値。B_{12}カードのα_Rが無記入の場合は1.0

(5) $2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管

SUS 304 と同様の文献より引用され，弾塑性材料特性およびクリープ則がライブラリに登録されている。表 1.3－17 は $2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管の 20℃～600℃の温度におけるヤング係数，ポアソン比，線膨張係数を示し，表 1.3－18 は二直線近似での最大想定ひずみレベルに応じて 350℃～550℃の温度における降伏応力，加工硬化係数を示したものである。各温度間は線形に補間し，範囲外の温度について外挿を行なう。また，表 1.3－19 は単調応力－ひずみ関係式を示したものである。なお，塑性解析での塑性ポテンシャル，降伏条件および塑性に関する硬化則としては使用者により材料データで定義されたものが適用される。また FINAS プログラムでは移動硬化係数は加工硬化係数を $\frac{2}{3}$ 倍したものとしている。

クリープひずみは 370℃～550℃の温度において，使用者により材料データで定義されたクリープポテンシャルおよび硬化則を用い，表 1.3－20 の $2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管のクリープひずみ式より計算する。なお，クリープひずみ式の応力適用範囲は 35.0 kg/mm^2 以下である。

表 1.3－17　$2\frac{1}{4}$Cr－1Mo 鋼（NT材）伝熱管のヤング係数，ポアソン比，線膨張係数

温　　度 (℃)	ヤング係数 (kg/mm^2)	ポアソン比	線膨張係数 (1/℃)
20	2.10×10^4	0.26	11.63×10^{-6}
50	2.09×10^4	0.28	12.05×10^{-6}
100	2.07×10^4	0.28	12.68×10^{-6}
150	2.04×10^4	0.29	13.24×10^{-6}
200	2.01×10^4	0.30	13.73×10^{-6}
250	1.98×10^4	0.30	14.14×10^{-6}
300	1.94×10^4	0.30	14.49×10^{-6}
350	1.89×10^4	0.30	14.75×10^{-6}
400	1.84×10^4	0.30	15.00×10^{-6}
450	1.77×10^4	0.30	15.20×10^{-6}
500	1.69×10^4	0.30	15.36×10^{-6}
550	1.58×10^4	0.29	15.49×10^{-6}
600	1.39×10^4	0.28	—

表 1.3－18　2¼Cr-1Mo鋼(NT材)伝熱管の降伏応力，加工硬化係数

材料特性	最大想定ひずみレベル (%)	温度 (℃)				
		350	400	450	500	550
降伏応力 (kg/mm²)	.20	28.22	26.64	24.66	22.07	18.81
	.30	30.51	29.47	28.18	26.49	24.32
	.40	31.62	30.68	29.50	27.89	25.75
	.50	32.38	31.48	30.33	28.73	26.55
	.60	32.97	32.09	30.94	29.33	27.12
	.70	33.46	32.58	31.43	29.80	27.56
	.80	33.88	33.00	31.85	30.20	27.92
	.90	34.23	33.37	32.21	30.54	28.23
	1.00	34.57	33.69	32.52	30.84	28.50
	1.10	34.87	33.99	32.81	31.11	28.74
	1.20	35.14	34.26	33.07	31.35	28.95
	1.30	35.40	34.50	33.30	31.57	29.15
	1.40	35.63	34.73	33.52	31.77	29.33
	1.50	35.85	34.95	33.73	31.96	29.58
定常降伏応力 (kg/mm²)	.20			15.82	14.64	
	.30			18.19	16.68	
	.40			20.16	18.38	
	.50			21.89	19.85	
	.60			23.37	21.11	
	.70			24.78	22.31	
	.80			26.02	23.35	
	.90			27.07	24.24	
	1.00			28.01	25.02	
	1.10			28.76	25.63	
	1.20			29.52	26.26	
	1.30			30.06	26.69	
	1.40			30.56	27.09	
	1.50			31.03	27.47	
加工硬化係数 (kg/mm²)	.20	17787.9	24447.9	32767.5	42419.1	49881.4
	.30	4683.4	5040.4	5327.6	5423.2	5172.1
	.40	2761.9	2814.9	2814.5	2712.8	2473.0
	.50	1998.4	1986.4	1936.3	1821.7	1628.4
	.60	1585.0	1551.6	1489.5	1381.3	1220.2
	.70	1323.7	1282.3	1217.9	1118.3	979.8
	.80	1142.6	1098.2	1034.8	943.1	821.1
	.90	1009.1	963.9	902.5	817.7	708.3
	1.00	906.5	861.3	802.3	723.3	624.0
	1.10	824.8	780.2	723.5	649.6	558.4
	1.20	758.0	714.4	659.9	590.4	505.9
	1.30	702.4	659.8	607.5	541.7	462.9
	1.40	655.3	613.7	563.3	501.0	427.0
	1.50	614.8	574.2	525.7	466.3	396.5

表 1.3−19　$2\frac{1}{4}$Cr−1Mo 鋼（NT 材）伝熱管の単調応力−ひずみ関係式

(1)　$\sigma \leqq \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = 0$$

(2)　$\sigma > \sigma_P$ のとき

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma - \sigma_P}{K}\right)^{\frac{1}{m}}$$

＜使用単位＞

ε_e（mm/mm），　ε_p（mm/mm），　σ（kg/mm^2）

＜適用限界＞

最大ひずみ　$(\varepsilon_e + \varepsilon_p)_{\max} \leqq 0.03$（mm/mm）

パラメータ ＼ 温度（℃）	$300 \leqq T \leqq 550$
E（kg/mm^2）	$2.43\times10^{4} - 0.15\times10^{2}T$
σ_P（kg/mm^2）	$\sigma_Y - K(0.002)^m$
σ_Y（kg/mm^2）	$(42.9566 - 4.59888\times10^{-2}T + 1.47316\times10^{-4}T^2 - 1.93388\times10^{-7}T^3)/\alpha_Y$
K（kg/mm^2）	$83.0 - 8.75\times10^{-2}T$
m	$0.417 - 5.125\times10^{-4}$T
α_Y	MATERIAL データ B_{11} カードで指定した値。B_{11} カードの α_Y が無記入の場合は 1.0

表 1.3−20　2¼Cr-1Mo(NT材)伝熱管のクリープひずみ式

$$\varepsilon^c = c_1\{1-\exp(-r_1 t)\} + c_2\{1-\exp(-r_2 t)\} + \dot{\varepsilon}_m t$$

ここで

$$r_1 = 97.514\, t_R^{-0.81537},\quad r_2 = 27.7\, t_R^{-0.9125}$$

$$c_1 = 2.1550\, \dot{\varepsilon}_m^{0.89966}/r_1,\quad c_2 = 1.1606\, \dot{\varepsilon}_m^{0.96696}/r_2$$

$$\dot{\varepsilon}_m = F t_R^{-0.974}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10}\sigma + B_2(\log_{10}\sigma)^2 \\ \qquad (2.7 \leqq \sigma \leqq 35.0 \text{のとき}) \\ \{B_0 - B_2(\log_{10}2.7)^2\} + (B_1 + 2B_2\log_{10}2.7)\log_{10}\sigma \\ \qquad (0.01 \leqq \sigma < 2.7 \text{のとき}) \end{cases}$$

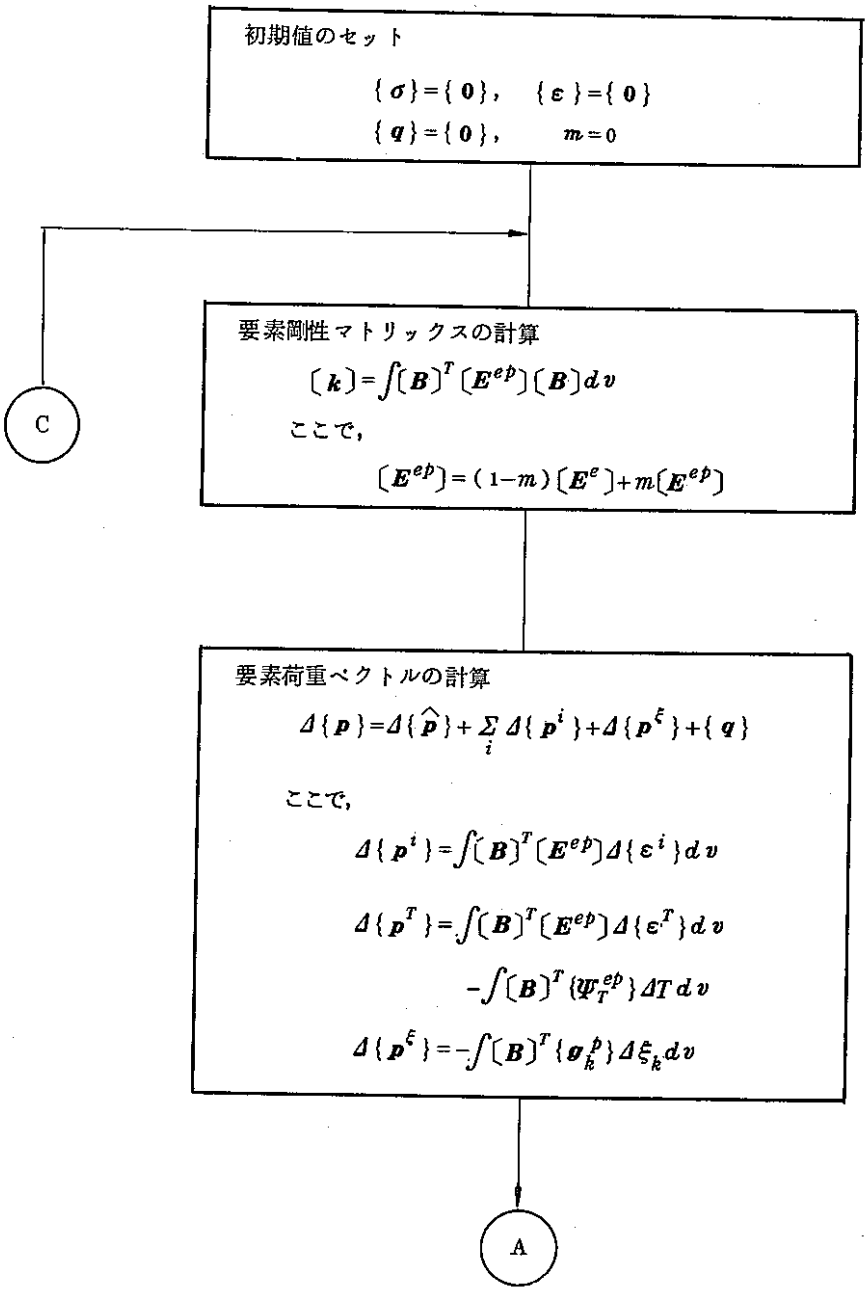
ただし，$0 \leqq \sigma < 0.01$に対しては，$r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\varepsilon}_m = 0$

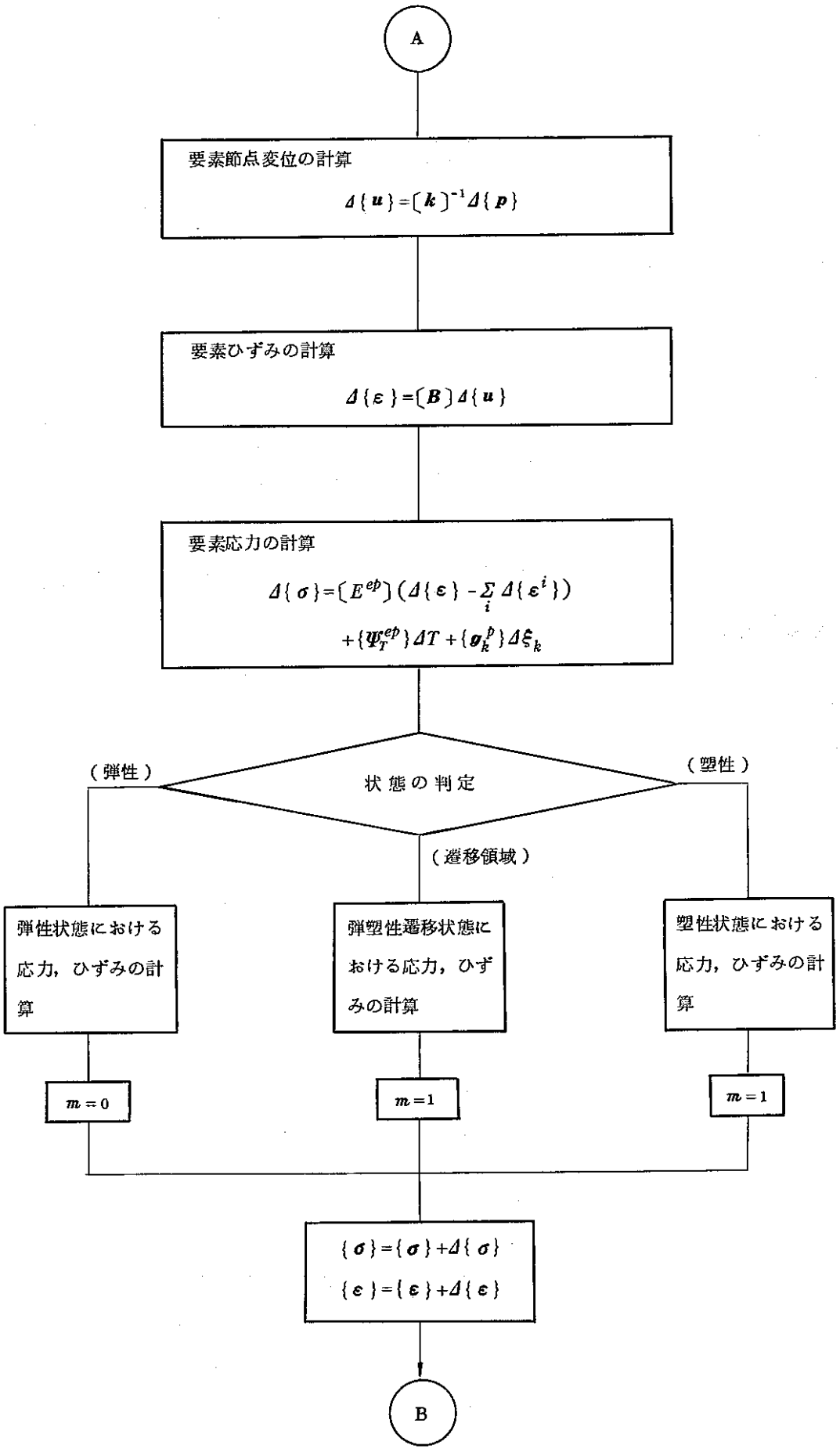
〈使用単位〉　ε^c (mm/mm)，σ (kg/mm²)，t (hr)，T (℃)

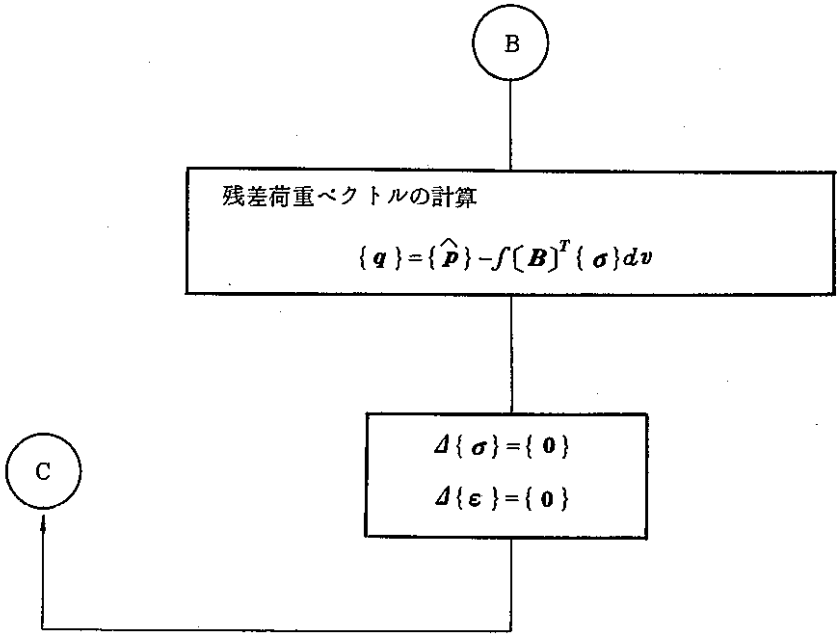
パラメータ ＼ 温度	$370 \leqq T \leqq 550$
F	$1187.1\exp\{-\frac{68457}{8.31(T+273.15)}\}$
B_0	$-18.56995+21575.95/(T+273.15)$
B_1	$-589.395/(T+273.15)$
B_2	$-2182.62/(T+273.15)$
α_R	MATERIAL データ B_{12}カードで指定した値。B_{12}カードのα_Rが無記入の場合は1.0

1.3.6　非弾性解析のアルゴリズム

(1) 解析の全体の流れ




A
要素節点変位の計算
$\Delta\{u\}=[k]^{-1}\Delta\{p\}$
要素ひずみの計算
$\Delta\{\varepsilon\}=[B]\Delta\{u\}$
要素応力の計算
$\Delta\{\sigma\}=[E^{ep}]\left(\Delta\{\varepsilon\}-\sum_i \Delta\{\varepsilon^i\}\right)$
$+\{\Psi_T^{ep}\}\Delta T+\{g_k^p\}\Delta\xi_k$
状態の判定
（弾性）
（遷移領域）
（塑性）
弾性状態における応力，ひずみの計算
弾塑性遷移状態における応力，ひずみの計算
塑性状態における応力，ひずみの計算
$m=0$
$m=1$
$m=1$
$\{\sigma\}=\{\sigma\}+\Delta\{\sigma\}$
$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon\}+\Delta\{\varepsilon\}$
B



(2) 遷移領域の取扱い

弾塑性解析において FINAS が行なっている遷移領域の取扱い，すなわち，降伏時，除荷時の取扱いについて説明する。

a) 降伏時の取扱い

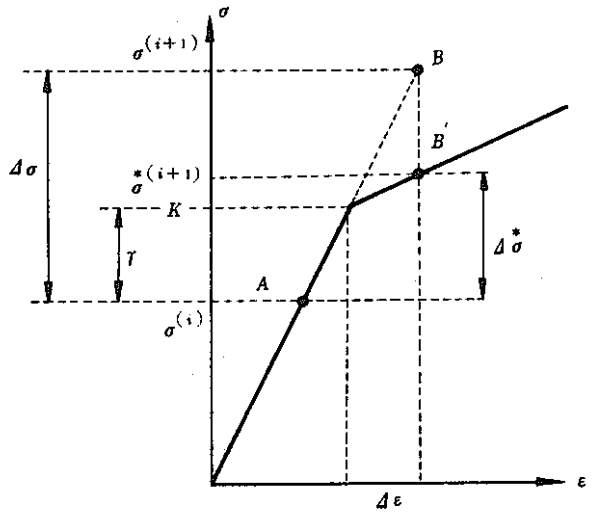


図 1.3－7 降 伏 時

ステップ i (A) の応力 $\sigma^{(i)}$ が応力増分 $\Delta\sigma$ によって，$\sigma^{(i+1)}(=\sigma^{(i)}+\Delta\sigma)$ になり，応力が降伏応力 κ を超えた場合には，弾性部分の比率 γ を計算する。そして B から B' に強制的に移し，$B-B'$ に相当する応力を残差荷重としてとりあつかう。すなわち，γ により全ひずみの増分 $\Delta\varepsilon$ を弾性ひずみ増分 $\Delta\tilde{\varepsilon}^{e}$ と弾塑性ひずみ増分 $\Delta\tilde{\varepsilon}^{ep}$ に分け，次の式で計算する。

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{e}=\gamma\Delta\varepsilon \tag{1.3-191}$$

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^{ep}=(1-\gamma)\Delta\varepsilon \tag{1.3-192}$$

式(1.3-191)，(1.3-192)から応力増分を修正する。

$$\Delta\overset{*}{\sigma}=[\boldsymbol{E}^{e}(T)]\Delta\tilde{\varepsilon}^{e}+[\boldsymbol{E}^{ep}(T,\sigma,\varepsilon^{p},\cdots\cdots)]\Delta\tilde{\varepsilon}^{ep} \tag{1.3-193}$$

次に，式(1.3-193)の応力増分から弾性ひずみ増分 $\Delta\overset{*}{\varepsilon}^{e}$，塑性ひずみ増分 $\Delta\overset{*}{\varepsilon}^{p}$ を再計算する。

$$\Delta\overset{*}{\varepsilon}^{e}=[\boldsymbol{E}^{e}(T)]^{-1}\Delta\overset{*}{\sigma} \tag{1.3-194}$$

$$\Delta\overset{*}{\varepsilon}^{p}=\Delta\varepsilon-\Delta\overset{*}{\varepsilon}^{e} \tag{1.3-195}$$

したがって，ステップ $i+1$ の応力 $\sigma^{(i+1)}$ は $\overset{*}{\sigma}^{(i+1)}$ に強制的に修正される。

$$\Delta\sigma^{(i+1)}=\sigma^{(i)}+\Delta\overset{*}{\sigma} \tag{1.3-196}$$

b) 除荷時の取扱い

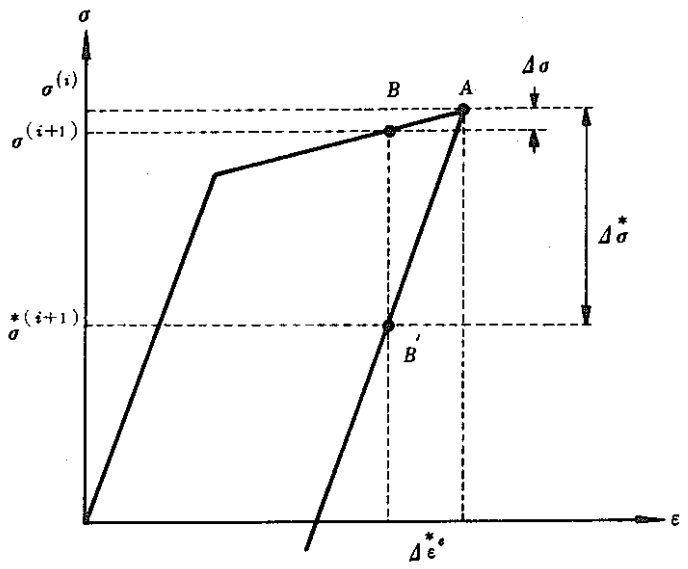


図1.3-8 除荷時

ステップ $i\,(A)$ において除荷が起きて応力が $\Delta\sigma$ 下ったときに，応力増分を修正して強制的に B から B' に移し，$B-B'$ を残差荷重修正で取り扱う。すなわち，ステップ $i\,(A)$ からステップ $i+1\,(B)$ に移った時に計算された弾性ひずみ増分 $\Delta\varepsilon^e$，塑性ひずみ増分 $\Delta\varepsilon^p$ から次式のような弾性ひずみ増分を計算する。

$$\Delta\tilde{\varepsilon}^e=\Delta\varepsilon^e+\Delta\varepsilon^p \qquad (1.3\text{-}197)$$

次に，式(1.3-197)を用いて応力増分を修正する。

$$\Delta\overset{*}{\sigma}=[\,E^e(T)\,]\Delta\tilde{\varepsilon}^e \qquad (1.3\text{-}198)$$

そして弾性ひずみ増分，塑性ひずみ増分を再計算する。

$$\Delta\overset{*}{\varepsilon}^e=\Delta\tilde{\varepsilon}^e \qquad (1.3\text{-}199)$$

$$\Delta\overset{*}{\varepsilon}^p=0 \qquad (1.3\text{-}200)$$

したがって，ステップ $i+1$ に応力 $\sigma^{(i+1)}$ は $\overset{*}{\sigma}^{(i+1)}$ に強制的に修正される。

$$\overset{*}{\sigma}^{(i+1)}=\sigma^{(i)}+\Delta\overset{*}{\sigma} \qquad (1.3\text{-}201)$$

(3) 比率 γ の計算

ステップ i の応力状態を $\sigma_{ij}^{(i)}$ として応力増分 $\Delta\sigma_{ij}^{(i)}$ により降伏応力 κ を超えるときに，$\sigma_{ij}^{(i)}+\gamma\Delta\sigma_{ij}$ ステージでの相当応力が κ であるとすると，次式が成り立つ。

$$\frac{2}{3}\kappa^2=(S_{ij}^{(i)}+\gamma\Delta S_{ij})\,(S_{ij}^{(i)}+\gamma\Delta S_{ij}) \qquad (1.3\text{-}202)$$

ここで，$S_{ij}^{(i)}$ はステップ i での偏差応力で ΔS_{ij} はその増分である。

$$S_{ij}^{(i)}=\sigma_{ij}^{(i)}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{mm}^{(i)} \qquad (1.3\text{-}203)$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカのデルタである。

式(1.3-203)を式(1.3-202)に代入して整理すると，次式が成り立つ。

$$\gamma^2\Delta S_{ij}\Delta S_{ij}+2\gamma S_{ij}^{(i)}\Delta S_{ij}+\Delta S_{ij}^{(i)}S_{ij}^{(i)}-\frac{2}{3}\kappa^2=0 \qquad (1.3\text{-}204)$$

この式(1.3-204)から γ を計算する。なお，ここでの式の表示は総和規約を用いている。

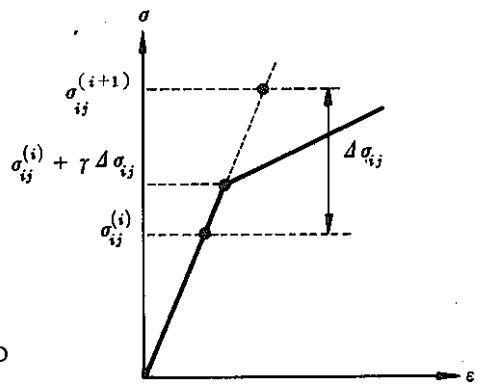
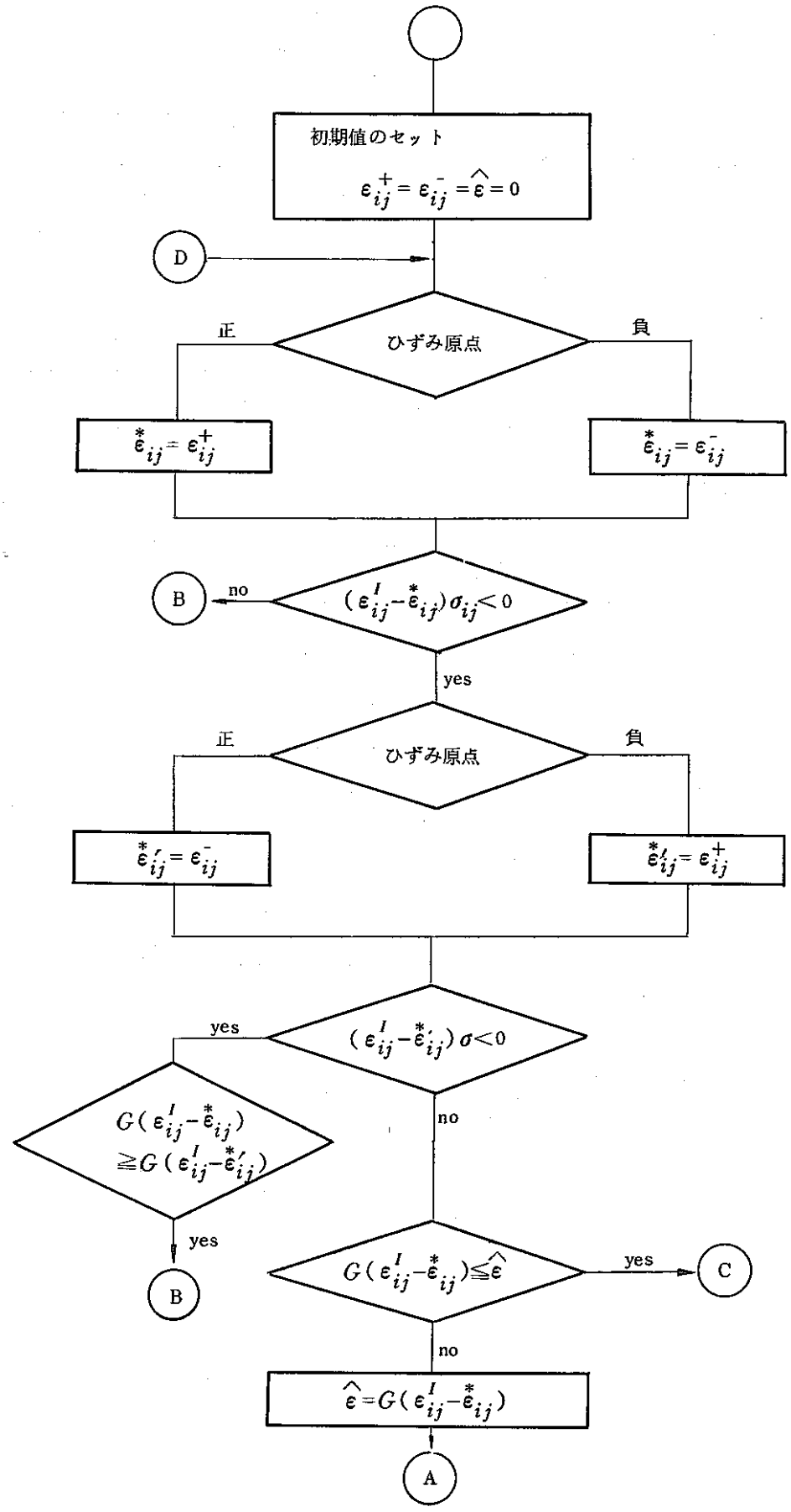
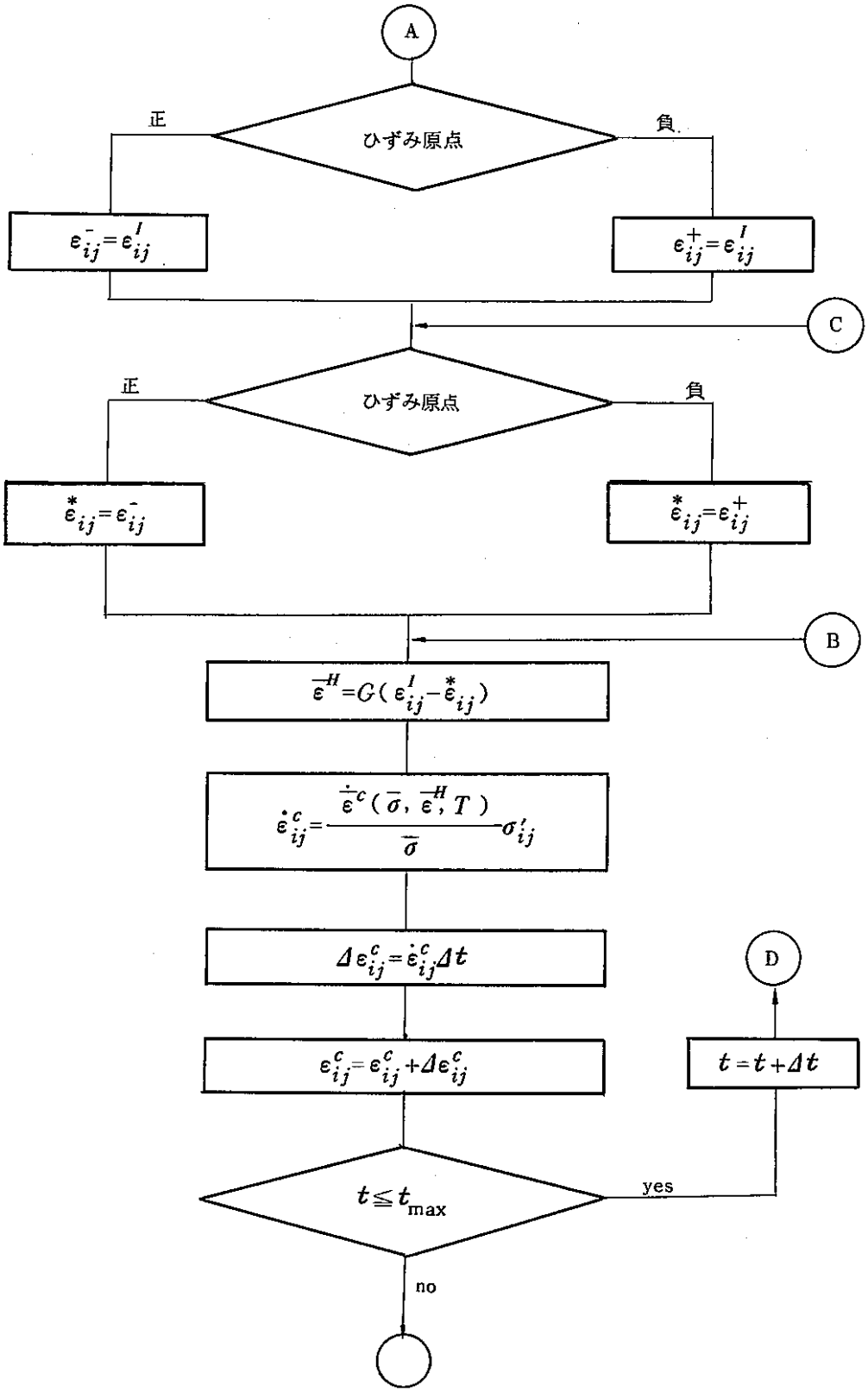


図 1.3－9　比率 γ の計算

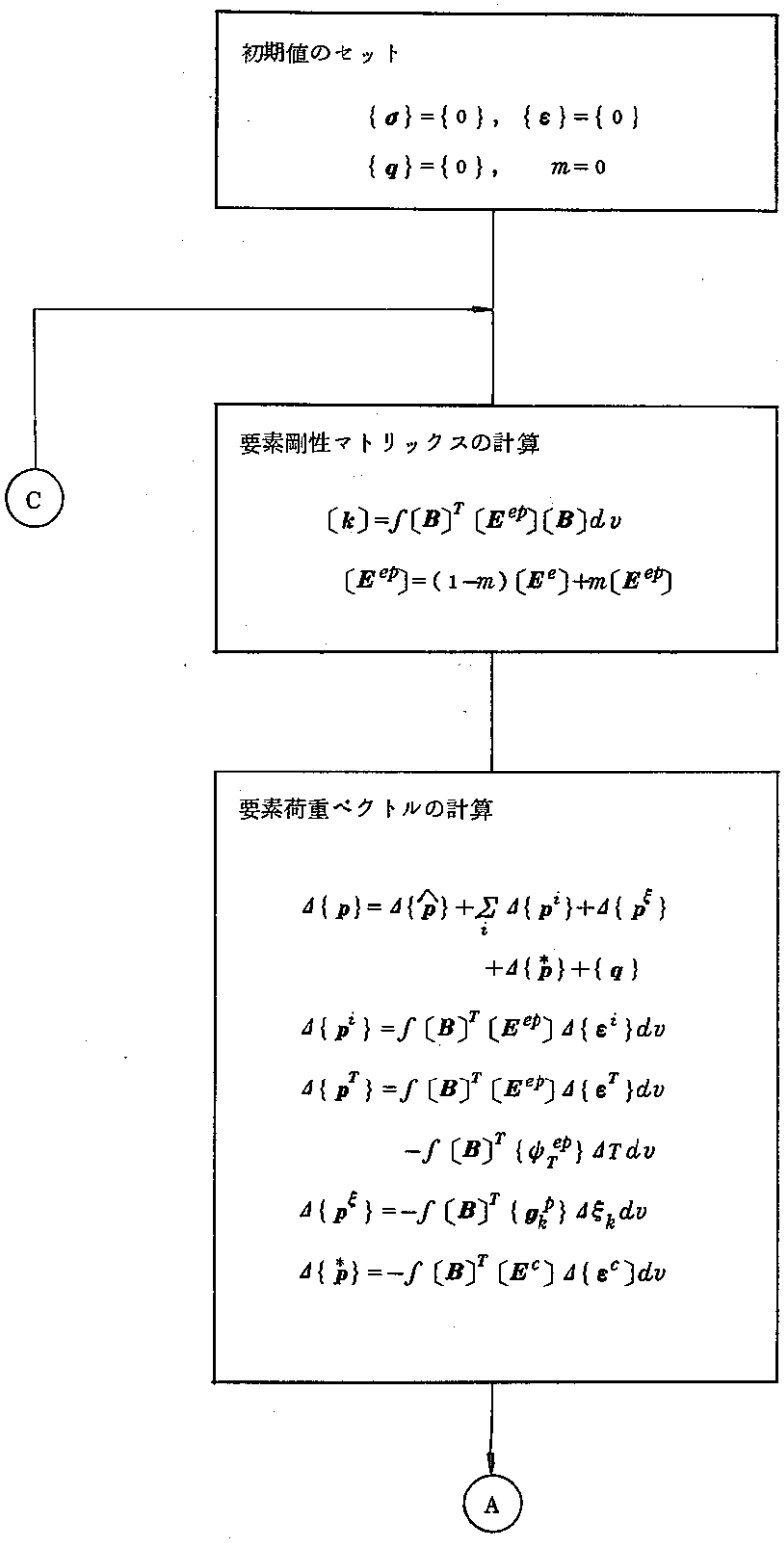
(3) 応力反転に対するORNLの補助法則の流れ

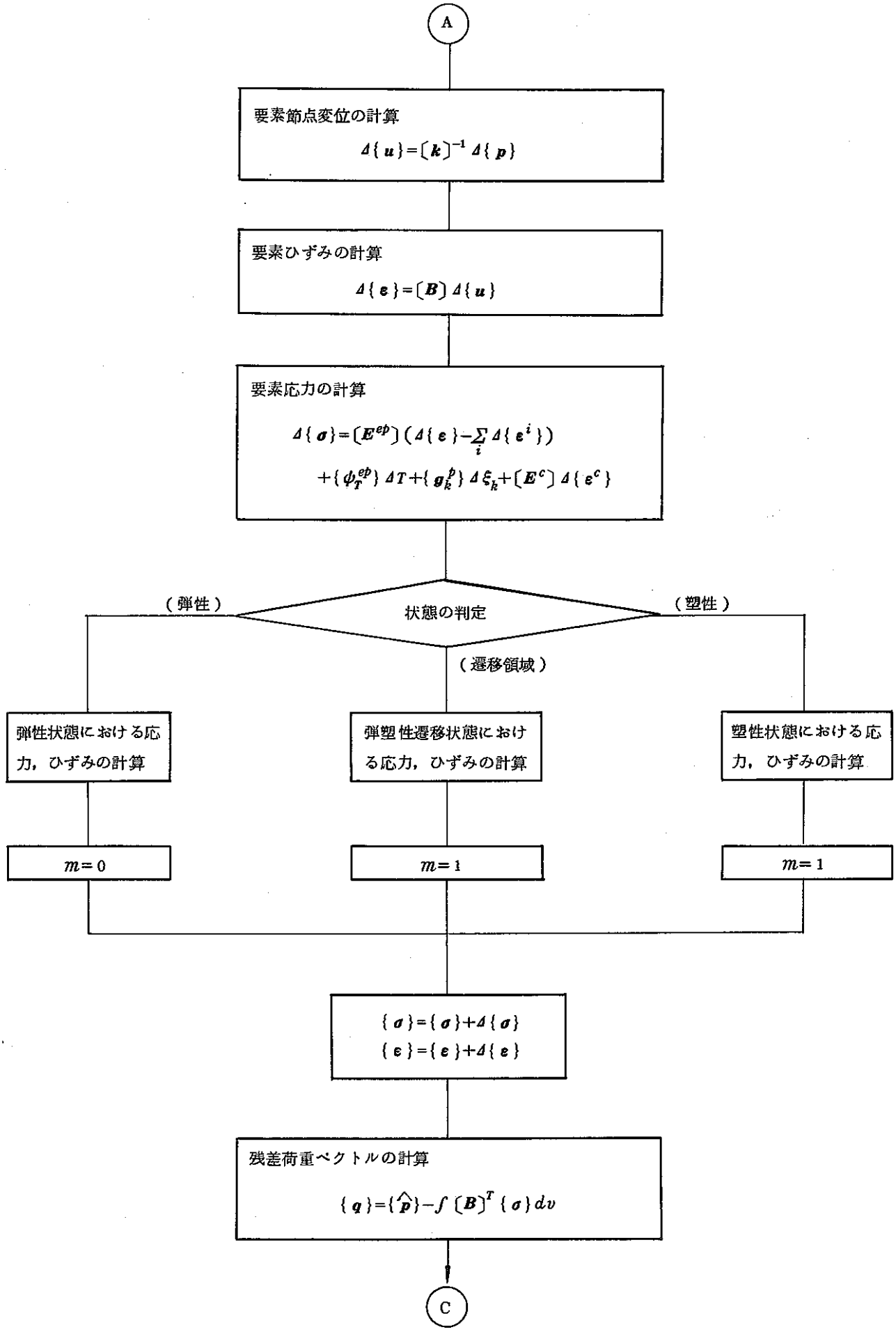



A
ひずみ原点
正
負
$\varepsilon_{ij}^{-}=\varepsilon_{ij}^{I}$
$\varepsilon_{ij}^{+}=\varepsilon_{ij}^{I}$
C
ひずみ原点
正
負
$\overset{*}{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}^{-}$
$\overset{*}{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon_{ij}^{+}$
B
$\bar{\varepsilon}^{H}=G(\varepsilon_{ij}^{I}-\overset{*}{\varepsilon}_{ij})$
$\dot{\varepsilon}_{ij}^{c}=\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{c}(\bar{\sigma},\bar{\varepsilon}^{H},T)}{\bar{\sigma}}\sigma'_{ij}$
$\Delta\varepsilon_{ij}^{c}=\dot{\varepsilon}_{ij}^{c}\Delta t$
D
$\varepsilon_{ij}^{c}=\varepsilon_{ij}^{c}+\Delta\varepsilon_{ij}^{c}$
$t=t+\Delta t$
$t\leqq t_{\max}$
yes
no

(4)　塑性とクリープの連成のアルゴリズム

a)　全体的な流れ




A
要素節点変位の計算
$\Delta\{u\}=[k]^{-1}\Delta\{p\}$
要素ひずみの計算
$\Delta\{\varepsilon\}=[B]\Delta\{u\}$
要素応力の計算
$\Delta\{\sigma\}=[E^{ep}](\Delta\{\varepsilon\}-\sum_i \Delta\{\varepsilon^i\})$
$+\{\phi_T^{ep}\}\Delta T+\{g_k^b\}\Delta\xi_k+[E^c]\Delta\{\varepsilon^c\}$
状態の判定
（弾性）
（遷移領域）
（塑性）
弾性状態における応力，ひずみの計算
弾塑性遷移状態における応力，ひずみの計算
塑性状態における応力，ひずみの計算
$m=0$
$m=1$
$m=1$
$\{\sigma\}=\{\sigma\}+\Delta\{\sigma\}$
$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon\}+\Delta\{\varepsilon\}$
残差荷重ベクトルの計算
$\{q\}=\{\hat{p}\}-\int[B]^T\{\sigma\}dv$
C

b) 遷移領域の取り扱い

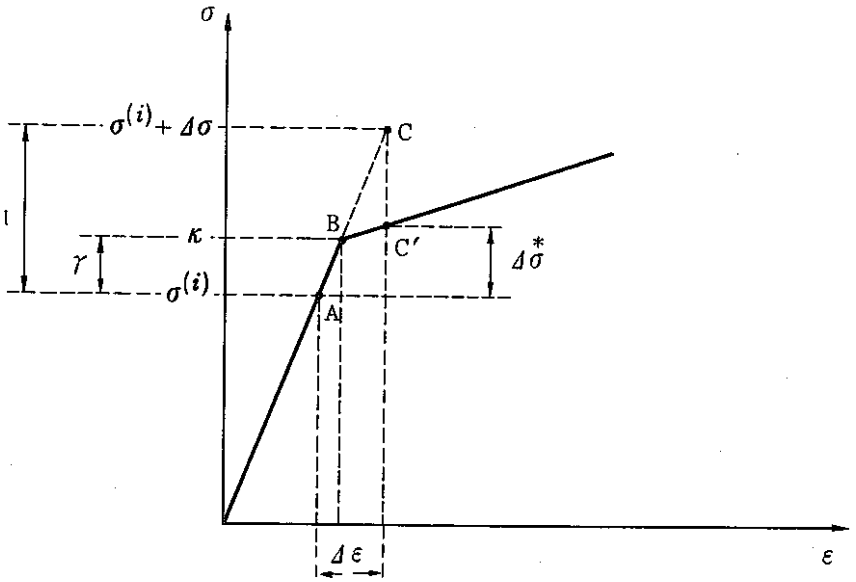


図1.3－10　遷移領域の処理

塑性とクリープの連成モデルにおいては，弾性状態である場合でもクリープひずみによる降伏曲面の移動を考慮しなければならないし，ステップの応力 $\{\sigma\}^{(i)}$ が応力増分 $\Delta\{\sigma\}$ によって降伏曲面の大きさ κ を超えるときには遷移領域に対して次のような取り扱いをする。

はじめに次式を満足するような比率 γ を用意する。

$$\overline{\sigma}(\{\sigma\}^{(i)}+\gamma\Delta\{\sigma\},\{\alpha\}+\gamma\Delta\{\alpha\})=\kappa \qquad (1.3\text{-}205)$$

ここで，$\overline{\sigma}$ は降伏関数である。また，オリジンシフト応力増分 $\Delta\{\alpha\}$ は次式で与えられる。

$$\Delta\{\alpha\}=H\Delta\{\varepsilon^c\} \qquad (1.3\text{-}206)$$

ただし，H はクリープ変形に応じて降伏曲面を移動させることにより，塑性状態におけるクリープの連成作用を近似的に考慮する材料特性のパラメータである。これは相当オリジンシフト応力 $\overline{\alpha}$ の値により次のように与えられる。

$$\overline{\alpha}=\sqrt{\frac{3}{2}\{\alpha\}^T\{\alpha\}}\leqq A\kappa \quad \text{のとき,} \quad H=C$$

$$\overline{\alpha}>A\kappa \quad \text{のとき,} \quad H=0 \qquad (1.3\text{-}207)$$

ここで，C は移動硬化係数，A は温度，履歴，材料に依存するものであり，入力データとして定義されるものである。

式(1.3-205)を解いて γ を求め，図1.3-10のAB部分における弾性ひずみ増分 $\Delta\{\overset{*}{\varepsilon}^e\}$ を次式で仮定する。

$$\Delta\{\overset{*}{\varepsilon}^e\}=[E^e]^{-1}\gamma\Delta\{\sigma\} \qquad (1.3\text{-}208)$$

ここで，$[E^e]$ は材料の弾性係数マトリックスである。

次に図1.3-10のBC部分における弾塑性ひずみ増分 $\Delta\{\varepsilon^{ep}\}$ を次式で仮定する。ただし， $\Delta\{\varepsilon\}$ は全ひずみ増分である。

$$\Delta\{\varepsilon^{ep}\}=\Delta\{\varepsilon\}-\Delta\{\overset{*}{\varepsilon}^{e}\}-\Delta\{\varepsilon^{c}\} \tag{1.3-209}$$

したがって，式(1.3-205)，式(1.3-206)より応力増分 $\Delta\{\overset{*}{\sigma}\}$ が次のように計算される。図1.3-10において応力がCよりC′へ移ることになる。

$$\Delta\{\overset{*}{\sigma}\}=[E^{e}]\Delta\{\overset{*}{\varepsilon}^{e}\}+[E^{ep}]\Delta\{\varepsilon^{ep}\}+[E^{c}]\gamma\Delta\{\varepsilon^{c}\} \tag{1.3-210}$$

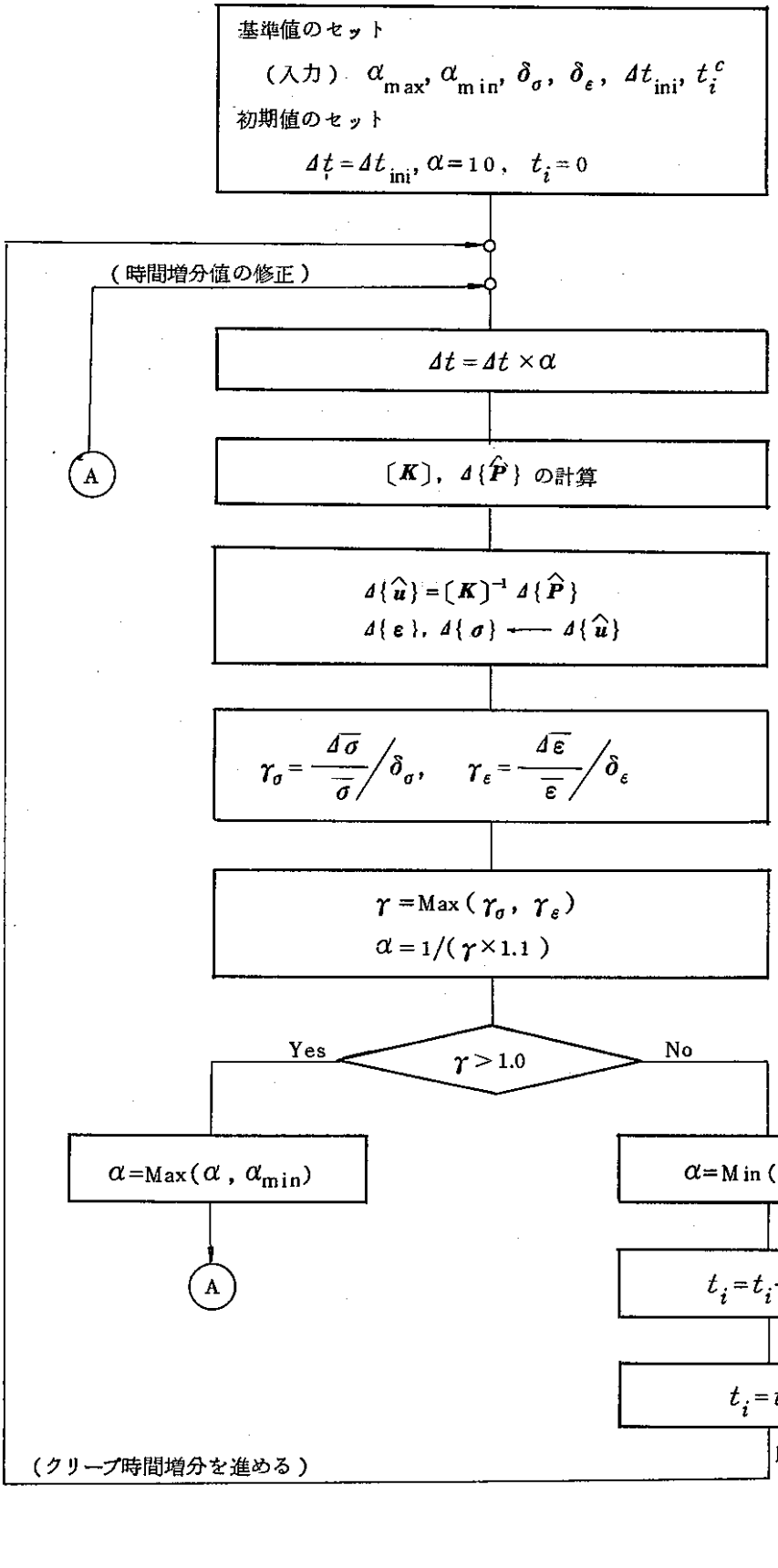
ここで，$[E^{ep}]$ は材料の弾塑性係数マトリックスで，$[E^{c}]$ はクリープと塑性の連成を考慮した場合の弾塑性クリープ係数マトリックスである。そして式(1.3-210)の $\Delta\{\overset{*}{\sigma}\}$ により，新しい弾性ひずみ増分 $\Delta\{\varepsilon^{e}\}$ ，塑性ひずみ増分 $\Delta\{\varepsilon^{p}\}$ が次のように計算できる。

$$\Delta\{\varepsilon^{p}\}=[E^{e}]^{-1}\Delta\{\overset{*}{\sigma}\} \tag{1.3-211}$$

$$\Delta\{\varepsilon^{p}\}=\Delta\{\varepsilon\}-\Delta\{\varepsilon^{e}\}-\Delta\{\varepsilon^{c}\} \tag{1.3-212}$$

また，C－C′に相当する応力は不釣合い応力として残差荷重項で処理する。

(5) クリープ時間増分ジェネレート機能のアルゴリズム



注1）時間増分の初期値 Δt_{ini} は入力として与えるもので，省略したときは $t_i^c/100$ がとられる。t_i^c はAuto Creep i ステップで対象とするクリープ時間である。

注2) 相当応力とその増分 $\overline{\sigma}$, $\Delta\overline{\sigma}$ に対応して $\overline{\varepsilon}$, $\Delta\overline{\varepsilon}$ を仮定する。

〔参考文献〕

1) "非弾性構造解析プログラムの調査と試用(II)"日本機械学会, 1975(以下, EPICC 75 と略す)

2) 加納"簡易非弾性解析法" EPICC 75

3) 山田・岩田"弾塑性クリープ解析法の理論的基礎" EPICC 75

4) Balmer, H. A. and Doltsinis, J. st. "ASKA Part III-1 Material Nonlinearities, Lecture, Notes", ISD, 1972

5) Zudans, Z. et al "Elastic-Plastic Creep Analysis of High Temperature Nuclear Reactor Components" Nucl. Eng. Des. Vol. 28, 1974

6) Inoue, T. and Tanaka, K. "An Elastic-Plastic Stress Analysis of Quenching When Considering a Transformation" Int. J. mech. Sci., 1975

7) Ueda, Y. and Yamakawa, T. "Thermal Nonlinear Behavior of Structure" Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design. UAH Press, 1972

8) 武田"弾塑性クリープ解析法と汎用プログラム" EPICC 75

9) 矢川"弾塑性クリープ解析法の動向と問題点" EPICC 75

10) Pugh, C. E. et al "Currently Recommended Constitutive Equations for Inelastic Design Analysis of FFTF Components" ORNL-TM3602, 1972
(朝田・武田・岩田"ORNLの解析手法とその妥当性について" EPICC 75)

11) MARC-CDC "Nonlinear Finite Element Analysis Program" UM, 1972

12) Desalbo, G. J. and Swanson, J. A. "ANSYS User's Manual" 1975

13) Odqvist, F. K. G. and Halt, J. "Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe, Springer", 1962; 村上訳"クリープ強さの理論", 培風館, 昭和42年

14) "高速炉に適用する非弾性解析法についての提案", PNC 高速増殖炉開発本部, 1979.

15) Bates, J. F. and Gilbert, E. R. "Effect of Stress on Swelling in Reactor Fuel Cladding", vol. C, SMiRT, 1977.

16) "非弾性構造解析法の実用化に関する研究(II)", 日本機械学会, 1979.

17) "高速炉設計用応力-ひずみ関係式及びクリープ式", PNC高速増殖炉開発本部, 1980.

18) Murakami, S. and Ohno, N. "A Constitutive Equation of Creep for High Temperature Component Analysis : An Alternative Proposition to ORNL Constitutive Equation of Creep", Proc. of the 6th SMiRT Conferance, Paris, L7/3, 1981.

1.4　大変形解析

1.4.1　固体力学における支配方程式

ここでは有限要素法による大変形解析の理論を考察するに先だって，連続体力学における固体力学に関する基本事項について整理する。

(1)　変形する固体と座標系

変形する固体について次の3つの形状を考える。

(i)　初期形状（ initial configuration ）

(ii)　参照形状（ reference configuration ）

(iii)　未知形状（ unknown configuration ）

初期形状とは変形前における固体の形状を意味するものであり，体積 V，表面積 A とする。未知形状とはある時刻において変形を決定すべき形状であり，ここでは初期形状または参照形状を基準にして運動が記述されるものであり，体積 v，表面積 a を持つものとする。なお参照形状は任意に定めることができるが，[8),9)] ここでは未知形状の直前の既知形状を参照形状とし，体積 $\overset{*}{V}$，表面積 $\overset{*}{A}$ で表わすことにする。

未知形状における物体点 p の位置ベクトル x_i（ $i=1\sim3$ ）は初期形状を参照にすると次のように表わすことができる。

$$x_i = X_i + u_i \tag{1.4-1}$$

また，参照形状を基準にすると次式で表わされる。

$$x_i = \overset{*}{X}_i + \Delta u_i = X_i + \overset{*}{u}_i + \Delta u_i \tag{1.4-2}$$

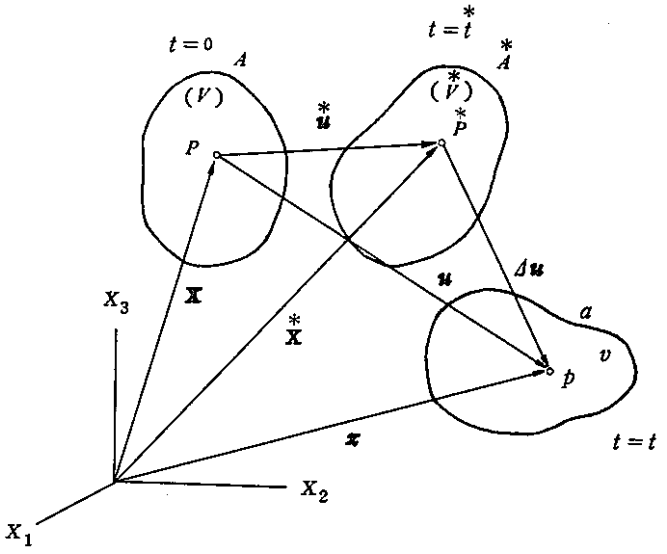


図 1.4-1　固体の変形と座標系

(2) 変形の幾何学

未知形状の微小線素を初期形状および参照形状を用いて表わすと次のようになる。

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \ , \qquad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \overset{*}{X}_j} d\overset{*}{X}_j \tag{1.4-3}$$

ここで，$\partial x_i/\partial X_j$ ，$\partial x_i/\partial \overset{*}{X}_j$ は変形勾配と呼ばれるものであり，ここでは次のように表わす。

$$g_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \ , \qquad \overset{*}{g}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \overset{*}{X}_j} \tag{1.4-4}$$

式（1.4−4）に式（1.4−1），式（1.4−2）を代入すると次式が得られる。

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ , \qquad \overset{*}{g}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial \Delta u_i}{\partial \overset{*}{X}_j} \tag{1.4-5}$$

ここでは $\partial u_i/\partial X_j$ ，$\partial \Delta u_i/\partial \overset{*}{X}_j$ を変位勾配と呼ぶことにし，次のように表わす。

$$d_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \ , \qquad \overset{*}{d}_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial \overset{*}{X}_j} \tag{1.4-6}$$

ここで変形が唯一であるためには次の関係式が成立する必要がある。

$$J = \det\left[g_{ij} \right] \neq 0 \ , \qquad \overset{*}{J} = \det\left[\overset{*}{g}_{ij} \right] \neq 0 \tag{1.4-7}$$

変形の測度として広く用いられている Green のひずみテンソル（E_{ij} および $\overset{*}{E}_{ij}$ と表わす）は次式のように定義される。

$$dx^2 - dX^2 = 2 E_{ij} dX_i dX_j \ , \qquad dx^2 - d\overset{*}{X}^2 = 2 \overset{*}{E}_{ij} d\overset{*}{X}_i d\overset{*}{X}_j \tag{1.4-8}$$

ここで，$dx^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j$ ，$dX^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j$ ，$d\overset{*}{X}^2 = \delta_{ij} d\overset{*}{X}_i d\overset{*}{X}_j$ である。式（1.4−3）〜（1.4−6）より Green のひずみテンソルは次のように表示される。

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_m}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(d_{ij} + d_{ji} + d_{mi} d_{mj} \right) \\ \overset{*}{E}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial \overset{*}{X}_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial \overset{*}{X}_i} + \frac{\partial \Delta u_m}{\partial \overset{*}{X}_i} \cdot \frac{\partial \Delta u_m}{\partial \overset{*}{X}_j} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overset{*}{d}_{ij} + \overset{*}{d}_{ji} + \overset{*}{d}_{mi} \overset{*}{d}_{mj} \right) \end{aligned} \tag{1.4-9}$$

また，変形後の形状を参照した Cauchy の微小ひずみテンソルは次式で定義される。

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (1.4-10)$$

(3) 仮想仕事の原理

変形後のつりあい方程式と等価な意味をもつ仮想仕事の方程式は次のように表わすことができる。[8)]

$$\int_v \delta\tilde{\varepsilon}_{ij}\,\sigma_{ij}\,dv=\int_a \delta u_i\,p_i\,da+\int_v \delta u_i\,f_i\,dv \qquad (1.4-11)$$

ここで σ_{ij} は変形後の形状に対する Cauchy の応力テンソルを表わし，p_i, f_i は変形後の形状に作用する表面力および物体力である。式（1.4−11）は変形後の未知形状を参照しているので，これを初期形状を参照にする Lagrange 形の表示に変換する。式（1.4−11）の左辺は次のように変換される。

$$\int_v \delta\tilde{\varepsilon}_{ij}\,\sigma_{ij}\,dv=\int_V \delta E_{ij}\,T_{ij}\,dV \qquad (1.4-12)$$

ここで T_{ij} は第二種 Piola-Kirchhoff の応力テンソルであり，Cauchy の応力テンソルと次式により関係づけられる。

$$T_{ij}=J\frac{\partial X_i}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial X_j}{\partial x_n}\sigma_{mn} \qquad (1.4-13)$$

作用荷重が変形前の初期形状を参照して与えられるならば，式（1.4−11）は次のように変換される。

$$\int_V \delta E_{ij}\,T_{ij}\,dV=\int_A \delta u_i\,P_i\,dA+\int_V \delta u_i\,F_i\,dV \qquad (1.4-14)$$

ここで，P_i，F_i は初期形状に対して定義された表面力と物体力である。表面力が非保存系外圧の場合には次のように表示される。

$$\int_A \delta u_i\,P_i\,dA=-\int_A \delta u_i\,JP\frac{\partial X_m}{\partial x_i}N_m\,dA \qquad (1.4-15)$$

ここで，P は非保存形の表面圧力であり，N_m は初期形状の外向き法線ベクトルである。

一方，参照形状を用いた場合には式（1.4−11）の左辺は次のように表わせる。

$$\int_v \delta\tilde{\varepsilon}_{ij}\,\sigma_{ij}\,dv=\int_{\overset{*}{V}} \delta\overset{*}{E}_{ij}\,\overset{*}{T}_{ij}\,d\overset{*}{V} \qquad (1.4-16)$$

ここで，$\overset{*}{T}_{ij}$ は参照形状に対して定義された第二種 Piola-Kirchhoff の応力テンソルであり，Cauchy の応力テンソルとは次式で関係づけられる。

$$\overset{*}{T}_{ij}=\overset{*}{J}\frac{\partial\overset{*}{X}_i}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial\overset{*}{X}_j}{\partial x_n}\sigma_{mn} \qquad (1.4-17)$$

外荷重が初期形状を参照して定義されると移動 Lagrange 形式での仮想仕事の原理は次のようになる。

$$\int_{\overset{*}{V}} \delta\overset{*}{E}_{ij}\,\overset{*}{T}_{ij}\,d\overset{*}{V}=\int_A \delta u_i\,P_i\,dA+\int_V \delta u_i\,F_i\,dV \qquad (1.4-18)$$

表面力が非保存系外圧の場合には次のようになる。

$$\int_A \delta u_i P_i \, dA = -\int \delta u_i \overset{*}{J} P \frac{\partial \overset{*}{X}_m}{\partial x_j} \overset{*}{N}_m \, dA \qquad (1.4-19)$$

ここで，$\overset{*}{N}_m$ は参照形状における外圧作用表面の外向き法線ベクトルである。

(4) 運動を記述する諸量のマトリックス表示

FINAS に大変形機能を追加する場合を考慮して，各関係式を一次元または二次元配列を用いて表わす。なお，ここでは一次元配列を“ベクトル”，二次元配列を“マトリックス”と呼ぶことにするが，これはベクトル表示された物理量がベクトル変換に則るということではない。ここでは，原則として応力やひずみの2階のテンソル量は“ベクトル”で表示する。位置ベクトルについてはそれをベクトル表示するものとし，式（1.4−1），（1.4−2）を次のように表わす。

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{x}\} &= \{\boldsymbol{X}\} + \{\boldsymbol{u}\} \\ \{\boldsymbol{x}\} &= \{\overset{*}{\boldsymbol{X}}\} + \Delta\{\boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{X}\} + \{\overset{*}{\boldsymbol{u}}\} + \Delta\{\boldsymbol{u}\} \end{aligned} \qquad (1.4-20)$$

ここで，

$$\{\boldsymbol{x}\} = \llcorner x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \lrcorner^T \qquad (1.4-21)$$

であり右肩の T は転置を表わす。

応力とひずみについてはベクトル表示するものとし，たとえば第二種 Piola-Kirchhoff の応力テンソルは次のように表わす。

$$\{\boldsymbol{T}\} = \llcorner T_{11} \;\; T_{22} \;\; T_{33} \;\; T_{12} \;\; T_{23} \;\; T_{31} \lrcorner^T \qquad (1.4-22)$$

Green のひずみテンソルは次式を満足するようにベクトル表示する。

$$T_{ij} E_{ij} = \{\boldsymbol{T}\}^T \{\boldsymbol{E}\} \qquad (1.4-23)$$

したがって，

$$\{\boldsymbol{E}\} = \llcorner E_{11} \;\; E_{22} \;\; E_{33} \;\; \Gamma_{12} \;\; \Gamma_{23} \;\; \Gamma_{31} \lrcorner^T \qquad (1.4-24)$$

ここで，

$$\Gamma_{ij} = E_{ij} + E_{ji} \quad (i \neq j) \qquad (1.4-25)$$

変位勾配についても同様にベクトル表示する。

$$\{\boldsymbol{d}\} = \llcorner \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \; \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \; \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \; \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \; \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \; \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \; \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \; \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \; \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \lrcorner^T \qquad (1.4-26)$$

ひずみを線形項と非線形項に分解し，次のように表わす。

$$\{\boldsymbol{E}\} = \{\boldsymbol{E}^L\} + \{\boldsymbol{E}^N\} \tag{1.4-27}$$

上式において $\{\boldsymbol{E}^L\}$ は線形項，$\{\boldsymbol{E}^N\}$ は非線形項であり，次の成分である。

$$\{\boldsymbol{E}^L\}^T = \left\lfloor \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}+\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \right\rfloor \tag{1.4-28}$$

$$\{\boldsymbol{E}^N\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2\right] \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2\right] \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2}\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_3}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}+\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\frac{\partial u_2}{\partial X_1}+\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \end{array} \right\} \tag{1.4-29}$$

ひずみの非線形成分は変位勾配を用いて次のように表わすことができる。

$$\{\boldsymbol{E}^N\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{D}]\{\boldsymbol{d}\} \tag{1.4-30}$$

また各成分は，[10]

$$E_i^N = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{d}\}^T[\boldsymbol{H}_i]\{\boldsymbol{d}\} \tag{1.4-31}$$

ここで，

$$[\boldsymbol{D}] = \left[\begin{array}{ccccccccc} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \\ 0 & 2\frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 & 2\frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 & 0 & 2\frac{\partial u_3}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & 0 & 2\frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 & 0 & 2\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \\ 2\frac{\partial u_1}{\partial X_3} & 0 & 0 & 2\frac{\partial u_2}{\partial X_3} & 0 & 0 & 2\frac{\partial u_3}{\partial X_3} & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{1.4-32}$$

$$
[\boldsymbol{H}_1]=\begin{pmatrix}
1&0&0&&&&\\
0&0&0&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\boldsymbol{0}\\
0&0&0&&&&\\
&&&1&0&0&\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&0&0&0&\boldsymbol{0}\\
&&&0&0&0&\\
&&&&&1&0&0\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&0&0&0\\
&&&&&0&0&0
\end{pmatrix},\quad
[\boldsymbol{H}_2]=\begin{pmatrix}
0&0&0&&&&\\
0&1&0&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\boldsymbol{0}\\
0&0&0&&&&\\
&&&0&0&0&\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&0&1&0&\boldsymbol{0}\\
&&&0&0&0&\\
&&&&&0&0&0\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&0&1&0\\
&&&&&0&0&0
\end{pmatrix}
$$

$$
[\boldsymbol{H}_3]=\begin{pmatrix}
0&0&0&&&&\\
0&0&0&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\boldsymbol{0}\\
0&0&1&&&&\\
&&&0&0&0&\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&0&0&0&\boldsymbol{0}\\
&&&0&0&1&\\
&&&&&0&0&0\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&0&0&0\\
&&&&&0&0&1
\end{pmatrix},\quad
[\boldsymbol{H}_4]=\begin{pmatrix}
0&1&0&&&&\\
1&0&0&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\boldsymbol{0}\\
0&0&0&&&&\\
&&&0&1&0&\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&1&0&0&\boldsymbol{0}\\
&&&0&0&0&\\
&&&&&0&1&0\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&1&0&0\\
&&&&&0&0&0
\end{pmatrix}
\qquad (1.4-33)
$$

$$
[\boldsymbol{H}_5]=\begin{pmatrix}
0&0&0&&&&\\
0&0&1&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\boldsymbol{0}\\
0&1&0&&&&\\
&&&0&0&0&\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&0&0&1&\boldsymbol{0}\\
&&&0&1&0&\\
&&&&&0&0&0\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&0&0&1\\
&&&&&0&1&0
\end{pmatrix},\quad
[\boldsymbol{H}_6]=\begin{pmatrix}
0&0&1&&&&\\
0&0&0&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\boldsymbol{0}\\
1&0&0&&&&\\
&&&0&0&1&\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&0&0&0&\boldsymbol{0}\\
&&&1&0&0&\\
&&&&&0&0&1\\
\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{0}}&0&0&0\\
&&&&&1&0&0
\end{pmatrix}
$$

式（1.4−14）に示す Lagrange 形式での仮想仕事の原理は次のようにマトリックス表示される。

$$
\int_V \delta\{\boldsymbol{E}\}^T\{\boldsymbol{T}\}dV=\int_A \delta\{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{P}\}dA+\int_V \delta\{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{F}\}dV \qquad (1.4-34)
$$

式（1.4−18）に示す移動 Lagrange 形式での仮想仕事の原理は次のようにマトリックス表示される。

$$
\int_{\overset{*}{V}} \delta\{\overset{*}{\boldsymbol{E}}\}^T\{\overset{*}{\boldsymbol{T}}\}dV=\int_A \delta\{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{P}\}dA+\int_V \delta\{\boldsymbol{u}\}^T\{\boldsymbol{F}\}dV \qquad (1.4-35)
$$

1.4.2 Lagrange 形式での有限要素定式

ここでは初期形状を参照する有限要素定式について考察し，そのアルゴリズムを明確にする。

(1) 有限要素近似

要素内部の変位を節点における値を用いて次のように補間する。

$$
\{\boldsymbol{u}\}=[\boldsymbol{N}]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \qquad (1.4-36)
$$

ここで〔$\boldsymbol{N}$〕は補間関数であり，初期形状の関数である。一方ひずみと変位勾配は次のように表わされる。

$$\Delta\{P\}=\int_A[N]^T\Delta\{P\}\,dA+\int_V[N]^T\Delta\{F\}\,dV \tag{1.4-47}$$

$$\{\hat{R}_0\}=\int_A[N]^T\{P_0\}\,dA+\int_V[N]^T\{F_0\}dV-\int_V([B_0]+[B_0^N])^T\{T_0\}\,dV \tag{1.4-48}$$

$$\{\hat{O}^2\}=-2\int_V\Delta[B]\,\Delta\{T\}\,dV \tag{1.4-49}$$

式（1.4−48）は残差荷重修正ベクトルであり，基準状態においてつり合いの条件が満足していればゼロである。

次に構成関係について考える。

$$\Delta\{T\}=[C^{ep}]\Delta\{E^{ep}\}=[C^{ep}]\Delta\{E\}-[C^{ep}]\Delta\{E^{(i)}\} \tag{1.4-50}$$

ここで添字 ep は弾塑性状態を意味し，(i) は初期ひずみを表わしている。式（1.4−37）の増分形は次のように与えられる。

$$\{E_0\}+\Delta\{E\}=([B_0]+\Delta[B])(\{\hat{u}\}+\Delta\{\hat{u}\}) \tag{1.4-51}$$

式（1.4−42）を利用して，ひずみの増分は次のように得られる。

$$\Delta\{E\}=[B_0]\Delta\{\hat{u}\}+[B_0^N]\Delta\{\hat{u}\}+\Delta[B]\Delta\{\hat{u}\} \tag{1.4-52}$$

式（1.4−52）を式（1.4−50）へ代入する。

$$\Delta\{T\}=[C^{ep}][B_0]\Delta\{\hat{u}\}+[C^{ep}][B_0^N]\Delta\{\hat{u}\}+[C^{ep}]\Delta[B]\Delta\{\hat{u}\}-[C^{ep}]\Delta\{E^{(i)}\} \tag{1.4-53}$$

上式を式（1.4−46）の左辺第一項へ代入し，次の関係式が得られる。

$$\int_V([B_0]+[B_0^N])^T\Delta\{T\}\,dV=\int_V([B_0]+[B_0^N])^T[C^{ep}]([B_0]+[B_0^N])\,dV\cdot\Delta\{\hat{u}\}-\Delta\{\hat{P}^{(i)}\}-\Delta\{\hat{P}^{(u)}\} \tag{1.4-54}$$

$$\Delta\{\hat{P}^{(i)}\}=\int_V([B_0]+[B_0^N])^T[C^{ep}]\Delta\{E^{(i)}\}\,dV \tag{1.4-55}$$

$$\Delta\{\hat{P}^{(u)}\}=-\int_V([B_0]+[B_0^N])^T[C^{ep}]\Delta[B]\,dV\cdot\Delta\{u\} \tag{1.4-56}$$

式（1.4−54）の右辺第一項について考察する。

$$\begin{aligned}\int_V([B_0]+[B_0^N])^T[C^{ep}]([B_0]+[B_0^N])\,dV\cdot\Delta\{\hat{u}\}&=\int_V([B^L]+2[B_0^N])^T[C^{ep}]([B^L]+2[B_0^N])\,dV\cdot\Delta\{\hat{u}\}\\&=([K^L]+[K_0^u])\Delta\{\hat{u}\}\end{aligned} \tag{1.4-57}$$

ここで $[K^L]$ と $[K_0^u]$ は微小変形剛性マトリックスと初期変位剛性マトリックスと呼ばれるものである。

$$[K^L]=\int_V[B^L]^T[C^{ep}][B^L]\,dV \tag{1.4-58}$$

$$[K_0^u]=2\int_V[B_0^N]^T[C^{ep}][B^L]\,dV+2\int_V[B^L]^T[C^{ep}][B_0^N]\,dV$$

$$\{\boldsymbol{E}\} = [\boldsymbol{B}]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} = ([\boldsymbol{B}^L]+[\boldsymbol{B}^N])\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-37}$$

$$\{\boldsymbol{d}\} = [\boldsymbol{B}_d]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-38}$$

ここで〔$\boldsymbol{B}$〕は変位をひずみに変換する行列で，〔$\boldsymbol{B}^L$〕はその線形項を表わし，〔$\boldsymbol{B}^N$〕は非線形項である。式(1.4−37)について変位に関する変分は次のように表示される。

$$\delta\{\boldsymbol{E}\} = [\boldsymbol{B}]\delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} + \delta[\boldsymbol{B}]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-39}$$

ここで上式の右辺の第二項について検討する。〔$\boldsymbol{B}$〕マトリックスを式(1.4−37)に示すように線形項と変位に依存した非線形項に分解したので，この変分は非線形項だけの寄与になる。

$$\delta[\boldsymbol{B}]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} = \delta[\boldsymbol{B}^N]\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-40}$$

式(1.4−40)の各成分について考える。式(1.4−31)，(1.4−38)より，

$$\delta\llcorner \boldsymbol{B}_i^N \lrcorner \{\hat{\boldsymbol{u}}\} = \frac{1}{2}\delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\}^T[\boldsymbol{B}_d]^T[\boldsymbol{H}_i][\boldsymbol{B}_d]\{\hat{\boldsymbol{u}}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\hat{\boldsymbol{u}}\}^T[\boldsymbol{B}_d]^T[\boldsymbol{H}_i][\boldsymbol{B}_d]\delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-41}$$

式(1.4−41)は次式のように書き直すことができる。

$$\delta\llcorner \boldsymbol{B}_i^N \lrcorner \{\hat{\boldsymbol{u}}\} = \llcorner \boldsymbol{B}_i^N \lrcorner \delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-42}$$

よって，式(1.4−42)より式(1.4−39)は次のように得られる。

$$\delta\{\boldsymbol{E}\} = [\boldsymbol{B}]\delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} + [\boldsymbol{B}^N]\delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} = ([\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{B}^N])\delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \tag{1.4-43}$$

式(1.4−43)を式(1.4−34)へ代入して次式が得られる。

$$\int_V ([\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{B}^N])^T\{\boldsymbol{T}\}\,dV = \int_A [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{P}\}\,dA + \int_V [\boldsymbol{N}]^T\{\boldsymbol{F}\}\,dV \tag{1.4-44}$$

(2) 増分形での表示

ここで未知形状をその直前の既知形状である基準状態からの増分したものと考えると，式(1.4−44)は次のように与えられる。

$$\int_V ([\boldsymbol{B}_0]+\Delta[\boldsymbol{B}]+[\boldsymbol{B}_0^N]+\Delta[\boldsymbol{B}^N])^T(\{\boldsymbol{T}_0\}+\Delta\{\boldsymbol{T}\})\,dV$$

$$= \int_A [\boldsymbol{N}]^T(\{\boldsymbol{P}_0\}+\Delta\{\boldsymbol{P}\})\,dA + \int_V [\boldsymbol{N}]^T(\{\boldsymbol{F}_0\}+\Delta\{\boldsymbol{F}\})\,dV \tag{1.4-45}$$

ここで，添字0は基準状態を表わしている。上式を整理して次のように表わす。

$$\int_V ([\boldsymbol{B}_0]+[\boldsymbol{B}_0^N])^T\Delta\{\boldsymbol{T}\}\,dV + 2\int_V \Delta[\boldsymbol{B}]^T\{\boldsymbol{T}_0\}\,dV = \Delta\{\hat{\boldsymbol{P}}\} + \{\hat{\boldsymbol{R}}_0\} + \{\hat{\boldsymbol{O}}^2\} \tag{1.4-46}$$

$$+4\int_V [\boldsymbol{B}_0^N]^T [\boldsymbol{C}^{ep}] [\boldsymbol{B}_0^N] dV \qquad (1.4\text{-}59)$$

なお，上式における $[\boldsymbol{B}_0^N]$ は式（1.4−30），式（1.4−38）より次のように得られる。

$$\{\boldsymbol{E}_0^N\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{D}_0]\{\boldsymbol{d}_0\} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{D}_0][\boldsymbol{B}_d]\{\hat{\boldsymbol{u}}_0\} \qquad (1.4\text{-}60)$$

したがって，

$$[\boldsymbol{B}_0^N] = \frac{1}{2}[\boldsymbol{D}_0][\boldsymbol{B}_d] \qquad (1.4\text{-}61)$$

次に式（1.4−46）の左辺第二項について，式を各成分で表示して考察する。

$$2\int_V \Delta[\boldsymbol{B}^N]^T \{\boldsymbol{T}_0\} dV = 2\sum_i \int_V \Delta \lfloor \boldsymbol{B}_i^N \rfloor^T T_{0_i} dV \qquad (1.4\text{-}62)$$

上式を明確にするために式（1.4−31）の非線形ひずみの増分について考える。

$$E_{0_i}^N + \Delta E_i^N = \frac{1}{2}(\{\boldsymbol{d}_0\} + \{\boldsymbol{d}\})^T [\boldsymbol{H}_i](\{\boldsymbol{d}_0\} + \{\boldsymbol{d}\}) \qquad (1.4\text{-}63)$$

よって，

$$\Delta E_i^N = \{\boldsymbol{d}_0\}^T [\boldsymbol{H}_i]\Delta\{\boldsymbol{d}\} + \frac{1}{2}\Delta\{\boldsymbol{d}\}^T [\boldsymbol{H}_i]\Delta\{\boldsymbol{d}\} \qquad (1.4\text{-}64)$$

ここで，式（1.4−38）の変位と変位勾配の関係式を用いて，上式は次のように示される。

$$\Delta E_i^N = \{\hat{\boldsymbol{u}}_0\}^T [\boldsymbol{B}_d]^T [\boldsymbol{H}_i][\boldsymbol{B}_d]\Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} + \frac{1}{2}\Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\}^T [\boldsymbol{B}_d]^T [\boldsymbol{H}_i][\boldsymbol{B}_d]\Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \qquad (1.4\text{-}65)$$

式（1.4−52）より非線形ひずみ増分は次のように表わされる。

$$\Delta E_i^N = 2\lfloor \boldsymbol{B}_{0_i}^N \rfloor \Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} + \Delta \lfloor \boldsymbol{B}_i^N \rfloor \Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \qquad (1.4\text{-}66)$$

したがって，式（1.4−66）と式（1.4−65）より $\Delta[\boldsymbol{B}^N]$ の成分は次のように与えられる。

$$\Delta \lfloor \boldsymbol{B}_i^N \rfloor = \frac{1}{2}\Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\}^T [\boldsymbol{B}_d]^T [\boldsymbol{H}_i][\boldsymbol{B}_d] \qquad (1.4\text{-}67)$$

上式を式（1.4−62）へ代入する。

$$2\int_V \Delta[\boldsymbol{B}^N]^T \{\boldsymbol{T}_0\} dV = \sum_i \int_V [\boldsymbol{B}_d]^T [\boldsymbol{H}_i]^T [\boldsymbol{B}_d] T_{0_i} dV \cdot \Delta\{\hat{\boldsymbol{u}}\} \qquad (1.4\text{-}68)$$

$[\boldsymbol{H}_i]$ は対称行列であるので上式は次のように書き直すことができる。

$$\sum_i \int_V [\boldsymbol{B}_d]^T [\boldsymbol{H}_i]^T [\boldsymbol{B}_d] T_{0_i} dV = \int_V [\boldsymbol{B}_d]^T \left(\sum_i [\boldsymbol{H}_i] T_{0_i}\right) [\boldsymbol{B}_d] dV \qquad (1.4\text{-}69)$$

式（1.4−69）の中間項を次のように表わす。

$$\sum_i [H_i]\, T_{0_i} \approx [S_0] \tag{1.4-70}$$

$$[S_0] = \begin{bmatrix} T_0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 \end{bmatrix}, \qquad [T_0] \approx \begin{bmatrix} T_{011} & T_{012} & T_{013} \\ & T_{022} & T_{023} \\ \text{Sym.} & & T_{033} \end{bmatrix} \tag{1.4-71}$$

よって，式（1.4−46）の左辺第二項は次のように表わされる。

$$2\int \Delta [B^N]^T \{T_0\}\, dV = [K_0^\sigma]\, \Delta \{\hat{u}\} \tag{1.4-72}$$

$$[K_0^\sigma] = \int_V [B_d]^T [S_0] [B_d]\, dV \tag{1.4-73}$$

$[K_0^\sigma]$ は初期応力剛性マトリックスと呼ばれるものである。以上より式（1.4−46）へ式（1.4−54），（1.4−57），（1.4−72）を代入して Lagrange 形の増分形有限要素定式が得られる。

$$([K^L]+[K_0^u]+[K_0^\sigma])\, \Delta \{\hat{u}\} = \Delta \{\hat{P}\} + \{\hat{R}_0\} + \{\hat{O}^2\} + \Delta \{\hat{P}^{(i)}\} + \Delta \{\hat{P}^{(u)}\} \tag{1.4-74}$$

1.4.3 大変形解析における加速

FINASでは式（1.4−74）に示す平衡方程式を収束計算の途中で剛性を変化させない modified Newton−Raphson 法により解いている。modified Newton−Raphson 法は Newton−Raphson 法に比べて，剛性マトリックスの計算および分解を収束計算の最初で1回行なえば良いという利点がある反面，収束の度合が遅いという欠点がある。この modified Newton−Raphson 法の収束の度合を改善するため，いくつかの加速手法が発表されている。以下に FINAS で採用している加速手法について述べる。[11)]

収束回数 $i-1$ における変位増分を $\Delta\{\hat{u}_{i-1}\}$，式（1.4−74）を解いて求まる i における変位増分を $\Delta\{\overset{*}{u}_i\}$ とし，$\Delta\{\overset{*}{\delta}_i\}$ を次式で定義する。

$$\Delta\{\overset{*}{\delta}_i\} = \Delta\{\overset{*}{u}_i\} - \Delta\{\hat{u}_{i-1}\} \tag{1.4-75}$$

$\Delta\{\overset{*}{\delta}_i\}$ を次式で修正して，$\Delta\{\hat{\delta}_i\}$ を求める。

$$\Delta\{\hat{\delta}_i\} = e_i\, \Delta\{\hat{\delta}_{i-1}\} + f_i\, \Delta\{\overset{*}{\delta}_i\} \tag{1.4-76}$$

ここで，e_i, f_i はスカラー量であり，次式で与えられる。

$$f_i = a_i / b_i$$
$$e_i = f_i(1 - c_i/b_i) - 1 \tag{1.4-77}$$

ただし，

$$a_i = \Delta\{\hat{\delta}_{i-1}\}^T \{\hat{R}_{i-2}\}$$
$$b_i = \Delta\{\hat{\delta}_{i-1}\}^T (\{\hat{R}_{i-2}\} - \{\hat{R}_{i-1}\}) = \Delta\{\hat{\delta}_{i-1}\}^T \{\hat{\gamma}_{i-1}\}$$
$$c_i = \Delta\{\overset{*}{\hat{\delta}}_i\}^T \{\hat{\gamma}_{i-1}\} \qquad (1.4\text{-}78)$$

ここで，$\Delta\{\hat{\delta}_{i-1}\}$ は収束回数 $i-2$ から $i-1$ 間の変位増分であり，$\{\hat{R}_{i-1}\}$ は $i-1$ における不釣合い力を意味する。また，収束計算の始めでは次の値を用いる。

$$f_1 = 1, \quad e_1 = 0$$
$$\{\hat{R}_0\} = \Delta\{\hat{P}\} \qquad (1.4\text{-}79)$$

ただし，$\Delta\{\hat{P}\}$ はこの負荷ステップにおける荷重増分を意味する。

加速された i における変位増分 $\Delta\{\hat{u}_i\}$ を式（1.4-76）で求まった $\Delta\{\hat{\delta}_i\}$ を用いて，次のように定める。

$$\Delta\{\hat{u}_i\} = \Delta\{\hat{u}_{i-1}\} + \Delta\{\hat{\delta}_i\} \qquad (1.4\text{-}80)$$

式（1.4-76）の両辺に $\{\hat{\gamma}_{i-1}\}$ をかけると，次の関係が求まる。

$$\Delta\{\hat{\delta}_i\}^T \{\hat{\gamma}_{i-1}\} = \Delta\{\hat{\delta}_{i-1}\}^T \{\hat{R}_{i-1}\} \qquad (1.4\text{-}81)$$

一次元問題の場合には，式（1.4-81）は次のようになる。

$$\Delta\hat{\delta}_i = \Delta\hat{\delta}_{i-1} \frac{\hat{R}_{i-1}}{\hat{\gamma}_{i-1}} \qquad (1.4\text{-}82)$$

式（1.4-81）は図1.4-2に示すように割線の関係を意味する。

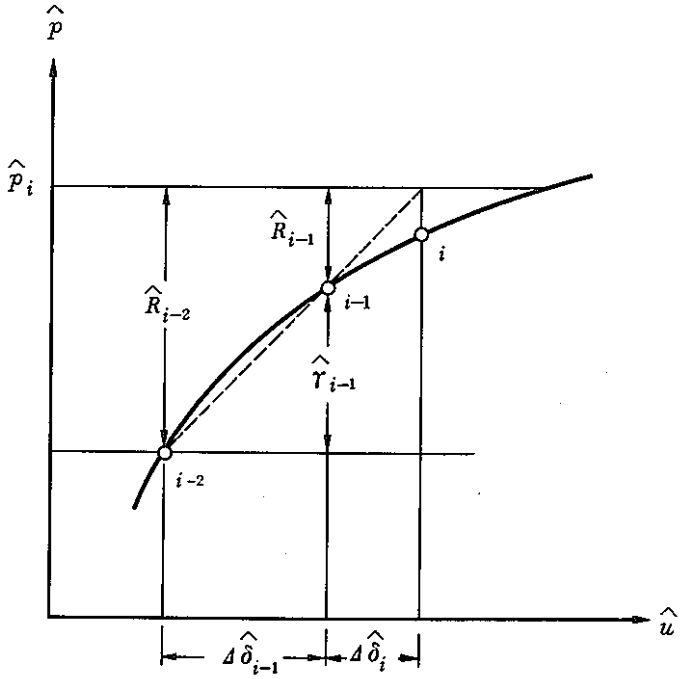


図 1.4-2　大変形解析の加速法

1.4.4　大変形解析のアルゴリズム

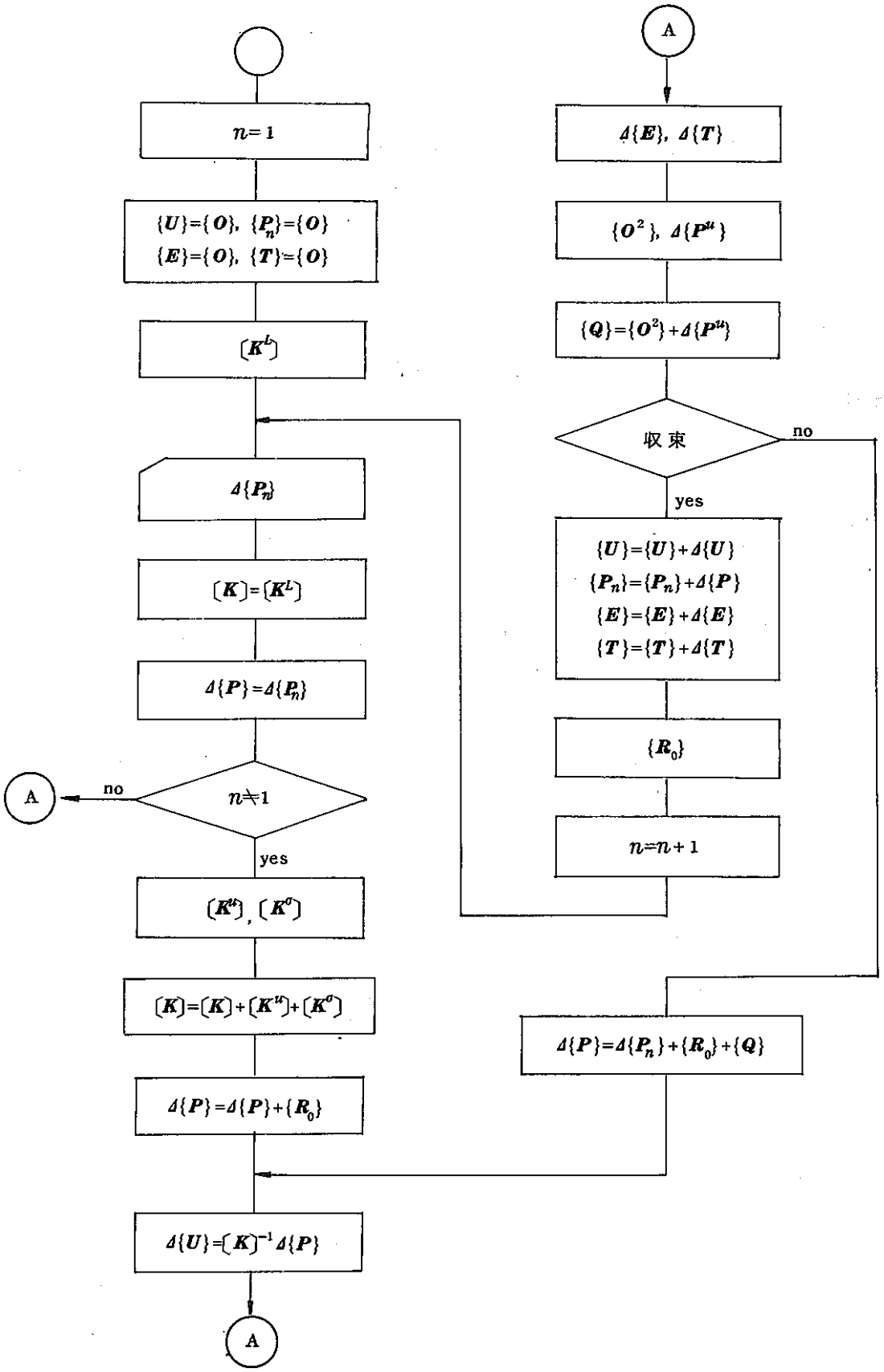


図 1.4−3　大変形解析の流れ

〔参考文献〕

1) H. D. Hibbitt, P. V. Marcal and J. R. Rice, "Finite element formulation for problems of large strain and large displacements", Int. J. Solids Struct. 6, 1069-1086 (1970).

2) J. A. Stricklin, W. A. Von Riesemann, J. R. Tillerson and W. E. Haisler, "Static geometric and material nonlinear analysis", Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, 2nd U.S.—Japan Seminar Matrix Meth. Struct. Analysis and Design, Univ. of Alabama Press. 301-324 (1972).

3) Y. Yamada, "Incremental formulation for problems with geometric and material nonlinearities", Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, 2nd U.S.—Japan Seminar Matrix Meth. Struct. Analysis Design, Univ. of Alabama Press, 325-355 (1972).

4) 武田, "有限要素法による運動の表現について", 土木学会第29回全国大会 (1974).

5) 武田, "有限要素法による形状の表現について", 土木学会第30回全国大会 (1975).

6) K. J. Bathe, E. Ramm and E. L. Wilson, "Finite Element Formulation for Large Deformation Dynamic Analysis", Int. J. num. meth. engin., Vol. 9 (1975)

7) J. R. Rice, R. M. McMeeking, D. M. Parks and E. P. Sorensen, "Recent Finite Element Studies in Plasticity and Fracture Mechanics", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 17/18 (1979).

8) L. E. Malvern, "Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1969).

9) Truesdell, C. "The Elements of Continuum Mechanics", Springer-Verlag, Inc., New York (1966).

10) R. D. Wood, B. Schrefler, "Geometrically Non-linear Analysis—A Correlation of Finite Element Notations", Int. J. num. meth. engin., Vol. 12 (1978).

11) M. A. Crisfield, "A Faster Modified Newton-Raphson Iteration", Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., 20(1979).

1.5 座屈荷重解析

1.5.1 非線形座屈荷重解析

有限要素法による幾何学的非線形問題の定式はすでに1.4節に論じてあるので，ここではその最終的な平衡方程式として Lagrange 形の増分形有限要素式を次式のように与える。

$$\left(\left[K^{L}\right]+\left[K_{0}^{u}\right]+\left[K_{0}^{\sigma}\right]\right)\Delta\left\{\hat{u}\right\}=\Delta\left\{\hat{P}\right\}+\left\{\hat{R}\right\} \qquad (1.5-1)$$

ここで $\left[K^{L}\right]$ は微小変形剛性マトリックス，$\left[K_{0}^{u}\right]$ は増分前の変位を参照にした初期変位剛性マトリックス，$\left[K_{0}^{\sigma}\right]$ は増分前の応力を参照にした初期応力剛性マトリックスである。下付き添字0は増分前の値を参照していることを意味する。$\Delta\left\{\hat{u}\right\}$ は変位増分，$\Delta\left\{\hat{P}\right\}$ は荷重増分，$\left\{\hat{R}\right\}$ は残差荷重修正ベクトルであり，その詳細な記述は1.4節に与えられているが，ここでは簡単に $\left\{\hat{R}\right\}$ で表わす。 ト。

荷重 $\left\{\hat{P}\right\}$ で，応力 $\left\{\sigma\right\}$，変位 $\left\{\hat{u}\right\}$ が生じているものとする。ここから荷重を $\lambda\Delta\left\{\hat{P}\right\}$ だけ増分した場合に，応力と変位の増分がそれぞれ $\lambda\Delta\left\{\sigma\right\}$，$\lambda\Delta\left\{\hat{u}\right\}$ であるとすると，式（1.5-1）より増分後における平衡方程式は次のようになる。

$$\left(\left[K^{L}\right]+\left[K^{u}(\hat{u}+\lambda\Delta\hat{u})\right]+\left[K^{\sigma}(\sigma+\lambda\Delta\sigma)\right]\right)d\left\{\hat{u}\right\}=d\left\{\hat{P}\right\} \qquad (1.5-2)$$

ここで荷重 $\left(\left\{P\right\}+\lambda\Delta\left\{P\right\}\right)$ においてその構造が不安定になったとすると次式が成立する。

$$\left(\left[K^{L}\right]+\left[K^{u}(\hat{u}+\lambda\Delta\hat{u})\right]+\left[K^{\sigma}(\sigma+\lambda\Delta\sigma)\right]\right)d\left\{\hat{u}\right\}=\left\{0\right\} \qquad (1.5-3)$$

式（1.5−3）の左辺は Taylor 展開を利用して次のように表示できる。

$$\left[K^{u}(\hat{u}+\lambda\Delta\hat{u})\right]=\left[K^{u}(\hat{u})\right]+\frac{\partial\left[K^{u}(u)\right]}{\partial u}\lambda\Delta\left\{u\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\left[K^{u}(u)\right]}{\partial u^{2}}\left(\lambda\Delta\left\{u\right\}\right)^{2} \qquad (1.5-4)$$

$$\left[K^{\sigma}(\sigma+\lambda\Delta\sigma)\right]=\left[K^{\sigma}(\sigma)\right]+\lambda\left[K^{\sigma}(\Delta\sigma)\right] \qquad (1.5-5)$$

ここで式（1.5−4）の高次項を無視し，式（1.5−4），式（1.5−5）を式（1.5−3）に代入すると次の固有値方程式が得られる。

$$\left(\left[K^{T}\right]+\lambda\Delta\left[K^{T}\right]\right)d\left\{\hat{u}\right\}=\left\{0\right\} \qquad (1.5-6)$$

ここで $\left[K^{T}\right]$ は荷重 $\left\{P\right\}$，変位 $\left\{u\right\}$，応力 $\left\{\sigma\right\}$ における接線剛性マトリックスであり，$\Delta\left[K^{T}\right]$ は変位増分 $\Delta\left\{u\right\}$ と応力増分 $\Delta\left\{\sigma\right\}$ による接線剛性マトリックスの増分であり，次のとおりである。

$$\left[K^{T}\right]=\left[K^{L}\right]+\left[K_{0}^{u}\right]+\left[K_{0}^{\sigma}\right] \qquad (1.5-7)$$

$$\Delta\left[K^{T}\right]=\Delta\left[K^{u}\right]+\Delta\left[K^{\sigma}\right] \qquad (1.5-8)$$

ここで $\Delta\left[K^{u}\right]$，$\Delta\left[K^{\sigma}\right]$ は式（1.5−5），式（1.5−6）を参照することにより次のように表わされる。

$$\Delta[K^u] = \frac{\partial [K^u]}{\partial u} \Delta \{u\} \qquad (1.5-9)$$

$$\Delta[K^\sigma] = [K^\sigma(\Delta\sigma)] \qquad (1.5-10)$$

以上のことより，非線形座屈荷重の評価は通常の大変形解析のループ内で式（1.5－9），式（1.5－10）で $\Delta[K^T]$ を評価し，式（1.5－6）の固有値問題を解き，固有値 λ を求めることにより，次式から求めることができる。

$$\{\hat{P}^{cr}\} = \{\hat{P}\} + \lambda \Delta \{\hat{P}\} \qquad (1.5-11)$$

なお，固有値 λ に対応する固有ベクトルは，増分前の変形形状を参照にした座屈形状を与える。

1.5.2　線形座屈荷重解析

座屈荷重を評価するための第１次近似として前節の初期変位剛性マトリックスを省略すると次のように表わすことができる。

$$([K^L] + [K^\sigma] + \lambda \Delta [K^\sigma])\, d\{\hat{u}\} = \{0\} \qquad (1.5-12)$$

前節の考察から上式で評価される座屈荷重は式（1.5-11）と同一であり，次のようになる。

$$\{\hat{P}^{cr}\} = \{P\} + \lambda \Delta \{P\} \qquad (1.5-13)$$

ここで理論説明書の大変形に関する記述を参照にすると，$[K^\sigma]$ は応力 $\{\sigma\}$ の線形関数であることを考慮に入れることにより，式（1.5-12）を次のように書きかえることができる。

$$([K^L] + \lambda [K^\sigma])\, d\{\hat{u}\} = \{0\} \qquad (1.5-14)$$

ここで $[K^\sigma]$ は荷重 $\{P\}$ による応力 $\{\sigma\}$ を用いて計算されたものであり，座屈荷重は次式で評価される。

$$\{\hat{P}^{cr}\} = \lambda \{\hat{P}\} \qquad (1.5-15)$$

この場合に固有値 λ に対応する固有ベクトルは初期形状を参照にした座屈形状を与える。

1.5.3　座屈荷重解析のアルゴリズム

図 1.5－1 に非線形座屈荷重解析のアルゴリズムの流れ図を，図 1.5－2 に線形座屈荷重解析のアルゴリズムを流れ図で示す。

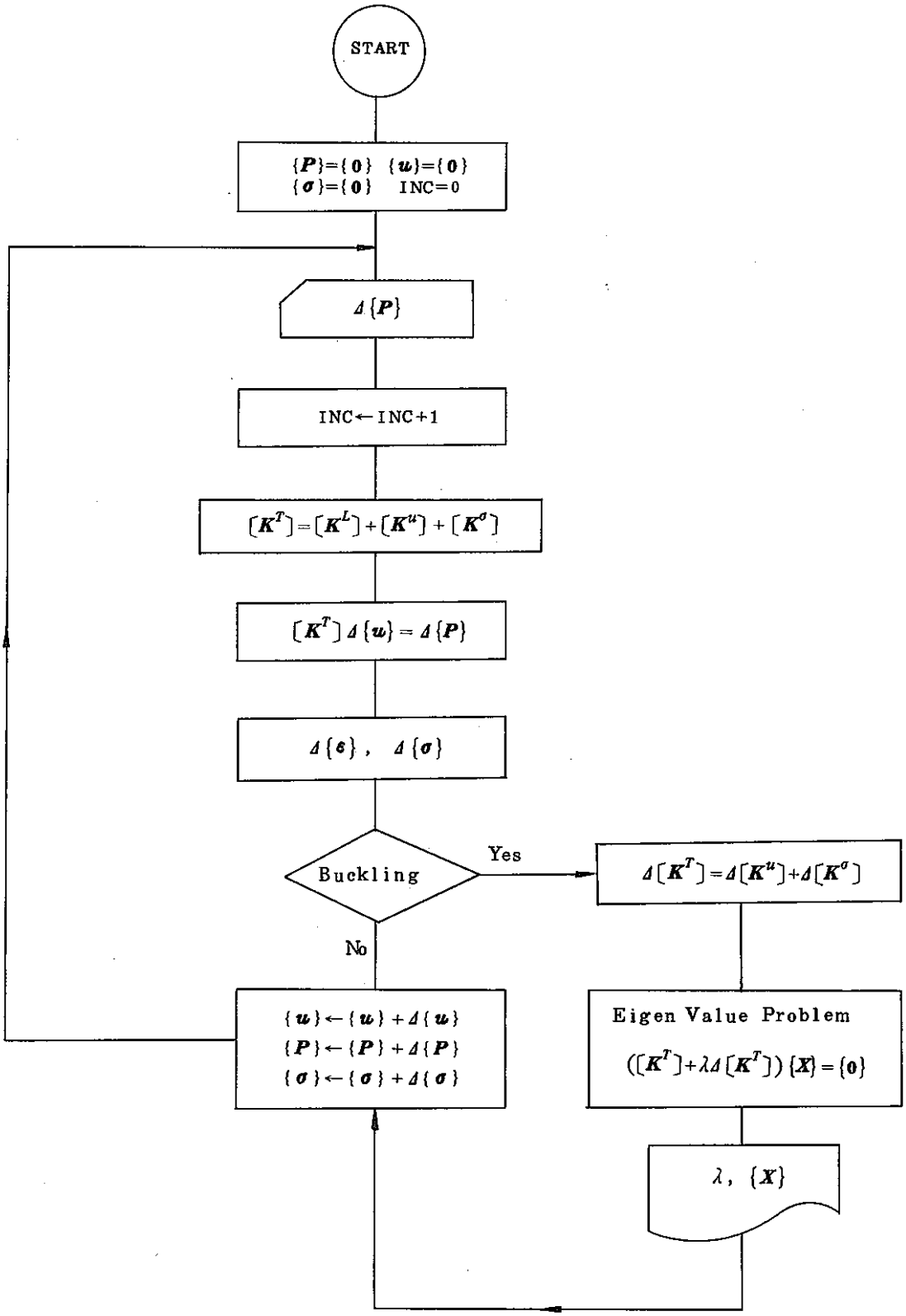


図 1.5-1　非線形座屈荷重解析の流れ

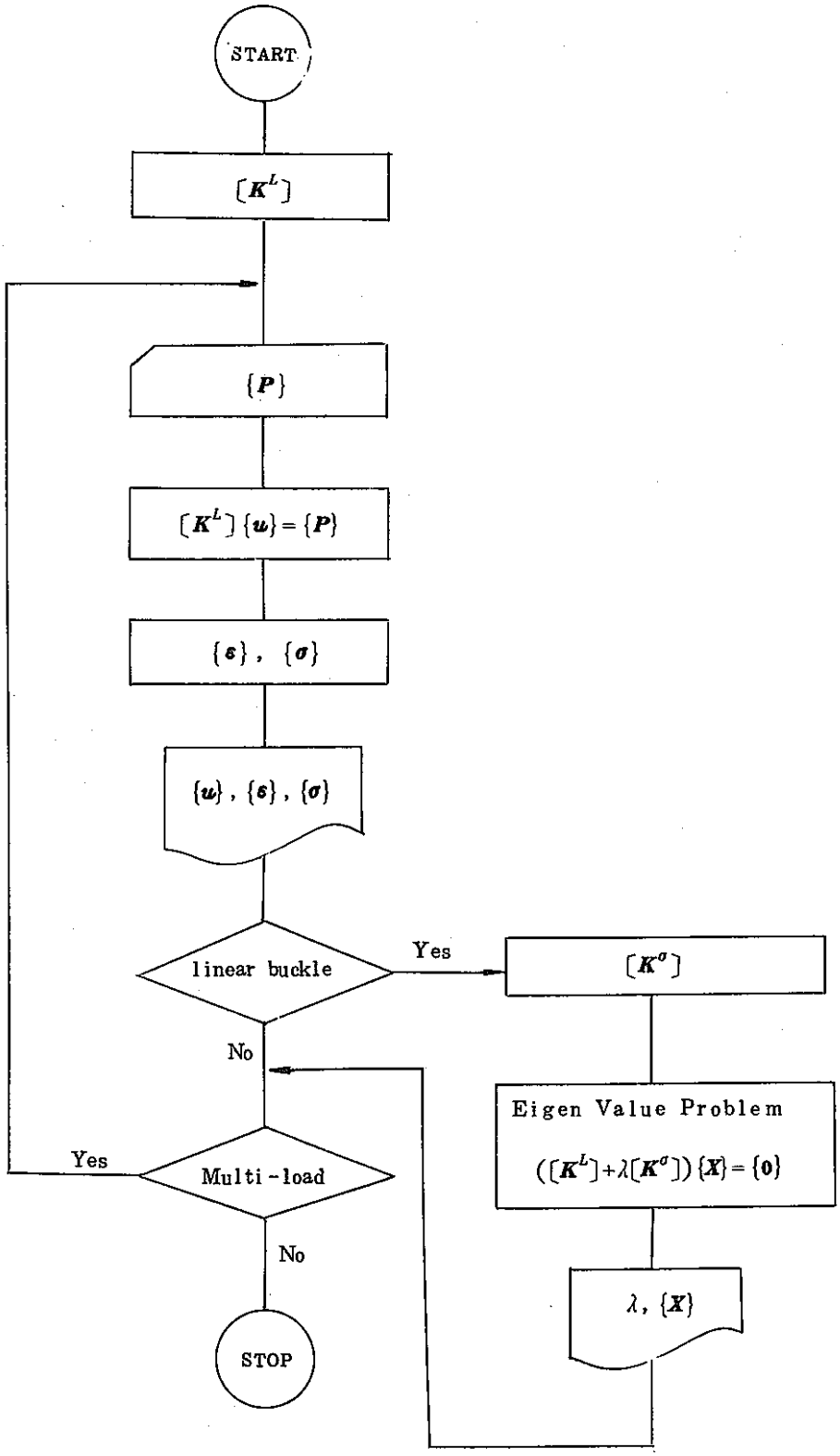


図 1.5−2　線形座屈荷重解析の流れ

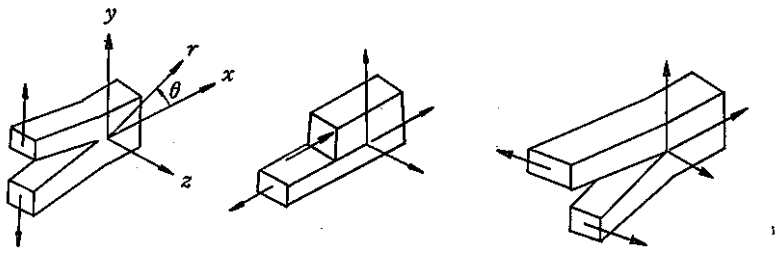
1.6 破壊力学解析

1.6.1 線形破壊力学

(1) 一般理論

き裂先端の応力場はパラメータ K_{I}，K_{II}，または K_{III} により表わすことができる。このパラメータは応力拡大係数と呼ばれ，その大きさは作用する荷重の分布と強さおよび構造の形状に依存している。各応力拡大係数はそれぞれ次のモードを表わす。

K_{I} ： モードⅠ（き裂開口モード）
K_{II} ： モードⅡ（面内せん断モード）
K_{III} ： モードⅢ（面外せん断モード）



a）モードⅠ　　b）モードⅡ　　c）モードⅢ

図 1.6-1　き裂の基本変形モード

等方性材料の平面問題では変位と応力はモードⅠあるいはモードⅡの応力拡大係数により次のように表わすことができる。

モードⅠ条件：

$$\sigma_x = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\theta \left(1 - \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \qquad (1.6-1)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\theta \left(1 + \sin\frac{\theta}{2} \sin\frac{3\theta}{2} \right) \qquad (1.6-2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) \qquad (1.6-3)$$

$$u = \frac{K_{\mathrm{I}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \right] \qquad (1.6-4)$$

$$v = \frac{K_{\mathrm{I}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 1) \sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \right] \qquad (1.6-5)$$

モードⅡ条件：

$$\sigma_x = -\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (1.6-6)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \qquad (1.6-7)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \qquad (1.6-8)$$

$$u = \frac{K_{\mathrm{II}}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\kappa-1)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (1.6-9)$$

$$v = -\frac{K_{\mathrm{II}}}{4G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2\kappa-3)\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right] \qquad (1.6-10)$$

ここで，

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.6-11)$$

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & : \text{平面ひずみ} \\ (3-\nu)/(1+\nu) & : \text{平面応力} \end{cases} \qquad (1.6-12)$$

一方，3次元問題におけるモードⅢの応力拡大係数と面外せん断応力または面外方向変位との関係は次式で表わされる。

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \qquad (1.6-13)$$

$$\tau_{yz} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \qquad (1.6-14)$$

$$w = \frac{K_{\mathrm{III}}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2} \qquad (1.6-15)$$

(2) 線積分法

線積分法はクラック近傍のポテンシャルエネルギからエネルギ解放率を求める手法で，Riceにより提案された方法である。図1.6-2に示すようにクラックに沿ってx軸をとり，クラック近傍に曲線Γを考える。構造物に物体力が作用せず，また，クラック内面に外力が働かないとするならば，この曲線Γに沿い式（1.6-16）の積分を行なうと，その値はΓの経路に依存せず一定値となる。この値をJとおき，一般にこの積分をJ積分と呼んでいる。

$$J = \int_{\Gamma}\left(W dy - \{T\}^T \frac{\partial\{u\}}{\partial x} ds\right) \qquad (1.6-16)$$

ここに，　W　：ひずみエネルギ密度

$\{T\}$：Γに沿う外向法線応力のベクトル

$\{u\}$：Γ上の点の変位ベクトル

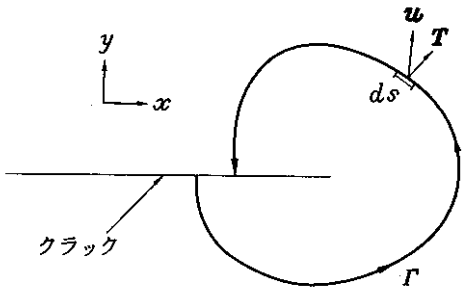


図1.6-2　J 積分

また，線形破壊力学では，Jはひずみエネルギ解放率yに一致し，モードⅠの場合は次式が成り立つ。

$$J=\frac{dU}{da}=\frac{\kappa+1}{8G}K_{\mathrm{I}}^{2} \qquad (1.6-17)$$

そして平面ひずみにおける応力拡大係数は次のようになる。

$$K_{\mathrm{I}}=\sqrt{\frac{JE}{1-\nu^{2}}} \qquad (1.6-18)$$

1.6.2　破壊力学解析のアルゴリズム

前述の線積分法は線形だけでなく非線形破壊力学の手法として，最近広く用いられてきている。ここでは FINAS における線積分の方法について述べる。式（1.6-16）は，

$$J=\int_{\Gamma}\left(Wn_{x}-\{n\}^{T}\{\sigma\}\frac{\partial\{u\}}{\partial x}\right)ds \qquad (1.6-19)$$

ここで，$\{n\}$は積分径路Γの外向き法線ベクトルで，n_xはそのx軸方向の成分である。また$\{\sigma\}$は評価点における応力を表わす。ひずみを$\{\varepsilon\}$とすると，上式のWは次のように表わされる。

$$W=\int_{0}^{\varepsilon}\{\sigma\}^{T}d\{\varepsilon\} \qquad (1.6-20)$$

有限要素法では式（1.6-19）は，径路Γを含む要素についてその総和をとることにより表わされる。すなわち，

$$J=\sum_{i=1}^{m}J^{(i)} \qquad (1.6-21)$$

ここで，mは径路Γを含む要素の数であり，$J^{(i)}$は式（1.6-19）より次のように表わされる。

$$J^{(i)}=\int_{s_1^{(i)}}^{s_2^{(i)}}\left(W n_x-\{n\}^T\{\sigma\}\frac{\partial\{u\}}{\partial x}\right)ds \qquad (1.6-22)$$

ただし，$s_1^{(i)}$，$s_2^{(i)}$ は要素（i）の積分径路Γの始点と終点の座標である。要素内での線積分は，要素剛性の数値積分および応力ひずみの評価点となる要素の積分点をとおる径路によって行なわれ，四辺形要素の場合，要素のある一辺上の点が始点となり対応する反対側の辺上の点が終点となる（図 1.6－3 参照）。式（1.6－20）を増分形にすると，

$$W^n=\sum_{k=1}^{n}\{\sigma\}_k^T\Delta\{\varepsilon\}_k \qquad (1.6-23)$$

上式はn回目の増分におけるひずみエネルギであり，添字kはk番目の増分後における値を表わす。FINAS では式（1.6－22），（1.6－23）により弾性および非弾性解析におけるJの値を評価している。図1.6－4 に破壊力学解析のアルゴリズムの流れ図を示す。

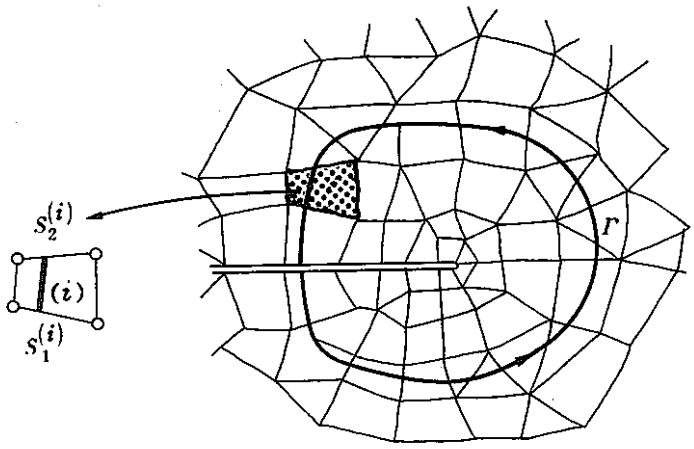


図 1.6－3　FINAS におけるＪ積分

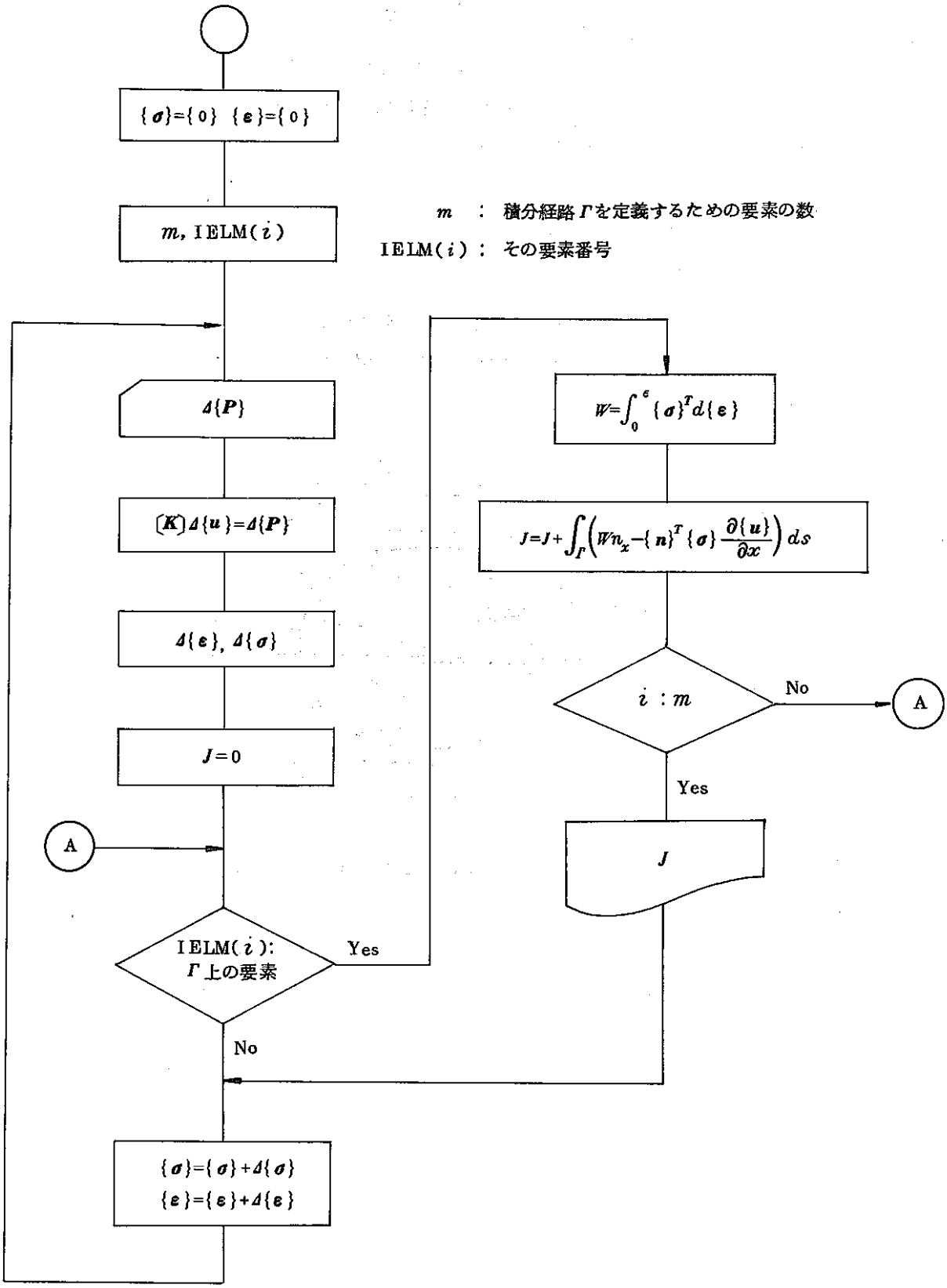


図 1.6−4　破壊力学解析の流れ

〔参考文献〕

1) R. H. Gallager, " The Finite Element Method in Fracture Mechanics Analysis ", Advanced Topic in Finite Element Analysis, MARC Analysis Research Corporation.

2) D. M. Parks, " A Stiffness Derivative Finite Element Technique for Determination of Elastic Crack Tip Stress Intensity Factors ", Structural Analysis with MARC-CDC, Background Papers, Volum V, MARC Analysis Research Corporation.

3) Roshdy S. Barsoum, " On The Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics ", Int. J. Numer. Meth. Eng., 1975.

4) D. M. Park, " The Virtual Crack Extention Method for Nonlinear Material Behavior ", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 12, 1977.

5) R. D. Henshell, et al., " Crack Tip Finite Element Are Unnecessary ", Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 9, 1975.

6) O. C. Zienkiewicz, " The Finite Element Method in Engineering and Science ", the third edition.

7) 石田 誠, " き裂の弾性破壊と応力拡大係数 ", 破壊力学と材料強度講座２.

8) J. R. Rice et al. " Recent finite element studies in plasticity and fracture mechanics ", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 17/18 (1979), pp. 411-442.

1.7 動的解析

動的構造解析の手法は，直接積分法によるものとモーダル法によるものに分類されることが一般的である。これらの手法は一見まったく異なるものに思えるが，実際には密接に関連した解析法である。動的問題は離散化過程を経て節点に関しての２階の連立常微分方程式で表わされる。この動的平衡方程式をモーダル法や時間方向に離散化を仮定する直接積分法で解析することになる。材料非線形性や幾何学的非線形及び衝撃などの問題では直接積分法で解析を行なうことが多い。

動的問題は静的問題に比べて平衡方程式が複雑であり，計算効率を改善するために種々の手法が提案されており，モーダル法などはその良い例である。以下の各節では FINAS における動的問題の有限要素定式，モーダル法定式，直接積分法定式について説明する。

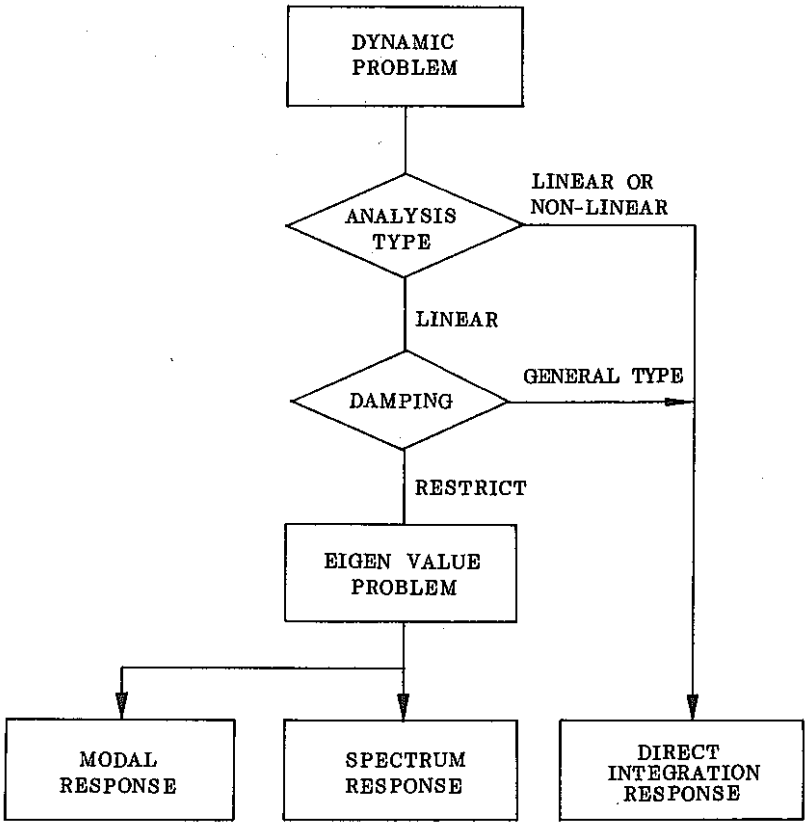


図 1.7−1　動的解析手法の分類

1.7.1　動的問題の有限要素法平衡方程式

動的構造解析の有限要素平衡方程式を仮想仕事の原理を利用して導く。D′Alembert の原理を考慮して時刻 t における領域 V，表面力の作用する境界を A とした場合の仮想仕事式は，式（1.7 -1）で与えられる。

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}_t dV - \int_V \delta\{U\}^T(\{F_B\}_t - \rho_t\{\ddot{U}\}_t - c_t\{\dot{U}\}_t)dV$$
$$-\int_A \delta\{U\}^T\{F_T\}_t dA = 0 \qquad (1.7-1)$$

減衰効果を速度に比例するものと仮定している。 $\delta\{U\}$ と $\delta\{\varepsilon\}$ は仮想変位と仮想ひずみ，$\{\sigma\}_t$ は応力，$\{F_B\}_t$ と $\{F_T\}_t$ は物体力と表面力，ρ_t は質量，c_t は減衰パラメータ，ドットは時間に関しての微分を表わしている。対象としている領域 V の境界としては，表面力が作用するもの，変位および加速度などが規定されているものがある。変位及び加速度が規定される境界の処理については次節で取り扱うことにする。

有限要素の表示法により，節点変位より要素内の変位，ひずみ，応力とそれに対応した仮想量は次のように仮定される。

$$\{U\}_t = [N]\{\hat{U}\}_t\ , \qquad \delta\{U\} = [N]\delta\{\hat{U}\} \qquad (1.7-2)$$

$$\{\varepsilon\}_t = [B]\{\hat{U}\}_t\ , \qquad \delta\{\varepsilon\} = [B]\delta\{\hat{U}\} \qquad (1.7-3)$$

$$\{\sigma\}_t = [D]\{\varepsilon\}_t = [D][B]\{\hat{U}\}_t \qquad (1.7-4)$$

ここで，$[N]$ は変位関数，$[B]$ は変位ひずみ変換マトリックス，$[D]$ は弾性状態での応力ひずみ関係を表わす材料マトリックスである。速度，加速度，作用力についても変位関数 $[N]$ で補間するとすれば，各成分は次のように補間される。

$$\{\dot{U}\}_t = [N]\{\dot{\hat{U}}\}_t \qquad (1.7-5)$$

$$\{\ddot{U}\}_t = [N]\{\ddot{\hat{U}}\}_t \qquad (1.7-6)$$

$$\{F_B\}_t = [N]\{\hat{F}_B\}_t \qquad (1.7-7)$$

$$\{F_T\}_t = [N]\{\hat{F}_T\}_t \qquad (1.7-8)$$

式（1.7-1）へ式（1.7-2）～式（1.7-8）を代入して仮想変位について整理する。

$$\delta\{\hat{U}\}^T\int_V [B]^T[D][B]dV\cdot\{\hat{U}\}_t + \delta\{\hat{U}\}^T\int_V [N]^T\rho_t[N]dV\cdot\{\ddot{\hat{U}}\}_t + \delta\{\hat{U}\}^T\int_V [N]^T c_t[N]dV\cdot\{\dot{\hat{U}}\}_t$$
$$= \delta\{\hat{U}\}^T\left(\int_V [N]^T[N]dV\cdot\{\hat{F}_B\}_t + \int_V [N]^T[N]dA\cdot\{\hat{F}_T\}_T\right) \qquad (1.7-9)$$

よって，次のような有限要素動的平衡方程式が得られる。

$$[M]_t\{\ddot{\hat{U}}\}_t + [C]_t\{\dot{\hat{U}}\}_t + [K]_t\{\hat{U}\}_t = \{\hat{F}\}_t \qquad (1.7\text{-}10)$$

ここで，

$$[M]_t = \int_V [N]^T\rho_t[N]dV \qquad (1.7\text{-}11)$$

$$[C]_t = \int_V [N]c_t[N]dV \qquad (1.7\text{-}12)$$

$$[K]_t = \int_V [B]^T[D][B]dV \qquad (1.7\text{-}13)$$

$$[F]_t = \int_V [N]^T [N]\, dV \cdot \{\hat{F}_B\}_t + \int_A [N]^T [N]\, dA \cdot \{\hat{F}_T\}_t \qquad (1.7\text{-}14)$$

1.7.2 モーダル解析法

構造物の動的挙動を支配する平衡方程式は，有限要素法による離散化により次式のような節点変位 $\{\hat{U}_a\}$ に関する二階連立常微分方程式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{\hat{U}}_a\} + [C]\{\dot{\hat{U}}_a\} + [K]\{\hat{U}_a\} = \{\hat{F}_{(t)}\} \qquad (1.7\text{-}15)$$

ここで，$[M]$，$[C]$，$[K]$ はそれぞれ質量マトリックス，減衰マトリックス，剛性マトリックス，$\{\hat{F}_{(t)}\}$ は時間 t に依存する節点荷重ベクトルである。

いま，地震動などの時間依存の節点加速度 $\{\ddot{\hat{U}}_{g(t)}\}$ が作用する場合を考える。節点加速度 $\{\ddot{\hat{U}}_a\}$ を次の形に分離する。

$$\{\ddot{\hat{U}}_a\} = [P]\{\ddot{\hat{U}}\} + \{\ddot{\hat{U}}_{g(t)}\} \qquad (1.7\text{-}16)$$

ここで，$\{\ddot{\hat{U}}\}$ は節点の相対加速度ベクトルであり，$[P]$ は加速度入力節点と他の節点を区別するためのブーリアン（boolean matrix）である。変位と速度についても同様に分離することにより，式（1.7-15）は次のように表わすことができる。

$$[\bar{M}]\{\ddot{\hat{U}}\} + [\bar{C}]\{\dot{\hat{U}}\} + [\bar{K}]\{\hat{U}\} = [P]^T\{\hat{F}_{(t)}\} - [P]^T[M]\{\ddot{\hat{U}}_{g(t)}\} - [P]^T[C]\{\dot{\hat{U}}_g\} - [P]^T[K]\{\hat{U}_g\} \qquad (1.7\text{-}17)$$

ここで，

$$[\bar{M}] = [P]^T[M][P], \quad [\bar{C}] = [P]^T[C][P], \quad [\bar{K}] = [P]^T[K][P] \qquad (1.7\text{-}18)$$

である。式（1.7-17）の右辺第三項の減衰項が十分小さいと仮定する。また，第四項は剛体変形であると考えると，加速度入力を考慮した平衡方程式は次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\ddot{\hat{U}}\} + [\bar{C}]\{\dot{\hat{U}}\} + [\bar{K}]\{\hat{U}\} = [P]^T\{\hat{F}_{(t)}\} - [P]^T[M]\{\ddot{\hat{U}}_g\} \qquad (1.7\text{-}19)$$

(1) モーダル応答解析

モーダル応答解析は，一般化変位と基底ベクトルを用いて，一般化変位に対応する平衡方程式に変換することが基本となる。減衰項を省略した自由振動方程式は次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\ddot{\hat{U}}\} + [\bar{K}]\{\hat{U}\} = \{O\} \qquad (1.7\text{-}20)$$

自由振動は調和振動であるので，式（1.7-20）の解は次のように仮定できる。

$$\{\hat{U}\} = \{\phi\} \sin w(t - t_0) \qquad (1.7\text{-}21)$$

ここで $\{\phi\}$ は振動モードベクトル，t は時間，t_0 は時間の定数である。式（1.7-21）を式（1.7-20）へ代入すれば，$\{\phi\}$ と w の決定方程式として，次の一般化固有値問題が得られる。

$$[\bar{K}]\{\phi\} = w^2[\bar{M}]\{\phi\} \tag{1.7-22}$$

式（1.7-22）を解くことにより，N 個の固有解 $(w_1^2, \{\phi_1\})$，$(w_2^2, \{\phi_2\})$，$\cdots\cdots$，$(w_N^2, \{\phi_N\})$ が得られる。ただし，固有ベクトルは $[\bar{M}]$ について正規直交化されているものとする。

$$\{\phi_i\}^T[\bar{M}]\{\phi_j\} = \delta_{ij} \tag{1.7-23}$$

固有ベクトル $\{\phi_i\}$ を列に配したマトリックス $[\Phi]$，固有値を対角成分とするマトリックスを $[\Omega]$ とすれば，式（1.7-22）の N 個の解は次のように書ける。

$$[\bar{K}][\Phi] = [\bar{M}][\Phi][\Omega] \tag{1.7-24}$$

$$[\Phi]^T[\bar{M}][\Phi] = [I], \quad [\Phi]^T[\bar{K}][\Phi] = [\Omega] \tag{1.7-25}$$

$\{\phi_i\}$ を基底ベクトル，$\{\hat{X}\}$ を一般化変位とすれば，変位 $\{\hat{U}\}$ は次のように仮定できる。

$$\{\hat{U}\} = \{\phi_1\}X_1 + \{\phi_2\}X_2 + \cdots\cdots + \{\phi_n\}X_N \tag{1.7-26}$$

式（1.7-26）を式（1.7-19）へ代入し，前から $[\Phi]^T$ をかけると，一般化変位に対応した平衡方程式が得られる。

$$\{\ddot{\hat{X}}\} + [\overset{*}{C}]\{\dot{\hat{X}}\} + [\Omega]\{\hat{X}\} = [\Phi]^T[P]^T\{\hat{F}_{(t)}\} - [\Phi]^T[P]^T[M]\{\ddot{\hat{U}}_g\} \tag{1.7-27}$$

$$[\overset{*}{C}] = [\Phi]^T[\bar{C}][\Phi] \tag{1.7-28}$$

一般に，減衰マトリックス $[\bar{C}]$ は質量や剛性のように構造特有の特性を持つとは限らない。一般には，外力に対する構造の応答の仕方によって減衰力は変化する。ここでは減衰力が速度に比例していると仮定している。このような減衰の代表的なものとして，粘性減衰と構造減衰がある。便宜的に粘性減衰は質量に比例し，構造減衰はひずみ減衰速度を生ずるとすれば剛性に比例すると仮定できる。このような減衰 $[\bar{C}]$ は $[\bar{M}]$ と $[\bar{K}]$ の線形結合として表わされる。

$$[\bar{C}] = \alpha[\bar{M}] + \beta[\bar{K}], \quad [\overset{*}{C}] = \lceil \alpha + \beta w_i^2 \rfloor \tag{1.7-29}$$

$\lceil \alpha+\beta w_i^2 \rfloor$ は i 番目の対角項に $\alpha+\beta w_i^2$ を配したマトリックスである。あと一つ便宜的なものとしては，振動数に比例したモーダル減衰が考えられる。

$$[\bar{C}] = [\bar{M}][\Phi]\lceil 2dw_i \rfloor[\Phi]^T[\bar{M}], \quad [\overset{*}{C}] = \lceil 2dw_i \rfloor \tag{1.7-30}$$

次に，式（1.7-27）の右辺の荷重項を考察する。

$$[\Phi]^T[P]^T\{\hat{F}_{(t)}\} = \{\hat{f}_{(t)}\} \tag{1.7-31}$$

ここで，

$$\hat{f}_{(t)i} = \{\phi_i\}^T[P]^T\{\hat{F}\}$$

$$[\boldsymbol{\phi}]^T[\boldsymbol{P}]^T[\bar{\boldsymbol{M}}]\{\hat{\ddot{\boldsymbol{U}}}_g\} = \begin{bmatrix} \{\boldsymbol{r}_1\}^T \\ \{\boldsymbol{r}_2\}^T \\ \vdots \\ \{\boldsymbol{r}_N\}^T \end{bmatrix} \{\hat{\ddot{\boldsymbol{U}}}_{g(t)}\} = \{\hat{\boldsymbol{g}}_{(t)}\} \qquad (1.7\text{-}32)$$

$$\{\boldsymbol{r}_i\} = \{\boldsymbol{\phi}_i\}^T[\boldsymbol{P}]^T[\boldsymbol{M}]$$

荷重項もモードに対応したベクトルで表示される。よって，減衰マトリックスとして式（1.7-29）の比例減衰や式（1.7-30）のモーダル減衰を考えると，式（1.7-27）の基礎方程式はモード数Nに対応した1自由度二階常微分方程式を解く問題に帰着する。例えば，i番目の方程式は次のように表わされる。

$$\ddot{X}_i + 2hw_i\dot{X}_i + w_i^2 X_i = \hat{f}_{(t)i} - \hat{g}_{(t)i} \qquad (1.7\text{-}33)$$

ここで，比例減衰では $h=(\alpha+\beta w_i^2)/2w_i$ ．，モーダル減衰では $h=d$ である。

式（1.7-33）の外荷重は時系列として与えられることが多いので，データ間を線形に仮定することにより，式（1.7-33）は陽な形に解くことができる。式（1.7-33）を次のように仮定する。

$$\ddot{X}_i + 2hw_i\dot{X}_i + w_i^2 X_i = a+bt \qquad (1.7\text{-}34)$$

式（1.7-34）の一般解は次のように与えられる。

$$X_i = c_1 e^{-hw_i t}\cos\sqrt{w_i^2-w_i^2h^2}\,t + c_2 e^{-hw_i t}\sin\sqrt{w_i^2-w_i^2}\,t + \frac{a+bt}{w_i^2} - \frac{2hb}{w_i^3} \qquad (1.7\text{-}35)$$

ここで，c_1 と c_2 は初期より定まる積分定数である。例としてステップnよりステップ$n+1$への X_i を計算する手順を考える。ステップnの時刻をt_n，外荷重を$\bar{f}_n$，ステップ$n+1$のとき t_{n+1}，$\bar{f}_{n+1}$ とすると外荷重は，

$$b = \frac{\bar{f}_{n+1}-\bar{f}_n}{t_{n+1}-t_n}, \quad a = \bar{f}_n - bt_n \qquad (1.7\text{-}36)$$

よって，時刻 t_n の一般化変位 X_i とその微分 $\dot{X}_i$ より積分定数 c_1 と c_2 を定めれば，$t_n \leqq t \leqq t_{n+1}$ での時刻tの一般化変位 X_i は式（1.7-35）より直接求めることができる。そのときの応答は式（1.7-26′）で求めることができる。

$$\{\hat{\boldsymbol{U}}_t\} = \sum_{i=1}^{N}\{\boldsymbol{\phi}_i\}X_i \qquad (1.7\text{-}26')$$

(2) スペクトル応答解析

動的平衡方程式（1.7-27）の外力ベクトル $\{\hat{\boldsymbol{F}}_{(t)}\}=\{\boldsymbol{O}\}$ とすると，一変化変位での平衡方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{X}_i + 2hw_i\dot{X}_i + w_i^2 X_i = -\hat{g}_i \qquad (1.7\text{-}37)$$

$$\hat{g}_i = r_{iX}^1 \hat{\ddot{u}}_{gX}^1 + r_{iY}^1 \hat{\ddot{u}}_{gY}^1 + r_{iZ}^1 \hat{\ddot{u}}_{gZ}^1 + \cdots\cdots + r_{iX}^n \hat{\ddot{u}}_{gX}^n + r_{iY}^n \hat{\ddot{u}}_{gY}^n + r_{iZ}^n \hat{\ddot{u}}_{gZ}^n \qquad (1.7\text{-}38)$$

固有振動数 w_i と減衰 h における加速度 $\{\hat{\ddot{U}}_{g(t)}\}$ に対応したスペクトル変位を S_D とすれば，基底ベクトル $\{\boldsymbol{\phi}_i\}$ に関する変位 $\{\boldsymbol{\phi}_i\}X_i$ の絶対最大値は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\{\hat{U}_i^{\max}\} = \{\boldsymbol{\phi}_i\}\big(&|r_{iX}^1|\, S_{DX}(w_i,h) + |r_{iY}^1|\, S_{DY}(w_i,h) \\ &+ |r_{iZ}^1|\, S_{DZ}(w_i,h) + \cdots\cdots + |r_{iX}^n|\, S_{DX}(w_i,h) \\ &+ |r_{iY}^n|\, S_{DY}(w_i,h) + |r_{iZ}^n|\, S_{DZ}(w_i,h)\big)\end{aligned} \qquad (1.7\text{-}39)$$

よって，最大応答は次のように仮定できる。

$$\{\hat{U}^{\max}\} = \left(\sum_{i=1}^{N} \{\hat{U}_i^{\max}\}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.7\text{-}40)$$

一般にスペクトル変位 S_D，スペクトル速度 S_V，スペクトル加速度 S_A には次の関係が仮定できる。

$$S_D = \frac{1}{w\sqrt{1-h^2}} S_V, \quad S_A = \frac{w}{\sqrt{1-h^2}} S_V \qquad (1.7\text{-}41)$$

1.7.3 直接積分解析法

減衰マトリックス $[\bar{C}]$ が一般的に表わされる場合，非減衰系の固有ベクトルを用いて連立動的平衡方程式を対角化することはできない。よって，式（1.7-19）の連立常微分方程式を差分法などにより時間方向に離散化を仮定し，時間増分形式で解析することになる。

差分法のスキームとしては，時刻 t で平衡方程式を仮定するエキスプリシットなスキームと，時刻 $t+\Delta t$ で方程式を立てるインプリシットなものがある。前者の方法は積分の時間増分 Δt により解析結果が不安定になることがあるが，後者の方法では時間増分 Δt に依存しない無条件安定のスキームが得られるので直接積分法では多く採用されている。

インプリシットなスキームの代表的なものとしては，Newmark の β 法，Houbolt 法，Wilson の θ 法などがある。Goudereau と Talyer，Bathe はこれらのスキームを詳しく調べ，Newmark の β 法が他のものに比べて優れていることを検証している。

ここでは，Newmark の β 法を用いた動的解析の有限要素法定式を説明する。

(1) Newmark の β 法による定式

時刻 $t+\Delta t$ での平衡方程式は式（1.7-19）より次のように表わされる。

$$[\bar{M}]\{\hat{\ddot{U}}\}_{t+\Delta t} + [\bar{C}]\{\hat{\dot{U}}\}_{t+\Delta t} + [\bar{K}]\{\hat{U}\}_{t+\Delta t} = \{\bar{F}\}_{t+\Delta t} \qquad (1.7\text{-}42)$$

$$\{\bar{F}\}_{t+\Delta t} = [P]^T \{\hat{F}\}_{t+\Delta t} - [P]^T [M] \{\hat{\ddot{U}}_{g(t+\Delta t)}\} \tag{1.7-43}$$

変位と外荷重を次のように増分形で表わす。

$$\{\hat{U}\}_{t+\Delta t} = \{\hat{U}\}_t + \Delta\{\hat{U}\} \tag{1.7-44}$$

$$\{\bar{F}\}_{t+\Delta t} = \{\bar{F}\}_t + \Delta\{\bar{F}\} \tag{1.7-45}$$

Newmark の β 法は線形加速度法の一拡張であるので，時刻 $t+\Delta t$ の速度と変位を次のように仮定する。

$$\{\hat{\dot{U}}\}_{t+\Delta t} = \{\hat{\dot{U}}\}_t + \left((1-\gamma)\{\hat{\ddot{U}}\}_t + \gamma\{\hat{\ddot{U}}\}_{t+\Delta t}\right)\Delta t \tag{1.7-46}$$

$$\{\hat{U}\}_{t+\Delta t} = \{\hat{U}\}_t + \{\hat{\dot{U}}\}_t \Delta t + \left(\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\hat{\ddot{U}}\}_t + \beta\{\hat{\ddot{U}}\}_{t+\Delta t}\right)\Delta t^2 \tag{1.7-47}$$

γ と β は差分スキームの定数であり，無条件安定のためには次の条件をみたす必要がある。

$$\gamma \geqq 0.5, \quad \beta \geqq \frac{1}{4}(0.5+\gamma)^2 \tag{1.7-48}$$

$\gamma = 0.5$，$\beta = 0.25$ のとき Newmark の平均加速法といわれるもので，最も良い精度特性が得られるとされる。
式（1.7-44）を式（1.7-47）へ代入して時刻 $t+\Delta t$ での加速度を求める。

$$\{\hat{\ddot{U}}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\Delta\{\hat{U}\} - \Delta t\{\hat{\dot{U}}\}_t - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t^2\{\hat{\ddot{U}}\}_t\right) \tag{1.7-49}$$

式（1.7-49）を式（1.7-46）へ代入して時刻 $t+\Delta t$ での速度を求める。

$$\{\hat{\dot{U}}\}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta\{\hat{U}\} + \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\{\hat{\dot{U}}\}_t - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\Delta t\{\hat{\ddot{U}}\}_t \tag{1.7-50}$$

式（1.7-42）へ式（1.7-44），（1.7-45），（1.7-49），（1.7-50）を代入して $\Delta\{\hat{U}\}$ について整理する。

$$[\bar{K}_D]\Delta\{\hat{U}\} = \Delta\{\bar{F}\} + \{\hat{R}\} + [\bar{M}]\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\{\hat{\dot{U}}\}_t + \frac{1}{2\beta}\{\hat{\ddot{U}}\}_t\right) + [\bar{C}]\left(\frac{\gamma}{\beta}\{\hat{\dot{U}}\}_t + \left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\Delta t\{\hat{\ddot{U}}\}_t\right) \tag{1.7-51}$$

$$[\bar{K}_D] = \frac{1}{\beta\Delta t^2}[\bar{M}] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\bar{C}] + [\bar{K}] \tag{1.7-52}$$

$$\{\hat{R}\} = \{\bar{F}\}_t - [\bar{K}]\{\hat{U}\}_t - [\bar{M}]\{\hat{\dot{U}}\}_t - [\bar{C}]\{\hat{\ddot{U}}\}_t \tag{1.7-53}$$

以上の定式化は線形解析を念頭においたものである。次に材料非線形および幾何学的非線形性を考慮した定式を考える。これらの非線形特性は剛性の評価において顕著なものであると限定できるので，式（1.7-42）の剛性マト

リックスの項を増分形で定式化する。いま応力を $\{\sigma\}_t+\Delta\{\sigma\}$ として，仮想変位 $\delta\{\hat{U}\}$ による仮想ひずみを $\delta\{\varepsilon\}$ とすれば内部仮想仕事は次のように表わされる。

$$\int_v \delta\{\varepsilon\}^T\left(\{\sigma\}_t+\Delta\{\sigma\}\right)dv=\delta\{\hat{U}\}\left(\int_v [B]^T\{\sigma\}_t dv+\int_v [B]^T[D]\cdot[B]dv\cdot\Delta\{\hat{U}\}\right)$$
$$\fallingdotseq \delta\{\hat{U}\}\left(\int_v [B]^T\{\sigma\}_t dv+[K_{NL}]\Delta\{\hat{U}\}\right) \qquad (1.7-54)$$

式（1.7-54）を用いて，非線形解析での動的方程式は次のようになる。

$$[\bar{K}_{DN}]\Delta\{\hat{U}\}=\Delta\{\bar{F}\}+\{\hat{R}\}+[\bar{M}]\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\{\hat{U}\}_t+\frac{1}{2\beta}\{\hat{U}\}_t\right)$$
$$+[\bar{C}]\left(\frac{\gamma}{\beta}\{\hat{U}\}_t+\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\Delta t\{\hat{U}\}_t\right) \qquad (1.7-55)$$

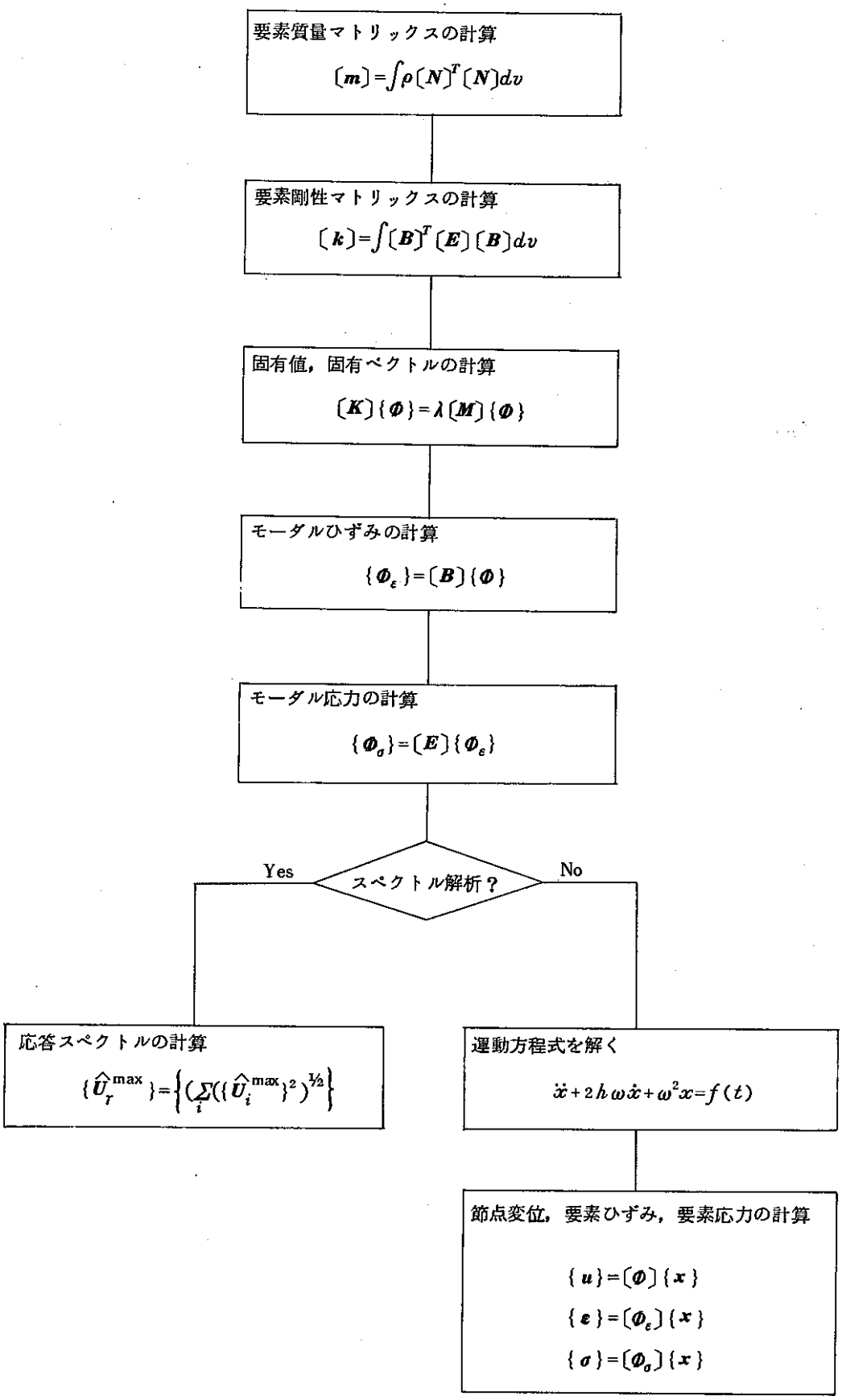
$$[\bar{K}_{DN}]=\frac{1}{\beta\Delta t^2}[\bar{M}]+\frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\bar{C}]+[\bar{K}_{NL}] \qquad (1.7-56)$$

$$\{\hat{R}\}=\{\bar{F}\}-[P]^T\int_v [B]^T\{\sigma\}_t dv\cdot[P]-[\bar{M}]\{\ddot{\hat{U}}\}_t-[\bar{C}]\{\dot{\hat{U}}\}_t \qquad (1.7-57)$$

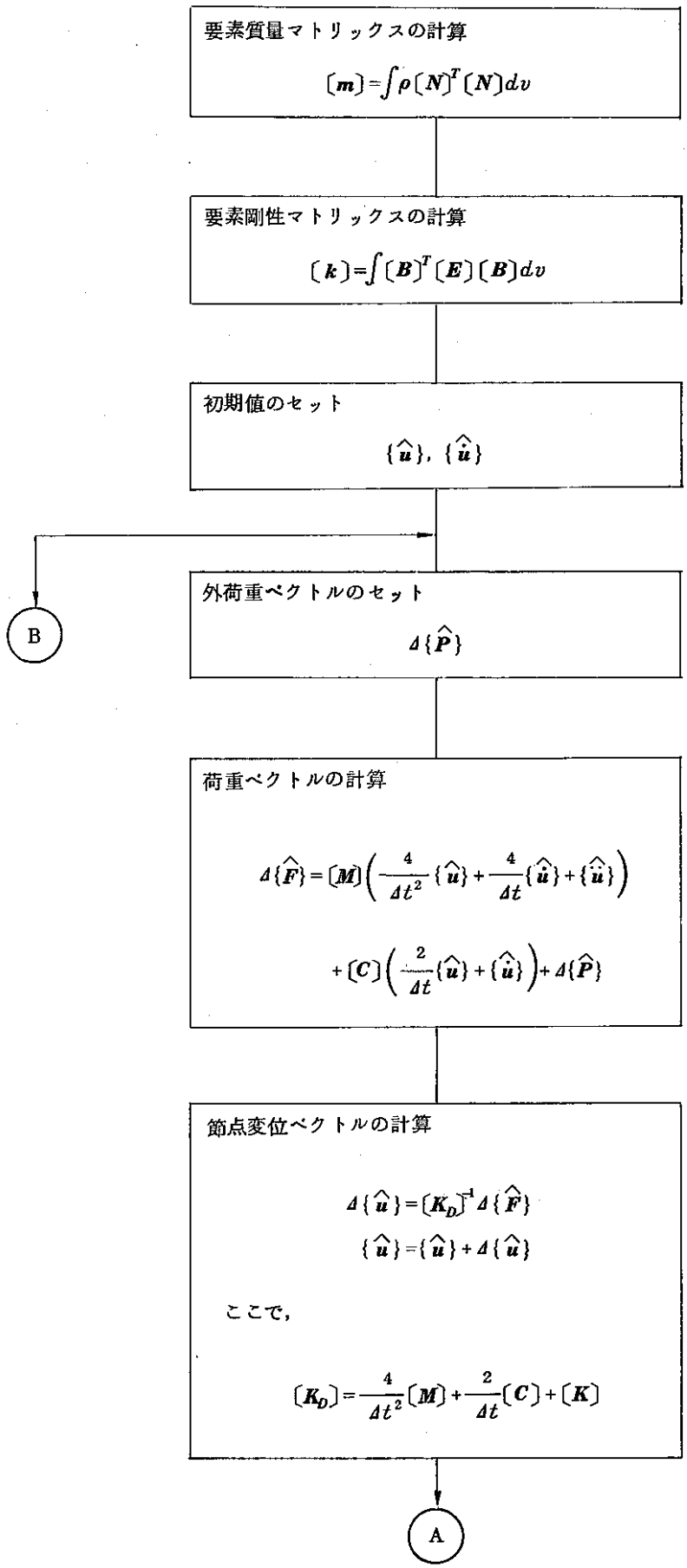
$[\bar{K}_{NL}]$ は材料非線形と幾何学的非線形性を考慮した剛性マトリックスである。詳細については，前節の非線形解析および大変形解析において説明されている。式（1.7-55）において，剛性マトリックス $[\bar{K}_{NL}]$ は変位 $\Delta\{\hat{U}\}$ に依存したものであるが，線形であると仮定する。そして，各時間増分ステップにおいて修正 Newton-Raphson 法などにより繰り返し計算を行なうことにより，解析の精度向上を図ることができる。

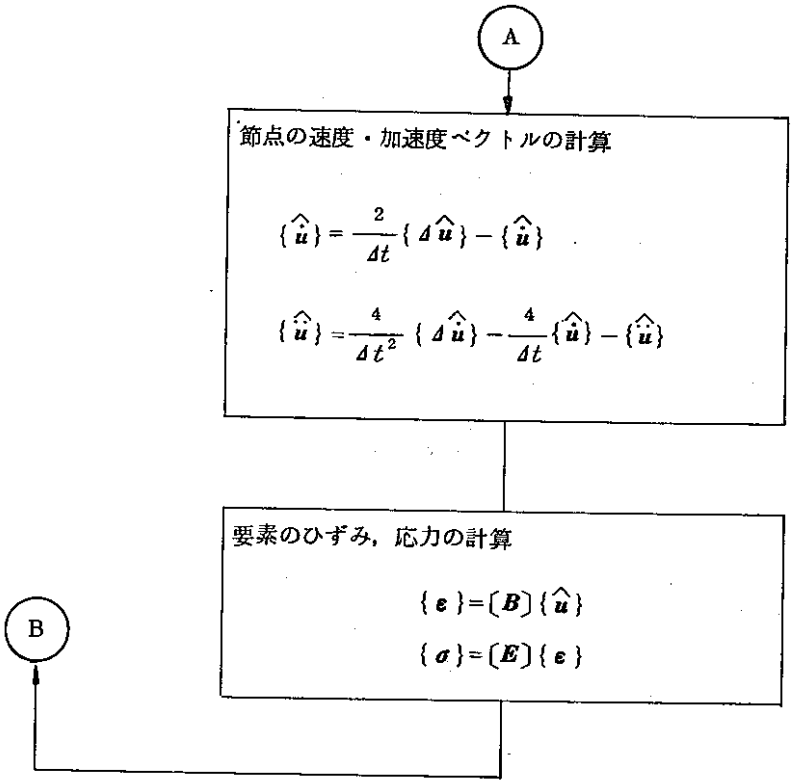
1.7.4　動的解析のアルゴリズム

(1)　モーダル法とスペクトル解析

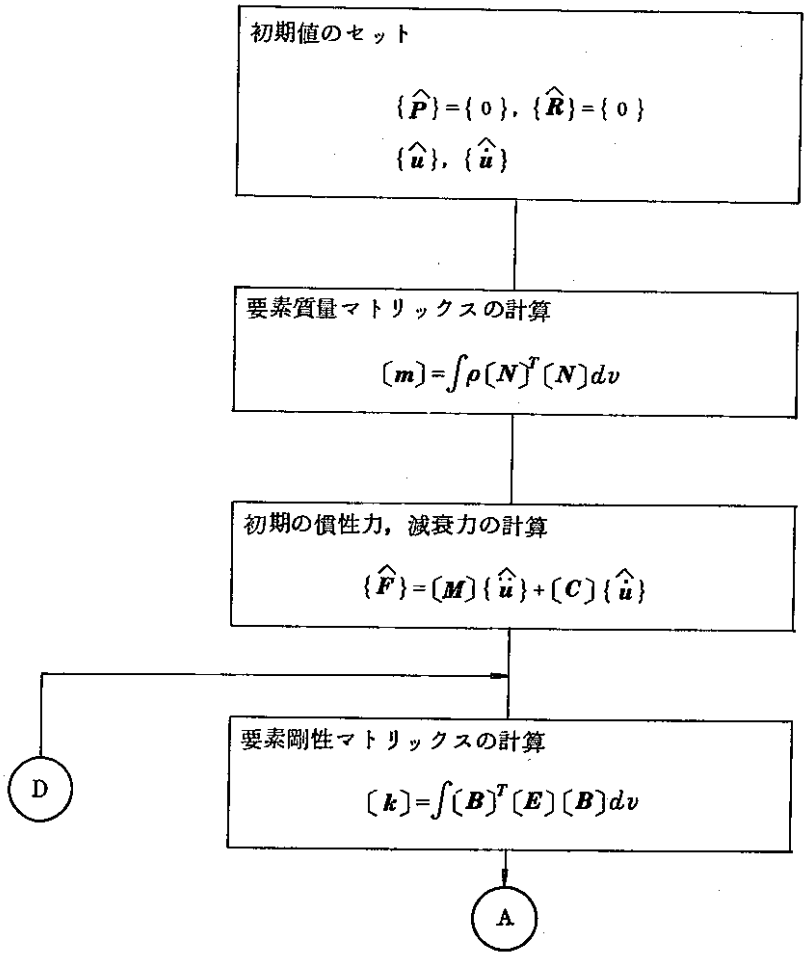


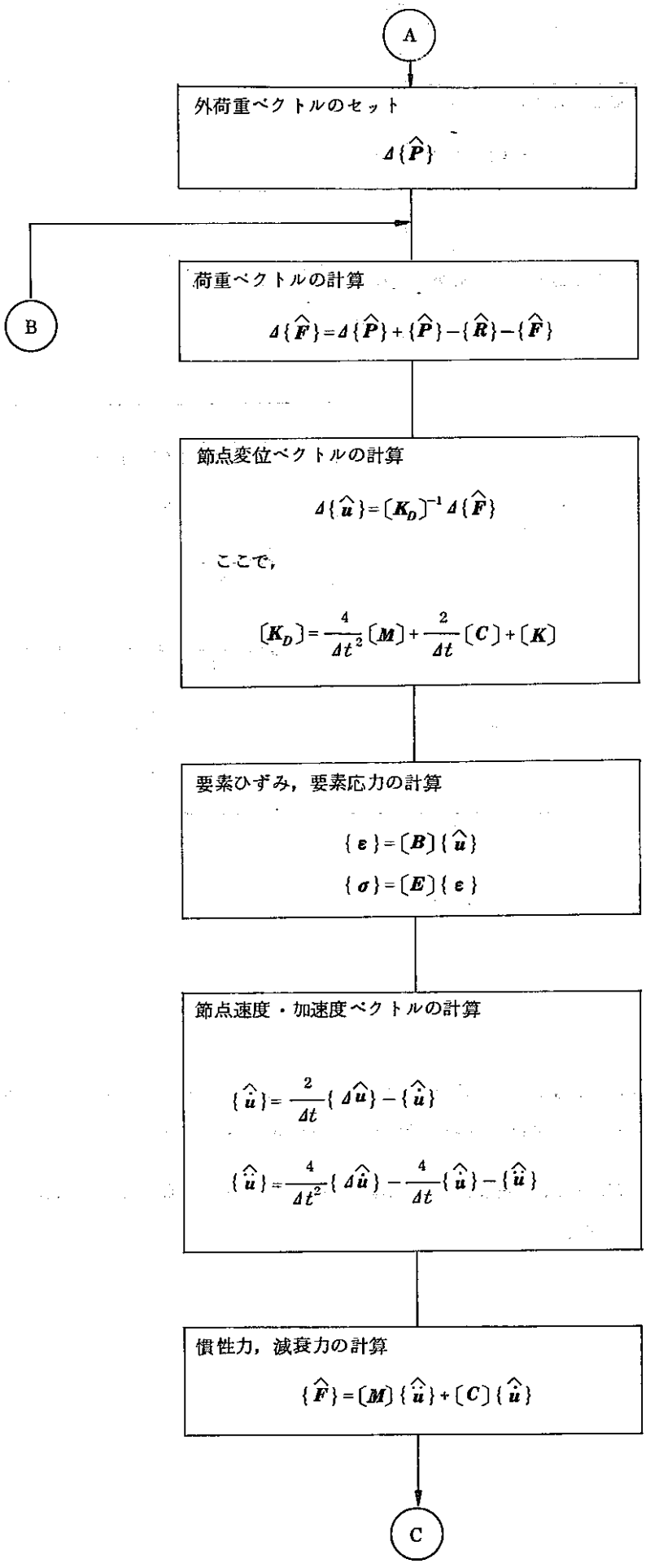
(2) 線形直接積分法

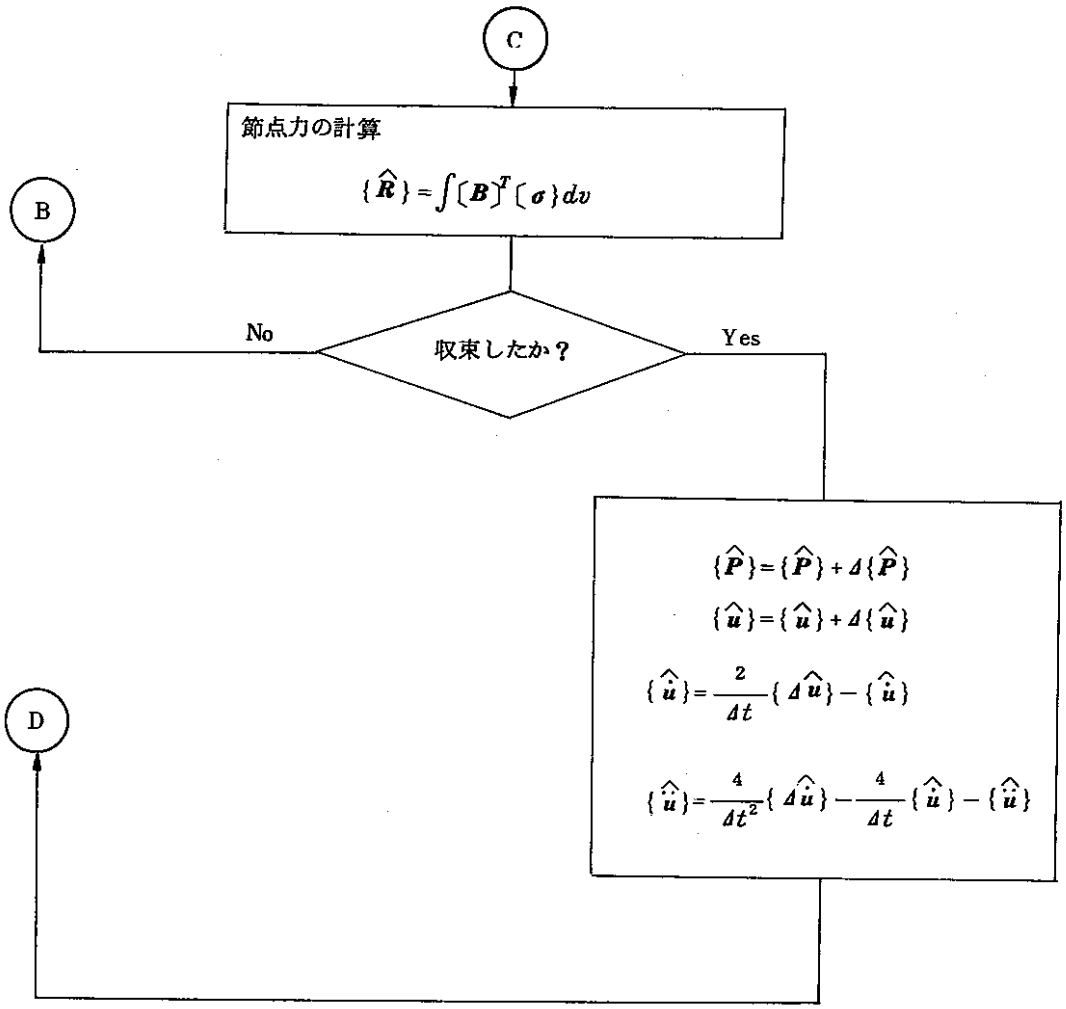

要素質量マトリックスの計算
$[m]=\int\rho[N]^T[N]dv$
要素剛性マトリックスの計算
$[k]=\int[B]^T[E][B]dv$
初期値のセット
$\{\hat{u}\},\ \{\hat{\dot{u}}\}$
B
外荷重ベクトルのセット
$\Delta\{\hat{P}\}$
荷重ベクトルの計算
$\Delta\{\hat{F}\}=[M]\left(\frac{4}{\Delta t^2}\{\hat{u}\}+\frac{4}{\Delta t}\{\hat{\dot{u}}\}+\{\hat{\ddot{u}}\}\right)$
$+[C]\left(\frac{2}{\Delta t}\{\hat{u}\}+\{\hat{\dot{u}}\}\right)+\Delta\{\hat{P}\}$
節点変位ベクトルの計算
$\Delta\{\hat{u}\}=[K_D]^{-1}\Delta\{\hat{F}\}$
$\{\hat{u}\}=\{\hat{u}\}+\Delta\{\hat{u}\}$
ここで,
$[K_D]=\frac{4}{\Delta t^2}[M]+\frac{2}{\Delta t}[C]+[K]$
A


A
節点の速度・加速度ベクトルの計算
$\{\hat{\dot{u}}\}=\frac{2}{\Delta t}\{\Delta\hat{u}\}-\{\hat{\dot{u}}\}$
$\{\hat{\ddot{u}}\}=\frac{4}{\Delta t^2}\{\Delta\hat{u}\}-\frac{4}{\Delta t}\{\hat{\dot{u}}\}-\{\hat{\ddot{u}}\}$
要素のひずみ，応力の計算
$\{\varepsilon\}=[B]\{\hat{u}\}$
$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$
B

(3) 非線形直接積分法


初期値のセット
$\{\hat{P}\}=\{0\}$, $\{\hat{R}\}=\{0\}$
$\{\hat{u}\}$, $\{\hat{\dot{u}}\}$
要素質量マトリックスの計算
$[m]=\int\rho[N]^T[N]dv$
初期の慣性力，減衰力の計算
$\{\hat{F}\}=[M]\{\hat{\ddot{u}}\}+[C]\{\hat{\dot{u}}\}$
D
要素剛性マトリックスの計算
$[k]=\int[B]^T[E][B]dv$
A


A
外荷重ベクトルのセット
$\Delta\{\hat{P}\}$
B
荷重ベクトルの計算
$\Delta\{\hat{F}\}=\Delta\{\hat{P}\}+\{\hat{R}\}-\{\hat{F}\}$
節点変位ベクトルの計算
$\Delta\{\hat{u}\}=[K_D]^{-1}\Delta\{\hat{F}\}$
ここで,
$[K_D]=\frac{4}{\Delta t^2}[M]+\frac{2}{\Delta t}[C]+[K]$
要素ひずみ，要素応力の計算
$\{\varepsilon\}=[B]\{\hat{u}\}$
$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\}$
節点速度・加速度ベクトルの計算
$\{\dot{\hat{u}}\}=\frac{2}{\Delta t}\{\Delta\hat{u}\}-\{\dot{\hat{u}}\}$
$\{\ddot{\hat{u}}\}=\frac{4}{\Delta t^2}\{\Delta\hat{u}\}-\frac{4}{\Delta t}\{\dot{\hat{u}}\}-\{\ddot{\hat{u}}\}$
慣性力，減衰力の計算
$\{\hat{F}\}=[M]\{\ddot{\hat{u}}\}+[C]\{\dot{\hat{u}}\}$
C



〔参考文献〕

1) G. L. Goudreau and R. L. Taylor, "Evaluation of Numerical Integration Methods in Elastodynamics", Comput. Meth. Appl. Mechan. Engng 2, 69-97, 1972.

2) K. J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc., 1976.

1.8 熱伝導解析

本節では，FINAS システムの熱伝導解析の有限要素法による定式について説明する。

1.8.1 連続体の熱伝導方程式

内部発熱がある場合の熱伝導問題の基礎方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)+Q-c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=0 \qquad (1.8-1)$$

x_i は空間座標，T は温度，K_{ij} は熱伝導係数，Q は内部発熱量，t は時間，c は比熱，ρ は密度である。

境界条件としては，次のものが一般的に考えられる。

a）境界 S_1 で温度が規定される場合

$$T=T_P \qquad (1.8-2)$$

b）境界 S_2 で熱が入力される場合

$$-k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i=q \qquad (1.8-3)$$

n_i は境界 S_2 上における外向き法線ベクトルの成分であり，q は境界 S_2 において単位面積あたりに入熱される熱量である。

c）境界面 S_3 で熱伝達がある場合

$$-k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i=h(T-T_0) \qquad (1.8-4)$$

h は熱伝達係数であり，T_0 は外部雰囲気温度である。境界面 S_3 が熱伝達リンク状態である場合，T と T_0 は熱伝達リンク両端での温度となる。

d）境界 S_4 で放射をうける場合

$$-k_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_i}n_i=\sigma\varepsilon F(T^4-T_\infty^4) \qquad (1.8-5)$$

σ は Stefan-Boltzmann 定数，ε は放射係数，F は表面の形状係数，T_∞ は放射源の温度である。

時刻 t において，式（1.8-1）と等価で，式（1.8-3）と式（1.8-4）を自然境界条件とする汎関数 χ は次式で与えられる。

$$\chi=\int_V \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} + c\rho \cdot {}_T - QT \right\} dV$$

$$+\int_{S_2} qT dS + \int_{S_3} \frac{1}{2} h (T-T_0)^2 dS \qquad (1.8-6)$$

1.8.2 有限要素法による定式

有限要素法による定式化において，解析すべき領域をM個の有限要素で離散化する。そして全体での汎関数χを次のように表わす。

$$\chi = \sum_{m=1}^{M} \chi_m \qquad (1.8-7)$$

χ_mは式（1.8-6）の積分の定義域をm番目の要素に適用したものである。

次に汎関数 χ_mを要素の節点温度を用いて表示する。要素mの内部における温度 T_mとその時間微分 $\dot{T}_m$ は節点での温度とその時間微分値により次のように補間される。

$$T_m = \lfloor \boldsymbol{\phi} \rfloor_m \{\hat{\boldsymbol{T}}\}_m, \quad \dot{T}_m = \lfloor \boldsymbol{\phi} \rfloor_m \{\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}\}_m \qquad (1.8-8)$$

$\lfloor \boldsymbol{\phi} \rfloor_m$ は要素mの補間関数である。 $\{\hat{\boldsymbol{T}}\}_m$ は要素の節点温度であり，$\{\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}\}$ はその時間微分値である。式（1.8-6）の汎関数を要素mについて求めると次のようになる。

$$\chi_m = \frac{1}{2} \{\hat{\boldsymbol{T}}\}_m^T ([\boldsymbol{K}_1]_m + [\boldsymbol{K}_2]_m) \{\hat{\boldsymbol{T}}\}_m + \{\hat{\boldsymbol{T}}\}_m^T [\boldsymbol{C}]_m \{\dot{\hat{\boldsymbol{T}}}\}_m$$

$$- \{\hat{\boldsymbol{T}}\}_m (\{\hat{\boldsymbol{Q}}_1\}_m + \{\hat{\boldsymbol{Q}}_2\}_m + \{\hat{\boldsymbol{Q}}_3\}_m) \qquad (1.8-9)$$

$$[\boldsymbol{K}_1]_m = \int_{V_m} \frac{\partial \{\boldsymbol{\phi}\}_m}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial \lfloor \boldsymbol{\phi} \rfloor_m}{\partial x_j} dv \qquad (1.8-10)$$

$$[\boldsymbol{K}_2]_m = \int_{S_3^m} h \{\boldsymbol{\phi}\}_m \lfloor \boldsymbol{\phi} \rfloor_m ds \qquad (1.8-11)$$

$$[\boldsymbol{C}]_m = \int_{V_m} c\rho \{\boldsymbol{\phi}\}_m \lfloor \boldsymbol{\phi} \rfloor_m dv \qquad (1.8-12)$$

$$\{\hat{\boldsymbol{Q}}_1\}_m = \int_{V_m} Q \{\boldsymbol{\phi}\}_m dv \qquad (1.8-13)$$

$$\{\hat{\boldsymbol{Q}}_2\}_m = -\int_{S_2^m} q \{\boldsymbol{\phi}\}_m ds \qquad (1.8-14)$$

$$\{\hat{Q}_3\}_m = \int_{S_3^m} h T_0 \{\phi\}_m ds \qquad (1.8\text{-}15)$$

$[K_1]_m$, $[K_2]_m$, $[C]_m$ は要素の熱伝導マトリックス，熱伝達マトリックス，熱容量マトリックスである。また $\{Q_1\}_m$, $\{Q_2\}_m$, $\{Q_3\}_m$ は発熱量，入熱，雰囲気温度による熱伝達と等価な節点熱流ベクトルである。要素間が熱伝達リンク状態である場合には式（1.8-11）が修正され，式（1.8-15）の雰囲気温度による熱流ベクトルは零である。熱伝達リンク要素の補間関数を $\lfloor\bar{\phi}\rfloor_m$，熱伝達境界面を $\bar{S}_3^m$ と仮定すれば，熱伝達リンクマトリックスは次のように定義される。

$$[K_2]_m = \int_{\bar{S}_3^m} h \{\bar{\phi}\}_m \lfloor\bar{\phi}\rfloor_m ds \qquad (1.8\text{-}16)$$

1.8.3 全体有限要素の支配方程式

要素単位での汎関数 χ_m が得られたので，次に全体領域での汎関数 χ を求め，これを最小とするための支配方程式を導く。

$$\chi = \sum_{m=1}^{M} \chi_m = \frac{1}{2}\{\hat{T}\}^T([K_1]+[K_2])\{\hat{T}\} + \{\hat{T}\}^T[C]\{\dot{\hat{T}}\} - \{\hat{T}\}^T(\{Q_1\}+\{Q_2\}+\{Q_3\}) \qquad (1.8\text{-}17)$$

$\{\hat{T}\}$, $\{\hat{Q}_1\}$, $\{\hat{Q}_2\}$, $\{\hat{Q}_3\}$ は $\{\hat{T}\}_m$, $\{\hat{Q}_1\}_m$, $\{\hat{Q}_2\}_m$, $\{\hat{Q}_3\}_m$ をすべての要素について集めたものである。$[K_1]$, $[K_2]$, $[C]$ は各要素の $[K_1]_m$, $[K_2]_m$, $[C]_m$ を対角に配したマトリックスである。

要素節点での温度 $\{\hat{T}\}$ およびその時間微分 $\{\dot{\hat{T}}\}$ は，全領域の離散化モデルを構成する節点での温度 $\{T\}$ および $\{\dot{T}\}$ と次のように関係づけられる。

$$\{\hat{T}\} = [A]\{T\}, \quad \{\dot{\hat{T}}\} = [A]\{\dot{T}\} \qquad (1.8\text{-}18)$$

$[A]$ マトリックスは要素の結合状態を表わすブーリアンマトリックス（boolean matrix）である。式（1.8-18）を式（1.8-17）へ代入する。

$$\chi = \frac{1}{2}\{T\}^T[K]\{T\} + \{T\}^T[C]\{\dot{T}\} - \{T\}^T\{Q\} \qquad (1.8\text{-}19)$$

$$[K] = [A]^T([K_1]+[K_2])[A] \qquad (1.8\text{-}20)$$

$$[C] = [A]^T[C][A] \qquad (1.8\text{-}21)$$

$$\{Q\} = [A]^T(\{\hat{Q}_1\}+\{\hat{Q}_2\}+\{\hat{Q}_3\}) \qquad (1.8\text{-}22)$$

$[K]$, $[C]$, $\{Q\}$ は全体領域の熱伝導マトリックス，熱容量マトリックス，等価熱流ベクトルである。

汎関数 χ の停留値は，最小値を与えるものである。χ の最小値を決定する問題から適当な境界条件を伴った微分

方程式が得られ，これが支配方程式となる。χが極値をとるための必要条件は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \{O\} \tag{1.8-23}$$

したがって式(1.8-19)，式(1.8-23)より，次の支配方程式が得られる。

$$[K]\{T\}+[C]\{\dot{T}\}=\{Q\} \tag{1.8-24}$$

定常熱伝導解析の場合には式(1.8-24)の左辺第2項を零とおくことにより次の支配方程式が得られる。

$$[K]\{T\}=\{Q\} \tag{1.8-25}$$

境界条件として放射を考慮する場合では，支配方程式が非線形となり，式(1.8-24)と式(1.8-25)の右辺が修正され，反復計算が必要となる。

1.8.4 非定常支配方程式の解法

非定常熱伝導解析の支配方程式である1階のマトリックス常微分方程式を差分法で解く方法について説明する。時間tにおける節点温度$\{T\}_t$を次のように2次式で仮定する。

$$\{T\}_t = \{\alpha_0\}+\{\alpha_1\}t+\{\alpha_2\}t^2 \tag{1.8-26}$$

時間tと$t+\Delta t$における節点温度とその時間微分$\{\dot{T}\}_t$，$\{T\}_t$，$\{T\}_{t+\Delta t}$を用いて，式(1.8-26)を$\{\dot{T}\}_{t+\Delta t}$について表わすと次のようになる。

$$\{T\}_{t+\Delta t} = \{T\}_t+\{\dot{T}\}_t\Delta t+\frac{1}{2}(\{\dot{T}\}_{t+\Delta t}-\{\dot{T}\}_t)\Delta t \tag{1.8-27}$$

これを一般化して次のように表わすこともできる。

$$\{T\}_{t+\Delta t} = \{T\}_t+\{\dot{T}\}_t\Delta t+\beta(\{\dot{T}\}_{t+\Delta t}-\{\dot{T}\}_t)\Delta t \tag{1.8-28}$$

ここで$\beta=\frac{1}{2}$は式(1.8-27)と同じ中央差分であり，$\beta=0$は前進差分，$\beta=1$は後退差分である。式(1.8-28)を$\{\dot{T}\}_{t+\Delta t}$について展開すると次のように表わされる。

$$\beta\{\dot{T}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\{T\}_{t+\Delta t}-\frac{1}{\Delta t}\{T\}_t-(1-\beta)\{\dot{T}\}_t \tag{1.8-29}$$

式(1.8-24)のような1階の常微分連立方程式の解法としては，Crank-Nicolson法がよく用いられる。Crank-Nicolson法では時間$t+\Delta t$で式(1.8-24)を導くことが基本となる。ここでは時間$t+\beta\Delta t$で方程式を導く一般化Crank-Nicolson法について説明する。時間$t+\beta\Delta t$で式(1.8-24)を導くと次のようになる。

$$\begin{aligned}[K](\beta\{T\}_{t+\Delta t}+(1-\beta)\{T\}_t)+[C](\beta\{\dot{T}\}_{t+\Delta t}+(1-\beta)\{\dot{T}\}_t)\\ =\beta\{Q\}_{t+\Delta t}+(1-\beta)\{Q\}_t\end{aligned} \tag{1.8-30}$$

式(1.8-30)に式(1.8-29)を代入すると次式が得られる。

$$\left(\beta[K]+\frac{1}{\Delta t}[C]\right)\{T\}_{t+\Delta t}$$
$$=\left(-(1-\beta)[K]+\frac{1}{\Delta t}[C]\right)\{T\}_t+\beta\{Q\}_{t+\Delta t}+(1-\beta)\{Q\}_t \qquad (1.8-31)$$

ここで $[K]$, $[C]$, $\{Q\}_{t+\Delta t}$ は時間 $t+\beta\Delta t$ での材料特性(熱伝導率, 比熱, 密度, 熱伝達係数)で計算されるものであるので, 材料特性が温度依存で与えられる場合は, 非線形問題となり反復計算が必要となる。

非線形問題の反復計算の代りに FINAS では予測子-修正子法(Predictor-corrector method)を用いている。この方法では, はじめに時間tでの温度 $\{T\}_t$ により $[K]$, $[C]$, $\{Q\}_{t+\Delta t}$ を求める。

$$\left(\beta[K]_t+\frac{1}{\Delta t}[C]_t\right)\{\overset{*}{T}\}_{t+\Delta t}$$
$$=\left(-(1-\beta)[K]_t+\frac{1}{\Delta t}[C]_t\right)\{T\}_t+\beta\{Q\}_{t+\Delta t}+(1-\beta)\{Q\}_t \qquad (1.8-32)$$

上式を $\{\overset{*}{T}\}_{t+\Delta t}$ について解き, 次式(1.8-33)で示す温度 $\{\tilde{T}\}$ で $[K]$, $[C]$, $\{Q\}$ を計算する。

$$\{\tilde{T}\}=\beta\{\overset{*}{T}\}_{t+\Delta t}+(1-\beta)\{T\}_t \qquad (1.8-33)$$

再度, 式(1.8-32)を解くことにより時間 $t+\Delta t$ の温度 $\{T\}_{t+\Delta t}$ を求めることになる。

次に増分形での支配方程式を求める。式(1.8-31)における $\{T\}_{t+\Delta t}$, $\{Q\}_{t+\Delta t}$ は次のように表わされる。

$$\{T\}_{t+\Delta t}=\{T\}_t+\Delta\{T\} \qquad (1.8-34)$$

$$\{Q\}_{t+\Delta t}=\{Q\}_t+\Delta\{Q\} \qquad (1.8-35)$$

式(1.8-31)に式(1.8-34), (1.8-35)を代入し, $\Delta\{T\}$ について整理する。

$$\left(\beta[K]+\frac{1}{\Delta t}[C]\right)\Delta\{T\}=-[K]\{T\}_t+\{Q\}_t+\beta\Delta\{Q\} \qquad (1.8-36)$$

FINAS では式(1.8-36)を用いて増分形式で定式化し, 通常は $\beta=\frac{1}{2}$ を用いた中央差分スキームで解析を行なう。

$$\left(\frac{1}{2}[K]+\frac{1}{\Delta t}[C]\right)\Delta\{T\}=-[K]\{T\}_t+\{Q\}_t+\frac{1}{2}\Delta\{Q\} \qquad (1.8-37)$$

また, 非定常解析と定常解析を組み合せて用いる問題では, 式(1.8-37)と次式の定常解析の方程式を用いて解析を行なう。

$$[K]\Delta\{T\}=-[K]\{T\}_t+\{Q\}_t+\Delta\{Q\} \qquad (1.8-38)$$

定常解析において材料特性が温度依存で与えられる場合は, 非定常解析と同じように予測子-修正子法を用いて解

析される。

1.8.5　熱伝導解析のアルゴリズム

(1)　解析全体の流れ

図 1.8－1 には FINAS の定常および非定常の熱伝導解析アルゴリズムを流れ図で示した。

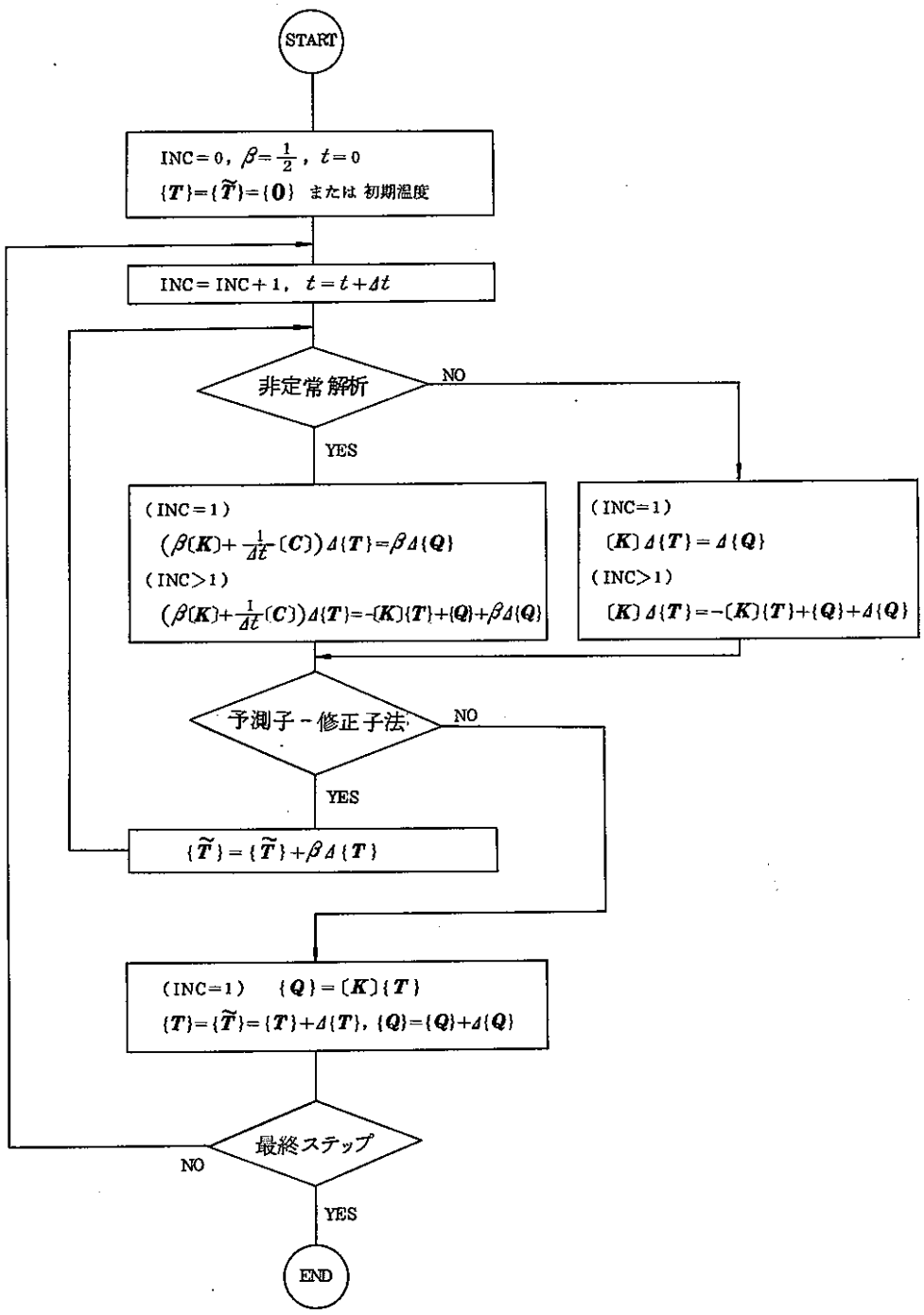


図 1.8－1　熱伝導解析のアルゴリズム

(2) 時間増分自動決定のアルゴリズム

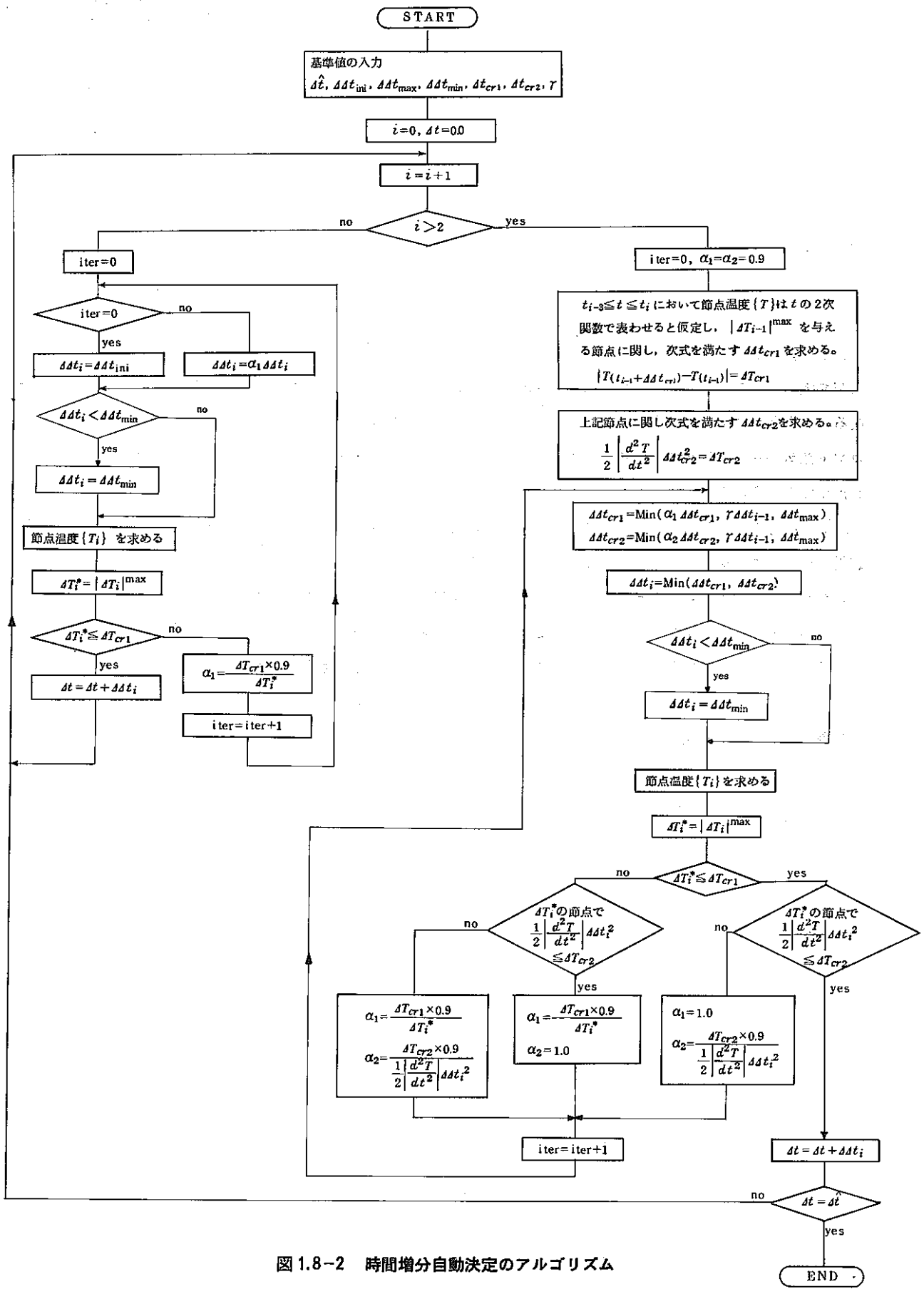


図 1.8−2　時間増分自動決定のアルゴリズム

2. 数値解法

2.1 はじめに

原子力構造物の各種コンポーネントに対して有限要素法による種々の非線形構造解析を安定かつ効率的に行なう要求が増大しているが，非線形解析では増分法解析が必要であるために，計算コストが線形解析に比べて多大に必要となる。有限要素法解析に特有なスパースマトリックスに関する数値計算技術 ── 例えばスカイライン法，ウェーブフロント法等 ── が提案されている。汎用非線形構造解析プログラムの開発では，非線形解析法の特徴を考慮した手法を採用する必要がある。

連立一次方程式の解法はウェーブフロント法を用いており，マトリックスのスパース性，大次元問題での補助記憶装置とのデータ転送量の最小化および計算効率の向上に注意を払っている。フロント法は要素番号が計算効率に大きく影響を与えるので，要素番号の最適リナンバー機能を開発する。特に繰り返し計算となる非線形問題では有効なものとなる。また，固有値計算方法は，有限要素法解析の特長であるスパースマトリックスのある特定固有値計算に適したサブスペース法を採用している。固有値解法は動的解析および座屈解析に利用される。

2.2節では，連立一次方程式の解法とリナンバー機能についてアルゴリズムを説明する。2.3節では，固有値解法の計算アルゴリズムを説明する。

2.2 連立一次方程式の解法

FINAS では連立一次方程式の解法としてマトリックスを組み立てながら解くウェーブフロント法を採用している。ここでは，2.2.1 節で自由度間の線形結合を含めた一般的な境界条件の処理について述べ，2.2.2 節では連立一次方程式の解法について説明する。2.2.3 節では要素番号の最適化のリナンバー機能について説明する。

2.2.1 境界条件の処理

境界条件の処理は，実際のプログラムにおいては要素単位で処理して全体系へアセンブルする過程となるのであるが，これを明晰にするために全体系での処理として説明する。全体モデルの平衡方程式と境界条件式を次のように表わす。

$$[K]\,\Delta\{\hat{U}\} = \Delta\{\hat{P}\} \qquad (2.2-1)$$

$$[A]\,\Delta\{\hat{U}\} = \Delta\{\hat{B}\} \qquad (2.2-2)$$

ここで，$[K]$ は係数マトリックス，$\Delta\{\hat{U}\}$ と $\Delta\{\hat{P}\}$ は未知量および荷重増分ベクトルである。式 (2.2-2) は規定条件および自由度間の線形結合条件（ファスニングと呼ぶ）を含んだ境界条件式であり，$[A]$ は自由度間の線形結合マトリックス，$\Delta\{B\}$ は規定条件である。

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots & & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \Delta[\hat{B}] = \begin{Bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \vdots \\ \Delta b_m \end{Bmatrix} \qquad (2.2-3)$$

n は全体モデルの自由度数，m は境界条件式の数である。マトリックス $[A]$ の階数を r とすると，r は $[A]$ の1次独立な行数を表わし，$[A]$ の r 階の小行列式のうち，その値が非零のものが少なくとも1つ存在することを意味する。$[A]$ の1次独立な行より成るマトリックスを $[\bar{A}]$ とし，対応して $\Delta\{\hat{B}\}$ の r 元ベクトルを $\Delta\{\bar{B}\}$ とすると，次のようになる。

$$[\bar{A}]\,\Delta\{\hat{U}\} = \Delta\{\bar{B}\} \qquad (2.2-4)$$

次に行列式の値が非零となる $[\bar{A}]$ の小行列を $[\bar{A}_1]$，そして残りを $[\bar{A}_2]$ として，$\Delta\{\hat{U}\}$ も $\Delta\{\hat{U}_1\}$ と $\Delta\{\hat{U}_2\}$ に分割する。

$$[\bar{A}] = [\bar{A}_1\ \bar{A}_2], \qquad \Delta\{\hat{U}\} = \begin{Bmatrix} \Delta\hat{U}_1 \\ \Delta\hat{U}_2 \end{Bmatrix} \qquad (2.2-5)$$

$[\bar{A}_1]$ と $[\bar{A}_2]$ はそれぞれ $r\times r$ 次，$r\times(n-r)$ 次のマトリックスであり，$\Delta\{\hat{U}_1\}$ と $\Delta\{\hat{U}_2\}$ は r 次，$(n-r)$

次のベクトルである。$[\bar{A}_1]$ の定義より $[\bar{A}_1]^{-1}$ が存在するので，式(2.2-4)と式(2.2-5)より，$\Delta\{\hat{U}_1\}$ は次のようになる。

$$\Delta\{\hat{U}_1\}=-[\bar{A}_1][\bar{A}_2]\Delta\{\hat{U}_2\}+[\bar{A}_1]^{-1}\Delta\{\bar{B}\} \tag{2.2-6}$$

したがって，

$$\Delta\{\hat{U}\}=[\tilde{A}]\Delta\{\hat{U}_2\}+\Delta\{\tilde{B}\} \tag{2.2-7}$$

ただし，

$$[\tilde{A}]=\begin{bmatrix} -[\bar{A}_1]\ [\bar{A}_2] \\ I \end{bmatrix},\quad \Delta\{\tilde{B}\}=\begin{Bmatrix} [\bar{A}_1]^{-1}\Delta\{\bar{B}\} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.2-8}$$

ここで，I は $(n-r)\times(n-r)$ 次の単位マトリックスである。式(2.2-7)を式(2.2-1)へ代入して，両辺に左側より $[\tilde{A}]^T$ をかける。

$$[\tilde{K}]\Delta\{\hat{U}_2\}=\Delta\{\tilde{P}\} \tag{2.2-9}$$

$$[\tilde{K}]=[\tilde{A}]^T[K][\tilde{A}],\quad \Delta\{\tilde{P}\}=[\tilde{A}]^T\Delta\{\hat{P}\}-[\tilde{A}]^T[K]\Delta\{\tilde{B}\} \tag{2.2-10}$$

式(2.2-9)が境界条件を考慮した平衡方程式であり，最終の未知ベクトルは $\Delta\{\hat{U}_2\}$ より，式(2.2-7)で計算できる。

2.2.2 連立一次方程式の解法

FINAS では係数マトリックス $[K]$ を組み立てながら解くフロント法を採用しており，式(2.2-10)の境界条件の処理は消去の前段階として要素単位に変換される。境界条件を考慮した剛性マトリックス $[\tilde{K}]$ は，以下のように LDU 分解される。

$$[\tilde{K}]=[L][D][U] \tag{2.2-11}$$

$[L]$ は単位下三角マトリックス，$[D]$ は対角マトリックス，$[U]$ は単位上三角マトリックスである。Gauss の消去法により三角化したマトリックスを $[S]$ とすれば

$$[L][S]=[L][D][U] \tag{2.2-12}$$

となる。$[\tilde{K}]$ は対称マトリックスであるので，式(2.2-11)は次のように表わすこともできる。

$$[\tilde{K}]=[L][D][L]^T \tag{2.2-13}$$

また $[\tilde{K}]$ が正値性であるならば，次のようにコレスキー分解できる。

$$[\tilde{K}]=[G][G]^T,\qquad [G]=[L]\sqrt{D} \tag{2.2-14}$$

式(2.2-12)の $[S]$ マトリックスは Gauss の消去法により，$K=1,2,\cdots,n-1$ の順に各 K について，$i=$

$k+1, \cdots, n$ の順に次の計算より求まる。

$$S_{kl} = K_{kl}^{(k)} \qquad (l = k, \cdots, n) \qquad (2.2\text{-}15)$$

$$K_{ij}^{(k+1)} = K_{ij}^{(k)} - \frac{K_{ik}^{(k)}}{K_{kk}^{(k)}} K_{kj}^{(k)} \qquad (j = k+1, \cdots, n) \qquad (2.2\text{-}16)$$

ただし，

$$K_{ij}^{(1)} = K_{ij} \ , \quad S_{nn} = K_{nn}^{(n-1)} \qquad (2.2\text{-}17)$$

よって〔S〕の対角成分が〔D〕となり，非対角成分と対角に 1.0 を配したものが〔U〕となる。

2.2.3 要素番号のリナンバー機能

有限要素法で得られるスパースなマトリックスの解法としてフロンタル法が一般的となっているが，従来のバンド法と比較すると，記憶領域的にも演算回数の点でも同程度に効率の良いものといわれている。フロンタル法の効率は要素の順番に依存しており，節点番号は重要ではない。これは消去の過程が要素単位にアセンブルと分解されることによる。要素数が少なく簡単なモデルではフロンタル法を効率よく実行する要素番号化が可能であるが，2次元や3次元の複雑なモデルでは最適な要素番号化は困難である。効果的な要素番号の定義は線形方程式をくり返し計算する非線形問題では特に重要である。効果の良いソルバーを必要とするものは，陰的スキームの動的解析や大規模な塑性問題などである。

スパースマトリックスのバンド幅を最小化するためのアルゴリズムについては多数の文献が存在しているが，フロント幅を最小に試みるスキームの開発についてはあまり注目されていない。この種の問題を解決する手法としては2つの方法が考えられる。以下順次考察する。

フロンタル解法における計算量を最小化する直接的手法を開発する最初の試みは King の論文にみられる。King のアルゴリズムは最大フロント幅を最小化する要素番号を定義するのに適しているが，この論文が発表されたとき一般的であったアルゴリズムは節点単位にアセンブルして消去する方法であり，節点のリナンバーが注目されていた。

要素単位でアセンブルと消去を相互に行なうフロント法に King の手法を適用して要素番号のリナンバー化を行なうと，節点の消去順は可能なかぎり最適なものとなる。

ステップは次のように要約される。順序化の効率を区別するものとして，順序効率化パラメータ σ を提案した。

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} M_i^2 \qquad (2.2\text{-}18)$$

M_i は節点 i を消去するときの非対角節点数であり，N は全体の節点数である。King のアルゴリズムを要約すると次のようになる。

(1) メッシュモデルの全節点の結合を示す隣接リスト（adjacency list）を作成する。節点が他の節点と要素を共有しているとき隣接状態と呼ぶ。

(2) 開始点を選び，節点1とする。

(3) 現在アクティブである節点のリストを作成する。隣接リストの中でこれらの節点を参照するすべてに負の印をつける。順序効率パラメータσを累積する。

(4) リスト中のアクティブ節点を調べ，消去されるならばアクティブ節点の増減を計算する。節点が隣接リストにおいて正の節点に結合されるならば増加となる。

(5) アクティブ節点の増加が最も小さいものを選び定義する。もし同じものがいくつかある場合は最も長くアクティブであるものを選ぶ。

(6) 選択した節点をアクティブカラムのリストより削除して，隣接した節点をリストに加える。隣接リストではこの節点を参照するすべてに負の印をつける。

(7) リスト中のアクティブ節点の数の２乗を効率化パラメータσに累積する。

(8) ステップ(4)～(7)を全節点が再定義されるまでくり返す。

(9) ステップ(2)～(8)を開始節点が処理されるまでくり返す。

ステップ(4)と(5)はフロント幅を最小化するための基準と解釈することができるので，King のアルゴリズムの本質である。このアルゴリズムは節点番号の再定義だけで，要素番号については行なわない。Cuthill によれば，King のアルゴリズムは効率のよいものであり，メッシュモデルのフロント幅を非常に最適化するものとされる。この方法の主たる欠点は開始点の選択の影響が大きいことであり，節点数が多いモデルでは多数の開始点を考えると経済性において重大な問題となる。

最大フロント幅を低減する要素リナンバーの手法としては Levy のものがある。これは King の手法と似ているが，拡大フロント最小化を基にしている。各ステージで次に定義する節点は，未定義のすべての節点を考慮して最小フロント幅の基準で評価をすすめる。リナンバーする節点を選択するとき拡大した探索が行なわれるので，Levy のアルゴリズムは King のものに比べて効率が悪いものであるが，得られたフロント幅は真に最小に近いものである。King の場合と同様に Levy のアルゴリズムでも開始点は予め決める必要がある。各開始点についてリナンバースキームを検討するので，開始点の問題は重要な事柄である。

FINAS では Levy の方法と同じ直接的な最小フロント幅サーチの原理で要素番号のリナンバー化を行なっているが，開始点はメッシュモデルの最小番号を無条件に選択する。今後の問題としては，King らの隣接リストを利用したリナンバーの効率化と，グラフ理論の概念により開始点を自動的に選択するアルゴリズムなどが考えられる。

〔参考文献〕

1) I. P. King, " An automatic reordering scheme for simultaneous equations derived from network systems ", Int. J. num. Meth. Engng, 2, 523-533 (1970).

2) B. M. Irons and S. Ahmad, " Techniques of Finite Elements ", Ellis Horwood, Chichester, U.K., 1980.

3) E. Hinton and D. R. J. Owen, " Finite Element Programming ", Series in Computational Mathematics and Applications, vol. 1, Academic Press, London, 1977.

4) E. Cuthill, " Several strategies for reducing the bandwidth of matrices ", in Spares Matrices and Their Applications (Rose, D. J. and Willoughby, R. A., Eds.), Plenum Press, New York, 1972.

5) R. Levy, " Resequencing of the structural stiffness matrix to improve computational efficiency ", Jet Propul. Lab. Q. Tech. Rev., 1, 61-70 (1971).

6) H. L. G. Pina, " An algorithm for frontwidth reduction ", Int. J. num. Meth. Engng, 17, 1539-1546 (1981).

7) J. E. Akin and R. M. Pardue, " Element resequencing for frontal solutionns ", in The Mathematics of Finite Elements and Applications (MAFELAP 1975) (Whiteman, J. R., Ed.), Academic Press, London, 1975, pp. 535-541.

8) A. Razzaque, " Automatic reduction of frontwidth for finite element analysis ", Int. J. num. Meth. Engng, 15, 1315-1324 (1980).

9) E. Cuthill and J. McKee, " Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices ", Proc. A. C. M. Nat. Conf., Association for Computing Machinery, New York, 1969.

10) A. George and J. W. H. Liu, " An impiementation of a pseudo-peripheral node finder ", A. C. M. Trans. Math. Software, 5, 284-295 (1979).

11) N. E. Gibbs, W. G. Poole and P. K. Stockmeyer, " An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix ", SIAM J. Numer. Anal. 2, 236-250 (1976).

12) B. M. Irons, " A frontal solution program for finite element analysis ", Int. J. num. Meth. Engng, 2, 5-32 (1970).

13) H. R. Grooms, " Algorithm for matrix bandwidth reduction ", J. Struct. Div., A. S. C. E. 98 (ST1), 203-214 (1972).

14) G. Akhras and G. Dhatt, " An automatic node relabelling scheme for minimising a matrix or network bandwidth ", Int. J. Num. Meth. Engng, 10, 787-797 (1976).

15) A. M. Britto, private communication.

16) R. J. Collins, " Bandwidth reduction by automatic renumbering ", Int. J. num. Meth. Engng, 6, 345-356 (1973).

17) E. L. Wilson, K. J. Bathe and W. P. Daherty, " Direct solution of large systems of linear equation ", Comp. Structure 4, 363-372 (1974).

18) B. M. Irons, " Frontal program for finite element analysis ", Int. J. Num. Engng, 2, 5-32 (1969).

19) S. W. Sloan and M. F. Randolph, " Automated element reordering for finite element analysis with frontal solution schemes ", Int. J. Num. Meth. Engng, 19, 1153-1181 (1983).

2.3 固有値問題の解法とアルゴリズム

FINAS では固有値解法としてサブスペース法を採用している。ここでは，この解法とアルゴリズムについて説明する。インバースパワー法やレーレイ反復法は1つのベクトルに対して反復させる方法であるが，複数のベクトルに同時に反復させて固有値のペアを得ようとするのがサブスペース法である。この方法は Bauer [6] が最初に試みたとされているが，Rutishauser [2]，Jennings [3]，Bronlund [4]，Bathe [1] らにより改良あるいは変形アルゴリズムが提案された。

サブスペース法の基本はベクトル反復と Ritz 法を結びつけたものであり，収束も早く安定したアルゴリズムで大次元固有値解法に適している。特に初期部分空間が固有空間を含んでいれば1回の反復で解が得られるとされる。FINAS のサブスペース法のアルゴリズムは Bathe の方法をもとにしたもので，低次から複数個の固有値ペアを求めるものである。表2.3-1は代表的な固有値解法を比較したものである。

表 2.3-1 固有値問題の解法比較

名 称	解析手順	問題の形式	適用マトリックス	問題の大小	演算中のマトリックスの粗の保持	得られる固有値	その他
ベキ乗法	くり返し法	標準，一般	対角化可能	中	粗	最大固有値	
逆ベキ乗法	くり返し法	〃	対角化可能	中	粗	最小固有値	
サブスペース法	Ritz 法によるくり返し法	〃	実対称	大	粗	複数個	
Jacobi 法	相似変換	〃	実対称	小	粗	全固有値	
House holder 法	相似変換	標準	対称	大	密となる	—	マトリックスの三重対角化のみ
QR法	相似変換	〃	対角化可能特に三重対角	小	粗	全固有値	
行列式法	行列式の零点	標準，一般	任意	小	粗	1	固有値のみ
Strum 法	区間内の固有値数	〃	実対称	中	粗	1	〃

2.3.1 解 法

一般的固有値問題は次のように表わすことができる。

$$[A]\{\phi\}=\lambda[B]\{\phi\} \qquad (2.3-1)$$

ここで $[A]$，$[B]$ は正値対称マトリックスとする。このマトリックス $[A]$，$[B]$ および固有値 λ，固有ベクトル $\{\phi\}$ は実際の工学問題では次のものが対応する。

線形振動問題

$[A]$ ： 剛性マトリックス

$[B]$ ： 質量マトリックス

$\lambda=w^2, w$ ： 自由振動数

$\{\phi\}$ ： モードベクトル

線形座屈解析

$[A]$ ： 剛性マトリックス

$[B]$ ： 幾何剛性マトリックス

λ ： 座屈荷重の倍率

式(2.3-1)と等価なものとして，次の汎関数$\rho(\{\phi\})$極値問題に置き換えることができる。

$$\rho(\{\phi\})=\frac{\{\phi\}^T[A]\{\phi\}}{\{\phi\}^T[B]\{\phi\}} \tag{2.3-2}$$

$$\lambda_1=\underset{\{\phi\}\in R^n}{\mathrm{Min}}\,\rho(\{\phi\}) \tag{2.3-3}$$

ただし，$0<\lambda_1\leqq\rho(\{\phi\})\leqq\lambda_n<\infty$ であり，nは元数，λ_1とλ_nは最小固有値と最大固有値であり，R^nはn次のユークリッド空間である。

p ($\leqq n$) 個の固有値ペア （$\lambda_1, \{\phi_1\}$） ，（$\lambda_2, \{\phi_2\}$），……，（$\lambda_p, \{\phi_p\}$）を求めるとき，$\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \cdots\cdots, \{\phi_p\}$で張られる部分空間$Ep$の基底を$\{e_1\}, \{e_2\}, \cdots\cdots, \{e_p\}$で近似する。任意の$\{\phi\}\in R^n$を$\{e_1\}, \{e_2\}, \cdots\cdots, \{e_p\}$で表わすと，

$$\{\phi\}\approx x_1\{e_1\}+x_2\{e_2\}+x_3\{e_3\}+\cdots\cdots+x_p\{e_p\} \tag{2.3-4}$$

式(2.3-4)を式(2.3-3)に代入して，

$$\rho(\{\phi\})=\frac{\sum x_i x_j \tilde{a}_{ij}}{\sum x_i x_j \tilde{b}_{ij}}=\frac{\{X\}^T[A]\{X\}}{\{X\}^T[B]\{X\}} \tag{2.3-5}$$

ただし，

$$\tilde{a}_{ij}=\{e_i\}^T[A]\{e_j\},\quad \tilde{b}_{ij}=\{e_i\}^T[B]\{e_j\} \tag{2.3-6}$$

$$\{X\}^T=\lfloor x_1\ x_2\ \cdots\cdots\ x_p\rfloor,\quad [\tilde{A}]=[\tilde{a}_{ij}],\quad [\tilde{B}]=[\tilde{b}_{ij}] \tag{2.3-7}$$

したがって，$\rho(\{\phi\})$の最小値を得るためにx_iに関して微分し極値を零とすると，p次元に縮小した固有値問題を得る。

$$[\tilde{A}]\{X\}=\rho[\tilde{B}]\{X\} \tag{2.3-8}$$

式(2.3-8)におけるρは式(2.3-1)における固有値λの上限値となる。

$$\rho_1\geqq\lambda_1,\ \rho_2\geqq\lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \rho_p\geqq\lambda_p \tag{2.3-9}$$

もし，$\{e_1\}, \{e_2\}, \cdots\cdots, \{e_p\}$で張られる$E_0$が$E_p$を含んでおり，次式で表わされる条件を満足すれば式(2.3-9)におけるρ_iは式(2.3-3)のλ_iに一致し，正解が得られる。

$$E_0\supseteq E_p \tag{2.3-10}$$

サブスペース法は，この近似固有部分空間 E_0 をベクトル同時反復手法により真の固有部分空間 E_p に収束させるものである。

2.3.2 アルゴリズム

サブスペース法は基本的に Ritz 法であり，初期固有ベクトルで張る部分空間 E_i の中で最適なものを求める。もし，$E_i \subset R^n$ が求める固有ベクトル空間と一致すれば，正確に求めることができるわけである。初期部分空間をベクトル反復法により固有ベクトルの近似空間へ縮合し，その近似空間の中で最適な最小固有値（Ritz 法の意味で）の組と対応する固有ベクトルを求める。そして，固有ベクトルをもとの空間へもどす。求められた固有値 λ_i と固有ベクトル $\{\phi_i\}$ の固有値ペアを Strum 列により検証することができるが，これはマトリックスの三角分解が必要となるので，選択として実行される。

(1) 収束性

n 個の固有値を $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \lambda_p \leqq \lambda_{p+1} \leqq \cdots\cdots \leqq \lambda_n$ とおき，サブスペース法より $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_p$ の固有値を得るものとすれば，固有値 λ_i の収率 ε_λ^i と固有ベクトル $\{\phi_i\}$ の収束率 ε_ϕ^i は，次のように表わすことができる。

$$\varepsilon_\lambda^i = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}}\right)^2 \tag{2.3-11}$$

$$\varepsilon_\phi^i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} \tag{2.3-12}$$

これは，ベクトル反復法の収束率に比べて改善されたものとなっている。

(2) 加速法

サブスペース法の加速は重要であり，その１つの方法として部分固有値空間より大きめの空間で反復を行なう方法がある。これは式（2.3-11）と式（2.3-12）によりあきらかなように，必要とする固有値が p 個であっても q（$>p$）なる部分空間で計算することにより加速することができる。

第２の方法は原点移動をサブスペース法に適用する手法である。$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_p$ に対して，シフト量 α を $(\lambda_1+\lambda_p)/2$ にすれば，λ_i（$i=1\sim p$）の中で収束の遅い λ_p に対する収束率 ε_λ^p を次のように改良することができる。

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda^p = \left(\frac{\lambda_p-\alpha}{\lambda_{p+1}-\alpha}\right)^2 < \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_{p+1}}\right)^2 = \varepsilon_\lambda^p \tag{2.3-13}$$

第３の方法は固有値解法の加速に古くから利用された Chebyshev の多項式を用いる方法で，サブスペース法に適したアルゴリズムも提案されている。k 次の Chebyshev の多項式により λ_i に対応する固有ベクトルの収束を $1/2^{k-1}$ 程度改善することができる。

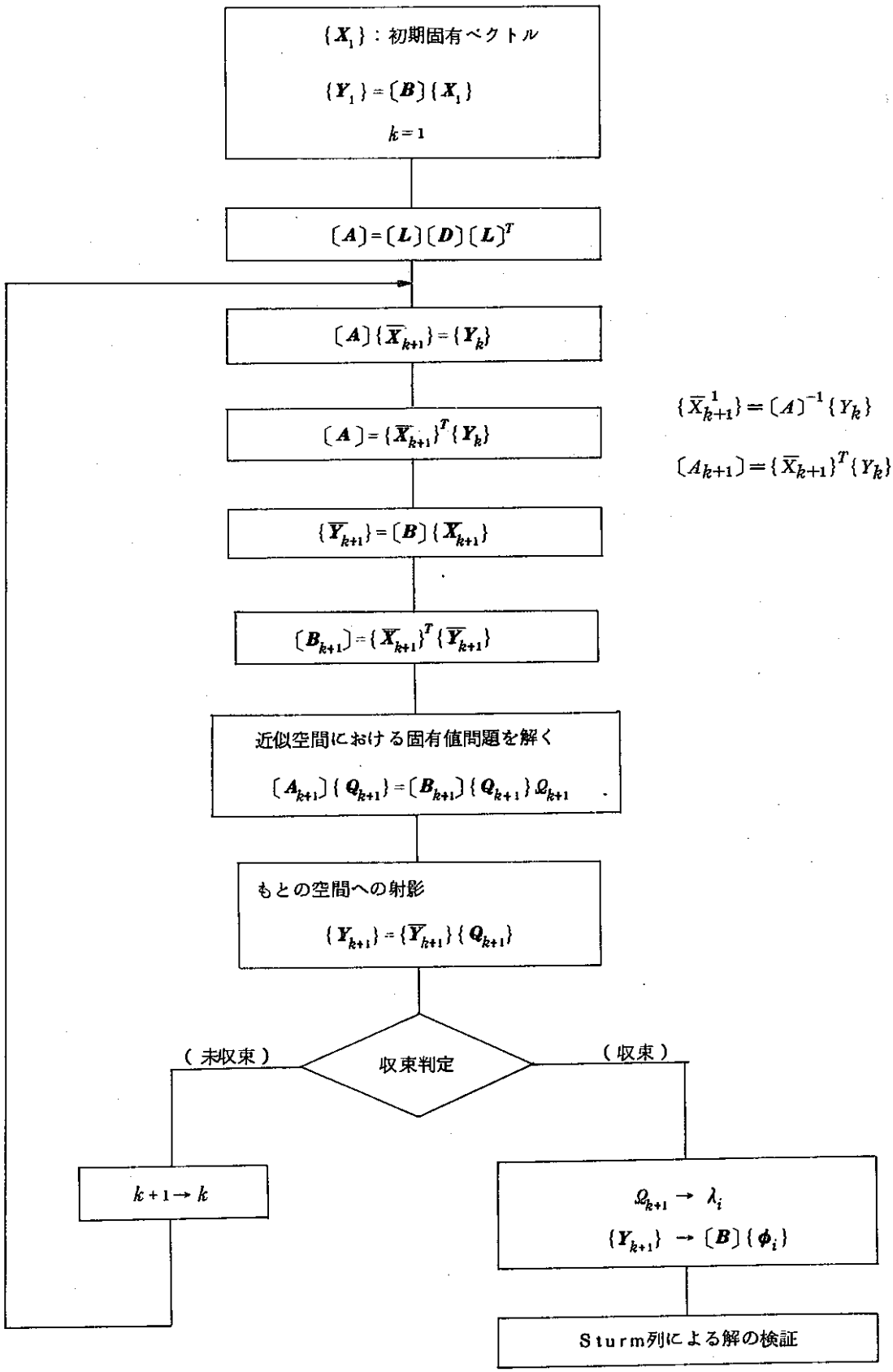


図 2.3−1　サブスペース法の計算アルゴリズム

FINAS では部分空間の拡張による加速法を用いており，$q=\mathrm{Min}(2\times p, p+7, n)$ を採用している。

〔参考文献〕

1) K. J. Bathe and E. L. Wilson : " Numerical methods in Finite element analysis ", Prentice-Hall, 1976.

2) 山田・岡村：" 非拘束はりの剛体モードの計算について "，日本鋼構造協会第11回全国大会論文集，1977.

3) A. Jennings and D. R. L. Orr : " Application of the Simultaneous Iteration Methods to Undamped Vibration Problems ", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 1971.

4) S. B. Dong and J. A. Wolf, Jr. : " On a Direct iterative eigen solution technique ", Int. Jour. Num. Meth. Eng., Vol. 4, 1972.

5) J. H. Wilkinson : " The Algebraic Eigenvalue Problem ", Oxford Univ. Press, 1965.

6) 大坪：" 実対称固有値問題 $A_x=\lambda B_x$ の解法 "，日本鋼構造協会第7回全国大会論文集，1973.

7) E. L. Wilson : " An eigen solution strategy for the dynamic analysis of large structural systems ", SAP Conference, Tokyo, 1978.

第III編　FINASの検証と応用

序

FINAS（FBR Inelastic Structural Analysis System）は昭和51年7月より5年間開発が行なわれ，昭和56年6月から改良・整備が進められている構造解析用の汎用プログラムであり，高速増殖炉および関連機器の開発に伴う構造上の広範囲にわたる問題を解決することを目的としている．現在利用できる機能は静的解析，動的解析および熱伝導解析の機能であり，各解析では材料非線形，幾何学的非線形，あるいは境界の非線形性を考慮することができる．また，解析モデルおよび解析結果の図化処理は解析時だけでなく，解析結果を収めたリスタートテープを使用して行なうことができる．

FINASではプログラムの信頼性を保証するため，VP（Veritication Problem）とDP（Demonstration Problem）を作成して系統的に検証を進めてきた．VPはFINASが備えている各種機能が正しく作動するかどうかを検証する問題であり，DPは解析能力の総合評価を行なう問題である．本年度はVPについて静的問題が8題，熱伝導問題が5題，動的問題が2題追加された．

Ⅰ．検証のための解析

FINAS プログラムが備えている各種解析機能を検証するために表1-1に示す検証問題 VP（Verification Problem）を作成し，解析を行なった。なお，紙面の都合により前年度までの報告書に掲載した検証問題は省略する。

表 1-1　静的解析 VP の一覧表

番号	タイトル	目的
VP-001	単軸引張（弾性）問題	8節点四辺形軸対称要素 QAX8 の弾性要素剛性マトリックスのチェックおよび単軸引張問題の弾性解と理論解との比較を行なう。
VP-002	単軸引張（弾塑性）問題	8節点四辺形軸対称要素 QAX8 の弾塑性マトリックスのチェックおよび単軸引張（弾塑性）問題の解と理論解との比較を行なう。
VP-003	内圧を受ける円筒（弾性）問題	8節点四辺形軸対称要素 QAX8 を使用して 内圧を受ける円筒（弾性）問題の解と理論解の比較を行なう。
VP-004	内圧を受けるノズル付き球殻（弾性）問題	8節点四辺形軸対称要素 QAX8 を使用して内圧を受けるノズル付き球殻の弾性解を求め，中規模問題における計算時間を ASKA と比較する。
VP-005	単軸弾性熱応力問題	8節点四辺形軸対称要素 QAX8 の単軸弾性熱応力問題の弾性解と理論解との比較を行なう。
VP-006	円筒弾性熱応力問題	8節点四辺形軸対称要素 QAX8 を使用して 円筒弾性熱応力問題の弾性解と理論解との比較を行なう。
VP-007	単軸サイクリック弾塑性問題	単軸引張り問題において，単軸サイクリック弾塑性解析の機能をチェックすることを目的としている。解法としては，等方硬化理論，移動硬化理論を使用する。

版	タ　イ　ト　ル	目　　的
VP−008	単軸弾性クリープ問題	クリープに関する機能をチェックするために，一定応力下での単軸クリープ問題を解析し，理論解との比較を行なう。
VP−009	単軸規定変位問題 (1)	規定変位の取り扱いに関する機能をチェックし，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−010	単軸規定変位問題 (2)	identity-fastening 機能をチェックするために円柱端部の変位を均一保持した状態の引張りを取り扱い理論解との比較を行なう。
VP−011	単軸弾塑性クリープ問題	弾塑性クリープ解析の機能のチェックを目的とし，単軸の場合を取り扱ったもので VP−002 を拡張したものである。
VP−012	単軸サイクリック弾塑性クリープ問題	保持時間を有する繰返し単軸引張り問題により繰返し弾塑性クリープ解析機能のチェックを行なう。
VP−013	弾性係数の温度依存（弾性）問題 (1) — ひずみ制御 —	弾性係数を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP−014	弾性係数の温度依存（弾性）問題 (2) — 応力制御 —	弾性係数を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP−015	ポアソン比の温度依存（弾性）問題 (1) — ひずみ制御 —	ポアソン比を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP−016	ポアソン比の温度依存（弾性）問題 (2) — 応力制御 —	ポアソン比を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP−017	弾性係数・ポアソン比の温度依存（弾性）問題 (1) — ひずみ制御 —	弾性係数とポアソン比を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP−018	弾性係数・ポアソン比の温度依存（弾性）問題 (2) — 応力制御 —	弾性係数とポアソン比を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP−019	加工硬化係数の温度依存（弾塑性）問題 (1) — ひずみ制御 —	加工硬化係数を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。

No.	タイトル	目的
VP−020	加工硬化係数の温度依存（弾塑性）問題(2) —応力制御—	加工硬化係数を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち，温度を変化させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−021	弾性係数・加工硬化係数の温度依存（弾塑性）問題 (1) —ひずみ制御—	弾性係数と加工硬化係数を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−022	弾性係数・加工硬化係数の温度依存（弾塑性）問題 (2) —応力制御—	弾性係数と加工硬化係数を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち，温度を変化させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−023	降伏応力の温度依存（弾塑性）問題 (1) —ひずみ制御—	降伏応力を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合の弾塑性遷移領域におけるFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−024	降伏応力の温度依存（弾塑性）問題 (2) —応力制御—	降伏応力を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち，温度を変化させた場合の弾塑性遷移領域におけるFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−025	熱膨張係数の温度依存（自由膨張）問題	熱膨張係数を温度依存とし，自由膨張させた場合のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP−026	変位の線形結合問題	要素の結合にゼネラルファスニングを用いた場合のFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−027	ORNL形式の硬化則を用いた単軸引張り圧縮問題	再降伏時の降伏面の大きさとして，10サイクル目の降伏応力 σ_{Y10} を用いた場合のFINAS の解の比較を行なう。
VP−028	加工硬化係数の多直線近似問題	加工硬化係数を多直線近似し，荷重増分量を変化させてそれに対応したFINASの解の比較を行なう。
VP−029	使用者の作成したプログラムによる加工硬化係数の入力問題	使用者が作成するサブプログラムにより加工硬化係数を入力し，降伏面の大きさを計算する機能が有効に働くかどうかのチェックを行なう。
VP−030	使用者の作成したプログラムによる加工硬化係数の関数型入力問題	使用者が加工硬化係数を相当塑性ひずみの滑らかな関数として入力し，荷重増分を変化させ，それに対応したFINASの解の比較を行なう。
VP−031	軸対称初期ひずみ問題	単軸引張問題のひずみ成分を初期ひずみとして扱い，初期ひずみによる荷重の評価，応力，ひずみの評価のアルゴリズムを検証する。

No.	タイトル	目的
VP−032	組み合せ硬化則による単軸引張り圧縮問題	組み合せ硬化則による単軸引張（弾塑性）問題のFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−033（廃止）	使用者の作成したプログラムによる降伏関数の入力問題	使用者が作成するサブプログラムにより降伏関数を入力し，降伏面における塑性ひずみ成分の向きを評価する機能が有効に働くかどうかのチェックを行なう。
VP−034（廃止）	移動硬化係数の多直線近似問題	移動硬化係数を多直線近似とし，相当塑性ひずみの評価を2種類の方法で行ない，各々の方法によるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−035	FINASの組み込みクリープ則利用問題	FINASに組み込まれているクリープ則を使用して単軸引張り弾性クリープ解析によるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−036	複数の要素種類組み合せ問題	異なったタイプの要素を組み合せ，一様引張りを与えた弾性解析におけるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−037	使用者が作成したプログラムによるクリープ則の入力問題	使用者が作成したサブプログラムECRP1によりクリープ則を入力し，一定応力下におけるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−038	材料データライブラリ利用によるひずみ硬化クリープ問題	材料データライブラリを使用し，一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−039（廃止）	応力反転を考慮した弾性クリープ問題 (1)	クリープ解析における"応力反転による硬化則の補助法則"機能のチェックを行なう。
VP−040	階段状負荷履歴を持つ弾性クリープ問題	階段状に応力増分を与え，各応力場ごとにクリープ解析を行ない，理論解と比較する。
VP−041	応力反転を考慮した弾性クリープ問題 (2)	応力反転を考慮したクリープ補助法則を用いてクリープ解析を行ない，実験値と解を比較する。
VP−042	弾塑性クリープ解析におけるリスタート機能利用問題	弾塑性計算とクリープ計算の途中で解析の中断と再開を行ない，リスタート機能のチェックを行なう。
VP−043	使用者が作成したプログラムによるクリープ則の入力問題	使用者が作成したサブプログラムXCREEPによりクリープ則を入力し，FINASの解と理論解の比較を行なう。

No.	タイトル	目的
VP−044	要素の積分点における温度入力問題	板厚方向に線形な温度分布を有する直管の温度データを要素の積分点で入力して熱弾性解析を行ない，理論解と比較を行なう。
VP−045（廃止）	単軸サイクリック弾塑性クリープ問題(2)	保持時間を有する繰り返し単軸引張り問題により，塑性に関する各硬化則ごとの弾塑性クリープ解析機能のチェックを行なう。
VP−046	単軸弾性クリープ解析におけるクリープ時間増分ジェネレート機能の利用問題	VP−008の単軸弾性クリープ問題を用いてクリープ時間増分ジェネレート機能のチェックを行なう。
VP−047	単軸弾塑性クリープ解析におけるクリープ時間増分ジェネレート機能の利用問題	VP−011の単軸弾塑性クリープ問題を用いてクリープ時間増分ジェネレート機能のチェックを行なう。
VP−048	局所座標系による節点座標と境界条件の入力問題	節点座標と境界条件を局所座標系で入力して弾性解析を行ない，局所座標系による入力機能のチェックを行なう。
VP−049	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(3)	使用者が作成するプログラムによりクリープひずみのデータを入力し，応力反転を考慮したクリープ解析を行なう。
VP−050	組み合せ硬化則における直線近似問題	温度と塑性ひずみに依存した加工硬化係数と移動硬化係数を使用する組み合せ硬化則におけるFINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−051（廃止）	弾性熱応力解析におけるインタフェイスプログラム利用問題	温度解析で得られた各時間ステップの温度分布から応力解析のステップでの温度分布を選択するインタフェイスプログラムの機能をチェックする。
VP−052	トラスの弾性大変形問題 —荷重制御—	簡単なトラス構造を用いて大変形解析を行ない，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP−053	移動硬化則における塑性クリープ連成問題	弾塑性クリープ解析において，塑性クリープ連成を考慮した移動硬化則の機能をチェックするためにFINASの解と理論解を比較する。
VP−054	降伏面の大きさが累積相当塑性ひずみに依存する繰り返し組み合せ硬化問題	降伏面の大きさが累積相当塑性ひずみに依存する繰り返し組み合せ硬化則の機能をチェックするためにFINASと理論解の比較を行なう。
VP−055	ORNL形式の硬化則を用いた単軸引張り圧縮問題	応力反転時の降伏応力として10サイクル目の降伏応力$\sigma_{Y_{10}}$を用いた場合のFINASの解と理論解の比較を行なう。

No.	タイトル	目的
VP-056	瞬間熱膨張係数温度依存における熱ひずみの評価問題	瞬間熱膨張係数が温度依存の場合，温度変化による熱ひずみの評価のチェックを行なう。
VP-057（廃止）	$2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo の材料データライブラリ利用問題	FINAS材料データライブラリにくみいれている $2\frac{1}{4}$ Cr-1Mo の材料データのチェックをする。
VP-058（廃止）	材料データライブラリ利用による $2\frac{1}{4}$ Cr-1 Mo のひずみ硬化クリープ問題	材料データライブラリを使用し，一定応力下において $2\frac{1}{4}$ Cr-1 Mo のひずみ硬化クリープ則を用い，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-059	局所非線形解析法による弾塑性問題	弾塑性問題に対して局所非線形性を考慮した解析機能のチェックを行なう。
VP-060	繰り返し組み合せ硬化則を用いたサイクリック弾塑性問題	中実丸棒にサイクリックな規定変位を与える問題において，繰り返し組み合せ硬化則を用いた弾塑性解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-061	塑性クリープ連成を考慮した移動硬化則を用いた応力反転がある弾塑性クリープ問題	塑性クリープ連成を考慮した移動硬化則を用い，クリープ後に応力が反転する弾塑性クリープ解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-062	配管系の弾性解析におけるポストテープ作成機能利用問題	ポストテープに出力した配管系の弾性解析の解とSAP4の解との比較を行なうことにより，FINASの配管解析の機能とその結果をポストテープへ出力する機能の検証を行なう。
VP-063	熱弾塑性クリープ解析におけるポストテープ機能利用問題	熱弾塑性解析における解析結果が正しくポストテープに出力されるかどうかのチェックを行なう。
VP-064	クリープ時間増分ジェネレート機能とリスタート機能の組み合せ問題	クリープ時間増分ジェネレート機能を利用した弾性クリープ解析の途中で解析の中断と再開を行ない，クリープ時間増分ジェネレート機能を使用した場合のリスタート機能のチェックを行なう。
VP-065	静的解析における図面作成問題	静的解析における解析結果の図化処理機能のチェックを行なう。
VP-066	中央き裂板の線形破壊力学問題	中央にき裂のある帯板の一様引張問題を解析し，線形破壊力学解析の機能の検証を行なう。

No	タイトル	目的
VP-067	大変形解析におけるリスタート機能利用問題	VP-052のトラスの弾性大変形解析問題を用いて 大変形解析におけるリスタート機能の検証を行なう。
VP-068	弾塑性解析における残差荷重修正機能のサプレス問題	FINASでは材料非線形あるいは幾何学的非線形問題を解析する場合に，非線形性による不釣合い力を平衡方程式の右辺に加え合せて解析を行なう。ここではこの残差荷重修正を行なわない場合についての解析を行ない理論解との比較を行なう。
VP-069	接線剛性によるトラスの弾性大変形解析	FINASの大変形解析では，直前の形状における接線剛性を用いて，修正Newton-Raphson法により収束計算を行なう。そして収束計算の打ち切りによって生じる幾何学的非線形性による不釣合い力を次の荷重ステップで残差荷重として考慮する。ここでは収束計算および残差荷重修正を行なわない方法により大変形解析を行なう機能についての検証を行なう。
VP-070	トラスの弾性大変形問題 —変位制御—	簡単なトラス構造の大変形解析を変位制御で行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-071	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(1)—SUS304—	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS304のクリープ式を使用し，一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-072	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(2)—SUS316—	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS316のクリープ式を使用し，一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-073	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(3)— SUS 321 —	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS321のクリープ式を使用し，一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-074	材料データライブラリを利用したひずみ硬化クリープ問題(4)—$2\frac{1}{4}$Cr-1Mo（NT材）—	材料データライブラリの$2\frac{1}{4}$Cr-1Mo（NT材）のクリープ式を使用し，一定応力下においてひずみ硬化クリープ則を用い，FINASの解と理論解の比較を行なう。

No	タイトル	目的
VP-075	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(1)—SUS304—	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS304の弾塑性特性データを使用して 弾塑性解析を行なう。そのときに 材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え，それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-076	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(2)—SUS316—	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS316 の弾塑性特性データを使用して弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え，それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-077	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(3)—SUS321—	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS321の弾塑性特性データを使用して 弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え，それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-078	材料データライブラリを利用した弾塑性問題(4)—$2\frac{1}{4}$Cr-1Mo(NT材)—	材料データライブラリの$2\frac{1}{4}$Cr-1Mo鋼(NT材) の弾塑性特性データを使用して弾塑性解析を行なう。そのときに材料の参照温度と二直線近似での最大想定ひずみレベルを与え，それらに対応する材料が正しく使用されているかを調べる。
VP-079	トラスの線形座屈荷重解析	二本棒トラスの線形座屈荷重解析を行ない，FINASの解とMARCの解との比較を行なう。
VP-080	トラスの非線形座屈荷重解析	二本棒トラスの非線形座屈荷重解析を行ない，FINASの解とMARCの解との比較を行なう。
VP-081	加工硬化係数の多直線近似問題	加工硬化係数を多直線近似し，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-082	解析と独立したプロット機能利用問題	FINAS XYプロット機能には 解析と独立して使用者が準備したX，Yカーブデータをプロットする機能があり，ここでは実際にX，Yカーブデータを与えてその機能を検証する。

No	タイトル	目的
VP-083	降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合せ硬化問題	降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合せ硬化則を用いて弾塑性解析を行ない，FINASの解と理論解の比較を行なう。
VP-084	弾性領域でのスウェリング問題	弾性領域でのスウェリング解析機能をチェックするために，簡易円筒モデルが中性子束の照射を受けている問題を解析し，理論解と比較を行なう。
VP-085	降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合せ硬化則を用いたサイクリック弾塑性問題	中実丸棒にサイクリックな規定変位を与える問題において，降伏曲面の大きさが塑性仕事に依存する繰り返し組み合せ硬化則を用いた弾塑性解析を行ない理論解と比較を行なう。
VP-086	独立した2つの構造物の静的応力解析	独立した2つの構造物の静的応力解析を1回の解析で行ない，各々の構造ごとに解析を行なった場合との解の比較を行なう。
VP-087	FINASの組み込みスウェリング式利用問題	FINASに組み込まれているスウェリングひずみ式を利用して，弾性領域でのスウェリング解析を行ない，FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-088	使用者の作成したプログラムによるスウェリング問題	ユーザサブプログラム XSWELL により スウェリングひずみ式を入力し，弾性領域でのスウェリング解析を行ないFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-089	平均熱膨張係数を使用した熱弾性問題	平均熱膨張係数が温度依存の場合に，温度変化による熱ひずみの評価が理論解と一致するかどうかの検証を行なう。
VP-090	弾性係数，ポアソン比に対する参照温度のオプションを使用した熱弾性問題	弾性係数，ポアソン比が温度依存の場合に，材料の参照温度を指定するオプションを使用して熱弾性解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-091	材料データ・ライブラリの弾塑性特性に対して参照温度を指定した弾塑性問題 — SUS 304 —	材料データ・ライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS 304 弾塑性特性に対して参照温度を指定 して弾塑性解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。

No	タイトル	目的
VP-092	材料データ・ライブラリのクリープ特性にに対して参照温度を指定した弾性クリープ問題 —SUS304 —	材料データ・ライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS304クリープ特性に対して参照温度を指定して弾性クリープ解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-093	材料データ・ライブラリを利用した時間硬化クリープ問題 —SUS304, SUS316, SUS321, $2\frac{1}{4}Cr-1Mo$—	材料データ・ライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS304, SUS316, SUS321および$2\frac{1}{4}Cr-1Mo$（NT材）のクリープ式を使用し，時間硬化則による弾性クリープ解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-094	静的解析におけるポストテープ編集機能利用問題	リスタート機能を利用した解析で出力される複数のポストテープの編集を行ない，静的解析におけるポストテープ編集機能が正しく作動することを確認する。
VP-095	静的解析におけるリスタートテープ編集機能およびリスタートテープからの出力機能利用問題	静的解析におけるリスタートテープの編集機能とリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-096	新しいインターフェイス・プログラムを利用した弾性熱応力問題	温度解析の結果から熱応力解析を行なうステップを選択し，節点温度増分をデータファイルTP21に出力するインターフェイス・プログラムの検証を行なう。
VP-097	長方形板の多荷重処理におけるリスタート機能利用問題	長方形板に種々の荷重を与えて，多荷重処理のリスタート機能の検証を行なう。
VP-098	配管弾性解析の多荷重処理におけるポストテープ利用問題	配管の弾性多荷重解析を行ない　ポストテープ出力機能の検証を行なう。
VP-099	主応力・最大剪断応力のベクトル表示および等高線値指定問題	周辺単純支持の平板に等分布荷重を負荷する問題により，主応力，最大剪断応力のベクトル表示機能と等高線表示における等高線値の指定機能の検証を行なう。
VP-100	材料データライブラリの単調応力－ひずみ関係式を用いた弾塑性問題 －SUS 304－，－SUS 316－，－SUS 321－，$-2\frac{1}{4}Cr-1Mo-$	材料データライブラリのオーステナイトステンレス鋼SUS 304，SUS 316，SUS 321 および$2\frac{1}{4}Cr-1Mo$（NT材）の単調応力-ひずみ関係式を用いた弾塑性問題を解析し，関数型弾塑性解析機能の検証を行なう。
VP-101	材料データライブラリの単調応力－ひずみ関係式によるサイクリック弾塑性問題	単軸引張り・圧縮問題において，材料データライブラリSUS 304 単調応力－ひずみ関係式を用いたサイクリック弾塑性解析機能の検証を行なう。

No.	タイトル	目的
VP-102	材料データライブラリの単調応力－ひずみ関係式を用いた多軸応力場における弾塑性問題	材料データライブラリの単調応力－ひずみ関係式を用いて，多軸応力場における弾塑性問題を解析し，関数型弾塑性解析機能の検証を行なう。
VP-103	材料データライブラリの単調応力－ひずみ関係式を用いた材料温度依存弾塑性問題 ──ひずみ制御──	材料データライブラリの SUS 304 ステンレス鋼単調応力－ひずみ関係式を用いて，弾性係数，降伏応力，加工硬化係数を温度依存とし，規定変位を与え，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-104	材料データライブラリの単調応力－ひずみ関係式を用いた材料温度依存弾塑性問題 ──応力制御──	材料データライブラリの SUS 304 ステンレス鋼単調応力－ひずみ関係式を用いて，弾性係数，降伏応力，加工硬化係数を温度依存とし，機械荷重を一定に保ち，温度を変化させた場合の FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-105	加速法を用いたトラスの弾性大変形問題	大変形解析にオプションとして用意されている加速法を用いた収速計算の検証を簡単なトラス構造の大変形解析により行なう。
VP-106	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(3)	応力反転のある弾性クリープ問題に対して村上・大野のクリープひずみ硬化則が正しく作動するかのチェックのために，ORNL の補助法則を適用した解および理論解との比較を行なう。
VP-107	応力反転を考慮した弾性クリープ問題(4)	多軸応力場において応力反転がある弾性クリープ問題を村上・大野のクリープ硬化則を適用して解析し，FINAS の解と村上・大野の解との比較を行なう。
VP-108	熱膨張による接触問題	ギャップがある構造モデルにおいて，温度変化により熱膨張が生じた場合の弾性接触問題を解析し，FINAS の解と理論解との比較を行う。
VP-109	摩擦が考慮した接触問題	摩擦が考慮されている構造モデルにおいて，すべりを生じさせる負荷が与えられる弾性接触問題を解析し，FINAS の解と理論解との比較を行なう。
VP-110	繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題	クリープの硬化則として繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題において，FINAS の解と理論解との比較を行う。

No	タイトル	目的
VP-111	弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題	弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題を解析し，理論解と比較する。
VP-112	弾性大変形接触問題	ギャップがある構造モデルにおいて，弾性大変形接触問題を解析し，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-113	円管の曲げ問題――軸対称要素における非軸対称負荷の問題	軸対称構造物における非軸対称負荷機能を検証するために，円管の自重による曲げの問題により，FINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-114	非軸対称荷重ジェネレーション問題	荷重データジェネレーションプログラムFNSLOADを用いて軸対称構造物に作用する非軸対称荷重のデータジェネレーションを行ない，FNSLOADで求めた荷重分布と理論解との比較を行なう。
VP-115	薄肉円筒の曲げ問題――軸対称構造における非軸対称負荷の問題	軸対称構造物における非軸対称負荷解析の機能を検証するために，薄肉円筒の自重による曲げの問題により，FINASの解と理論解との比較を行なう。

表 1-2　熱伝導解析 VP の一覧表

No.	タ　イ　ト　ル	目　　的
VP-501	非定常熱伝導問題	FINAS における熱伝導解析の機能の検証。すなわち，8節点四辺形要素 HQAX8 の熱伝導マトリックス，熱伝達マトリックス，熱容量マトリックス，時間積分のスキーム（一般化 Crank-Nicolson 法）のチェックを行なう。
VP-502	定常規定温度問題	規定温度を与えて定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-503	定常熱伝達問題	熱伝達がある場合の定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-504	定常熱流束問題	熱流束を与えて定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-505	定常内部発熱問題	内部発熱がある場合の定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-506	材料が温度依存の定常熱伝導問題	熱伝導係数が温度依存である場合の定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と理論解の比較を行なう。
VP-507	厚肉円筒の非定常熱伝導問題	厚肉円筒における非定常熱伝導解析を行ない，FINAS，ANSYS および MARC の解の比較を行なう。
VP-508	非定常熱伝導解析におけるリスタート機能利用問題	非定常熱伝導解析の途中で計算の中断，再開を行ない，リスタート機能のチェックを行なう。
VP-509	材料・熱伝達境界温度依存の非定常熱伝導問題	材料定数と熱伝達境界条件が温度依存の場合の非定常熱伝導解析を行ない，FINAS の解と ANSYS，MARC の解との比較を行なう。
VP-510	材料データライブラリを使用した非定常熱伝導解析	材料データライブラリを使用して非定常熱伝導解析を行ない，材料データライブラリを使用せずに材料定数を入力して行なった解析結果と解の比較を行なう。
VP-511	節点温度の線形結合問題	定常解析において節点の線形結合を行ない，ファスニング機能のチェックを行なう。
VP-512	熱伝導解析におけるポストテープ機能利用問題	熱伝導解析における解析結果が正しくポストテープに出力されるかどうかのチェックを行なう。

No.	タイトル	目的
VP-513	熱伝導解析における図面作成問題	熱伝導解析における解析結果の図化処理機能のチェックを行なう。
VP-514	使用者が作成したサブプログラムによる熱伝達問題	使用者が作成したサブプログラムXFILMにより熱伝達係数を与えて定常熱伝達解析を行なう。
VP-515	独立した2つの構造物の非定常熱伝導問題	独立した2つの構造物の熱伝導解析を1回の解析で行ない。各々の構造ごとに解析を行なった場合との解の比較を行なう。
VP-516	2つの構造物の接触面に熱伝達を考慮した非定常熱伝導問題	2つの構造の接触面における熱の移動を熱伝達で表わす場合について非定常熱伝導解析を行ない，FINASの解とANSYSの解の比較を行なう。
VP-517	熱流束による入熱がある無限板の非定常熱伝導問題	無限板の片面の温度を規定し，他の面に熱流束を与える場合について非定常熱伝導解析を行ない，FINASとANSYSの解の比較を行なう。
VP-518	熱伝導解析におけるポストテープ編集機能利用問題	リスタート機能を利用した解析で出力される複数のポストテープの編集を行ない，熱伝導解析におけるポストテープ編集機能が正しく作動することを確認する。
VP-519	熱伝導解析におけるリスタートテープ編集機能およびリスタートテープからの出力機能利用問題	熱伝導解析におけるリスタートテープの編集機能とリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-520	定常非線形熱伝達リンク問題	定常熱伝導解析において，熱伝導係数および熱伝達係数が温度依存である非線形問題を解析し，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-521	2つの構造物の接触面に熱伝達を考慮した非定常非線形熱伝導問題	2つの構造の接触面における熱の移動を熱伝達で表わす場合に，熱伝達係数が温度依存である熱伝導解析を行ない，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-522	定常熱伝導解析と非定常熱伝導解析の連結問題	材料定数と熱伝達境界条件が温度依存の場合について，定常と非定常を連結した熱伝導解析を行ない，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-523	幅射を含む定常熱伝導問題	輻射を含む定常熱伝導解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。

No	タイトル	目的
VP-524	熱伝導率の直交異方性を考慮した定常熱伝導問題	熱伝導率の直交異方性が考慮された定常熱伝導問題を解析し，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-525	時間増分自動決定機能を利用した非定常熱伝導問題	厚肉円筒において，内部を流れる液体ナトリウムが急激に変化した場合の非定常熱伝導問題に関して時間増分自動決定機能を適用したFINASの解とANSYSの解との比較を行う。
VP-526	材料座標系を用いた熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題	熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない定常熱伝導問題を解析し，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。
VP-527	使用者が作成したサブプログラムによる熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題	熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない場合に，その材料座標系を定義するための使用者作成サブプログラムXMCORDを用いて定常熱伝導解析を行ないFINASの解とANSYSの解との比較を行なう。

表 1-3　動的解析 VP の一覧表

No.	タ　イ　ト　ル	目　　的
VP-701	梁の固有値問題	多自由度固有値解析の固有値について，NASTRAN との解の比較を行なう。
VP-702	梁の応答スペクトル問題	応答スペクトル解析機能が正しく作動することを理論解との比較により検証する。
VP-703	梁のモーダル応答問題	モーダル応答解析機能が正しく作動することを動的荷重として外力およびそれと等価な加速度を負荷し，それぞれ理論解と比較して検証する。
VP-704	棒の弾性動的応答問題（直接積分法）	棒の一端に線形な動的荷重を与えるシンプルな問題をFINAS直接積分法で解き，理論解およびFINASモーダル法の解と比較する。
VP-705	球殻の弾性動的応答問題（直接積分法）	球殻のトップにステップ荷重を与える問題を直接積分法で解き，これをNONSAP[1]の直接積分法の解と比較する。
VP-706	棒の弾塑性動的応答問題	棒の一端に線形な荷重を与えるシンプルな問題で弾塑性動的応答解析のFINASの解と理論解との比較を行なう。
VP-707	付加質量を用いた振動問題	先端に付加質量を与えた棒に外荷重を作用させ，FINASにおける直接積分法による解と理論解との比較を行なう。
VP-708	片持ち梁のモーダル応答解析	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し，減衰がない場合についてFINASのモーダル応答解析の結果と理論解との比較を行なう。
VP-709	モーダル応答解析におけるリスタート機能利用問題	第1回目の計算で片持ち梁の固有値計算を行ない，リスタートによる第2回目の計算で衝撃荷重を受ける場合のモーダル応答解析を行なう。
VP-710	モーダル応答解析におけるポストテープ機能利用問題	モーダル応答解析における解析結果が正しくポストテープに出力されるかどうかのチェックを行なう。
VP-711	直接積分法におけるリスタート機能利用問題	直接積分法による応答解析の途中で計算の中断と再開を行ない，リスタート機能のチェックを行なう。
VP-712	直接積分法におけるポストテープ機能利用問題	直接積分法による応答解析の結果がポストテープに正しく出力されるかどうかのチェックを行なう。

No.	タイトル	目的
VP-713	直接積分法による片持ち梁の応答問題	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し，減衰がない場合についてFINASの直接積分法による応答解析の結果と理論解との比較を行なう。
VP-714	減衰のある片持ち梁のモーダル応答問題	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し，減衰がある場合のモーダル応答解析を行ない，FINASとNASTRANの解の比較を行なう。
VP-715	直接積分法による減衰のある片持ち梁の応答問題	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し，直接積分法により減衰のある場合の応答解析を行ない，FINASとNASTRANの解の比較を行なう。
VP-716	単純支持梁の応答スペクトル問題	単純支持梁に応答変位スペクトルを与えた応答スペクトル解析を行ない，FINASの解とNASTRAN, ANSYSの解との比較を行なう。
VP-717	周縁固定円板の固有値問題	周縁固定円板の固有値解析を行ない，FINASの解とNONSAPの解との比較を行なう。
VP-718	直接積分法による球殻の弾塑性応答問題	球殻の頂点に衝撃荷重を与える弾塑性応答問題を直接積分法で解析し，FINASとNONSAPの解の比較を行なう。
VP-719	固有値解析におけるリスタートテープからの出力機能利用問題	固有値解析におけるリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-720	モーダル応答解析におけるリスタートテープからの出力機能利用問題	モーダル応答解析におけるリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-721	応答スペクトル解析におけるリスタートテープからの出力機能利用問題	応答スペクトル解析におけるリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-722	直接積分法による動的解析におけるリスタートテープ編集機能およびリスタートテープからの出力機能利用問題	直接積分法による応答解析におけるリスタートテープの編集機能とリスタートテープからの出力機能のチェックを行なう。
VP-723	正方板の固有値問題	周辺単純支持の正方板の固有値解析を行ない，FINASの解と理論解およびNASTRANの解との比較を行なう。
VP-724	初期変位を与えた外力加振問題	初期条件として変位を与え，外力により加振する問題をFINASの線形直接積分法で解析し理論解と比較を行なう。

No.	タイトル	目的
VP-725	時間刻みを変化させる線形直接積分応答問題	片持ち梁の自由端に衝撃荷重を負荷し，直接積分法により応答を計算する。応答時刻を2つに分け，1回の計算中に2種類の時間増分を用いて解析を行ない，NASTRAN，MARCとの解の比較を行なう。
VP-726	多質点梁モデルの地震応答問題	8個の集中質量系よりなる梁構造のELCENTRO波（N-S 1940）に対する応答を線形直接積分法で解析し，モーダル応答法による解との比較を行なう。
VP-727	減衰のある1自由度系の強制振動問題	バネ・減衰要素の一端にステップ関数の荷重を与える問題を線形直接積分法で解析し，理論解との比較を行なう。
VP-728	静的解析からのリスタート機能を利用した線形直接積分法による減衰のある1自由度系の自由振動問題	バネ・減衰要素の一端に荷重を負荷した状態から，瞬時に荷重を開放したときの自由振動の解析を行なう。最初に荷重を負荷した静的解析を行ない，次にリスタート機能を利用し線形直接積分法により，無負荷状態の自由振動解析を行なう。この結果と理論解との比較を行なう。
VP-729	梁の固有値解析において固有値範囲を指定する問題	VP-701の梁の固有値問題に対して固有値範囲を指定した固有値解析機能が正しく作動するかの検証を行なう。
VP-730	固有値範囲指定による片持ち梁のモーダル応答問題	VP-708の片持ち梁のモーダル応答問題において固有値範囲指定機能が正しく作動するかの検証を行なう。

1.108 VP-108 熱膨張による接触問題

(1) 目 的

ギャップがある構造モデルにおいて，温度変化により材料の熱膨張が生じた場合の弾性接触問題を解析し，FINASの解と理論解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

(a) 解析モデル

• 構造モデル

図 1.108-1 に示されるギャップ g をもつ断面積 1 mm^2 の棒モデルを考える。

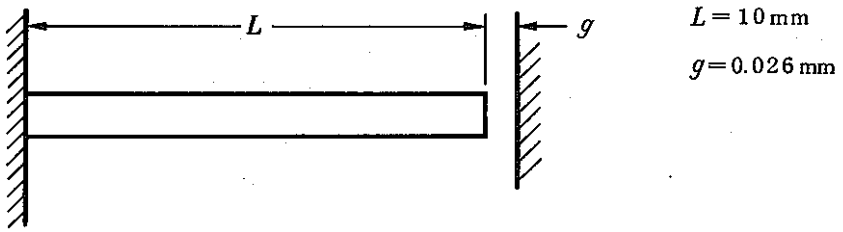


図 1.108-1 構造モデル

• 使用要素

ROD2 ：3 次元軸力要素

CONT2 ：2 次元接触要素

• 有限要素モデル

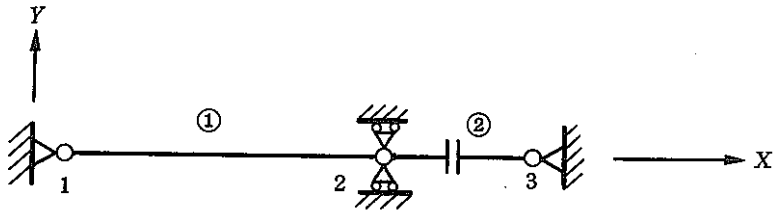


図 1.108-2 有限要素モデル

(b) 材料定数

• 材料はオーステナイトステンレス鋼 SUS 304 として，材料の温度依存性は考慮せず 550°C のものを用いる。

弾性係数	$E = 1.57 \times 10^4$ kg/mm^2
熱膨張係数	$\alpha = 20.60 \times 10^{-6}$ 1/°C

• 接触要素に対するデータ

初期状態	未接触
垂直方向剛性	$k_g = 1.57 \times 10^7$ kg/mm
ギャップの大きさ	$g = 0.0026$ mm

(c) 境界条件

図1.108-2を参照。

節点 1 ： $U_X=U_Y=U_Z=0.0$

2 ： $U_Y=U_Z=0.0$

3 ： $U_X=U_Y=0.0$

(d) 負荷条件

- 構造基準温度　$T=550^{\circ}C$ （一様）
- 一様温度変化　第1ステップ　$\Delta T=100^{\circ}C$

第2ステップ　$\Delta T=-100^{\circ}C$

(e) 理 論 解

- 第1ステップ目

温度変化 $\Delta T=100^{\circ}C$ による熱ひずみ $\Delta\varepsilon^T$ は次式から求まる。

$$\Delta\varepsilon^T=\alpha\cdot\Delta T=20.60\times10^{-6}\times100=0.00206 \qquad (1.108\text{-}1)$$

したがって，X方向の変位増分 ΔU_X は次のようになる。

$$\Delta U_X=\Delta\varepsilon^T\cdot L=0.00206\times10=0.0206 \qquad (1.108\text{-}2)$$

ΔU_X とギャップの大きさ g は次の関係が成立する。

$$\Delta U_X>g\ (=0.0026) \qquad (1.108\text{-}3)$$

式(1.103-3)からギャップは閉じ接触状態となり，応力増分 $\Delta\sigma$ は次式により計算される。

$$\Delta\sigma=k\cdot(0.0026-0.0206)/10=-28.26 \qquad (1.108\text{-}4)$$

以上から節点2の変位 U_X^2 および要素の応力 σ は次のようになる。

$$U_X^2=0.0206\ ;\quad \sigma=-28.26 \qquad (1.108\text{-}5)$$

- 第2ステップ目

温度変化 $\sigma T=-100^{\circ}C$ により初期の口開き状態になり，U_X^2，σ は明らかに次のようになる。

$$U_X^2=0\ ;\quad \sigma=0 \qquad (1.108\text{-}6)$$

(3) 解析結果

表1.108-1に各ステップでの節点2のX方向変位およびX方向応力 σ_x を理論解と比較して示す。

表 1.108−1　FINASの解と理論解との比較

ステップ	変位，応力	FINASの解	理 論 解
1	U_X	2.60180E−03	0.0206
	σ_x	−2.8257E +01	−28.26
2	U_X	2.59886E−06	0.0
	σ_x	4.0894E −03	0.0

(4) 考　察

表 1.108-1 からわかるように，FINASの解は理論解と一致しており，熱膨張による弾性接触問題機能が正しく作動したことが認められる。

1.109　VP-109　摩擦を考慮した接触問題

(1) 目　的

摩擦が考慮されている構造モデルにおいて，すべりを生じさせる負荷が与えられる弾性接触問題を解析し，FINASの解と理論解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

断面積 1.0 mm^2 の棒

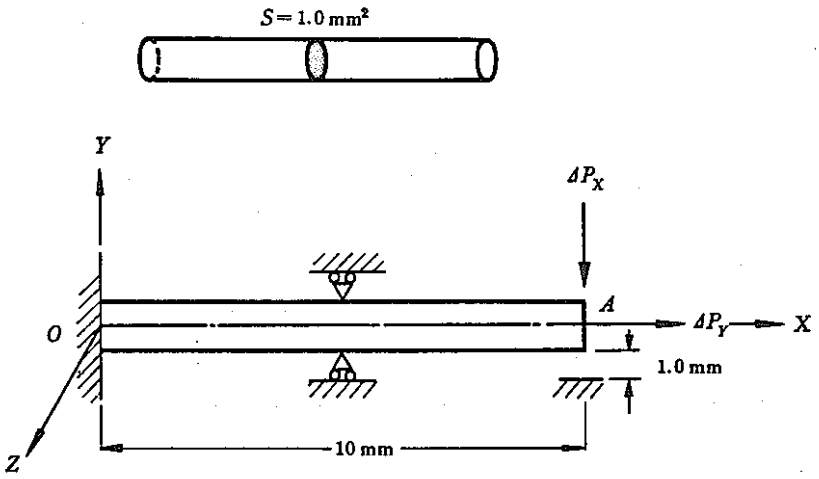


図1.109-1　構造モデル

• 使用要素

ROD2　：　3次元棒要素

CONT2　：　2次元接触要素

• 有限要素モデル

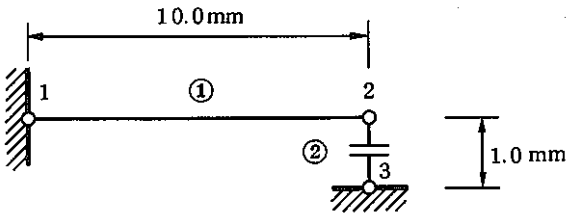


図1.109-2　有限要素モデル

b) 材料定数

• 材料は次のものを用いる。

弾性係数　　$E=10000.0$ kg/mm^2

• 接触要素に対するデータ

初期状態　　未接触

垂直方向剛性　　$k_g=1.0\times10^7$ kg/mm

水平方向剛性　　$k_f=1.0\times10^7$ kg/mm

ギャップの大きさ　　$g=1.0$ mm

摩擦係数　　$\mu=0.1$

c) 境界条件

図1.109-2を参照

節点　1　：　$U_X=U_Y=U_Z=0.0$

2　：　$U_Z=0.0$

3　：　$U_X=U_Y=0.0$

d) 負荷条件

• 機械荷重

節点2における各ステップのX方向荷重 P_X, Y方向荷重 P_Y は表1.109-1に示す。

表1.109-1　負荷条件

ステップ	P_X (kg)	P_Y (kg)
1	0.0	−2000.0
2	400.0	0.0
3	200.0	0.0

(3) 理論解

• $P_Y=-2000$ kg のとき

初期のギャップ量が 1.0 から節点2のX方向，Y方向変位 U_X, U_Y は次のようになる。

$$U_X=0.0 \quad ; \quad U_Y=-1.0 \tag{1.109-1}$$

また，接触要素の直方向，せん断方向の力 σ，τ および ギャップの大きさ，すべり量 ε，γ で表わすと，次のようになる。

$$\begin{aligned} &\sigma=-2000.0 \quad ; \quad \tau=0.0 \\ &\varepsilon=-1.0 \quad ; \quad \gamma=0.0 \end{aligned} \tag{1.109-2}$$

• $P_X=400$ kg のとき

節点2のX方向変位 U_X は，状態が接触してすべりが生じてないという条件から，次式で計算される。

$$U_X=\frac{P_X}{k+k_f}=3.99960004\times10^{-5} \tag{1.109-3}$$

ここで，kは棒要素の剛性を表わし，次式で与えられる。

$$k=\frac{E\cdot A}{l}=1000 \tag{1.109-4}$$

したがって，接触要素のせん断力 τ は次式で計算される。

$$\tau=k_f(-U_X)=-399.960004 \tag{1.109-5}$$

式(1.105-5)のτはすべり限界 τ^{CR} に対して次式を満足する。

$$|\tau|>|\tau^{CR}|=\mu|\sigma_{(1)}|=200.0 \tag{1.109-6}$$

ここで，$\sigma_{(1)}$はステップ1での接触要素の直方向の力で，μは摩擦係数である。式(1.109-6)から,すべりが生じ，解析全体の釣り合い状態を考慮すると，ステップでのX方向変位 U_X は新たに次式から求まる。

$$U_X=\frac{P_X-|\tau^{CR}|}{k}=\frac{200}{1000}=0.2 \tag{1.109-7}$$

また，接触要素の直方向，せん断方向の力 σ，τ およびギャップの大きさ，すべり量 ε，γは，明らかに次のようになる。

$$\begin{aligned}&\sigma=-2000.0 \quad ; \quad \tau=-200.0\\&\varepsilon=-1.0 \quad ; \quad \varepsilon_y=-0.2\end{aligned} \tag{1.109-8}$$

- P_X=200 kg のとき

接触の状態がすべりが生じたあと，静止しており，逆方向の負荷に対して，式(1.109-6)で示されるすべり限界を超えるまで変位は生じない。また，接触要素のせん断方向τは解析全体の釣り合い状態を考慮すると次のようになる。

$$\tau=0.0 \tag{1.109-9}$$

(4) 解析結果

表1.109-2は各負荷ステップにおける節点2の変位，表1.109-3は接触要素の要素力，ギャップ量，すべり量を理論解と比較して示す。

表1.109-2　変位の FINAS の解と理論解との比較

負荷ステップ	変　位	FINASの解	理　論　解
P_Y=−2000	U_X	0.0	0.0
	U_Y	−1.00020E+00	−1.0
P_X=400	U_X	1.98020E−01	0.2
	U_Y	−1.00020E+00	−1.0
P_X=200	U_X	1.98005E−01	0.2
	U_Y	−1.00020E+00	−1.0

表1.109-3　要素力，ギャップ量，ひずみ量のFINASの解と理論解との比較

負荷ステップ	要素力，ギャップ/ひずみ量	FINASの解	理　論　解
P_X=−2000	σ	−2.0000E+03	−2000.0
	τ	0.0	0.0
	ε	−1.0002E+00	−1.0
	γ	0.0	0.0
P_X=400	σ	−2.0000E+03	−2000.0
	τ	−2.0000E+02	−200.0
	ε	−1.0002E+00	−1.0
	γ	−1.9802E−01	−0.2
P_X=200	σ	−2.0000E+03	−2000.0
	τ	−1.9996E+00	0.0
	ε	−1.0002E+00	−1.0
	γ	−1.9800E−01	−0.2

(5) 考　察

表1.109-2，1.109-3からわかるように，FINASの解は理論解と一致しており，すべりを考慮した接触問題解析機能が正しく作動したことが認められる。

1.110　VP-110　繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題

(1) 目　的

クリープの硬化則として繰返しクリープ硬化則を適用した弾性クリープ問題において，FINASの解と理論解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

断面積 1.0 mm^2 の棒

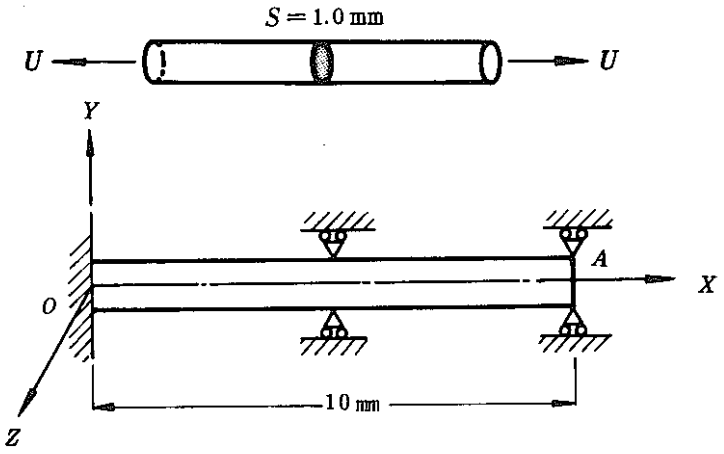


図1.110-1　構造モデル

• 使用要素

ROD2　；　3次元棒要素

• 有限要素モデル

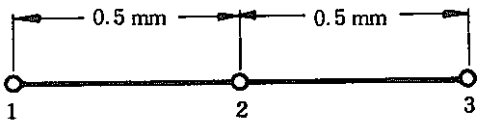


図1.110-2　有限要素モデル

b) 材料定数

材料はSUS 304として，FINASに組み込まれている材料データライブラリを使用する。なお，材料参照温度は550℃とする。

弾性係数　　$E_{550}=1.57\times10^{4}$ kg/mm^2

クリープ則　　繰返しクリープ硬化則を適用する。その場合の初期クリープひずみ硬化量 $\overline{\varepsilon^H}$ は次の値を用いる。

$$\overline{\varepsilon^H}=0.002$$

また，クリープひずみ式は表1.110-1を参照，ただし，α_R は次のものを用いる。

$$\alpha_R=7.0$$

c) 境界条件（図1.110-1参照）

O点において　　$U_X=U_Y=U_Z=0$

O-Aに沿い　　$U_Y=U_Z=0$

A点において　　$U_X=1.5669\times10^{-3}$ mm

（初期応力状態が24.6 kg/mm^2 になるように規定変位を与える）

d) 負荷条件

• 熱荷重

解析モデルの温度は550℃一定。

• クリープ時間

最大合計　10時間

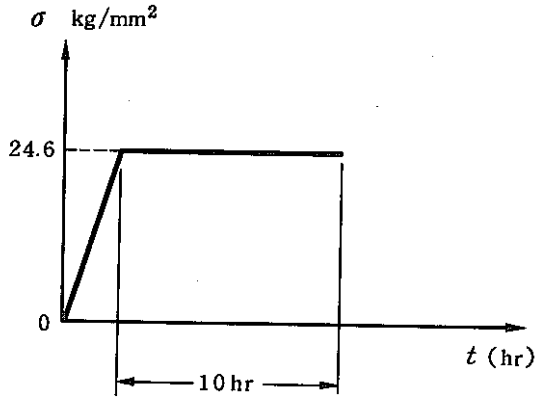


図1.110-3　負荷条件

e) 理 論 解

図1.110-4参照。

(3) 解析結果

図1.110-4参照。

(4) 考　察

結果からわかるように，FINASの解と理論解は一致しており，クリープの硬化則として，繰返しクリープ硬化則が正しく作動したことが認められる。

表1.110-1　SUS304鋼クリープひずみ式

$$\varepsilon^C = c_1\{1-\exp(-r_1 t)\} + c_2\{1-\exp(-r_2 t)\} + \dot{\varepsilon}_m t$$

ここで，

$$r_1 = 40.0\, t_R^{-0.6667}, \qquad r_2 = 14.799\, t_R^{-0.85439}$$

$$c_1 = \frac{2.408\, \dot{\varepsilon}_m^{\,0.7908}}{r_1}, \qquad c_2 = \frac{0.81437\, \dot{\varepsilon}_m^{\,0.87084}}{r_2}$$

$$\dot{\varepsilon}_m = F t_R^{-1.1294}$$

$$\log_{10}(\alpha_R t_R) = \begin{cases} B_0 + B_1 \log_{10}\sigma + B_2 (\log_{10}\sigma)^2 \\ \quad (2.0 \leqq \sigma \leqq 38.0 \text{ のとき}) \\ \{B_0 - B_2(\log_{10} 2.0)^2\} + (B_1 + 2B_2 \log_{10} 2.0)\log_{10}\sigma \\ \quad (0.01 \leqq \sigma < 2.0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし，$0 \leqq \sigma < 0.01$ に対しては，$r_1 = r_2 = c_1 = c_2 = \dot{\varepsilon}_m = 0$

〈使用単位〉　ε^C (mm/mm)，σ (kg/mm^2)，t (hr)，T (℃)

温度 / パラメータ	$425 \leqq T \leqq 650$
F	$65.48 \exp\left\{-\dfrac{42750}{8.31\,(T+273.15)}\right\}$
B_0	$-16.07703 + \dfrac{22968.2}{T+273.15}$
B_1	$\dfrac{-2665.10}{T+273.15}$
B_2	$\dfrac{-1763.01}{T+273.15}$
α_R	MATERIALデータ B_{12}カードで指定した値。B_{12}カードのα_Rが無記入の場合は 1.0

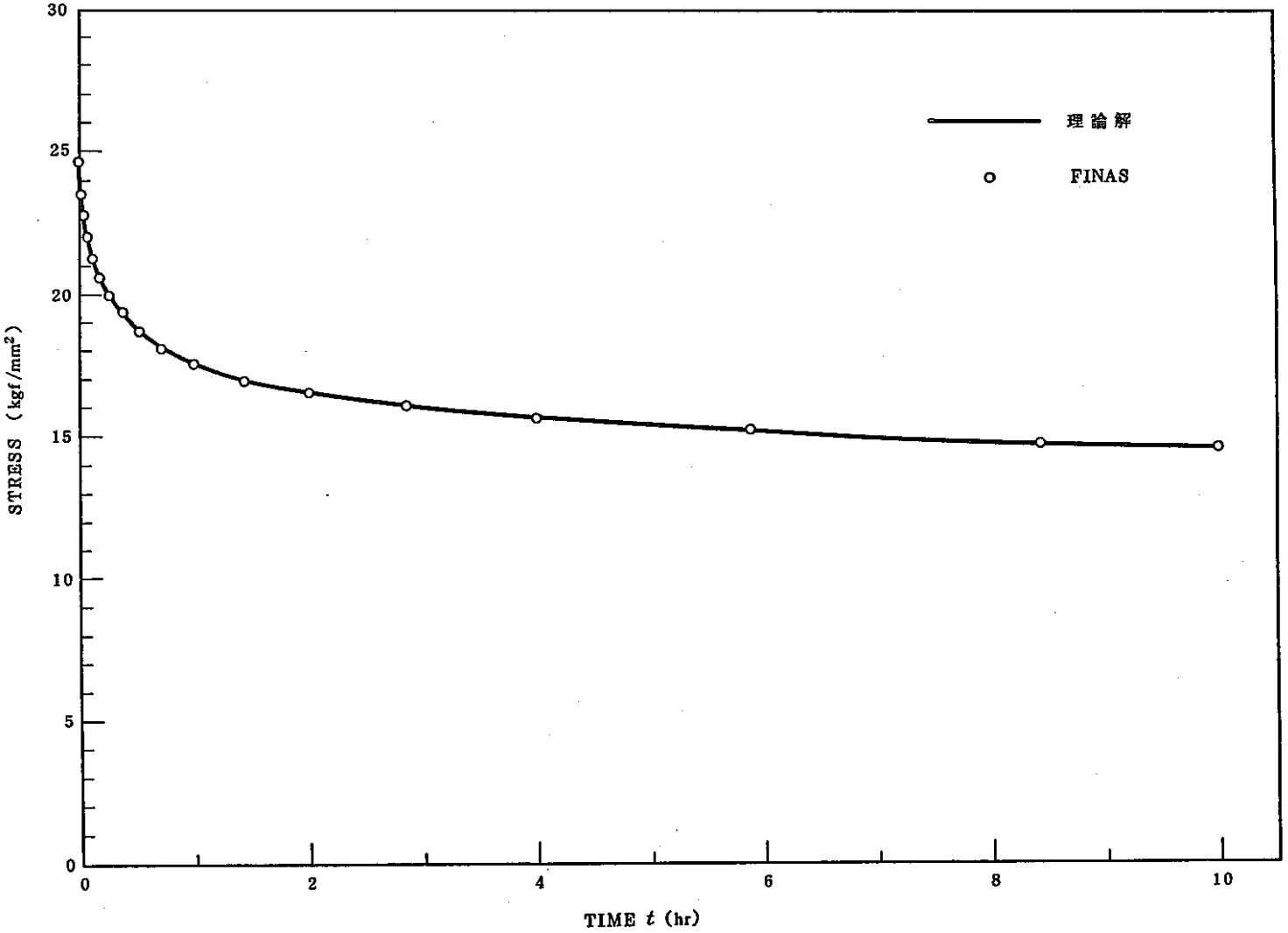


図1.110-4　応力の時間履歴

1.111　VP-111　弾塑性領域におけるクリープおよびスウェリング問題

(1) 目　的

弾塑性領域でクリープおよびスウェリング問題を解析し，理論解と比較する。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

半径 20 mmの中実丸棒を軸対称モデルとして扱う。

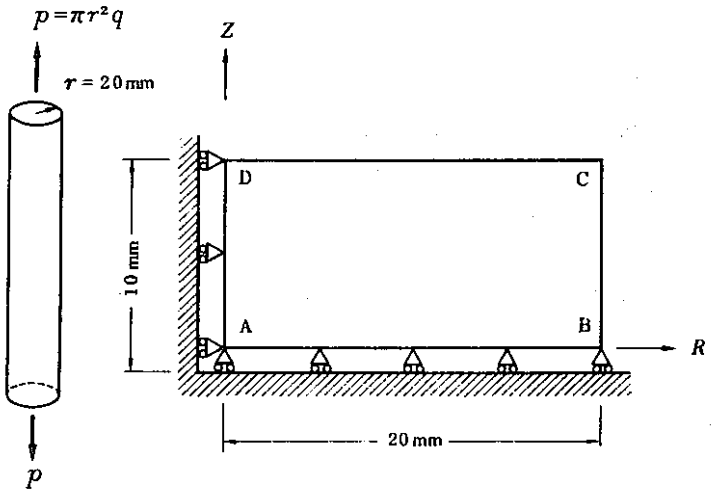


図1.111-1　構造モデル

• 使用要素

QAX8　：　8節点四辺形軸対称要素

• 有限要素モデル

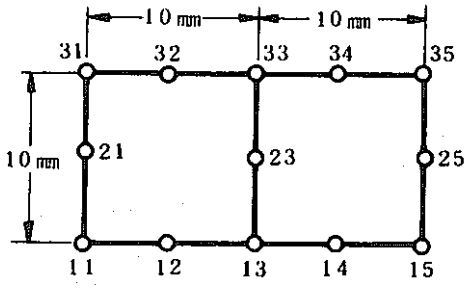


図1.111-2　有限要素モデル

b) 材料定数

• 材料は以下のものを使用する。

弾性係数	E ＝1630000 kg/cm^2
ポアソン比	ν ＝0.3
熱膨張係数	α ＝2.059×10^{-5} 1/℃
降伏応力	σ_Y＝9.0 kg/cm^2
加工硬化係数	H'＝66550.0 kg/cm^2

- 塑性に関する硬化則は等方硬化則とする。
- クリープ則は仮想のものであり，硬化則としては時間硬化則を適用する。

$$\varepsilon^C = 8\times10^{-11}\,\sigma^{3.61}\,t^{1.06}$$

- スウェリングひずみ式

$$\overline{\varepsilon^S} = A\left(\frac{\phi t}{10^{22}}\right)^B e^C$$

ただし，

$$A = c_1(T-c_2),$$

$$B = c_3 + \frac{c_5}{T-c_4} + \frac{c_7}{(T-c_6)^2}$$

$$C = c_8 + c_9 + \frac{c_{10}}{T}$$

ϕt ：中性子束流（n/cm^2），　T：温度（°K）

ここで，

c_1＝1×10^{-12}，	c_2＝40.0，	c_3＝2.05，	c_4＝623.0，	c_5 ＝−27.0
c_6＝623.0，	c_7＝78.0，	c_8＝32.6，	c_9＝−0.015，	c_{10}＝−5100.0

c）境界条件（図1.111-1 参照）

A-Bに沿って	u_z＝0.0
A-Dに沿って	u_r＝0.0

d）負荷条件

- 機械荷重

軸 荷 重	P＝120 kg

- 熱 荷 重

構造内温度	550℃ 一定

- クリープ時間

最大クリープ時間	1000 時間

- 中性子束

ϕ＝1.0×10^{15} n/cm^2 sec

- 照射時間

100 日

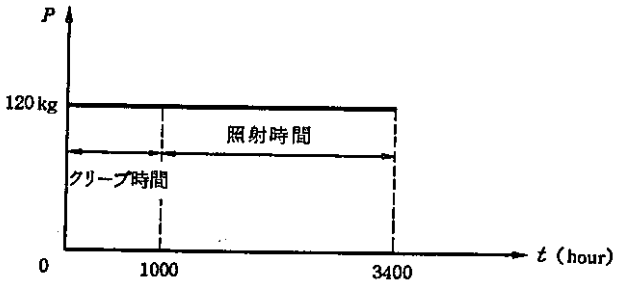


図1.111-3　負荷履歴

f）理 論 解

3400時間後の軸方向応力，塑性ひずみ，クリープひずみおよびスウェリングひずみの理論解を表1.111-1に示す。

(3) 解析結果

表1.111-1参照。

表1.111-1　3400時間後の応力ひずみ

応力，ひずみ	FINASの解	理　論　解
σ	9.5493E+00	9.549296
ε^P	8.2539E-06	8.253944×10^{-6}
ε^C	4.1762E-04	4.176252×10^{-4}
ε^S	7.5412E-04	7.541240×10^{-4}

(4) 考　察

表1.111-1に示されるように，FINASの解と理論解とは一致しており，弾塑性領域においてクリープおよびスウェリング解析機能が正しく作動することが認められる。

1.112　VP-112　弾性大変形接触問題

(1) 目　的

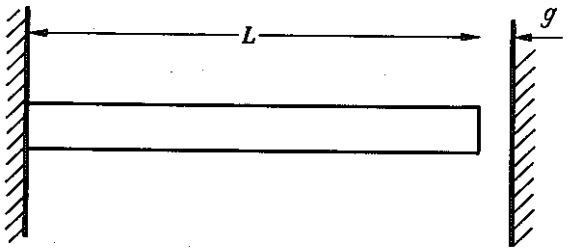
ギャップがある構造モデルにおいて，弾性大変形接触問題を解析し，FINASの解と理論解との比較を行う。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

図1.112-1に示される断面積1 mm^{2}でギャップgをもつモデルを考える。



L=10mm

g=1 mm

図1.112-1　構造モデル

• 使用要素

ROD2　：　3次元軸力要素

CONT2　：　2次元接触要素

• 有限要素モデル

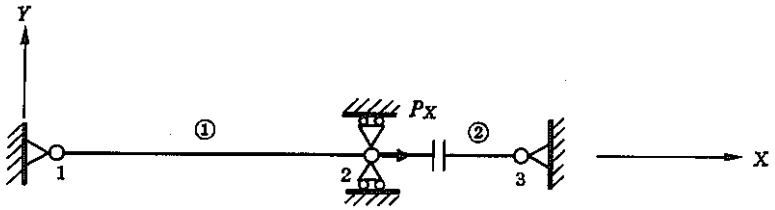


図1.112-2　有限要素モデル

b) 材料定数

• 材料は次のものを用いる。

弾性係数　　E=10000 kg/mm^2

• 接触要素に対するデータ

初期状態　　未接触

垂直方向剛性　　k_g=1.0×10^7 kg/mm

水平方向剛性　　k_f=1.0×10^7 kg/mm

ギャップの大きさ　　g =1.0 mm

e) 境界条件

図1.112-2 を参照。

節点 1 : $U_X=U_Y=U_Z=0.0$

2 : $U_Y=U_Z=0.0$

3 : $U_X=U_Y=0.0$

d) 負荷条件

節点 2 において水平方向 (X方向) に集中荷重 P_X を 5 等分で負荷する。

$$P_X=2000\ \text{kg}$$

e) 理 論 解

図1.112-2 に示されるモデルに集中荷重 P_X が負荷された場合の端点における 水平方向の変位 U_X は次式から求まる。

$$\hat{U}(\hat{U}+1)(\hat{U}+2)=\hat{P} \tag{1.112-1}$$

ただし,

$$\hat{U}=\frac{U_X}{L}$$
$$\hat{P}=\frac{2P_X}{AE} \tag{1.112-2}$$

ここで, L は節点 1 から 2 までの長さ, A は断面積, E は弾性係数を表わす。

また, 変形後のひずみは, 要素座標系 x, y, z において, 変位 u_x, u_y, u_z を生じた場合には次式で表わされる。

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2\right\} \tag{1.112-3}$$

また, そのときの応力は,

$$\sigma_{xx}=E\,\varepsilon_{xx} \tag{1.112-4}$$

ところでギャップの条件を考慮すると, $P_X=1200$ kg 以上では $u_x=1.0$ となり, 式 (1.112-3) の ε_{xx} および式 (1.112-4) の σ_{xx} は次のようになる。

$$\varepsilon_{xx}=0.105$$
$$\sigma_{xx}=1050.0\ (\text{kg/mm}^2) \tag{1.112-5}$$

(3) 解析結果

表1.112-1 に負荷ステップにおける節点 2 の水平方向変位 u_x および応力, ひずみをまとめる。

表1.112−1　FINASの解と理論解との比較

荷重P_X（kg）	成　分	FINASの解	理　論　解
400	u_x	3.78564E−01	0.37826654
	ε_{xx}	3.8573 E−02	3.854208×10^{-2}
	σ_{xx}	3.8573 E+02	3.854208×10^{-2}
800	u_x	7.20463E−01	0.7203054
	ε_{xx}	7.4642 E−02	7.462474×10^{-2}
	σ_{xx}	7.4642 E+02	7.462474×10^{-2}
1200	u_x	1.00000E+00	1.0
	ε_{xx}	1.0500 E−01	0.105
	σ_{xx}	1.0500 E+03	1050.0
1600	u_x	1.00000E+00	1.0
	ε_{xx}	1.0500 E−01	0.105
	σ_{xx}	1.0500 E+03	1050.0
2000	u_x	1.00008 E+00	1.0
	ε_{xx}	1.0501 E−01	0.105
	σ_{xx}	1.0501 E+03	1050.0

(4) 考　察

表1.112−1からわかるようにFINASの解と理論解はよく一致しており，弾性大変形接触問題解析機能が正しく作動したことが認められる。

1.113　VP-113　円管の曲げ問題——軸対称要素における非軸対称負荷の問題

(1) 目　的

軸対称構造物における非軸対称負荷解析の機能を検証するために，円管の自重による曲げの問題により，FINASの解と理論解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

外径2in，内径1 inの円管を対称性を考慮し，½モデルとする。

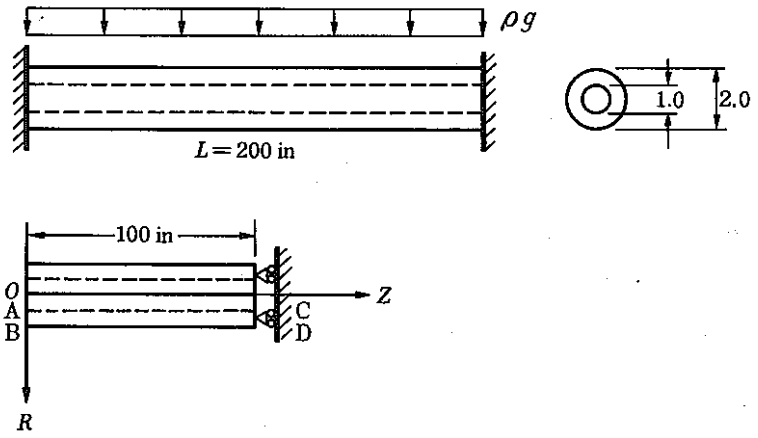


図1.113-1　構造モデル

• 使用要素

QNAX8　：　8節点四辺形軸対称調和荷重要素

• 有限要素モデル

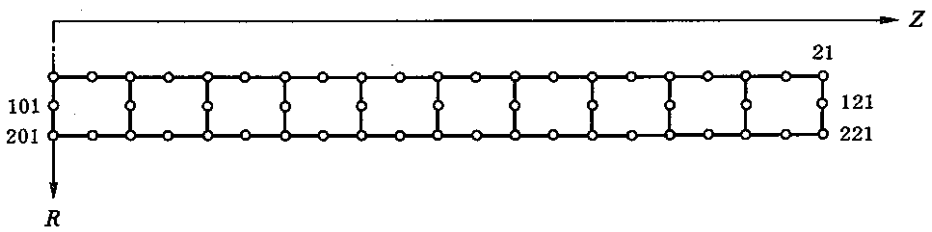


図1.113-2　有限要素モデル

b) 材料定数

ヤング係数	30×10^{6} psi
ポアソン比	0.0
密　　度	0.00073 lb·sec^2/in^4

c) **境界条件**（図1.113-1 参照）

A点，B点において　　$u_R = u_Z = u_\theta = 0$

C点，D点において　　$u_Z = 0$

d) **負荷条件**（図1.113-1 参照）

自重を負荷する。密度 $\rho = 0.00073$ lb·sec^2/in^4，重力加速度 $g = 386$ in/sec^2 とすると，単位体積あたりの物体力 q は

$$q = \rho g = 0.00073 \times 386 = 0.28178 \ \text{kg/in}^3 \tag{1.113-1}$$

また，自重は対称1次モードの荷重であり，次式で与えられる。

$$\begin{cases} q_R = \sum_{n=1}^{m} q_{R,n} \cos n\theta \\ q_\theta = \sum_{n=1}^{m} q_{\theta,n} \sin n\theta \end{cases} \tag{1.113-2}$$

$$q = q_R - q_\theta = q_{R,1} \cos\theta - q_{\theta,n} \sin\theta \tag{1.113-3}$$

したがって，

$$q_R = -q_\theta = 0.28178 \ \text{kg/in}^3 \tag{1.113-4}$$

e) **理 論 解**

梁理論により，両端固定の中空円管に等分布荷重が作用する場合の梁中央部のたわみは，次式で与えられる。

$$\delta = \frac{\rho g A \cdot l^4}{384 EI} \tag{1.113-5}$$

ここで，A，I は断面積，断面2次モーメントである。

$$A = \frac{\pi}{4}(d_0^2 - d_i^2) \tag{1.113-6}$$

$$I = \frac{\pi}{64}(d_0^4 - d_i^4) \tag{1.113-7}$$

したがって，

$$\delta = \frac{\rho g l^4}{384E} \cdot \frac{\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4} \cdot \frac{64}{\pi(d_0^4 - d_i^4)} = \frac{\rho g l^4}{24E(d_0^2 + d_i^2)}$$
$$= \frac{0.00073 \times 386 \times 200^4}{24 \times 30 \times 10^6 \times (2^2 + 1^2)}$$
$$= 0.125236 \tag{1.113-8}$$

(3) **解析結果**

点Dにおけるたわみ u_R についてFINASの解との比較を行なう。

表1.113−1　FINASの解と理論解との比較

	FINASの解	理　論　解
u_R ($\theta=0^\circ$)	1.24598E−01	0.125236
u_θ ($\theta=90^\circ$)	−1.24599E−01	−0.125236

(4) 考　察

表1.113-1に示すように，FINASの解と理論解は良く一致している。

1.114　VP-114　非軸対称荷重ジェネレーション問題

(1) 目　的

荷重データジェネレーションプログラムFNSLOADを用いて軸対称荷重のデータジェネレーションを行ない，FNSLOADで求めた荷重分布と理論解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

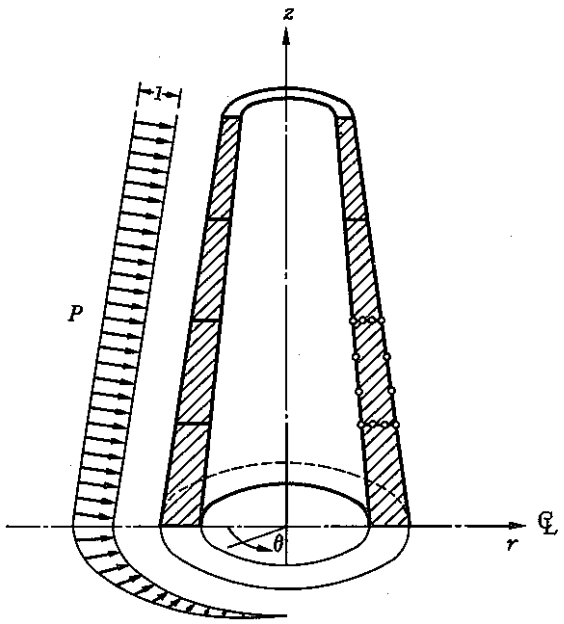


図1.114-1　構造モデル

b) 荷重条件

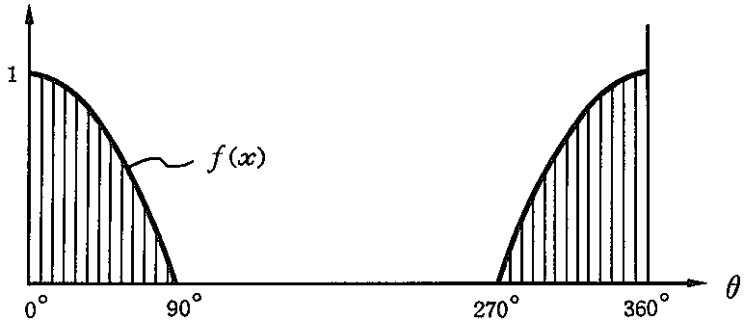


図1.114-2　荷重条件

荷　重　　$0^\circ \sim 90^\circ$　　$f(x)=\cos x$

　　$90^\circ \sim 270^\circ$　　$f(x)=0$　　(1.114-1)

　　$270^\circ \sim 360^\circ$　　$f(x)=\cos x$

周期2πをもつ関数$f(x)$のフーリエ級数は次式のとおりである。

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1.114\text{-}2)$$

ここで，フーリエ係数a_n，b_nは，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n=1, 2, \cdots\cdots) \qquad (1.114\text{-}3)$$

荷重$f(x)$は偶関数であるので，b_n ($n=1, 2, \cdots\cdots$) は常に零となる。式 (1.114-1) を式 (1.114-3) に代入すると，a_nは次のように求まる。

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} + \dfrac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1}\right) & (n \neq 1) \\ \dfrac{1}{2} & (n=1) \end{cases} \qquad (1.114\text{-}4)$$

(4) 解析結果

表1.114-1　FNSLOADと理論解の比較

モード		FNSLOAD	理　論　解
0		3.17500E-1	3.18310×10^{-1}
COS	1	4.98730E-1	0.5
	2	2.11671E-1	2.12207×10^{-1}
	3	-8.81862E-7	0.0
	4	-4.23366E-2	-4.24413×10^{-2}
SIN	1	-1.74312E-7	0.0
	2	-1.94471E-7	0.0
	3	-2.66804E-7	0.0
	4	2.89038E-9	0.0

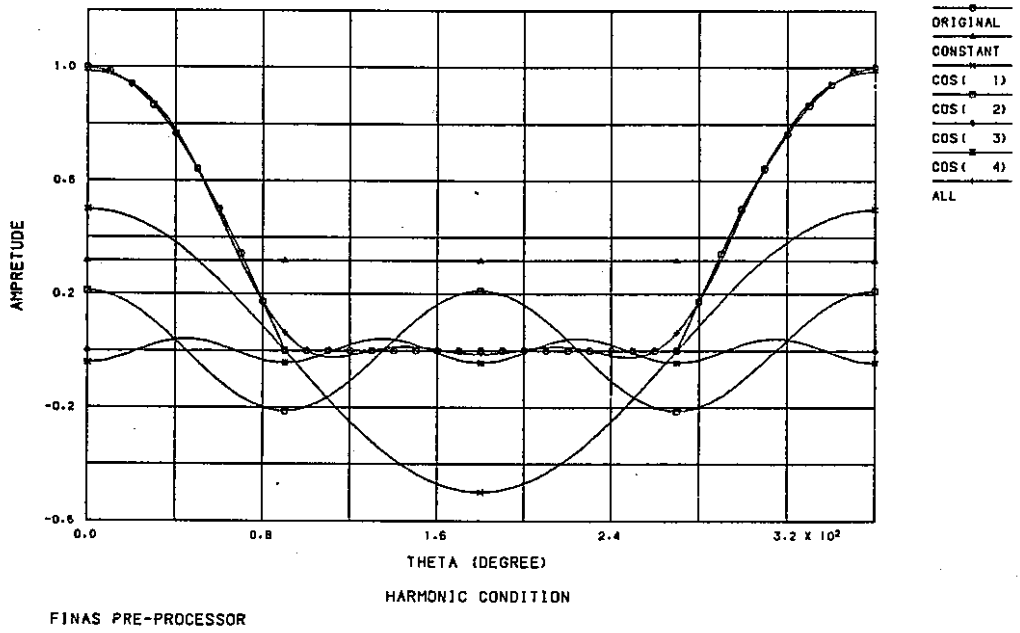


図1.114-3　各モードの傾向

(5) 考　察

表1.114-1に示すようにFNSLOADによる解は理論解によく一致しており，非軸対称荷重のデータジェネレーションの妥当性が検証された。

1.115　VP-115　薄肉円筒の曲げ問題——軸対称構造における非軸対称負荷の問題

(1) 目　的

軸対称構造物における非軸対称負荷解析の機能を検証するために，薄肉円筒の自重による曲げの問題により，FINASの解と理論解との比較を行う。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

直径2in，板厚0.1in，長さ250inの円筒を対称性を考慮し，½モデルとする。

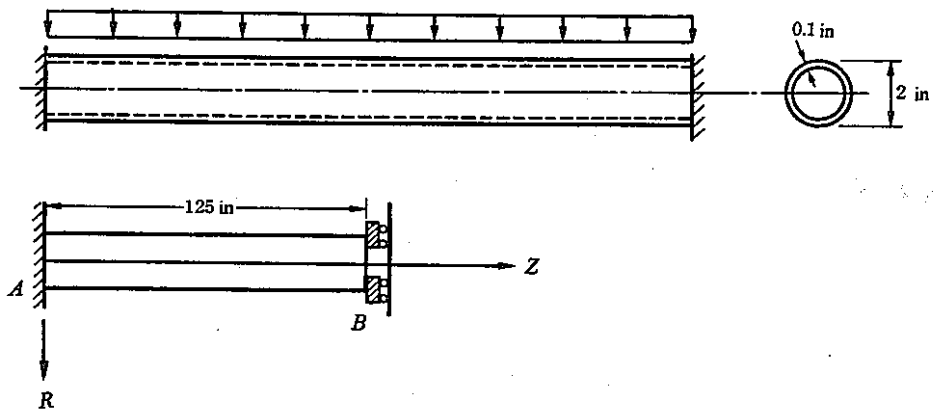


図1.115-1　構造モデル

• 使用要素

NCONC2 ：　2節点円錐台軸対称調和荷重シェル要素

• 有限要素モデル

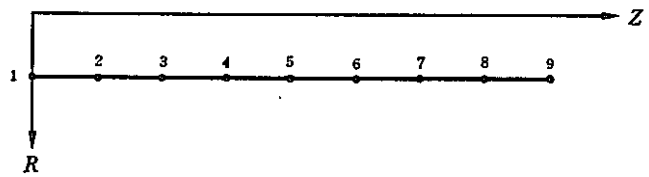


図1.115-2　有限要素モデル

b) 材料定数

ヤング係数	30×10^{6} psi
ポアソン比	0.0
密　　度	0.00073 $lb\cdot sec^2/in^4$

c) **境界条件**（図1.115-1 参照）

A点において　　$u=w=v=\beta=0$

B点において　　$w=\beta=0$

d) **負荷条件**（図1.115-1 参照）

自重を負荷する。密度$\rho=0.00073$ lb-sec^2/in^4，重力加速度$g=386$ in/sec^2 とすると，単位面積あたりの物体力qは

$$q=\rho g=0.00073\times 386=0.28178 \text{ kg/in}^3 \tag{1.115-1}$$

また，自重は対称1次モードの荷重であり，次式で与えられる。

$$\begin{cases} q_R=\sum_{n=1}^{m} q_{R,n}\cos n\theta \\ q_\theta=\sum_{n=1}^{m} q_{\theta,n}\sin n\theta \end{cases} \tag{1.115-2}$$

$$q=q_R-q_\theta=q_{R,1}\cos\theta-q_{\theta,1}\sin\theta \tag{1.115-3}$$

したがって，

$$q_{R,1}=-q_{\theta,1}=0.28178 \text{ lb/in}^3 \tag{1.115-4}$$

e) **理 論 解**

梁理論により，両端固定の円筒に等分布荷重が作用する場合の梁中央部のたわみは次式で与えられる。

$$\delta=\frac{\rho g A\cdot l^4}{384EI} \tag{1.115-5}$$

ここで，A，Iはそれぞれ断面積，断面2次モーメントである。

$$A=\pi dt \tag{1.115-6}$$

$$I=\frac{\pi}{8}dt(d^2+t^2) \tag{1.115-7}$$

したがって，

$$\begin{aligned}\delta&=\frac{\rho g l^4}{384E}\cdot\pi dt\cdot\frac{8}{\pi dt(d^2+t^2)}=\frac{\rho g l^4}{48E(d^2+t^2)}\\&=\frac{0.00073\times 386\times 250^4}{48\times 30\times 10^6\times(2^2+0.1^2)}\\&=0.190618\end{aligned} \tag{1.115-8}$$

また，曲げモーメントMは次式で与えられる。

$$\begin{aligned}M&=-\frac{\rho g A\cdot l^2}{12}+\frac{\rho g A\cdot ls}{2}-\frac{\rho g A\cdot s^2}{2}\\&=-\frac{\rho g A}{12}(l^2-6ls+6s^2)\end{aligned} \tag{1.115-9}$$

したがって，応力σは次式で与えられる。

$$\sigma=\frac{Mr}{I}=-\frac{\tau\rho gA}{12I}(l^2-6ls+6s^2)$$

$$=-\frac{\tau\rho g}{12}\cdot\pi dt\cdot\frac{8}{\pi dt(d^2+t^2)}(l^2-6ls+6s^2)$$

$$=-\frac{2\tau\rho g}{3(d^2+t^2)}(l^2-6ls+6s^2) \qquad (1.115\text{-}10)$$

最大曲げモーメントは固定端Aに生じる。固定端に最も近い積分点位置の座標sは次の値である。

$$s=\frac{1}{8}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-0.906)=\frac{1}{8}\cdot\frac{250}{8}\cdot\frac{1}{2}(1-0.906)$$

$$=0.18359 \qquad (1.115\text{-}11)$$

したがって，最大応力σ_{max}は(1.05，0.18359)において次式となる。

$$\sigma_{max}=3060.75\ \text{psi} \qquad (1.115\text{-}12)$$

(3) 解析結果

点Bにおけるたわみu,vおよび座標(1.05,0.18359)―要素1，積分点5 ―における応力σ_φについて，FINASの解と理論解を比較する。

表1.115-1　FINASの解と理論解

	FINASの解	理　論　解
u　($\theta=0°$)	1.90904E-01	0.190618
v　($\theta=90°$)	−1.90904E-01	−0.190618
σ_φ　($\theta=0°$)	2.9884E+03	3060.75

(4) 考　察

表1.115-1に示すようにFINASの解と理論解はよく一致している。

1.523　VP-523　輻射を含む定常熱伝導問題

(1) 目　的

輻射を含む定常熱伝導解析を行ない，FINASの解と理論解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

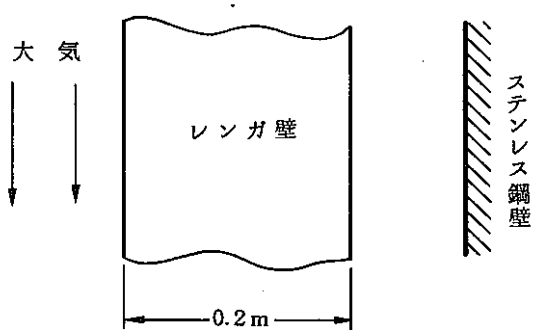


図1.532-1　構造の寸法

• 使用要素

HQMEM4　：　熱伝導4節点四辺形要素

FLIN2　：　熱伝達2節点辺要素

RLINK2　：　輻射リンク2節点要素

• 有限要素モデル

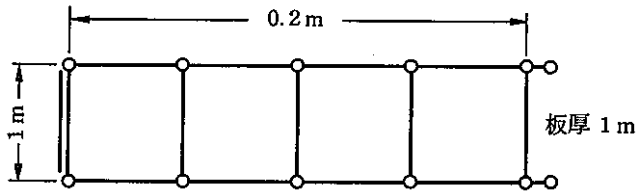


図1.523-2　有限要素モデル

b) 材料定数

レンガ壁の熱伝導係数　$k=0.5$ kcal/m·hr·°C

c) 境界条件

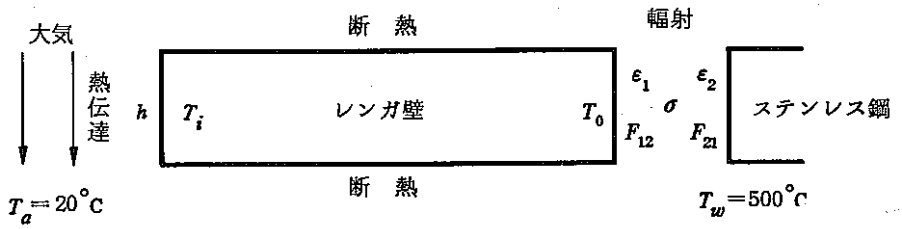


図1.523-3 境界条件

大気とレンガ壁との間の熱伝達係数	h =25 kcal/m^2·hr·°C
レンガ壁面の輻射率	ε_1=0.75
ステンレス鋼壁面の輻射率	ε_2=0.07
ステファン・ボルツマン定数	σ =4.88×10^{-8} kcal/m^2 hr °K^4
レンガ壁とステンレス鋼壁との間の形態係数	$F_{12}=F_{21}=1.0$

輻射面間の反射を考慮した輻射による熱の流れは次式で与えられる。

$$Q=\frac{A_1\sigma(T_0^4-T_w^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{12}}+\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-1\right)\frac{A_1}{A_2}} \tag{1.523-1}$$

ここで，$A_1=A_2=1.0\,\mathrm{m}^2$，$F_{12}=1.0$ であるから上式は次に書き換えることができる。

$$Q=\frac{\sigma(T_0^4-T_w^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1} \tag{1.523-2}$$

一方，FINASでは輻射による熱の流れは次式で求められる。

$$Q=A\sigma\varepsilon F(T_0^4-T_w^4) \tag{1.523-3}$$

したがって，FINASの入力データとして次の値を使用する。

$$A=1.0\,\mathrm{m}^2$$
$$\sigma=4.88\times10^{-8}\ \mathrm{kcal/m^2\ hr\ °K^4}$$
$$\varepsilon=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1}=0.0684039 \tag{1.523-4}$$
$$F=1.0$$

d) 理論解

熱伝達面，レンガ壁内部および輻射面における熱の流れについて次の等式が成立する。

$$Q=Ah(T_a-T_i)=\frac{k(T_i-T_0)}{l}=A\sigma\varepsilon F(T_0^4-T_w^4) \tag{1.523-5}$$

式(1.523-4)より次の値を得る。

$$T_i = 322.132\,^{\circ}\mathrm{K} = 48.9820\,^{\circ}\mathrm{C}$$
$$T_0 = 611.967\,^{\circ}\mathrm{K} = 338.817\,^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.523\text{-}6)$$
$$Q = -724.588 \text{ kcal/sec}$$

(3) 解析結果

レンガ壁両面における温度と熱流量を表1.523-1と表1.523-2にそれぞれ示す。

表1.523-1　レンガ壁面の温度

	面の位置	FINASの解	理論解
温度	熱伝達面	**4.89810E+01**	48.9820
T 〔°C〕	輻射面	**3.38791E+02**	338.817

表1.523-2　レンガ壁面の熱流量

	面の位置	FINASの解	理論解
熱流量	熱伝達面	**−7.24526E+02**	−724.588
Q〔kcal/sec〕	輻射面	**−7.24667E+02**	−724.588

(4) 考　察

表1.523-1と表1.523-2に示すようにFINASの解と理論解は一致している。このことにより，FINASの輻射機能が正しく作動したことが確認できる。

1.524　VP-524　熱伝導率の直交異方性を考慮した定常熱伝導問題

(1) 目　的

熱伝導率の直交異方性が考慮された定常熱伝導問題を解析し，FINASの解とANSYSの解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

構造は仮想の軸対称構造とし，その形状と寸法を図1.524-1に示す。

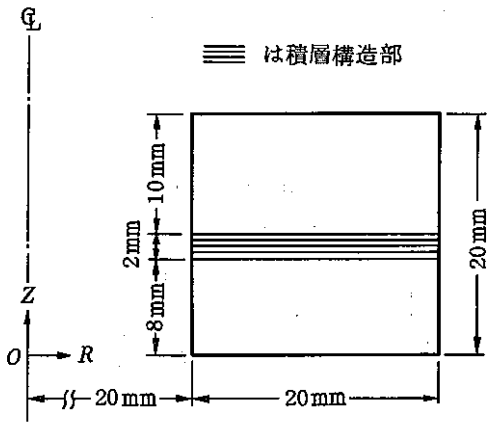


図1.524-1　構造モデル

図1.524-1　構造モデル

• 使用要素

HQAX4　：　熱伝導4節点四辺形軸対象要素

• 有限要素モデル

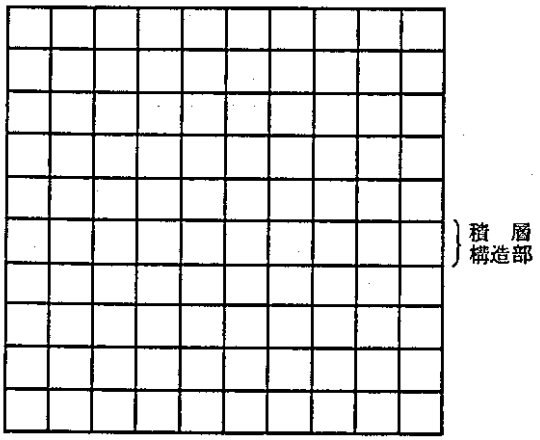


図1.524-2　有限要素モデル

b) 材料定数

積層構造部は直交異方性とし，他の部分は等方性とする。各部分の熱伝導率を表1.524-1に示す。

図1.524-1　熱伝導率

〔kcal/mm sec ℃〕

	熱伝導係数	450℃	500℃	550℃
積層構造部	k_R	4.86×10^{-6}	5.02×10^{-6}	5.18×10^{-6}
	k_Z	4.86×10^{-7}	5.02×10^{-7}	5.18×10^{-7}
他の構造部	k_R, k_Z	4.86×10^{-6}	5.02×10^{-6}	5.18×10^{-6}

c) 境界条件

図1,524-3に示すように構造の周辺に沿い450℃，断面中心の点Cに550℃の規定温度をそれぞれ与える。

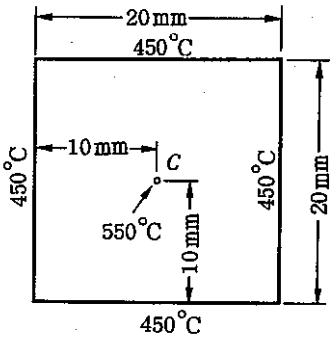


図1.524-3　境界条件

(3) 解析結果

図1.524-4のA-A′，断面に沿う温度分布を表1.524-2，表1.524-3および図1.524-5，図1.524-6に示す。

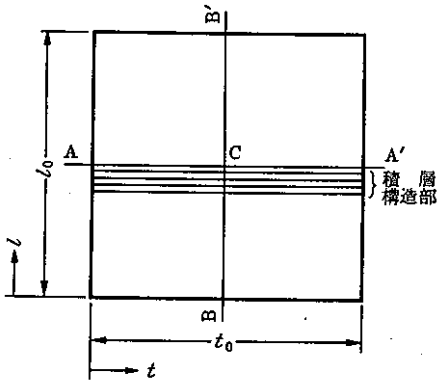


図1.524-4　温度分布表示断面

表1.524-2　A–A′ 断面に沿う温度分布

t/t_0		0.0 (A)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5 (C)
T	FINAS	**450.0**	**458.9**	**468.5**	**480.6**	**499.3**	**550.0**
〔℃〕	ANSYS	450.0	458.8	468.1	480.1	498.7	550.0
t/t_0		0.6	0.7	0.8	0.9	1.0 (A′)	—
T	FINAS	**496.1**	**476.7**	**465.1**	**456.8**	**450.0**	—
〔℃〕	ANSYS	495.5	476.3	464.8	456.6	450.0	—

表1.524-3　B–B′ 断面に沿う温度分布

l/l_0		0.0 (B)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5 (C)
T	FINAS	**450.0**	**451.7**	**453.5**	**455.6**	**453.0**	**550.0**
〔℃〕	ANSYS	450.5	451.7	453.4	455.5	452.8	550.0
l/l_0		0.6	0.7	0.8	0.9	1.0 (B′)	—
T	FINAS	**494.3**	**477.6**	**466.3**	**457.6**	**450.0**	—
〔℃〕	ANSYS	493.6	477.1	465.9	457.4	450.0	—

(4) 考　察

表1.524-2，表1.524-3および図1.524-5，図1.524-6から明らかなようにFINASとANSYSの解は非常に良く一致しており，熱伝導率の直交異方性が考慮された定常熱伝導解析機能の妥当性が確認できる。

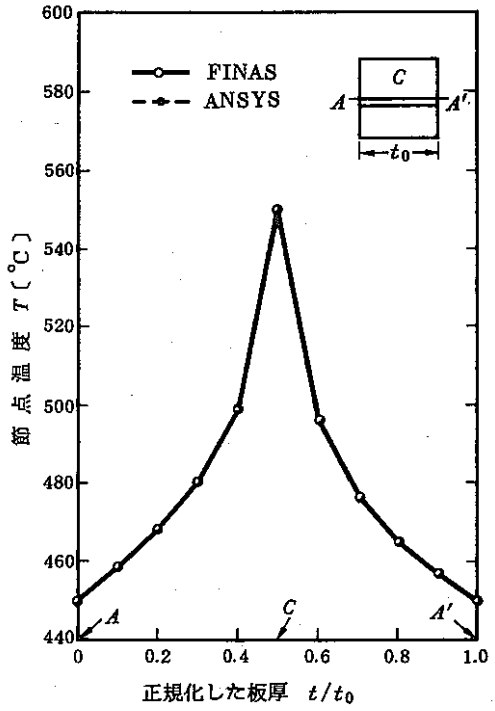


図1.524-5　A−A'断面に沿う温度分布

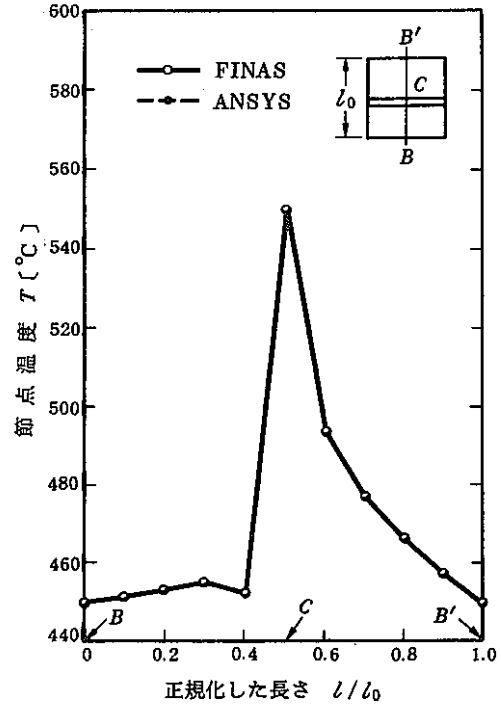


図1.524-6　B−B'断面に沿う温度分布

1.525　VP−525　時間増分自動決定機能を利用した非定常熱伝導問題

(1) 目　的

厚肉円筒において，内部を流れる液体ナトリウムが急激に変化した場合の非定常熱伝導問題に関して，時間増分自動決定機能を適用したFINASの解とANSYSの解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a）解析モデル

• 構造モデル

内半径100mmの厚肉円筒を軸対称モデルとして扱う。

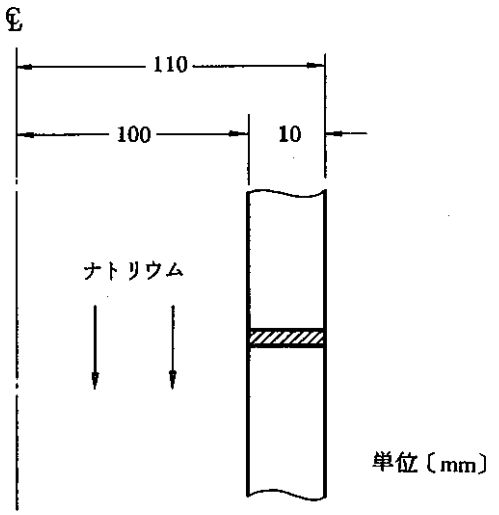


図1.525−1　構造モデルの寸法

• 使用要素

HQAX8　：熱伝導8節点四辺形軸対称要素

FCAX3　：熱伝達3節点軸対称要素

• 有限要素モデル

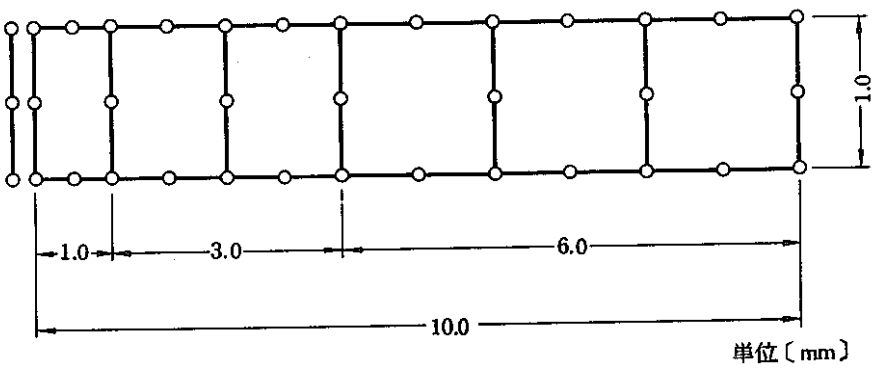


図1.525−2　有限要素モデル

b）材料定数

材料は SUS 304 と仮定する。

熱伝導係数	$k = 4.86\times10^{-6}$ kcal/mm·sec·℃
比　　熱	$c = 0.133$ kcal/kg·℃
密　　度	$\rho = 7.83\times10^{-6}$ kg/mm^3

c）境界条件

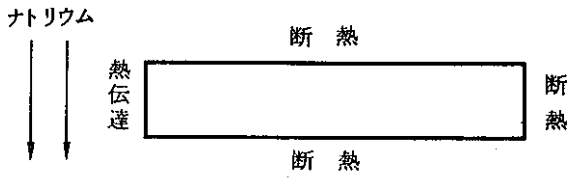


図1.525－3　境界条件

熱伝達係数　　$h = 4.2\times10^{-6}$ kcal/mm^2·sec·℃

d）入熱条件

円筒およびナトリウムの温度が550℃一定の定常状態から，ナトリウムの温度を急激に降下させる。時間に対するナトリウムの温度変化を図1.525-4に示す。

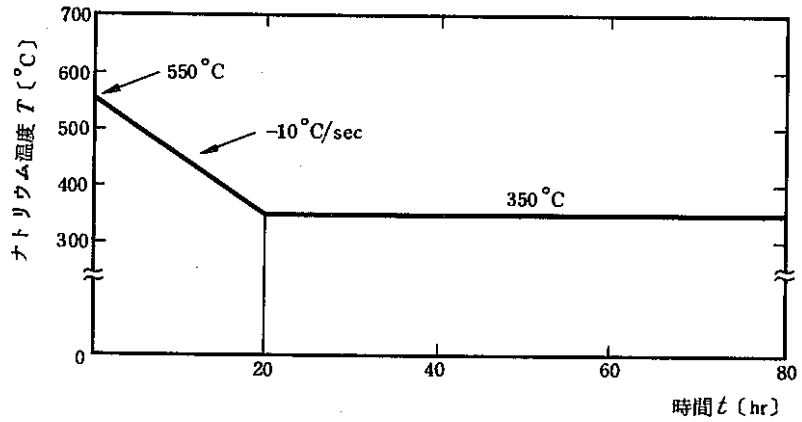


図1.525－4　ナトリウム温度の時間履歴

(3) 解析結果

t＝20，80秒における VP-507 の解との比較を表1.525-1～1.525-3に示す。また，図1.525-5 および図1.525-6に VP-507 および本解析の温度の時間履歴を示す。

表 1.525－1　節点温度 T〔℃〕

時間〔sec〕	位　置	FINASの解（VP 507）	FINAS の解
20	内 表 面	3.72119 E＋02	3.72117 E＋02
	管厚中心	4.41210 E＋02	4.41225 E＋02
	外 表 面	4.62900 E＋02	4.62919 E＋02
80	内 表 面	3.50073 E＋02	3.50088 E＋02
	管厚中心	3.50366 E＋02	3.50406 E＋02
	外 表 面	3.50479 E＋02	3.50531 E＋02

表 1.525－2　熱伝導要素中心における熱流束 q（kcal/mm^2・sec）

時間〔sec〕	位　置	FINASの解（VP507）	FINAS の解
20	内側要素	－8.75092 E－05	－8.75586 E－05
	外側要素	－8.28114 E－06	－8.28293 E－06
80	内側要素	－3.18960 E－07	－3.05894 E－07
	外側要素	－4.49006 E－08	－4.96954 E－08

表 1.525－3　熱伝達要素における熱流量 Q（kcal/sec）

時間〔sec〕	位　置	FINASの解（VP507）	FINAS の解
20	内 表 面	－5.83826 E－02	－5.8378 E－02
80	内 表 面	－2.16242 E－04	－2.5367 E－04

(4) 考　察

表 1.525-1～1.525-3 および図 1.525-5～1.525-6 からわかるように，非定常温度解析において，時間増分自動決定機能が正しく作動したことが認められる。

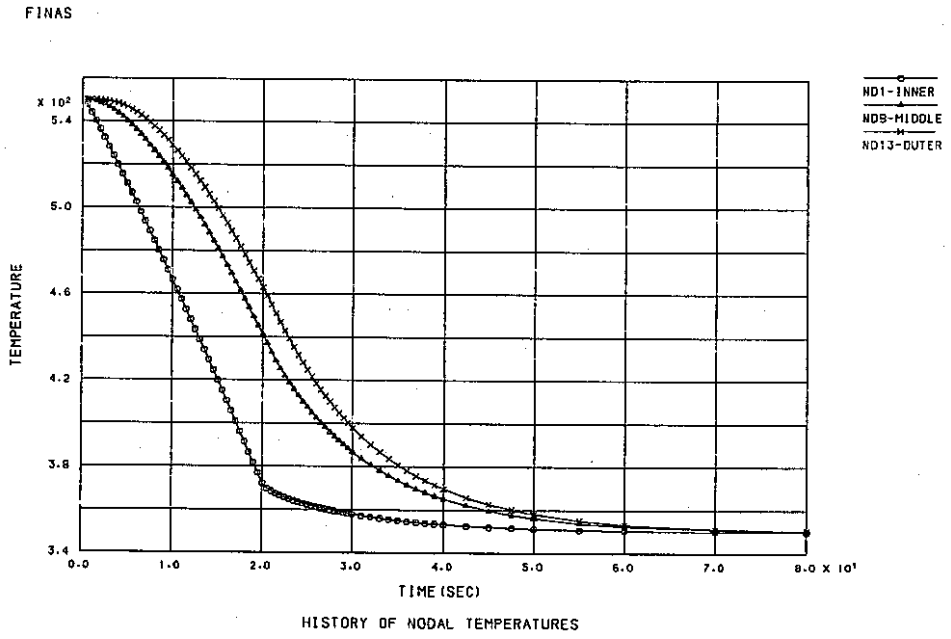


図 1.525－5　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴（VP－507）

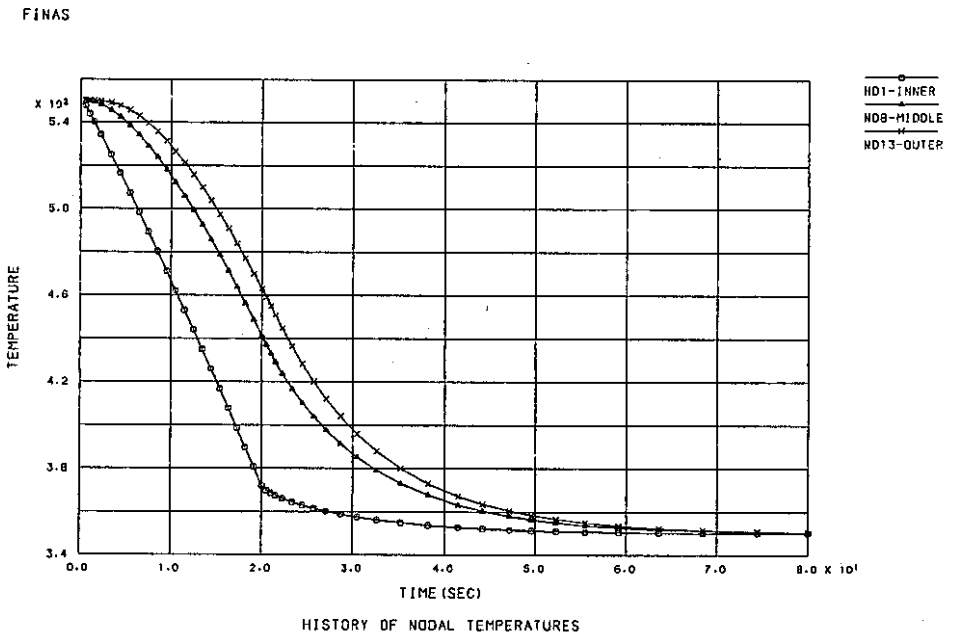


図 1.525－6　内外表面温度と管厚中心温度の時間履歴

1.526　VP−526　材料座標系を用いた熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題

(1) 目　　的

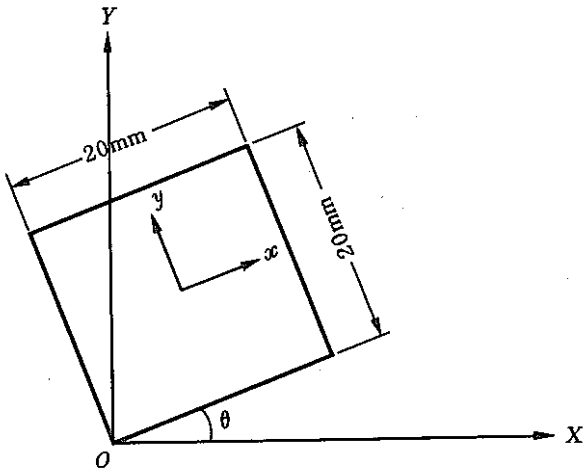
熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない定常熱伝導問題を解析し，FINAS と ANSYS の解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

構造は仮想の平面構造とし，その形状と寸法を図 1.526-1 に示す。



板厚　$t = 1.0\,\mathrm{mm}$

角度　$\theta = 30^\circ$

図 1.526−1　構造モデル

• 使用要素

HQMEM4 ： 熱伝導 4 節点四辺形平面要素

• 有限要素モデル

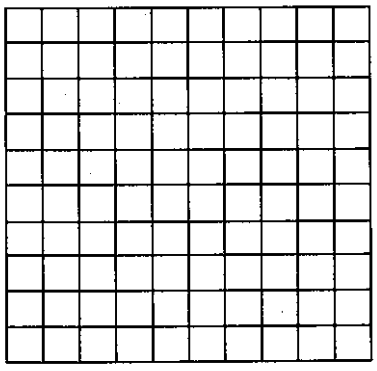


図 1.526−2　有限要素モデル

b）材料定数

熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸に対して反時計回りに30°傾いているとする。その材料座標系におけるx方向，y方向の熱伝導率 k_{xx}，k_{yy} は次のものとする。

x方向熱伝導率　　$k_{xx} = 4.86 \times 10^{-6}$

y方向熱伝導率　　$k_{yy} = 4.86 \times 10^{-7}$

c）境界条件

図1.526-3に示すようにA点，C点に次の規定温度を与え，他は断熱条件とする。

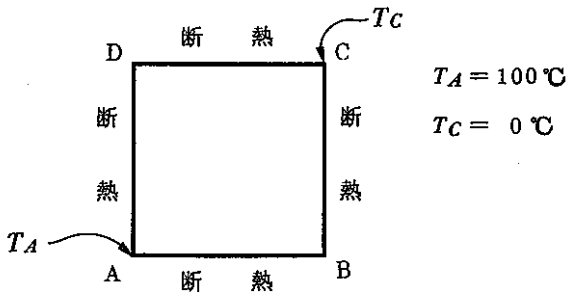


図1.526-3　境界条件

(3) 解析結果

図1.526-4 の A-A′ 断面に沿う温度分布について，FINAS の解と ANSYS の解との比較を表1.526-1に示す。

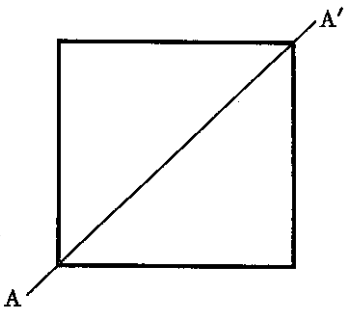


図1.526-4　温度分布表示断面

表 1.526－1　FINAS の解と ANSYS の解との比較〔℃〕

節点番号	FINAS の解	ANSYS の解
1	1.00000 E＋02	100.000
22	7.40573 E＋01	74.057
33	6.59523 E＋01	65.952
64	6.02685 E＋01	60.268
85	5.50624 E＋01	55.062
106	5.00001 E＋01	50.000
127	4.49377 E＋01	44.938
148	3.97317 E＋01	39.732
169	3.40478 E＋01	34.048
190	2.59429 E＋01	25.943
211	0.0	0.000

(4) 考　察

表 1.526-1 からわかるように，FINAS と ANSYS の解は一致しており，熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない定常熱伝導解析機能が正しく作動したことを確認できる。

1.527　VP−527　使用者が作成したプログラムによる熱伝導率の直交異方性定常熱伝導問題

(1) 目　的

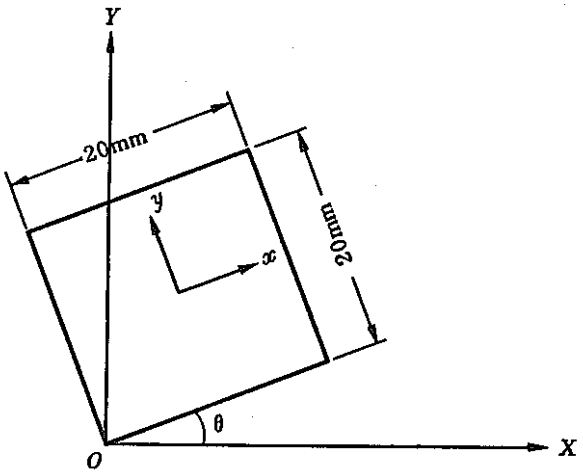
熱伝導率の異方性主軸が全体座標系の主軸と一致しない場合に，その材料座標系を定義するための使用者作成サブプログラム XMCORD を用いて定常熱伝導解析を行い，FINAS と ANSYS の解との比較を行なう。

(2) 問題の設定

a）解析モデル

• 構造モデル

構造は仮想の平面構造とし，その形状と寸法を図 1.527-1 に示す。



板厚　$t = 1.0$ mm

角度　$\theta = 30°$

図 1.527−1　構造モデル

• 使用要素

HQMEM4　：　熱伝導 4 節点四辺形平面要素

• 有限要素モデル

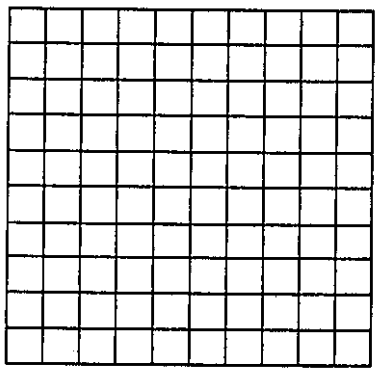


図 1.527−2　有限要素モデル

b）材料定数

材料座標系は，全体座標系から反時計回りに 30° 回転しているとして使用者作成のサブプログラム XMCORD により定義する。また，その材料座標系における x 方向，y 方向の熱伝導率 k_{xx}，k_{yy} は次のものとする。

x 方向熱伝導率　　$k_{xx} = 4.86\times10^{-6}$

y 方向熱伝導率　　$k_{yy} = 4.86\times10^{-7}$

c）境界条件

図 1.527-3 に示すように A 点，B 点の規定温度を与え，他は断熱条件とする。

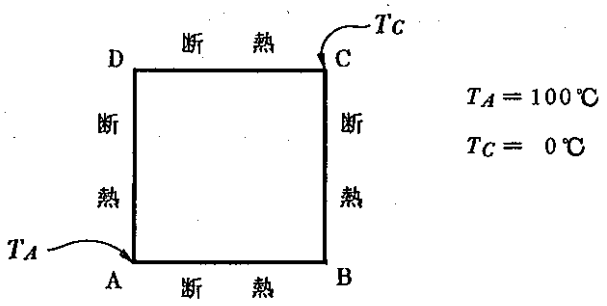


図 1.527－3　境界条件

(3) 解析結果

図 1.527－4 の A-A′ 断面に沿う温度分布について，FINAS の解と ANSYS の解との比較を表 1.527－1 に示す。

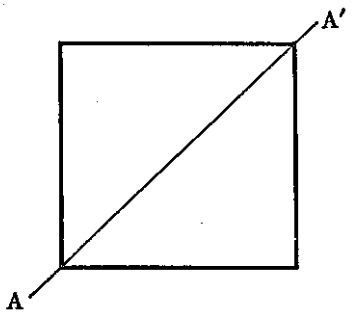


図 1.527－4　温度分布表示断面

表 1.527－1　FINAS の解と ANSYS の解との比較〔℃〕

節点番号	FINAS の解	ANSYS の解
1	1.00000 E＋02	100.000
22	7.40573 E＋01	74.057
43	6.59523 E＋01	65.952
64	6.02685 E＋01	60.268
85	5.50624 E＋01	55.062
106	5.00001 E＋01	50.000
127	4.49377 E＋01	44.938
148	3.07317 E＋01	39.732
169	3.40478 E＋01	34.048
190	2.59429 E＋01	25.943
211	0.0	0.000

(4) 考　察

表 1.527-1 から明らかなように，FINAS と ANSYS の解は一致しており，使用者作成のサブプログラム XMCORD により材料座標系を考慮した熱伝導率の直交異方性に関する定常熱伝導解析機能が正しく作動したことが確認できる。

1.729　VP−729　梁の固有値解析において固有値範囲を指定する問題

(1) 目　　的

VP-701 の梁の固有値問題に対して固有値範囲を指定した固有値解析機能が正しく作動するかの検証を行なう。なお，検証のために比較する解は VP-701 で述べられている NASTRAN の解を利用する。

(2) 問題の設定

a）解析モデル

- 構造モデル

矩形断面の片持ち梁を単軸モデルとして扱う。

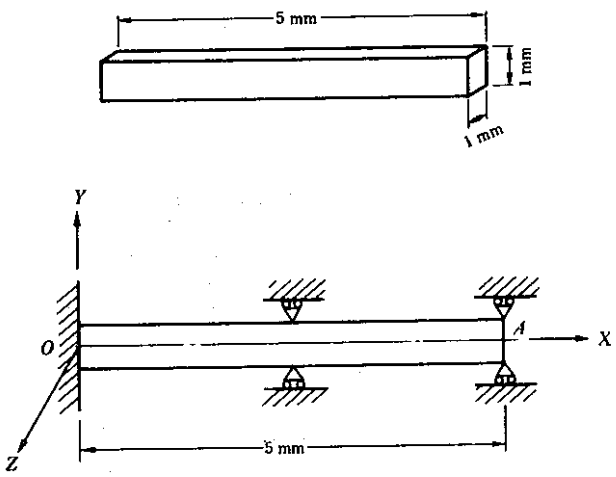


図 1.729−1　構造モデル

- 使用要素

BEAM2 ： 3次元矩形断面梁要素

- 有限要素モデル

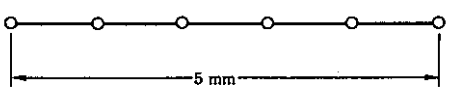


図 1.729−2　有限要素モデル

b）材料定数

弾性係数　　$E = 1.0\ \mathrm{kg/mm^2}$

質量密度　　$\rho = 2.0\ \mathrm{kg \cdot sec^2/mm^4}$

c）境界条件（図1.729-1参照）

O点において　　$u_x = u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

OAに沿い　　$u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$

d）固有値の指定範囲

表1.729－1　各ケースの固有値範囲

ケース	個　数	固有値 λ_1	固有値 λ_2
1	—	0.4	1.6
2	2	0.4	1.6

なお，ケース1は固有値 λ_1 から λ_2 に含まれるすべての固有値を求め，ケース2は固有値 λ_1 から2個の固有値を求める。

(3) 解析結果

表1.729－2　FINASとNASTRANの解

ケース	モード番号	固有値	
		FINAS	NASTRAN
1	1	4.12215 D－01	4.122147 E－01
	2	1.00000 D＋00	1.000000 E＋00
	3	1.58779 D＋00	1.587785 E＋00
2	1	4.12215 D－01	4.122147 E－01
	2	1.00000 D＋00	1.000000 E＋00

(4) 考　察

表1.729-2から，固有値範囲を指定した固有値解析機能が正しく作動したことが認められる。

負荷条件と時間増分

片持ち梁の自由端に図1.730-3に示す衝撃荷重を負荷する。時間増分は $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ sec とする。

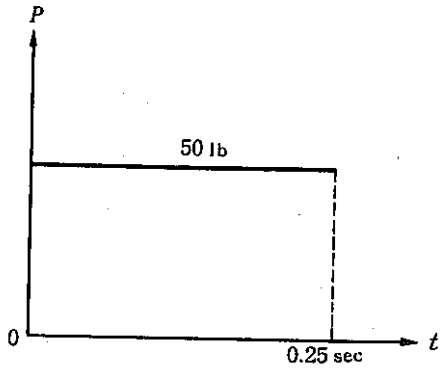


図1.730−3　負荷条件

質量マトリックスと固有値指定の範囲

質量は分布荷重とし，固有値範囲は0.0から 1.28×10^6 とする。

理論解

• 固有振動数

長さ ℓ，断面積 S の片持ち梁の i 次の振動数 f_i は，はり理論に基づき次式で表わすことができる。

$$f_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \cdot \frac{(k_i \ell)^2}{2\pi \ell^2} \qquad (1.730\text{-}1)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = bh$$

$k_i \ell$ は表1.730-1を参照。

表1.730−1　$k_i \ell$ の値

i	1	2	3	4	5	6
$k_i \ell$	1.875	4.694	7.855	10.996	14.137	17.279

• 自由端の変位

自由端の y 方向変位 u_y は次式で与えられる。

$$u_y = -\frac{p\ell^3}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-\cos w_i t)}{(k_i \ell)^4} \left\{ \cosh k_i \ell - \cos k_i \ell - a_i (\sinh k_i \ell - \sin k_i \ell) \right\}^2 \qquad (1.730\text{-}2)$$

ここで

$$a_i = \frac{\cosh k_i \ell + \cos k_i \ell}{\sinh k_i \ell + \sin k_i \ell}$$

1.730　VP−730　固有値範囲指定による片持ち梁のモーダル応答問題

(1) 目　的

VP-708の片持ち梁のモーダル応答問題において固有値範囲指定機能が正しく作動するかの検証を行なう。

(2) 問題の設定

a) 解析モデル

• 構造モデル

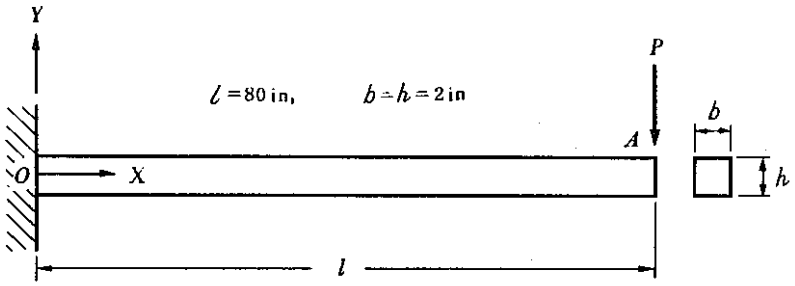


図 1.730−1　片持ち梁

• 使用要素

BEAM2 ： 3次元矩形断面梁要素

• 有限要素モデル

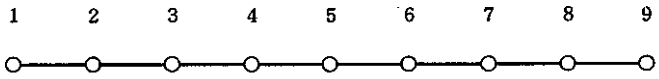


図 1.730−2　有限要素モデル

b) 材料定数

弾性係数　　$E = 30\times10^{6}$ psi

質量密度　　$\rho = 7.27904\times10^{-4}$ lb·sec^2/in^4

c) 境界条件（図1.730-1参照）

O点において　　$u_x = u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z$

OAに沿い　　$u_z = \theta_x = \theta_y = 0$

d）負荷条件と時間増分

片持ち梁の自由端に図1.730-3に示す衝撃荷重を負荷する。時間増分は $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ sec とする。

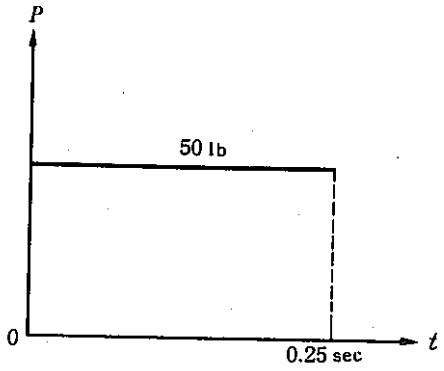


図1.730－3　負荷条件

e）質量マトリックスと固有値指定の範囲

質量は分布荷重とし，固有値範囲は0.0から 1.28×10^6 とする。

f）理論解

• 固有振動数

長さ ℓ，断面積 S の片持ち梁の i 次の振動数 f_i は，はり理論に基づき次式で表わすことができる。

$$f_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \cdot \frac{(k_i \ell)^2}{2\pi \ell^2} \qquad (1.730\text{-}1)$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$S = bh$$

$k_i \ell$ は表1.730-1を参照。

表1.730－1　$k_i \ell$ の値

i	1	2	3	4	5	6
$k_i \ell$	1.875	4.694	7.855	10.996	14.137	17.279

• 自由端の変位

自由端の y 方向変位 u_y は次式で与えられる。

$$u_y = -\frac{p\ell^3}{EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-\cos w_i t)}{(k_i \ell)^4} \left\{ \cosh k_i \ell - \cos k_i \ell - a_i (\sinh k_i \ell - \sin k_i \ell) \right\}^2 \qquad (1.730\text{-}2)$$

ここで

$$a_i = \frac{\cosh k_i \ell + \cos k_i \ell}{\sinh k_i \ell + \sin k_i \ell}$$

(3) 解析結果

表 1.730-2 に得られた 1 次からの固有振動数を示し，表 1.730-3 に自由端における y 方向変位を示す。なお，固有値は 3 個計算されている。

表 1.730－2　固有振動数 f〔Hz〕

次　　数	1	2	3
FINAS の解	1.02471 D＋01	6.41763 D＋01	1.79581 D＋02
理　論　解	10.25	64.22	178.9

表 1.730－3　自由端における y 方向変位 u_y〔in〕

時　間 t〔sec〕	FINAS の解 (1～3 次の重ね合せ)	理　論　解 (i＝1～6)	時　間 t〔sec〕	FINAS の解 (1～3 次の重ね合せ)	理　論　解 (i＝1～6)
0.01	－5.05284 E－02	-5.096×10^{-2}	0.06	－3.65296 E－01	-3.654×10^{-1}
0.02	－1.56849 E－01	-1.570×10^{-1}	0.07	－2.61153 E－01	-2.616×10^{-1}
0.03	－2.81934 E－01	-2.824×10^{-1}	0.08	－1.22068 E－01	-1.223×10^{-1}
0.04	－3.92334 E－01	-3.925×10^{-1}	0.09	－2.89671 E－02	-2.937×10^{-2}
0.05	－4.17476 E－01	-4.179×10^{-1}	0.10	－1.23676 E－02	-1.259×10^{-2}

(4) 考　　察

表 1.730-2，表 1.730-3 に示されるように FINAS の解と理論解は良く一致しており，固有値範囲指定によるモーダル応答解析機能が正しく作動したことが認められる。

結　語

昭和51年7月から昭和56年6月までの5ケ年間に開発が行なわれた高速増殖炉非弾性構造解析システムFINASは昭和56年7月より改良と整備の段階に入っている。汎用プログラムとして要求される機能，性能は多種多様，高度なものであり，5ケ年の期間でそのすべてが満たされたわけではなかった。開発期間の最後にあたり機能，性能の両面からFINASの持つ能力の評価が行なわれ，その結果，昭和56年7月より数ケ年の期間で，より実用的な，有効なシステムとなるよう改良・整備を行なうことになり，FINAS利用者からすでに寄せられていた要望等を考慮しながら，各機能の手直しと拡張が計画され実施されてきた。

本報告書に報告されている改良・整備項目は，なかでも優先度が高いものとして取り上げられたものである。来年度以降に実施すべき課題はまだ数多く残されており，長期的に有効なシステムとしてFINASが機能するためにはプログラムの改良・整備も長期にわたり実施していかなければならないと言える。プログラムを成長させる重要なものの一つは広範囲の利用者から寄せられるコメントや要望であり，FBR関連製造メーカーや公的機関においてFINASの実用利用という段階を迎えて，より一層幅広く利用者の声に耳を傾けなければならない。また，それらに迅速に応える体制を作ることが重要である。

最後にプログラムの改良・整備を進めるにあたって，動力炉・核燃料開発事業団大洗工学センター構造物強度試験室今津彰室長には有益なご指導をいただき，また岩田耕司氏，大矢哲夫氏には格別のご指導とご支援をいただいたことに深く感謝したい。また，FINASの大洗工学センターにおける利用にあたっては佐藤一雄氏，菊地俊一氏にご配慮いただき，厚くお礼を申し上げたい。さらに動燃事業団の多くのFINAS利用者の方々からは，数多くの有益な指摘や助言をいただき，深い謝意を表したい。