

精密周波数制御連続電磁波調査法の研究

—先行基礎工学分野に関する平成8年度報告書—

1997年8月

動力炉・核燃料開発事業団

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせ下さい。

〒509-51 岐阜県土岐市泉町定林寺959-31

動力炉・核燃料開発事業団

東濃地科学センター

技術開発課

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to : Geotechnics Development Section. Tono Geoscience Center. Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 959-31, Jorinji, Izumi-machi, Toki-shi, Gifu-ken 509-51, Japan

© 動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation) 1997

精密周波数制御連続電磁波調査法の研究

—先行基礎工学分野に関する平成8年度報告書—

真田 佳典*¹⁾、山下 善弘*¹⁾、渡辺 俊樹*²⁾
長谷川 健*³⁾、藪内 聡*³⁾

要 旨

本研究では、地下に電磁波エネルギーを送り込み、それに対する地下の応答を観測することにより地下構造を解析する地球物理学的調査において、正弦波的に変化する電磁エネルギーの周波数を高精度に制御し、連続して長時間地下に送り込む手法について研究開発を行っている。本手法を採用することによって、調査深度の拡大や解析精度の向上ならびに調査機器の小型化を目指す。

本年度は、広帯域にわたる電磁波現象の特性を把握するために、送信周波数が数十 Hz ～数 kHz と比較的低い周波数帯を利用して電磁誘導現象による地下の応答を測定し地下構造を解析する方法、及び、周波数が数十 MHz ～数 GHz 程度の高い周波数帯を利用して、電磁波動の透過・反射現象から岩盤内の微細な構造（割れ目など）を検出する方法について、計算機シミュレーションにより検討した。

*¹⁾ 研究生（京都大学大学院工学研究科 資源工学専攻）

*²⁾ 客員研究員（京都大学大学院工学研究科 資源工学専攻 助手）

*³⁾ 動力炉・核燃料開発事業団 東濃地科学センター技術開発課

目次

第1章	緒言	1
第2章	低周波数領域における電磁誘導現象のシミュレーション	3
2.1	垂直磁気ダイポールを用いた電磁探査法について	3
2.2	積分方程式法の理論	4
2.3	積分方程式法を用いた3次元モデリング	12
2.4	有限要素法の理論	23
2.5	3次元有限要素法によるモデリング	32
第3章	高周波数領域における電磁波動現象のシミュレーション	37
3.1	電磁波の基礎理論および時間領域有限差分法	37
3.2	電磁波動現象の基礎的性質に関するシミュレーション	45
3.3	ボアホールレーダーによる含水破碎帯の検出	52
3.4	空気・岩盤境界近傍の電磁波動現象の解析	58
第4章	結言	65
	参考文献	66

第1章 緒言

電磁法は、電磁エネルギーを地中に送り込み、電磁誘導現象あるいは電磁波動現象を利用して地下構造を探查する技術である。電磁法は、金属、地熱、石油等の資源調査のために広く使用されており、ウラン鉱床の探查においても実績を挙げている。そのほかに、最近では土木、建設、防災、環境などの分野でも用いられるようになっている。

地下に電磁エネルギーを送り込む際には、パルス的なエネルギーを与えるのが一般的である。しかし、この方法で探查深度を拡大するためにはエネルギーを増大させる必要があり、その拡大にはおのずから限度がある。そこで、本研究では、正弦波的に変化する電磁エネルギーを連続的に長時間地下に送り込み、長時間の観測を行うことによって、送り込むエネルギーは小さくともトータルの電磁エネルギーを増大させることにより、探查深度の拡大を図る方法について研究開発を行っている。この方法では、電磁エネルギーの周波数を精密に制御する必要があるため、ハードウェアおよびソフトウェアの両面に渡って新たな研究開発が必要であり、これにより、電磁法の探查深度の拡大、解析精度の向上および調査機器の小型化を図るものである。

平成8年度は、周波数による電磁現象の特性を把握するために、数十Hz～数kHzと比較的低い周波数帯の電磁エネルギーによって生じる電磁誘導現象を用いて地下構造を解析する手法、および、数十MHz～数GHzと比較的高い周波数帯の電磁エネルギーによって生じる電磁波動現象を用いて微細な地下構造を解析する手法について、それぞれ計算機シミュレーションにより検討した。

低周波数帯における電磁法では、信号源として垂直磁気ダイポール (Vertical Magnetic Dipole, VMD) を取り上げた。この手法では、幾重かに巻かれたコイルに電流を流して1次磁界を発生させ、電磁誘導により地下に新たに発生する2次磁界と1次磁界との合成磁界を観測し、その磁界の性質から地下構造に関する情報を得る。本研究では、垂直磁気ダイポールを用いた周波数領域における電磁探查法について、積分方程式法、および、有限要素法による3次元モデリングを行い、ターゲットとなる比抵抗異常の3次元的な形状および比抵抗の影響について検討した。

数十MHz～数GHz帯の電磁波は波動現象として捉えることができる。高周波数帯における電磁法は一般に地下レーダーとも呼ばれている。地下レーダーは地中に電磁波を放射し、反射波や透過波を観測することによって、微細な地下構造(岩盤内の亀裂等)の存在及

びその位置を知る装置である。現在、すでに多くの分野で活用され成果を挙げているが、その分解能や解析の精度および探査深度にはまだ問題が残されている。したがって、地下レーダーの研究を行う上で、電磁波が地盤や岩盤中を伝播する現象を解明することは、基礎的かつ重要な課題の一つである。本研究で用いた時間領域有限差分法は、Maxwell方程式の差分式を時間軸で逐次的に計算する方法であり、電磁波の挙動を時間を追って観察できるという特徴がある。このプログラムを用いて、電磁波動現象の基礎的な性質をモデリングによって検討した。また、応用例としてボアホールレーダーを用いた岩盤内の含水破碎帯の検出および空気・岩盤境界近傍の電磁波挙動のモデリングを行った。

第2章 低周波数領域における電磁誘導現象のシミュレーション

2.1 垂直磁気ダイポールを用いた電磁探査法について

垂直磁気ダイポール (Vertical Magnetic Dipole; VMD) によって発生する電磁界について述べる。送信源としてVMDを使って測定を行う場合、以下のような状況が考えられる。

- 送信源、受信点ともに地表に置く。
- 送信源を地表に、受信点を坑井内に置く。
- 送信源を坑井内に、受信点を地表に置く。
- 送信源、受信点ともに坑井内に置く。

VMDによって発生する電磁界はベクトル演算子を用いて、以下に示す Maxwell 方程式に支配される。

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{M}_s \quad (2.1)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_s \quad (2.2)$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

ここで、 \mathbf{E} (V/m) は電場、 \mathbf{D} (C/m²) は電束密度、 \mathbf{H} (A/m) は磁場、 \mathbf{B} (T) は磁束密度、 \mathbf{J} (A/m²) は電流密度、 \mathbf{J}_s (A/m²) は印加される電流密度、 \mathbf{M}_s (A/m) は印加される磁気モーメントを表す。これらの量の間にはさらに次の関係がある。

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \quad (2.7)$$

σ : 導電率 ϵ : 誘電率 μ : 透磁率

垂直磁気ダイポールとして巻数 n (loops)、ループ面積が A (m²) のコイルに時間変動電流 $Ie^{-i\omega t}$ (A) を流すとき、このダイポールの持つモーメントは $M = InA$ で与えられる。媒質として全無限均質媒質を考える。VMDによる測点Rでの磁場成分 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ は

、 $k^2 = i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)$ として、次式で与えられる。

$$\mathbf{H} = \frac{M}{4\pi r^3} e^{-ikr} \left[\left(\frac{xz}{r^2} \mathbf{u}_x + \frac{yz}{r^2} \mathbf{u}_y + \frac{z^2}{r^2} \mathbf{u}_z \right) (-k^2 r^2 + 3ikr + 3) + (k^2 r^2 - ikr - 1) \mathbf{u}_z \right] \quad (2.8)$$

式中の r は、送信源を原点としたときの距離、 (x, y, z) は測点の座標、 \mathbf{u}_x 、 \mathbf{u}_y 、 \mathbf{u}_z は、 $\mathbf{u}_x = (1, 0, 0)$ 、 $\mathbf{u}_y = (0, 1, 0)$ 、 $\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)$ で表される単位ベクトルである。

VMDを地表においた場合は、半無限媒質を仮定することになる。半無限均質媒質中における境界面上、つまり地表面上での垂直磁場成分 H_z は、次式で与えられる。

$$H_z = \frac{M}{2\pi k^2 r^5} \left[9 - (9 + 9ikr - 4k^2 r^2 - ik^3 r^3) e^{-ikr} \right] \quad (2.9)$$

第2.1図および第2.2図に、 $\sigma = 0.01$ (S/m)の半無限媒質において、境界面上に単位モーメントのVMDを置き、同じ平面上で150m離れたところから10m刻みで15点での磁界の垂直成分の実数成分および虚数成分を(2.9)式に基づいて計算した結果を示した。送信周波数は、 $f = 100\text{Hz}$ 、 1kHz 、 10kHz 、 100kHz と変化させた。実数成分は、送信周波数が変化してもそれほど変化していない。第2.3図に、送信源から100m離れた点での垂直磁場成分の実数成分と虚数成分、それに磁界の強度を示した。これを見ると、周波数が10kHz以下の場合には実数成分が周波数に影響されないことがわかる。

2.2 積分方程式法の理論

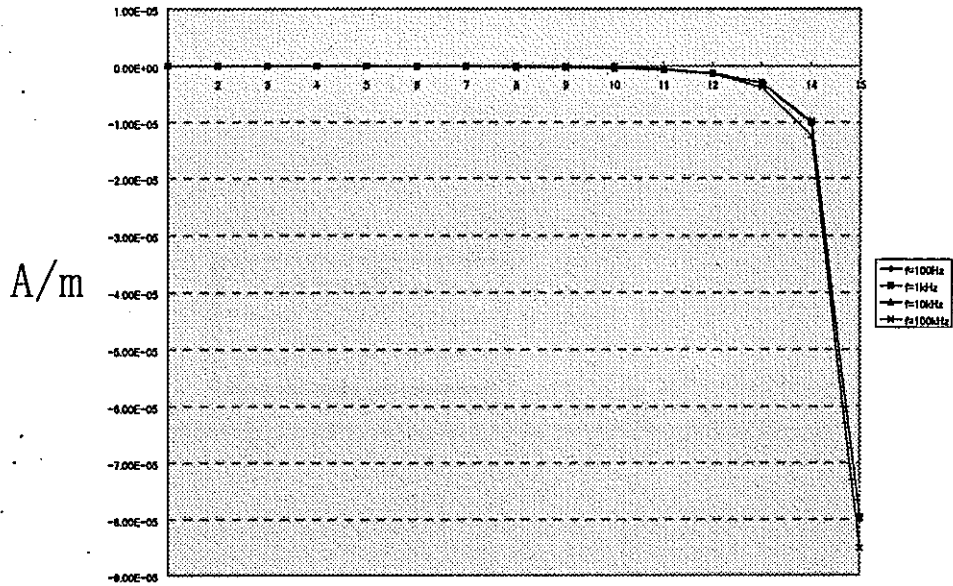
2.2.1 基本方程式

簡単なモデルとして第2.4図のような、水平 n 層構造中の第 j 層内に3次元物体が存在するようなモデルを考える。トータルの電場および磁場 (\mathbf{E}, \mathbf{H}) は、距離 r の関数となる。時間調和関数 $e^{i\omega t}$ を考えるとMaxwellの方程式は次式のようになる。

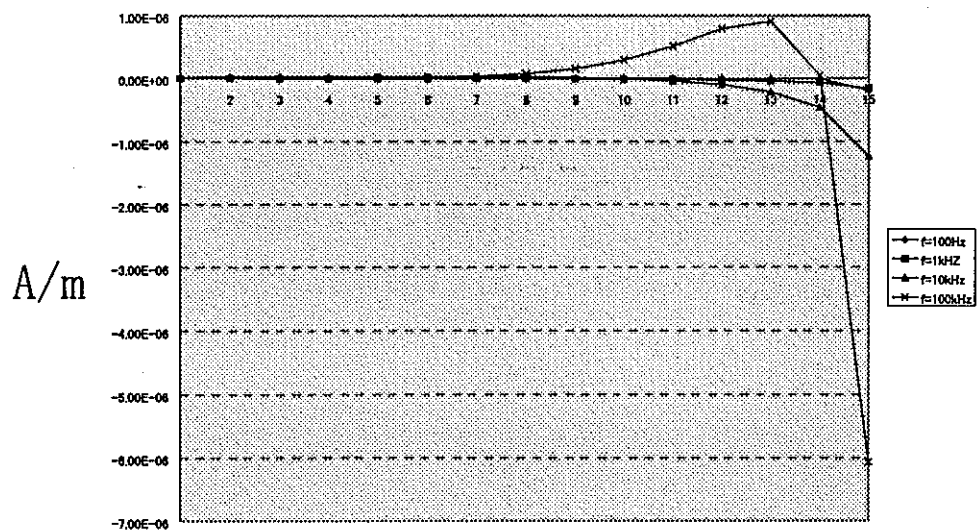
$$-\text{rot}\mathbf{E} = \hat{z}\mathbf{H} + \mathbf{M}_i \quad (2.10)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_i \quad (2.11)$$

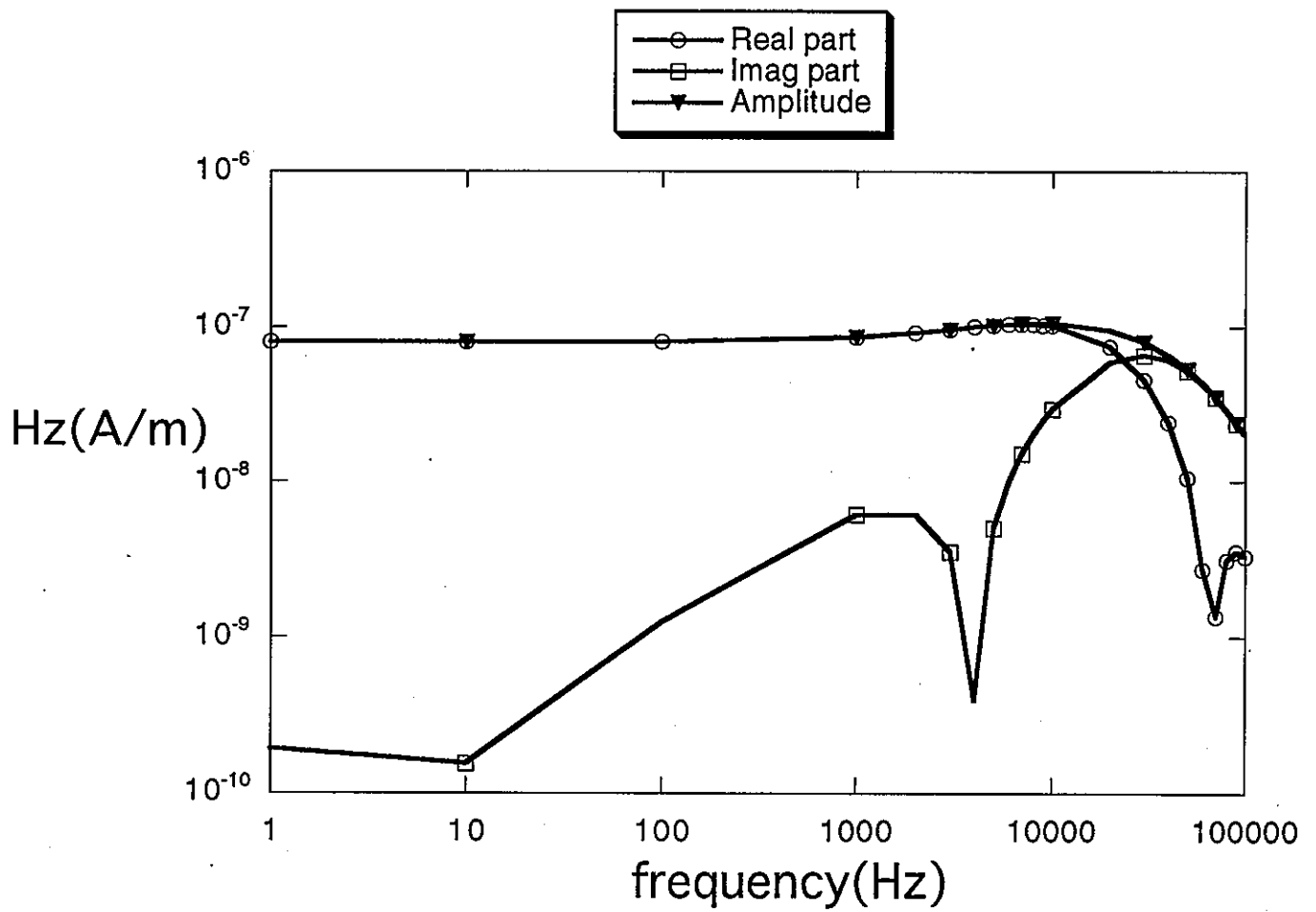
σ : 導電率 ϵ : 誘電率 μ : 透磁率



第 2.1 図 周波数を変化させたときの垂直磁場の実数成分の変化



第 2.2 図 周波数を変化させたときの垂直磁場の虚数成分の変化



第 2.3 図 送信源から 100m 離れた点での応答

ここで、 \mathbf{J} は電流密度であり、 $\mathbf{J} = \hat{y}\mathbf{E}$ で表される。ただし、admittivity $\hat{y} = \sigma + i\omega\epsilon$ 、impedance $\hat{z} = i\omega\mu$ とする。また、 \mathbf{J}_i 、 \mathbf{M}_i は、それぞれ印加される電流、磁気モーメントを表す。ここでは、送信源として垂直磁気ダイポールを仮定しているため、 \mathbf{M}_i の項のみを考える。

積分方程式を解く際に、層構造中の3次元物体による応答は等価散乱電流で置換する。各層でのトータルの電界 \mathbf{E} および磁界 \mathbf{H} は、層構造のみを考えたときの応答 $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$ と物体による散乱場 $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ との和で表される。

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i) + (\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) \quad (2.12)$$

第 j 層の中に物体がある場合の第 l 層における Helmholtz 方程式は、以下のようになる。

$$(\nabla^2 + k_l^2)\mathbf{E}_i = \left(-\frac{1}{\hat{y}_l}\nabla\nabla \cdot + \hat{z}_l\right)\mathbf{J}_i + \nabla \times \mathbf{M}_i \quad (2.13)$$

$$(\nabla^2 + k_l^2)\mathbf{H}_i = \left(\frac{1}{\hat{z}_l}\nabla\nabla \cdot + \hat{y}_l\right)\mathbf{M}_i - \nabla \times \mathbf{J}_i \quad (2.14)$$

$$(\nabla^2 + k_l^2)\mathbf{E}_s = 0 \quad l \neq j \quad (2.15)$$

$$(\nabla^2 + k_l^2)\mathbf{H}_s = 0 \quad l \neq j \quad (2.16)$$

$$(\nabla^2 + k_l^2)\mathbf{E}_s = \left(-\frac{1}{\hat{y}_j}\nabla\nabla \cdot + \hat{z}_j\right)\mathbf{J}_s + \nabla \times \mathbf{M}_s \quad l = j \quad (2.17)$$

$$(\nabla^2 + k_l^2)\mathbf{H}_s = \left(\frac{1}{\hat{z}_j}\nabla\nabla \cdot + \hat{y}_j\right)\mathbf{M}_s - \nabla \times \mathbf{J}_s \quad l = j \quad (2.18)$$

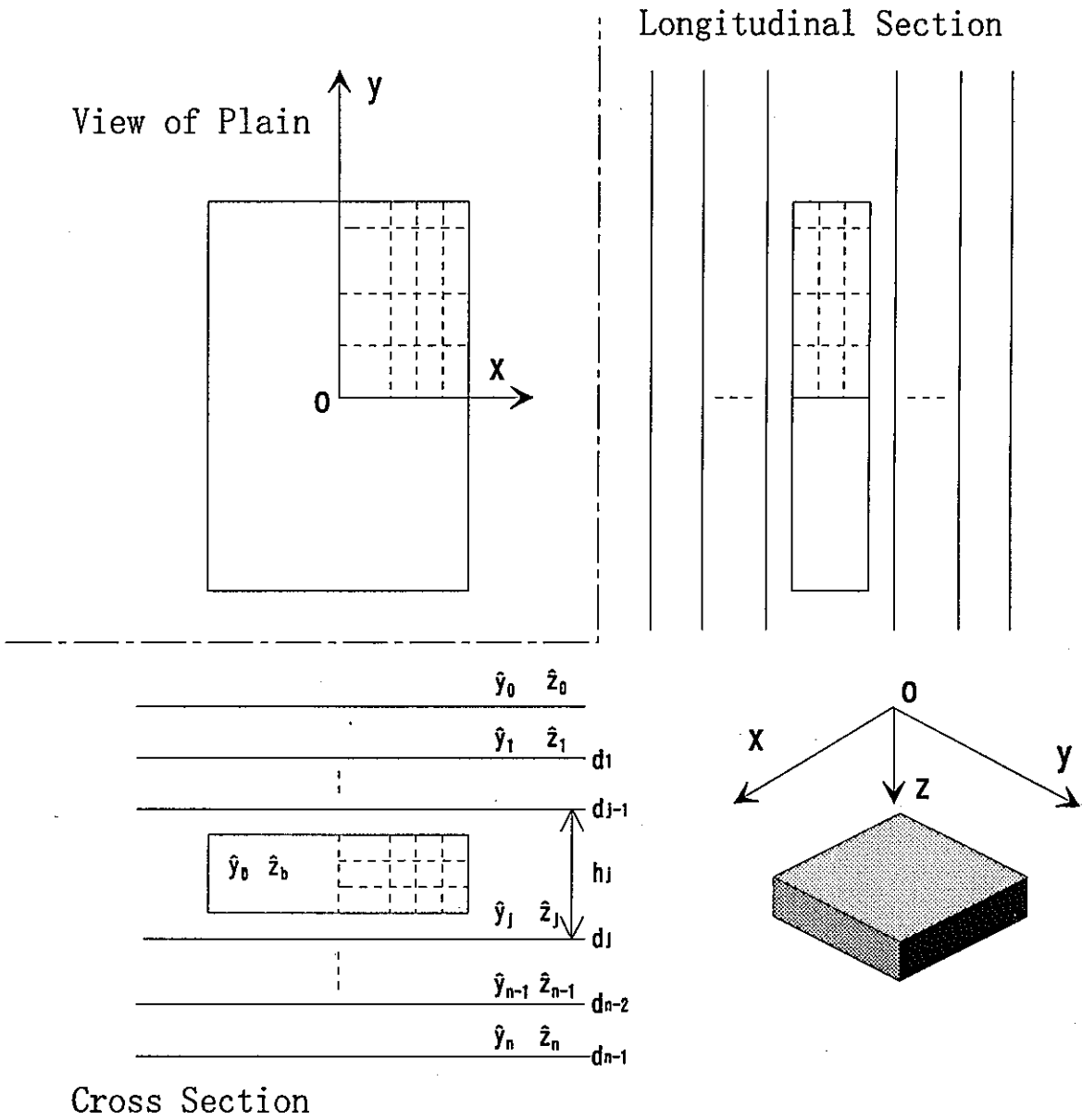
$$k_l = \sqrt{-\hat{z}_l \cdot \hat{y}_l}$$

ここで、 k_l は、第 l 層における波数を表す。(2.17)式と(2.18)式中の

$$\mathbf{J}_s = (\hat{y}_b - \hat{y}_j)\mathbf{E}_b$$

$$\mathbf{M}_s = (\hat{z}_b - \hat{z}_j)\mathbf{H}_b$$

は、3次元物体の応答に相当する等価散乱電流による寄与を表す。この時点では \mathbf{E}_b と \mathbf{H}_b は未知数である。層構造の境界が3次元物体を横切るような場合、添字 j は、3次元物体の一部分でも含む層に当てはまる。そこで、水平層および3次元物体の透磁率 μ_l 、 μ_b は



第 2.4 图 基本概念图

、真空中の値 μ_0 を使うものとし、 M_s は考慮しないものとする。また、3次元物体の代わりとしておいた等価散乱電流は媒質中では無視できるものとし、これ以後、 $\hat{y}_l = \sigma_l$ 、 $\hat{y}_b = \sigma_b$ とする。層構造中の3次元物体の応答に関する(2.15)~(2.18)式の解は、グリーン関数 $\tilde{G}_l^E(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 、 $\tilde{G}_l^H(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ を用いて、次の積分方程式で与えられる。

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \int_V \tilde{G}_l^E(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv' \quad (2.19)$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \int_V \tilde{G}_l^H(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv' \quad (2.20)$$

この式は、層を横切る物体に対しても有効である。 $\tilde{G}_l^E(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ 、 $\tilde{G}_l^H(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ は、 3×3 のテンソルの形をしたグリーン関数で、第 l 層における距離 \mathbf{r} のベクトル場と、第 j 層における距離 \mathbf{r}' での電流素を関連付けており、 $l = j$ の場合も含まれる。

2.2.2 積分方程式の行列化

ここでは、行列の解法として選点法 (method of collocation) を用いる。水平層中に存在する3次元物体を N 個の立方体サブセルに分割する。おのおのの分割されたセルの大きさは一辺が Δ_n である。 x 方向、 y 方向、 z 方向の立方体サブセルの数をそれぞれ M_{xn} 、 M_{yn} 、 M_{zn} とすると、直方体セルの一辺の長さはそれぞれ、 $M_{xn}\Delta_n$ 、 $M_{yn}\Delta_n$ 、 $M_{zn}\Delta_n$ となる。

それぞれのセルに対し、物体の導電率 σ_b と全体の電場 \mathbf{E}_b は一定とみなす。(2.13) 式の解を(2.19)式に加えると、セル m の中心における N 個のすべてのセルによる寄与による全体の電場は、次式のように近似される。

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_m) = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}_m) + \sum_{n=1}^N (\sigma_{bn} - \sigma_j) \tilde{\Gamma}_l^E(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_n) \quad (2.21)$$

上の式中の、直方体の電流に対する電界テンソルグリーン関数は次式で表される。

$$\tilde{\Gamma}_l^E(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_n) = \int_{V_n} \tilde{\mathbf{G}}_l^E(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}') dv' \quad (2.22)$$

(2.21) 式を変形すると次式を得る。

$$\sum_{n=1}^N (\sigma_{bn} - \sigma_j) \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^E - \tilde{\delta} \cdot \mathbf{E}_{bn} = -\mathbf{E}_{im} \quad (2.23)$$

ここで、 $\tilde{\delta}$ は、

$$\tilde{\delta} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{I}} & m=n \\ \tilde{\mathbf{0}} & m \neq n \end{cases} \quad (2.24)$$

である。ここで、 $\tilde{\mathbf{I}}$ と $\tilde{\mathbf{0}}$ はそれぞれ 3×3 の単位テンソルと零テンソルを表すものとする。(2.23) 式は、次式のように行列形式で書くことが可能である。

$$[\tilde{\mathbf{M}}] \cdot [\mathbf{E}_b] = [-\mathbf{E}_i] \quad (2.25)$$

(2.25) 式を解いて、セル中の電界を求める。求められた電界から (2.19) 式および (2.20) 式の離散表現である次式より、 $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}_s(\mathbf{r})$ を求める。

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N (\sigma_{bn} - \sigma_j) \tilde{\Gamma}_l^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_n) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N (\sigma_{bn} - \sigma_j) \tilde{\Gamma}_l^{\mathbf{H}}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{E}_b(\mathbf{r}_n) \quad (2.27)$$

2.2.3 グリーン関数の計算について

前節におけるテンソルグリーン関数 $\tilde{G}_l^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}')$ から、電界テンソルグリーン関数 $\tilde{\Gamma}_l^{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_n)$ を求めるときにはいくつか考慮しなければならない点がある。3次元物体が水平層の境界を横切らない場合、 $l = j$ となる。この場合、おのおののセルによる寄与は、(2.28) 式に示すように、1次場 (primary component) と、2次場 (reflected component) にわけて計算される。

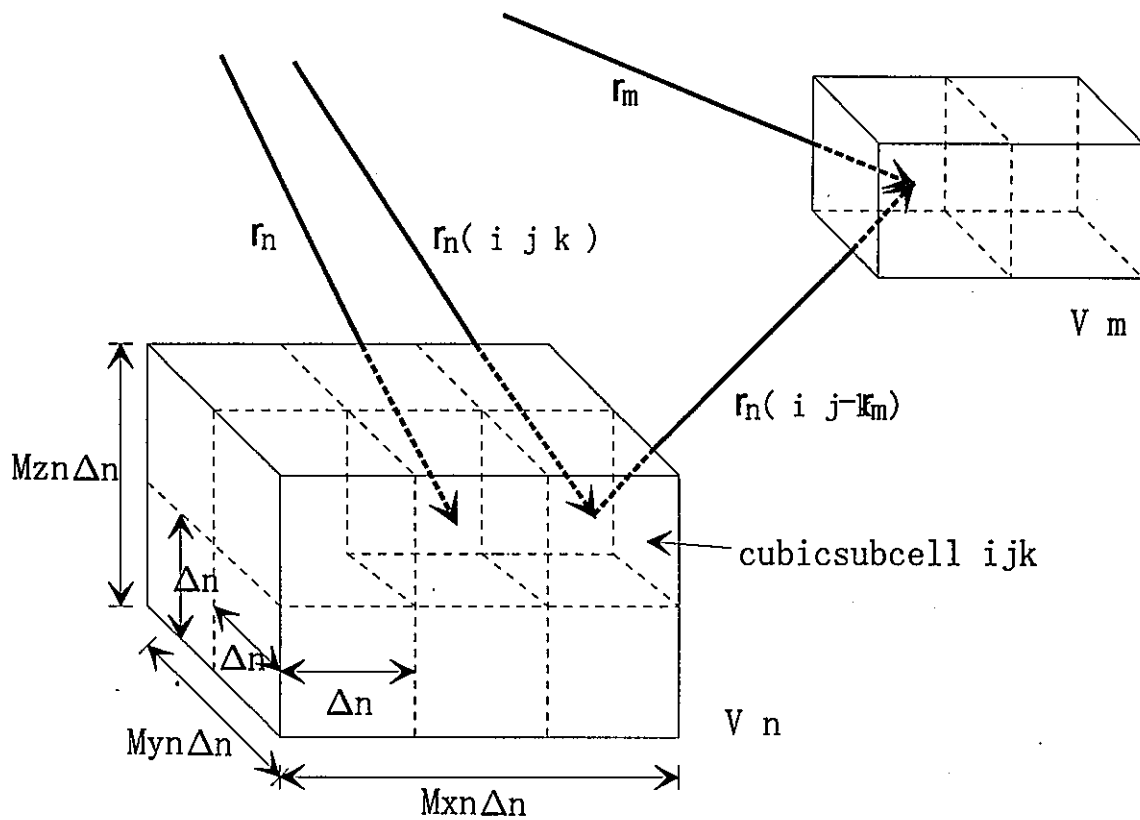
$$\tilde{\Gamma}_{l(mn)}^{\mathbf{E}} = {}^P \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^{\mathbf{E}} + {}^S \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^{\mathbf{E}} \quad (2.28)$$

1次場は、体積電流 (volume current) と、自由電荷 (free charge) の分布による寄与にわけられる。ここで、体積電流と自由電荷による寄与は、それぞれ (2.17) 式中の、

$$z^j \mathbf{J}_s \quad (2.29)$$

と、

$$\frac{-1}{\hat{y}_j} \nabla \nabla \cdot \mathbf{J}_s \quad (2.30)$$



第 2.5 図 立方体サブセルの位置ベクトル

で表されている。1次場の自由電荷の分布はスカラーポテンシャル Ψ の勾配 (gradient) で定義される。

それぞれの行列要素は立方体サブセル全体の和で表される。体積電流に関する積分については、次式の様に表される。

$$P \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^E = \sum_{i=1}^{M_{xn}} \sum_{j=1}^{M_{yn}} \sum_{k=1}^{M_{zn}} P \tilde{\Gamma}_l^E(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{n(ijk)}) \quad (2.31)$$

ここで、 $P \tilde{\Gamma}_l^E(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{n(ijk)})$ は、立方体サブセル中の電流に関する体積グリーン関数である。

第2.5図に示したように、立方体サブセルの位置ベクトルは次式で示される。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{n(ijk)} = & \left[x_n + \Delta_n \left(\frac{M_{xn} + 1}{2} - \hat{i} \right) \right] \hat{i} \\ & + \left[y_n + \Delta_n \left(\frac{M_{yn} + 1}{2} - \hat{j} \right) \right] \hat{j} \\ & + \left[z_n + \Delta_n \left(\frac{M_{zn} + 1}{2} - \hat{k} \right) \right] \hat{k} \end{aligned} \quad (2.32)$$

ここで、 \hat{i} 、 \hat{j} 、 \hat{k} は、 x 、 y 、 z 方向の単位ベクトルとする。

1次場の自由電荷の項も、(2.31)式と同様に表せる。

$$P \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^E = \sum_{i=1}^{M_{xn}} \sum_{j=1}^{M_{yn}} \sum_{k=1}^{M_{zn}} P \tilde{\Gamma}_l^E(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{n(ijk)}) \quad (2.33)$$

ここで、送信源としてダイポールを用いるものとし、 $S \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^E$ については、次式を用いて近似した。

$$S \tilde{\Gamma}_{l(mn)}^E = \Delta_n^3 \cdot S \tilde{G}_{El}(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_{n(ijk)}) \quad (2.34)$$

2.3 積分方程式法を用いた3次元モデリング

送信源と受振点は $z = 0$ の平面、すなわち地表面に置くものとし、送信源は $x = -75\text{m}$ の地点に、一辺の長さが $1\text{m} \times 1\text{m}$ 、巻数が1回の正方形ループを置いた。これは、鉛直下向きに大きさ 1A/m のモーメントをもつ垂直磁気ダイポールと仮定することができる。受振点は、送信源から x の正の方向に 10m 刻みに $x = +65\text{m}$ の地点まで x 軸上に置いた。つまり、 $x = -65\text{m}$ 、 -55m 、 -45m 、 -35m 、 -25m 、 -15m 、 -5m 、 $+5\text{m}$ 、 $+15\text{m}$ 、 $+25\text{m}$ 、 $+35\text{m}$ 、 $+45\text{m}$ 、 $+55\text{m}$ 、 $+65\text{m}$ の地点での垂直磁場の大きさを測定した。受振点は送信源に近いものから1~14の番号をつけた。

まず、モデル1として地表浅部に鉱床が存在するような状況を想定し、第2.6図に示したようなモデルを考えた。第1層の深さが40m、比抵抗が $400\Omega\cdot\text{m}$ 、第2層の比抵抗が $2000\Omega\cdot\text{m}$ である水平2層構造である。第1層中に、比抵抗が $10\Omega\cdot\text{m}$ 、 x 方向の長さが120m、 y 方向の長さが180m、 z 方向の長さが30mであるような3次元構造が地表からの深さ5mのところに存在する場合を仮定した。送信周波数 f は100Hz、500Hz、1kHzの3種類に変化させて計算を行った。

$f = 100\text{Hz}$ の場合に測線(x 軸)上で計算された垂直磁場の実数成分を第2.7図に、虚数成分を第2.8図に示した。グラフにおける、間隔の詰まった破線は3次元異常体の左右の縁を表し、間隔の広い破線は異常体の x 方向の中心軸を表している。鉛直下向きを正の方向とする。グラフを見てわかるとおり、実数成分は距離による減衰が非常に激しいことがわかる。大きさは、送信源からの距離の3乗に反比例して減少していく。第2.8図からわかることは、送信源からの距離が40mの地点で符号が反転し、60mの地点で極値をとっていることである。

第2.9図、第2.10図は、それぞれ送信周波数 f を500Hz、1kHzとして計算した結果の虚数成分である。第2.8図と比較すると、垂直磁場の絶対値は大きくなっているが、グラフの特徴は $f = 100\text{Hz}$ のときと同様である。

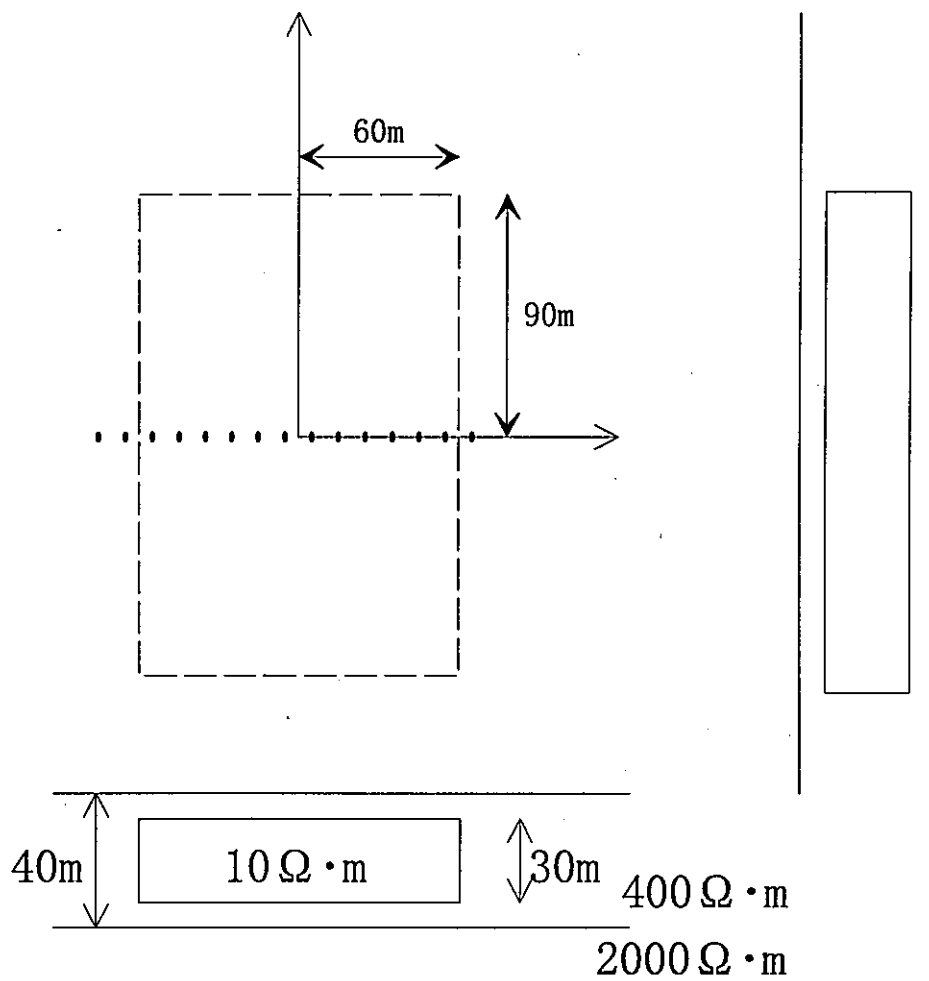
次に、このモデルで、3次元異常体の比抵抗を $10\Omega\cdot\text{m}$ から $100\Omega\cdot\text{m}$ に変化させた。つまり比抵抗コントラストを $1/40$ から $1/4$ にして計算を行った。これをモデル2とする。第2.11図～第2.13図に、送信周波数 f が100Hz、500Hz、1kHzの場合の結果を示した。これらの図から、垂直磁場の符号が反転する点が x 方向の正方向にシフトすること、第2.8図～第2.10図のような、きわだった極値を持つ点も見られないことがわかる。垂直磁場の虚数成分は、地表においたVMDによる一次磁場によって板状の低比抵抗異常体に励起される渦電流の直上でピーク値を取っていると考えられる。したがって、比抵抗コントラストが大きくなると、磁場応答の大きさが小さくなるとともに、低比抵抗体上の渦電流の位置が送信源から測線方向に遠ざかっていると考えられる。

次に、第2.6図のモデルにおいて比抵抗 $400\Omega\cdot\text{m}$ の第1層中においた3次元異常体を、第2.14図に示したように比抵抗 $2000\Omega\cdot\text{m}$ の第2層に、層境界からの深さ5m、地表からの深さ45mの点においた。これをモデル3とする。第2.15図～第2.17図に、送信周波数 f を100Hz、500Hz、1kHzとして計算した結果を示した。その結果をモデル1と比較すると、モデル1では、いずれの送信周波数においても垂直磁場の符号が反転する地点が存在したのに対

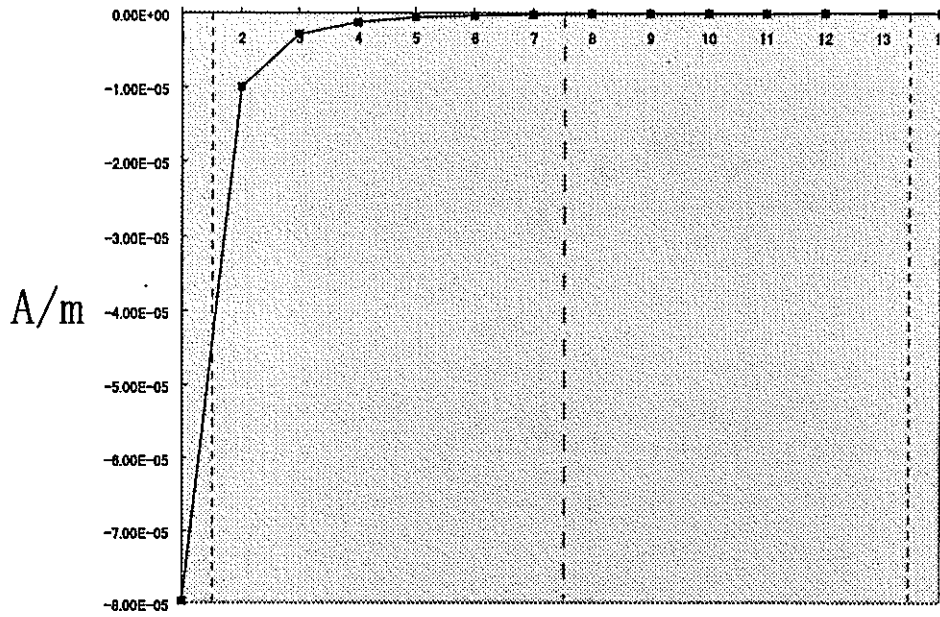
し、モデル 3 では $f=1\text{kHz}$ のときのみ、送信源から 140m のところで符号が反転している。

以上の数値実験を通して、地表で測定される磁場の垂直成分に関して以下のことが明らかになった。

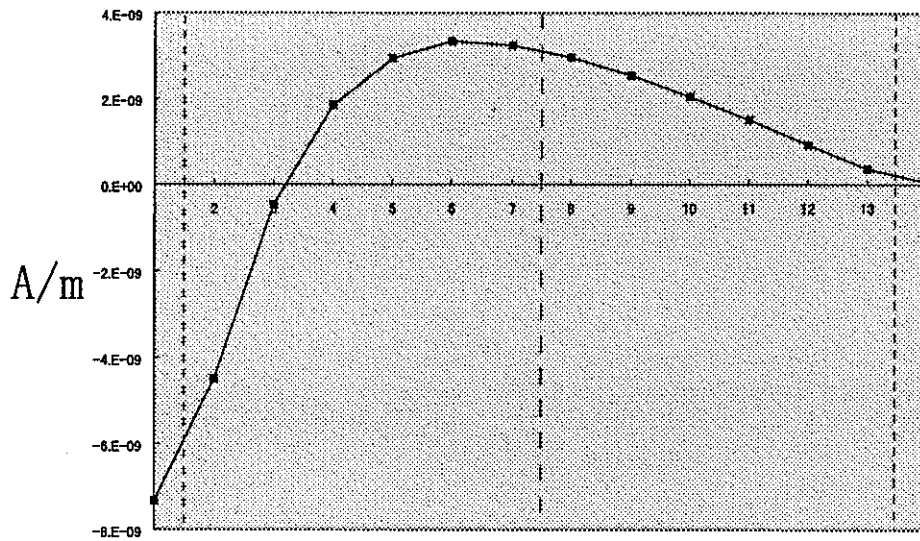
- 実数部は虚数部と比較して、比抵抗コントラストや送信周波数などのパラメータの変化に対する応答の感度が小さい。
- 送信周波数の変化による応答の変化は、送信周波数が 100Hz、500Hz、1kHz ではあまり変化は見られない。
- 虚数部の値そのものは周波数が高いほど大きくなるが、送受信点間の距離の増大による減衰も周波数が高いほど大きい。



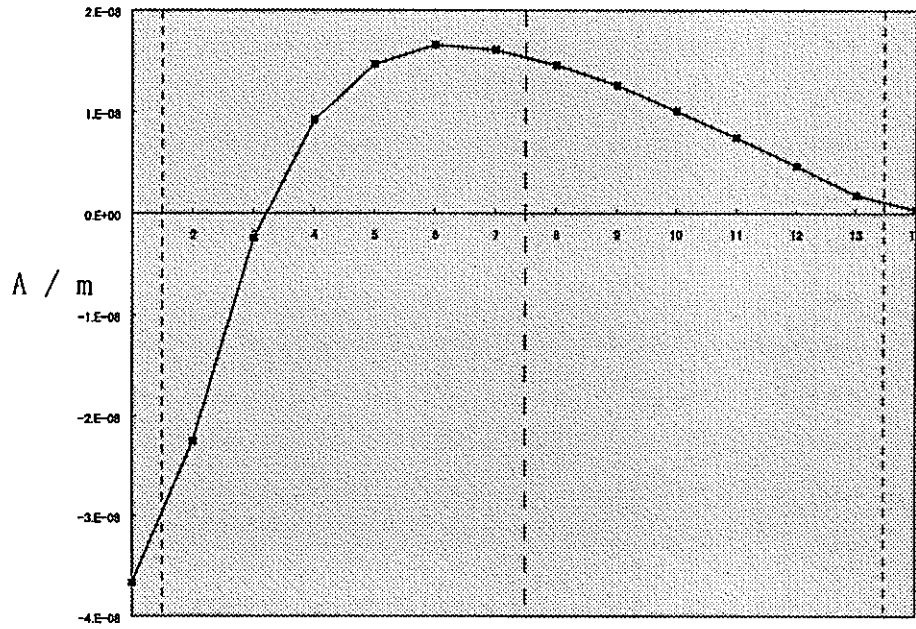
第 2.6 図 計算モデル 1



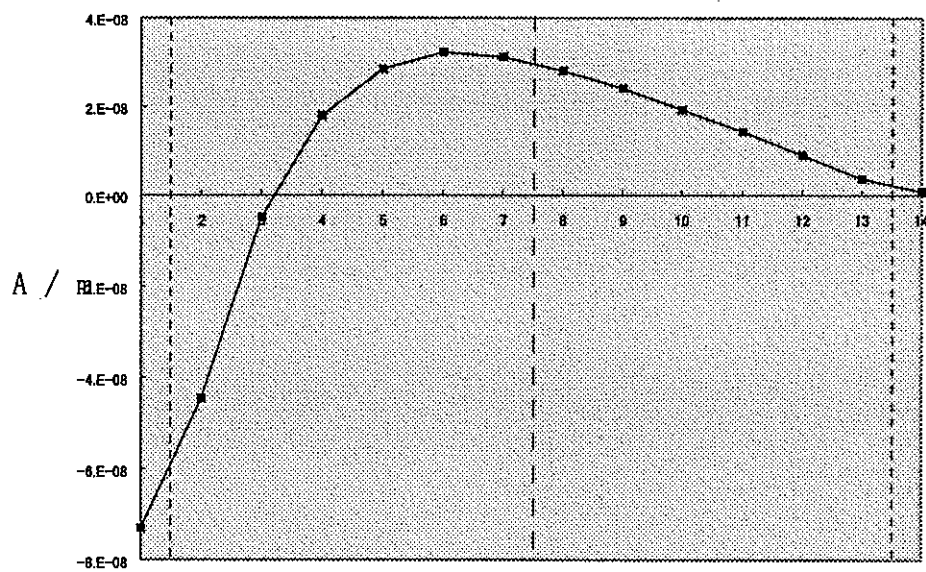
第 2.7 図 モデル 1, 送信周波数 100Hz, 垂直磁場 実数部



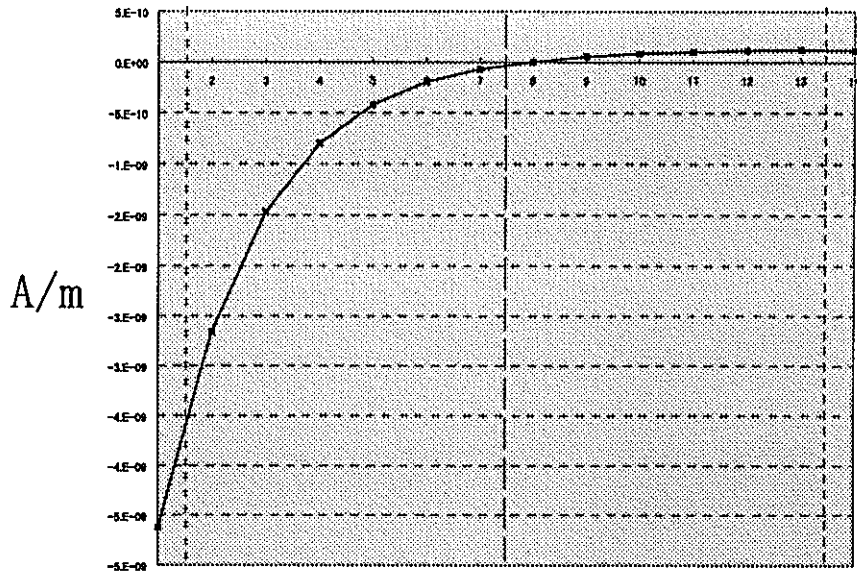
第 2.8 図 モデル 1, 送信周波数 100Hz, 垂直磁場 虚数部



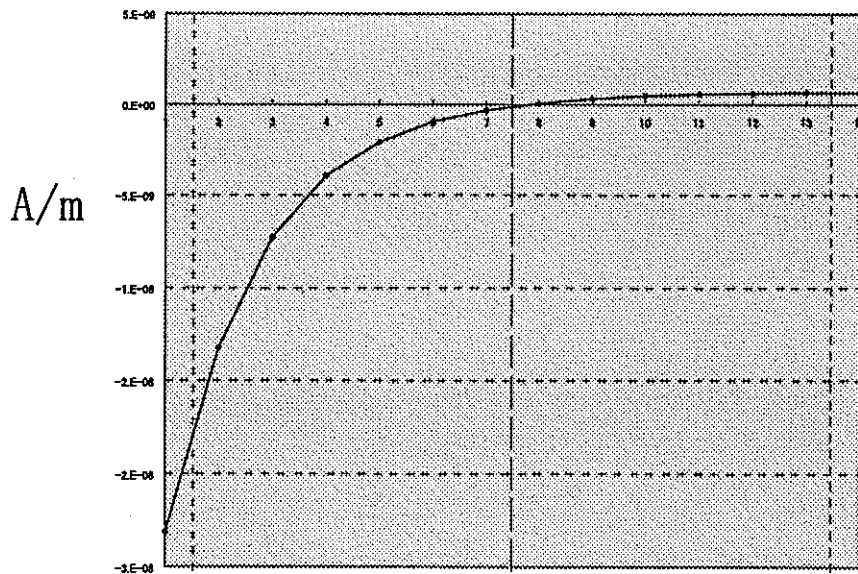
第 2.9 図 モデル 1, 送信周波数 500Hz, 垂直磁場 虚数部



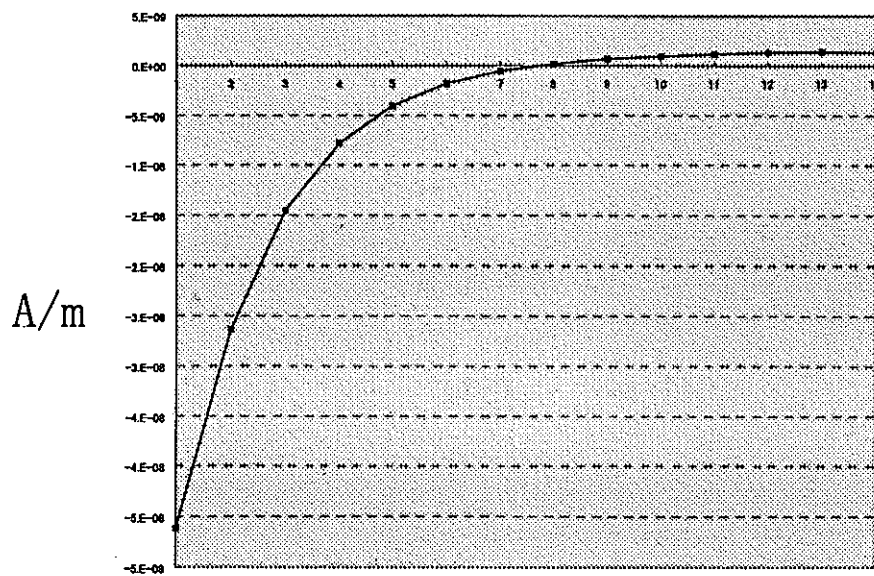
第 2.10 図 モデル 1, 送信周波数 1kHz, 垂直磁場 虚数部



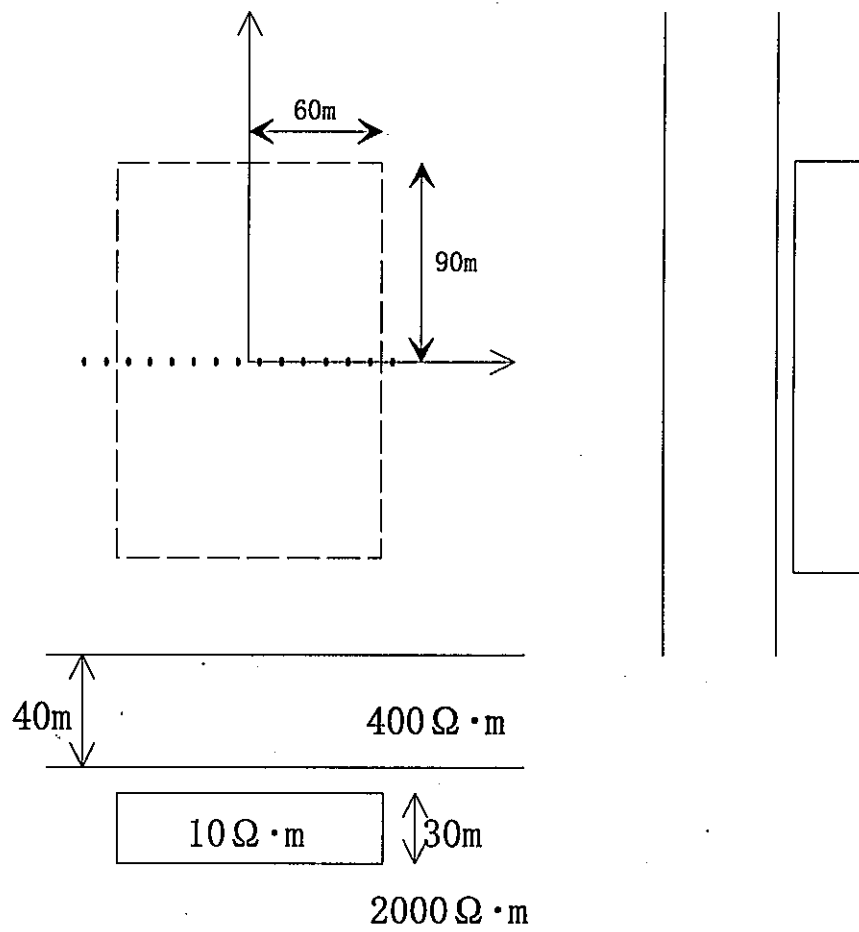
第 2.11 図 モデル 2, 送信周波数 100Hz, 垂直磁場 虚数部



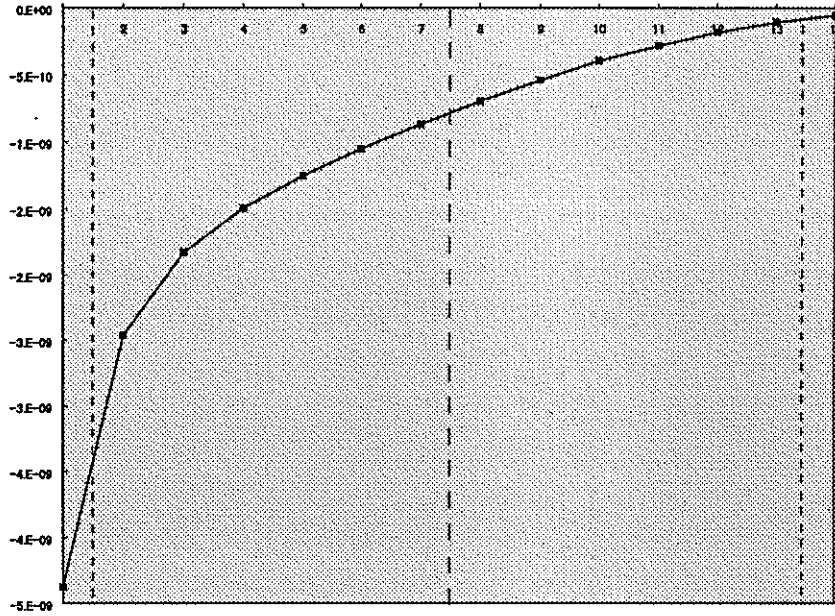
第 2.12 図 モデル 2, 送信周波数 500Hz, 垂直磁場 虚数部



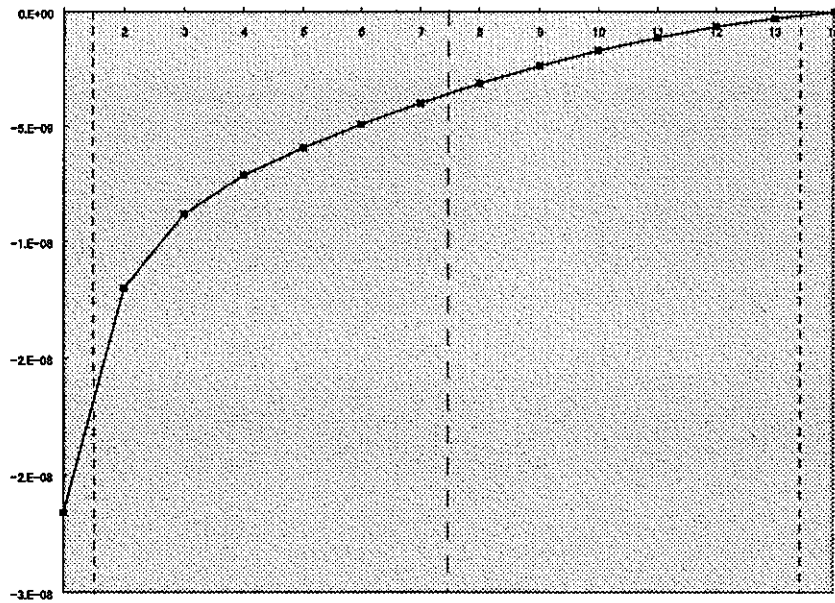
第 2.13 図 モデル 2, 送信周波数 1kHz, 垂直磁場 虚数部



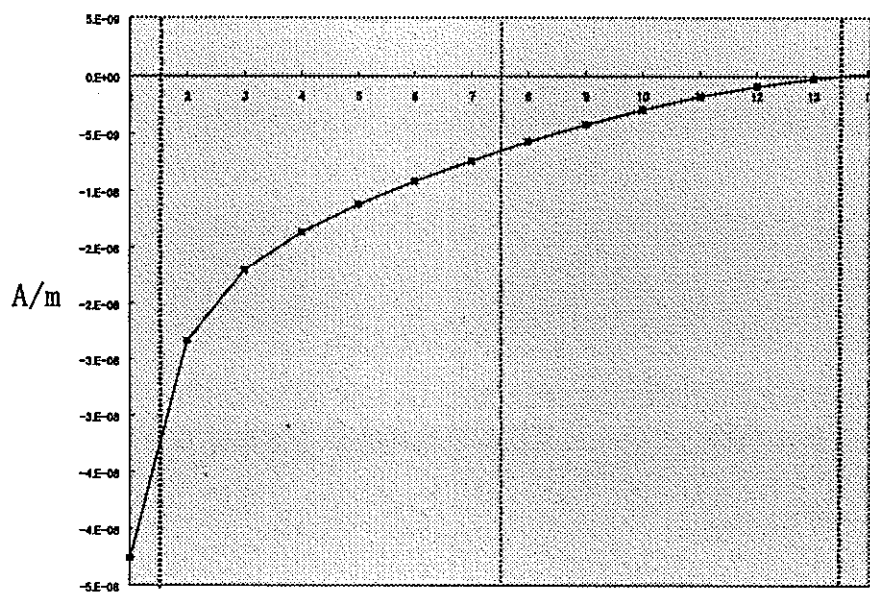
第 2.14 図 計算モデル 3



第 2.15 図 モデル 3, 送信周波数 100Hz, 垂直磁場 虚数部



第 2.16 図 モデル 3, 送信周波数 500Hz, 垂直磁場 虚数部



第 2.17 図 モデル 3, 送信周波数 1kHz, 垂直磁場 虚数部

2.4 有限要素法の理論

2.4.1 基礎方程式

VMDを用いた電磁探査法は、MT法などの手法と同じく電磁誘導現象を利用した探査手法であり、発生する電磁場は、(2.1)～(2.4)式に示したMaxwell方程式に支配される。

電磁場が調和的に変化するものとし、時間調和関数 $e^{i\omega t}$ を考えると、(2.1)式と(2.2)式は以下のように変形される。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.36)$$

従って、

$$\text{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} + \mathbf{M}_i \quad (2.37)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = (\sigma + i\omega\epsilon)\mathbf{E} \quad (2.38)$$

ここで、

$$i\omega\mu = \hat{z} \quad (2.39)$$

$$\sigma + i\omega\epsilon = \hat{y} \quad (2.40)$$

と置く。(2.38)式の両辺のrotをとった式に、(2.2)式の両辺を時間微分した式を代入すると

$$\text{rot} \cdot \text{rot}\mathbf{H} = \hat{y}(-\hat{z}\mathbf{H} + \mathbf{M}_i) \quad (2.41)$$

と変形できる。ここで、ベクトル演算子に関する公式を用いると、

$$\text{grad} \cdot \text{div}\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H} = -\hat{y} \cdot \hat{z}\mathbf{H} + \hat{y}\mathbf{M}_i \quad (2.42)$$

となる。ここで、 $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ 、 $\mathbf{M}_i = (0, 0, M)$ として、離散化する。

$$\mathbf{M}_i = \bar{M} \cdot \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

ただし、送信源の座標を (x_s, y_s, z_s) とすると

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x = x_s \\ 0 & x \neq x_s \end{cases} \quad (2.43)$$

を表すものとする。

div、rot はそれぞれ

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

で表される。(2.42) 式を直交座標系 (x, y, z) で成分表示すると次式のようにになる。

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} + k^2 H_x = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial z} + k^2 H_y = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial y} + k^2 H_z = -\hat{y} \cdot \mathbf{M} \quad (2.46)$$

$$\sqrt{-\hat{y} \cdot \hat{z}} = -k$$

(2.44) 式から (2.46) 式が有限要素法の基礎方程式となる。

2.4.2 重みつき残差法を用いた近似解

有限要素法とは、解析対象となる連続体を微小な要素に分割し、場が従う支配方程式に基づいて要素ごとの方程式を立て、それをもとに全体の方程式を組み立てていく手法である。各要素の頂点である節点ごとの物理量を得ることを目的とし、要素内での物理量の変化は補間関数と呼ばれる関数により近似する。

偏微分方程式で記述されるような問題の近似解を求める手法としては、差分法、重みつき残差法、変分原理直接法などがある。変分原理直接法とは、対象となる系における物理量を考えたとき、その物理量は系のエネルギーが最小になるように分布するという変分原理に基づいている。系のエネルギーを表す汎関数 χ が最小となるようにオイラーの微分方程式を解いて解を求める。つまり変分原理直接法では、解くべき微分方程式系に対する汎関数が存在しない場合には適用できない。

一方、重みつき残差法と呼ばれる手法は、ある問題に対する近似解 u_M に対して、 $R = P(u_M) - Q(u_M)$ で定義される残差 R が、 $f(R)$ を適当な R の関数として、 $\int_V w f(R) dv = 0$ あるいは、 $\int_S w f(R) ds = 0$ を満足するような条件を考える。ここで $w(x_i)$ は重み関数と呼ばれる。

重みつき残差法には、選点法、ガラーキソ法などいろいろな種類があり、汎関数の存在しないような変分原理直接法では扱えない問題にも適用可能である。

電磁場解析では、一般に汎関数 χ を求めることが困難である。したがって、本研究では有限要素式を導く手法として重みつき残差法、そのうちでもガラーキソ法と呼ばれる手法を用いた。

2.4.3 有限要素式の導出

要素分割と補間関数

対象となる3次元媒質を、第2.18図で示されるような直方体要素に分割する。直方体要素は8個の節点を持ち、要素内の磁場 \mathbf{H} が一次の形状関数 N_i と、要素を構成する各節点の磁場の値との1次結合で表されるとする。

$$H_x = \sum_{i=1}^8 N_i H_{xi} \quad (2.47)$$

$$H_y = \sum_{i=1}^8 N_i H_{yi} \quad (2.48)$$

$$H_z = \sum_{i=1}^8 N_i H_{zi} \quad (2.49)$$

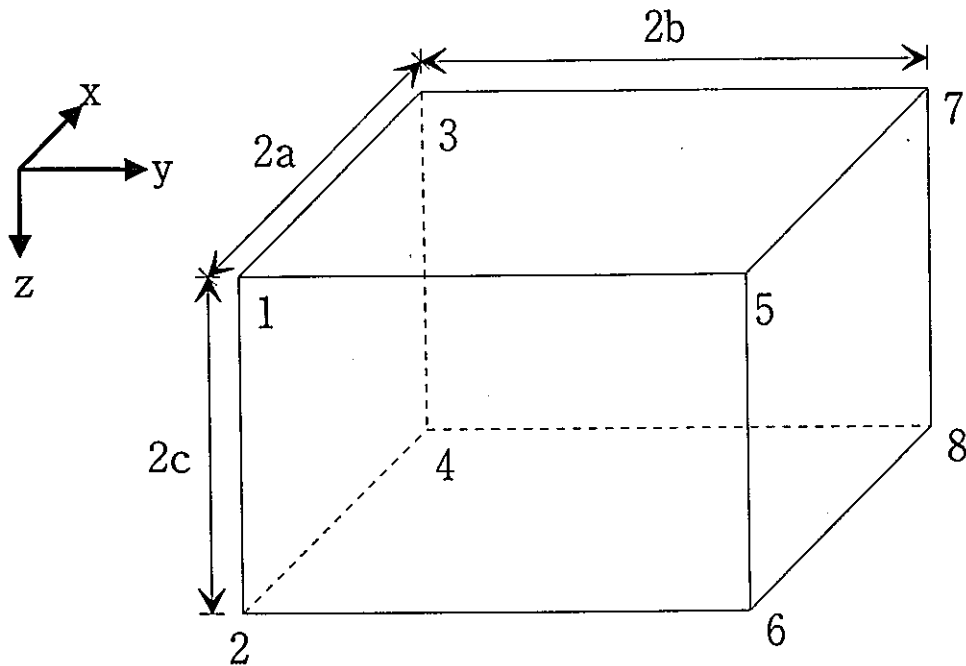
ここで、補間関数 N_i は、節点 i において1であり、要素内の他のすべての節点で0であるという性質を持っている。

次に、数値計算に有利なように、直交座標系を第2.19図に示したような局所座標系に変換する。局所座標変換式は、以下のように示される。

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad (2.50)$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \quad (2.51)$$

$$\zeta = \frac{z - z_c}{c} \quad (2.52)$$



第 2.18 図 直方体要素

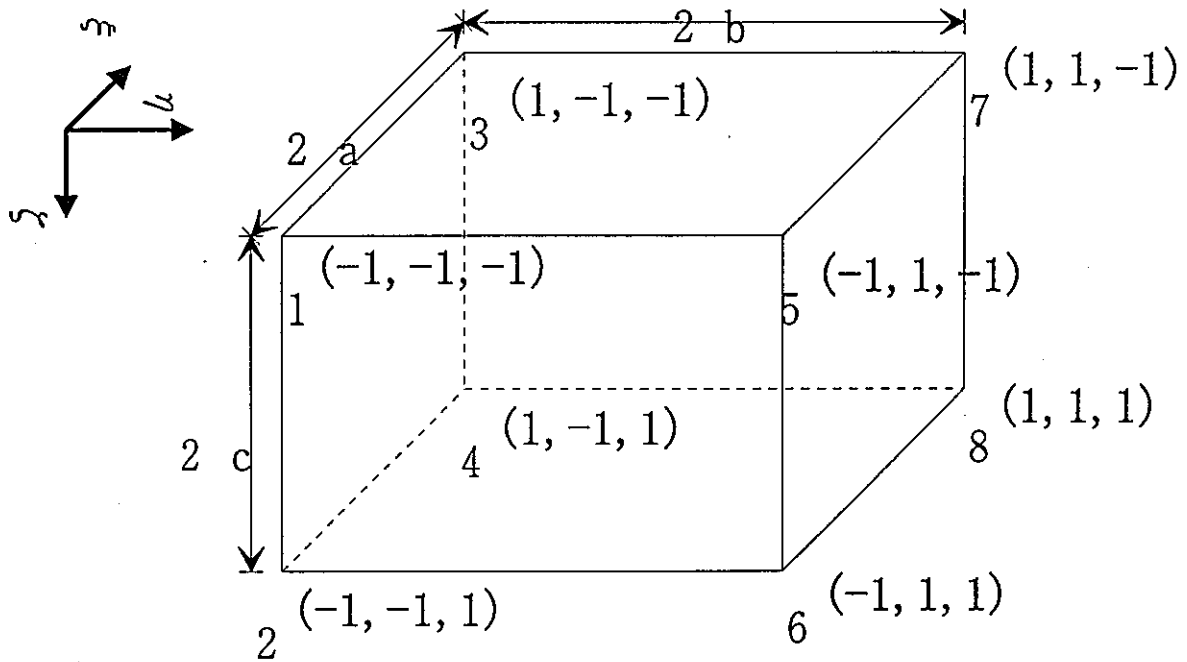
ここで、 (x_c, y_c, z_c) は、要素の中心の座標であり、 $2a$ 、 $2b$ 、 $2c$ は直方体要素のそれぞれ x 、 y 、 z 方向の長さを表す。ここで導入した局所座標 (ξ, η, ζ) では、要素の各節点での座標は常に ± 1 になる。

局所座標を用いて補間関数を表すと次式のようなになる。

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad (2.53)$$

(2.53) 式により計算される各節点での補間関数を以下に示す。

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \end{aligned}$$



第 2.19 図 局所座標系における直方体要素

$$N_6 = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)$$

要素マトリクス、全体マトリクスの導出

磁場成分の近似解である (2.47)~(2.49) 式は、偏微分方程式 (2.44)~(2.46) 式の厳密解ではないので残差を生じる。ここで、重みつき残差法の 1 手法であるガラーキン法では (2.44) 式に関する残差を最小とするために、

$$\int N_j \left(\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial z} + k^2 H_x \right) dv = 0 \quad j = 1, \dots, 8 \quad (2.54)$$

とする。部分積分を実行すると次式を得る。

$$\int N_j \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) dx dz + \int N_j \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
& - \int \frac{\partial N_j}{\partial y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) dv - \int \frac{\partial N_j}{\partial z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) dv \\
& \qquad \qquad \qquad + \int k^2 N_j H_x dv = 0 \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

H_x が要素間の境界で連続であると仮定すると、(2.55)式における面積分の項は打ち消される。(2.47)式を代入して整理すると、

$$\sum_{i=1}^8 \int_v \left\{ \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} - k^2 N_j N_i \right) H_{xi} - \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} H_{yi} - \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial x} H_{zi} \right\} dv = 0 \qquad (2.56)$$

と書くことができる。

(2.45)式も同様に变形できる。

$$\sum_{i=1}^8 \int_v \left\{ \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} - k^2 N_j N_i \right) H_{yi} - \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} H_{xi} - \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial y} H_{zi} \right\} dv = 0 \qquad (2.57)$$

(2.46)式の、送信源を含まない要素については、(2.44)、(2.45)式と同様に、

$$\sum_{i=1}^8 \int_v \left\{ \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - k^2 N_j N_i \right) H_{zi} - \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} H_{xi} - \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} H_{yi} \right\} dv = 0 \qquad (2.58)$$

送信源を含む要素については、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^8 \int_v \left\{ \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - k^2 N_j N_i \right) H_{zi} - \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial z} H_{xi} - \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} H_{yi} \right\} dv \\
& \qquad \qquad \qquad = -\hat{y} \bar{M} \sum_{i=1}^8 \int_v N_j \delta(x) \delta(y) \delta(z) dv \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

と表される。

ここで、(2.56)～(2.59)式を局所座標系 (ξ, η, ζ) に変換する。(2.50)～(2.52)式より、

$$ad\xi = dx \quad bd\eta = dy \quad cd\zeta = dz \qquad (2.60)$$

であるから、

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \quad (2.63)$$

となる。ガラーキン法による離散式すべてについて、次式のように書くことが出来る。

$$\sum_{i=1}^8 (k_{ij}^{(1)} \tilde{H}_x + k_{ij}^{(2)} \tilde{H}_y + k_{ij}^{(3)} \tilde{H}_z) = 0 \quad (2.64)$$

$$\sum_{i=1}^8 (k_{ij}^{(4)} \tilde{H}_x + k_{ij}^{(5)} \tilde{H}_y + k_{ij}^{(6)} \tilde{H}_z) = 0 \quad (2.65)$$

$$\sum_{i=1}^8 (k_{ij}^{(7)} \tilde{H}_x + k_{ij}^{(8)} \tilde{H}_y + k_{ij}^{(9)} \tilde{H}_z) = 0 \quad (2.66)$$

$$j = 1, 2, \dots, 8$$

ここで、 $k_{ij}^{(1)} \sim k_{ij}^{(9)}$ は、以下のように示される。

$$k_{ij}^{(1)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} - k^2 N_j N_i \right) abc d\xi d\eta d\zeta \quad (2.67)$$

$$k_{ij}^{(2)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} c d\xi d\eta d\zeta \quad (2.68)$$

$$k_{ij}^{(3)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} b d\xi d\eta d\zeta \quad (2.69)$$

$$k_{ij}^{(4)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} c d\xi d\eta d\zeta \quad (2.70)$$

$$k_{ij}^{(5)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} - k^2 N_j N_i \right) abc d\xi d\eta d\zeta \quad (2.71)$$

$$k_{ij}^{(6)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} a d\xi d\eta d\zeta \quad (2.72)$$

$$k_{ij}^{(7)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} b d\xi d\eta d\zeta \quad (2.73)$$

$$k_{ij}^{(8)} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} a d\xi d\eta d\zeta \quad (2.74)$$

$$k_{ij}^{(9)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} - k^2 N_j N_i \right) abc d\xi d\eta d\zeta \quad (2.75)$$

第 2.1 表 Gauss の求積法の横座標と重み

n	± a	W
n=2	0.577350269189626	1.000000000000000
n=3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0.000000000000000	0.888888888888889
n=4	0.861136311594053	0.347854845137454
	0.339981043584856	0.652145154862546
n=5	0.906179845938664	0.236923885056189
	0.538469310105683	0.478658670499366
	0.000000000000000	0.568888888888889

上式中の体積積分は、次式で示す Gauss の積分公式により計算する。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_i W_j W_m f(\xi_i, \eta_j, \zeta_m) \quad (2.76)$$

n は積分の分点数、 ξ_i 、 η_j 、 ζ_m は横座標、 W は重み係数である。ここで、横座標とは、数値積分を実行する際の局所座標系での各軸 (ξ, η, ζ) 上の分点座標を表す。本研究では分点数 2 とした。横座標 a_i と、重み係数 $W_i (i = 1, \dots, n)$ を第 2.1 表に示した。

(2.64)~(2.66) 式で示される連立方程式をマトリクス表示すると次式のようにになる。

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{ij}^{(1)} & \dots & \dots & k_{ij}^{(2)} & \dots & \dots & k_{ij}^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{ij}^{(4)} & \dots & \dots & k_{ij}^{(5)} & \dots & \dots & k_{ij}^{(6)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{ij}^{(7)} & \dots & \dots & k_{ij}^{(8)} & \dots & \dots & k_{ij}^{(9)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{x_1} \\ \vdots \\ H_{x_8} \\ H_{y_1} \\ \vdots \\ H_{y_8} \\ H_{z_1} \\ \vdots \\ H_{z_8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

上に示されるマトリクスは、各々の直方体要素で計算される要素マトリクスである。

$k_{ij}^{(1)} \sim k_{ij}^{(9)}$ は、 8×8 のマトリクスであるから、要素マトリクスは 24×24 の対称マトリクスになる。各要素で計算された要素マトリクスを、共通な節点ごとに重ね合わせることで、全体係数マトリクスを得る。

全体マトリクスは、複素係数マトリクスとなる。節点数を N とすると、

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_{ij}^{(1)} & \dots & \dots & K_{ij}^{(2)} & \dots & \dots & K_{ij}^{(3)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_{ij}^{(4)} & \dots & \dots & K_{ij}^{(5)} & \dots & \dots & K_{ij}^{(6)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_{ij}^{(7)} & \dots & \dots & K_{ij}^{(8)} & \dots & \dots & K_{ij}^{(9)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{x_1} \\ \vdots \\ H_{x_N} \\ H_{y_1} \\ \vdots \\ H_{y_N} \\ H_{z_1} \\ \vdots \\ H_{z_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ \vdots \\ F_{x_N} \\ F_{y_1} \\ \vdots \\ F_{y_N} \\ F_{z_1} \\ \vdots \\ F_{z_N} \end{pmatrix}$$

全体係数マトリクスに示した右辺の、 $F(x_i)$ 、 $F(y_i)$ 、 $F(z_i)$ は、境界条件を指定して整理した定数項である。

全体マトリクスの大きさは、節点数を N とすると、 $3N \times 3N$ になる。しかし、全体マトリクスの成分 $K_{ij}^{(1)}$ で、接点 i を含む要素に含まれていない要素 j については、 $K_{ij}^{(1)} = 0$ となる。 $K_{ij}^{(2)}$ から $K_{ij}^{(9)}$ についても同様である。この性質を利用して零係数を計算せず、非零係数のみを取り出すことにより、全体マトリクスを $3N \times 81$ の大きさに縮小することができる。これによって、数値計算を行う上で連立方程式の計算を経済的に行うことができる。

2.4.4 連立方程式の解法について

全体マトリクスから得られる連立方程式の解法として、反復法、そのうちでも逐次緩和法 (SOR 法) を用いる。

収束の状況は適当な小さな値 ϵ について

$$\epsilon < \frac{\sum_{j=1}^N \{|H_{x_j}^{(r)} - H_{x_j}^{(r-1)}| + |H_{y_j}^{(r)} - H_{y_j}^{(r-1)}| + |H_{z_j}^{(r)} - H_{z_j}^{(r-1)}|\}}{\sum_{j=1}^N \{|H_{x_j}^{(r)}| + |H_{y_j}^{(r)}| + |H_{z_j}^{(r)}|\}} \quad (2.77)$$

により判定する。ここでは $\epsilon = 1.0 \times 10^{-3}$ とした。

2.4.5 要素分割、境界条件について

第2.20図に、今回用いた要素分割図を示した。

計算領域の要素数は $30 \times 30 \times 30$ (27000) 個、節点数は $31 \times 31 \times 31$ (29791) 点となっている。要素分割に関しては x, y, z 方向について等方であり、節点間の長さはモデルの端点から各正方向に向かって 80, 80, 80, 80, 40, 40, 40, 20, 20, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 20, 20, 40, 40, 40, 80, 80, 80, 80 (m) となっており、全体の長さは 1080m である。このうち、節点間隔が最小の 10m の $13 \times 13 \times 13$ の範囲を解析対象とする。

境界条件については、モデルの端面では電磁波は大きく減衰するものと仮定し、モデルの端面での磁場の値を 0 とした。

2.5 3次元有限要素法によるモデリング

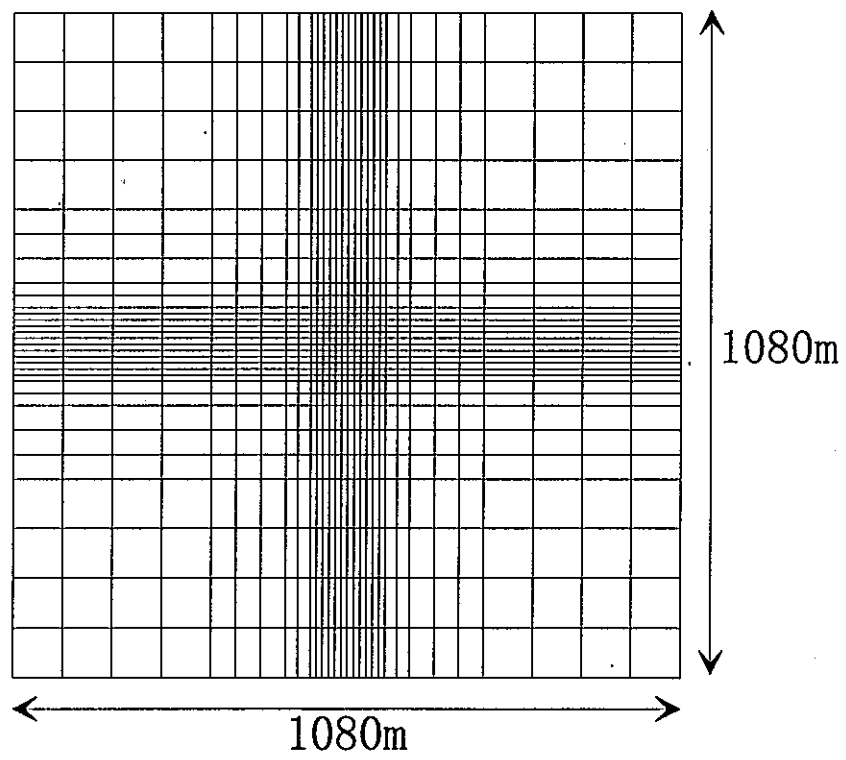
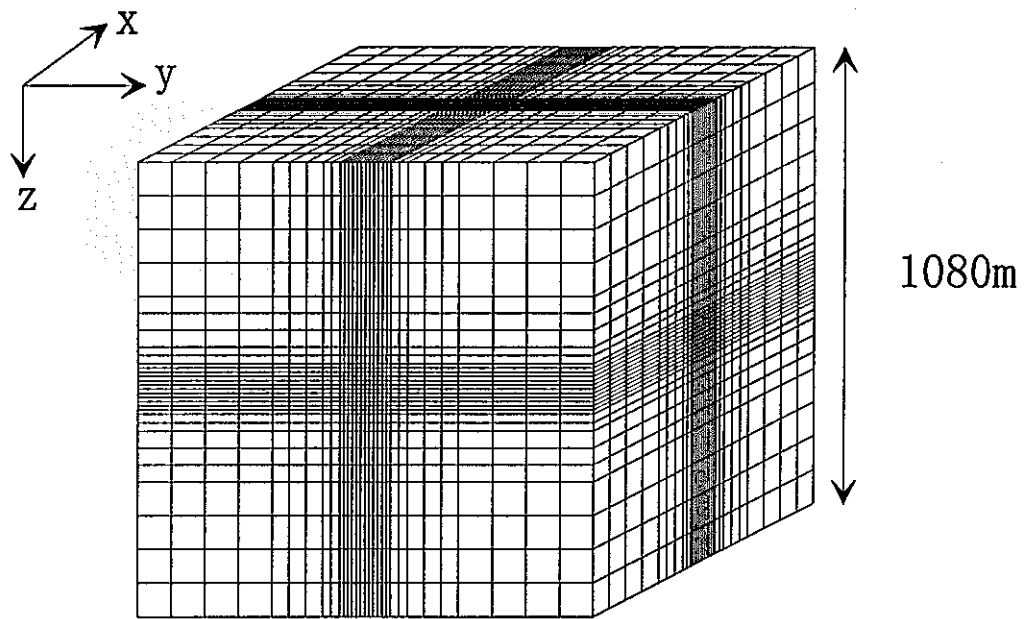
2.5.1 全無限均質媒質構造における考察

比抵抗が $100\Omega \cdot m$ の全無限均質媒質について、有限要素法による計算結果と、第2章で述べた理論解とを比較検討した。送信源はモデル中央に置き、送信周波数は 100Hz とした。第2.21図に、有限要素法による解析解と、(2.8)式で得られる理論解との誤差を示した。理論式による値を H_T 、有限要素法による解析解を H_A とすれば、誤差 = $\frac{H_A - H_T}{H_T}$ % である。第2.21図を見ると、送信源の近傍では誤差は大きく、中央から 50m ~ 60m のところでは比較的誤差は小さくなっているが、要素の形状が変わる境界に近づくにつれ誤差は大きくなっていることがわかる。

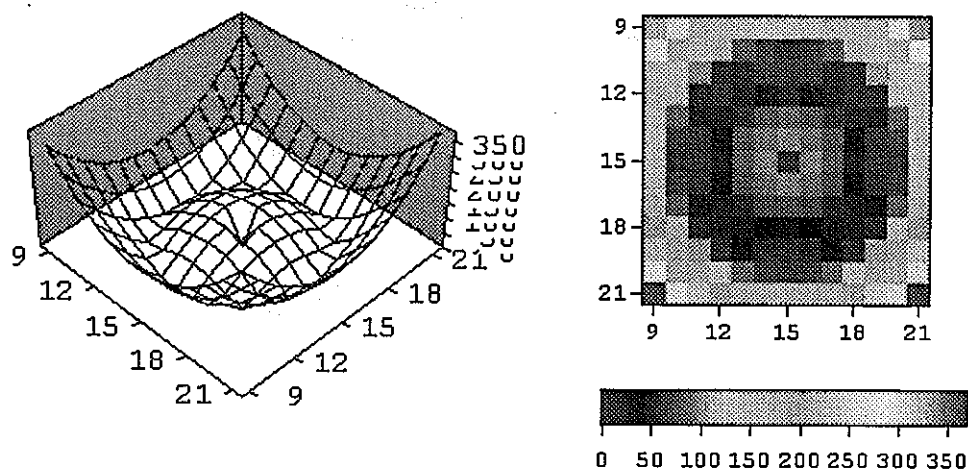
2.5.2 3次元構造の計算例

ここでは、送信源をポーリング孔内に入れて測定を行う場合を想定し、比抵抗が $100\Omega \cdot m$ の全無限均質媒質中に平板状の3次元比抵抗異常体が存在するモデルについて計算を行った。

計算モデルを第2.22図に示した。異常体のモデルの大きさは $60m \times 80m \times 10m$ で、比抵抗は $10\Omega \cdot m$ である。VMDと同じ深さで x 方向に 100m 離れた地点を中心にして、上下に受信点を5つずつ、合計11点での磁場強度の x, y, z 成分を測定した。送信周波数は 100Hz とした。その結果を第2.23図に示した。この図を見ると、受信点と同じ深さの点で z 成分は最大値を持ち、 x 成分は逆に最小値をとっている。理論式では、この点では x 成分は 0 とな

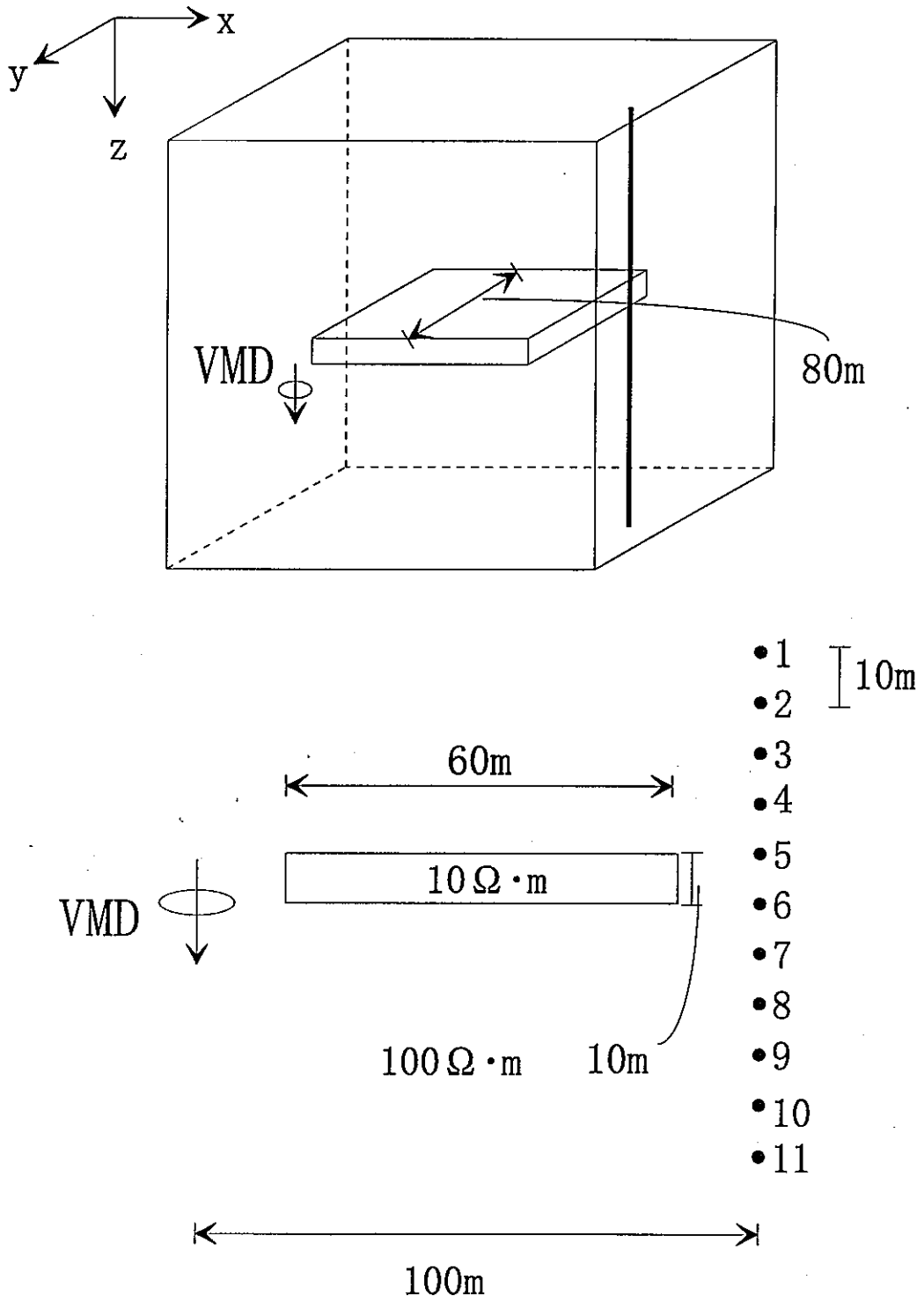


第 2.20 图 要素分割图

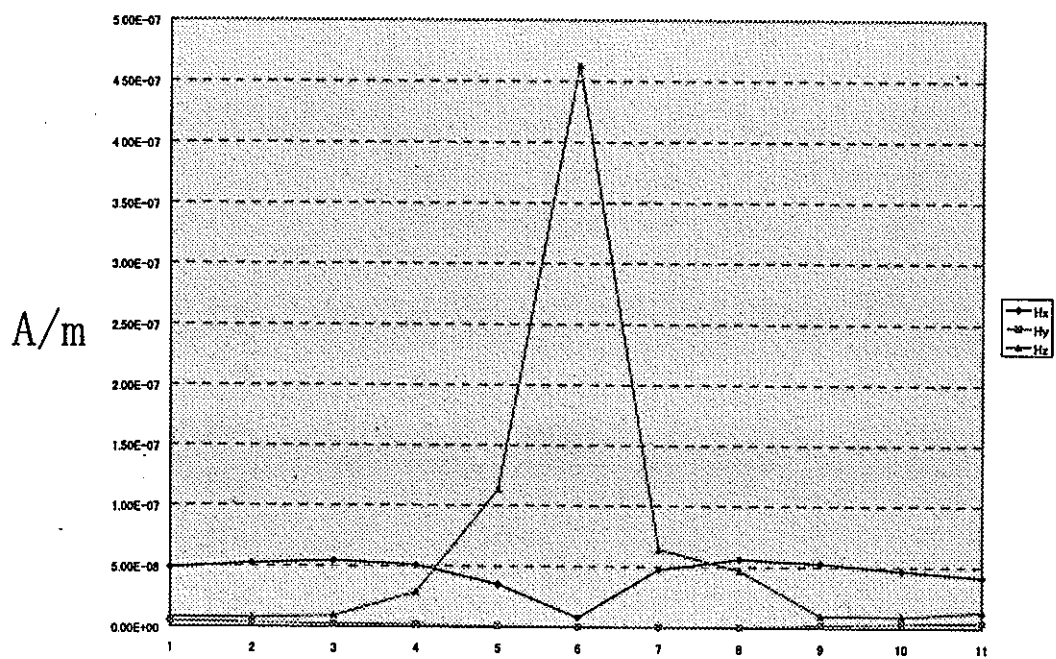


第 2.21 図 送信源を含む平面での磁場の誤差

る点である。 y 成分はこのグラフのスケールでは、 x 、 z 成分に比べてかなり小さい値を取っている。この結果は、全無限均質媒質における理論式と、定性的に合致している。



第 2.22 図 計算モデル



第 2.23 図 各受信点での磁場強度の x, y, z 成分

第3章 高周波数領域における電磁波動現象のシミュレーション

3.1 電磁波の基礎理論および時間領域有限差分法

3.1.1 電磁波の基礎方程式

時間変動する電磁場ベクトルは以下のMaxwellの方程式に支配される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.4)$$

特に、線形、均質、等方性媒質の場合には以下の構成方程式が成り立つ。

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_c \quad (3.7)$$

また、導電性媒質の場合、二次電流は、

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (3.8)$$

である。ここに、

\mathbf{E} : 電界 [V/m]

\mathbf{B} : 磁束密度 [T]

\mathbf{H} : 磁界 [C/m²]

\mathbf{J} : 電流密度 [A]

\mathbf{D} : 電束密度 [A/m]

ρ : 電荷密度 [C]

ϵ : 誘電率 [F/m]

μ : 透磁率 [H/m]

σ : 導電率 [1/ Ω ·m]

\mathbf{J}_0 : 外部から印加される電流 [A]

\mathbf{J}_c : 二次電流 [A]

である。以上より、Maxwellの方程式は次式のように表すことができる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.10)$$

まず、最も基本的な場合として、電磁界ベクトルが空間的な位置の関数であり、かつ時間に対し正弦波状に変化するとした場合、電界ベクトルは、

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(x, y, z, t)e^{j\omega t}] \quad (3.11)$$

となる。ここで、 j は虚数単位、 ω は角周波数である。したがって、対象とする領域内に電流源も電荷もない場合、(3.9)式および(3.10)式は、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E} \quad (3.13)$$

となる。(3.12)式の rot をとり、(3.13)式に代入すると(3.14)式のHelmholtzの方程式を得る。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.14)$$

ここで、

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu\sigma} \quad (3.15)$$

である。波動が z 方向に進行するとすると、(3.14)式の解は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma z + j\omega t} \quad (3.16)$$

のように表される。ここで、 γ は複素数であり、

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (3.17)$$

とおくと、

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

であり、(3.16)式は、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (3.20)$$

となる。ここで、 α を減衰定数、 β を位相定数、 γ を伝搬定数という。例えば、地盤等の導電性媒質においては、電磁波の振幅は $e^{-\alpha z}$ で指数的に減衰しながら進行する。また、波動の位相速度は、

$$V = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon\mu}} \left[\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} + 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

となる。通常、地下レーダーで用いられる数百 MHz から数 GHz の周波数の電磁波が、岩盤や地盤を伝播するときには $(\sigma/\omega\epsilon)^2 \cong 0$ と近似され、(3.21)式は、

$$V \cong \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (3.22)$$

となる。ここで、 C_0 は真空中の電磁波伝播速度、 ϵ_r は媒質の比誘電率、 μ_r は比透磁率である。一般の非磁性体の岩盤や表土層においては比透磁率は1.0(真空の透磁率)としてよく、

$$V = \frac{C_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (3.23)$$

の近似式が用いられる。

反射と透過

異なる媒質が接する境界に電磁波が入射すると、両媒質の固有インピーダンスが異なるために、電磁波の一部は反射され、残りは透過していく。ここで、反射面は平面とし電磁波が垂直入射する場合を考える。まず、媒質 (ϵ, μ, σ) における固有インピーダンス Z は(3.24)

式で表される。

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\gamma}} \quad (3.24)$$

電磁波が媒質1 ($\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$) から媒質2 ($\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$) に入射する場合には、それぞれの固有インピーダンスを Z_1 および Z_2 とすると、反射係数 R および透過係数 T は次式のようになる。

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (3.25)$$

$$T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (3.26)$$

前述と同様に、一般の地盤においては $(\sigma/\omega\epsilon)^2 \cong 0$ と近似され、(3.25)式および(3.26)式は

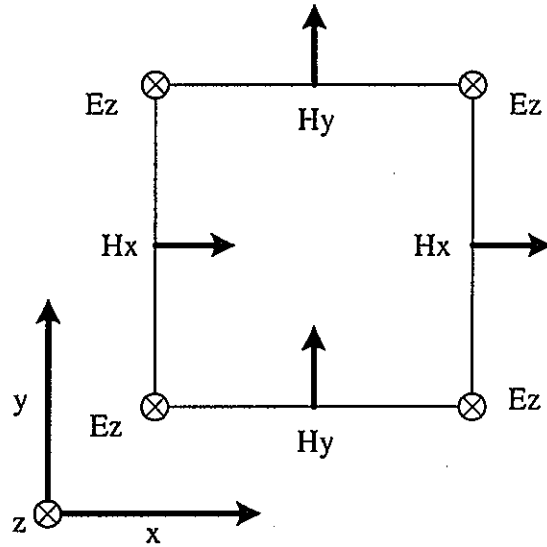
$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \quad (3.27)$$

$$T = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \quad (3.28)$$

となる。例えば、媒質2が完全導体の場合には、(3.24)式より $Z_2 = 0$ であるので、(3.25)式および(3.26)式より $R = -1, T = 0$ となる。したがって、電磁波は全て反射し透過波は存在しなくなる。

3.1.2 時間領域有限差分法

時間領域有限差分法 (Finite Difference Time Domain Method、以下FDTD法と呼ぶ) による電磁波解析は、1966年にYeeの論文が掲載されてから、現在も種々の解析に用いられている。FDTD法は解析領域をYee格子と呼ばれる基本ブロックに分割し、それぞれのブロックに誘電率、導電率および透磁率の媒質条件と境界条件を与え、(3.9)式および(3.10)式のMaxwell方程式の回転の式を差分化し、時間軸で逐次的に交互に計算する方法である。ブロックを細かく与えることにより複雑な形状の解析にも用いることができ、時間を追って電磁波の伝播の様子を観察することができる。



第 3.1 図 x - y 平面における変数配置と基本ブロック (Yee 格子)

Maxwell 方程式の差分表示

本研究では 3 次元で数値モデリングを行っているが、ここでは説明を簡単にするために 2 次元問題として考える。電界が z 成分のみを持つ TE 波の場合、(3.9) 式および (3.10) 式は、

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} \quad (3.29)$$

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} \quad (3.30)$$

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} - \mathbf{J}_z - \sigma \mathbf{E}_z \quad (3.31)$$

となる。(3.29) 式、(3.30) 式および (3.31) 式を差分化するために、解析領域を第 3.1 図に示すような各格子点に、電磁界の各成分を対応させる。

ここで、Yee の記述法にしたがって、ある座標、時間における関数 F は、

$$\mathbf{F}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \mathbf{F}^n(i, j, k) \quad (3.32)$$

と表す。(3.29) 式、(3.30) 式および (3.31) 式を時間・空間領域において中間差分を用いて差分化すると、

$$\mu \frac{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{\mathbf{E}_z^n(i, j+1) - \mathbf{E}_z^n(i, j)}{\Delta y} \quad (3.33)$$

$$\mu \frac{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{E}_z^n(i+1, j) - \mathbf{E}_z^n(i, j)}{\Delta x} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\mathbf{E}_z^{n+1}(i, j) - \mathbf{E}_z^n(i, j)}{\Delta t} &= -\sigma \frac{\mathbf{E}_x^{n+1}(i, j) + \mathbf{E}_x^n(i, j)}{2} - \mathbf{J}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \\ &+ \frac{\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \\ &- \frac{\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.35)$$

となる。さらに、整理すると、

$$\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) = \mathbf{H}_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \frac{\alpha_1}{\Delta y} [\mathbf{E}_z^n(i, j+1) - \mathbf{E}_z^n(i, j)] \quad (3.36)$$

$$\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) = \mathbf{H}_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - \frac{\alpha_1}{\Delta x} [\mathbf{E}_z^n(i+1, j) - \mathbf{E}_z^n(i, j)] \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z^{n+1}(i, j) &= \alpha_2 \mathbf{E}_z^n(i, j) - \alpha_3 \mathbf{J}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \\ &+ \frac{\alpha_3}{\Delta x} [\mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j) - \mathbf{H}_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j)] \\ &- \frac{\alpha_3}{\Delta y} [\mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}) - \mathbf{H}_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2})] \end{aligned} \quad (3.38)$$

ただし、

$$\alpha_1 = \frac{\Delta t}{\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{1 - \frac{\Delta t \sigma}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t \sigma}{2\varepsilon}}, \quad \alpha_3 = \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t \sigma}{2\varepsilon}} \quad (3.39)$$

となる。すなわち、(3.36)式および(3.37)式は、ある時間、位置における磁界は同じ位置における1ステップ前の磁界およびその周りにおける1/2ステップ前の電界から計算できることを示している。同様に、(3.38)式は、電界も同じ位置における1ステップ前の電界、同じ位置における1/2ステップ前の電流密度およびその周りにおける1/2ステップ前の磁界から計算できることを示している。したがって、これらの式を交互に計算していくことにより、時間を追って電磁界の分布を計算することができる。

精度および安定条件

FDTD法は、以上に述べたように時間および空間で差分化する方法であるため、離散時間間隔および離散距離は、数値計算の精度および安定性に大きく影響する。本手法においては、計算の精度を保つために離散距離は波長に対して十分に小さくしなければならない。

また、計算の安定条件は次式で与えられる。

$$\Delta t \leq \frac{1}{C_{\max}} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

ここで、 C_{\max} は系のなかでの電磁波の最大伝播速度である。

吸収境界条件

FDTD法で解析を行う場合、計算機のメモリと計算時間の制限のため、外部無限領域を有限の領域に置き換えて計算しなければならない。このため、計算領域の端から不要な反射波が生じないように、計算領域端に吸収境界を設ける必要がある。ここで、解析領域を絶縁体媒質とし電流源および電荷がない場合には(3.9)式および(3.10)式は、(3.41)式に示すような波動方程式となる。

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (3.41)$$

ここに、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (3.42)$$

であり、(3.22)式の電磁波伝播速度 V と一致する。さらに、(3.41)式は境界において、以下のように因数分解できる。

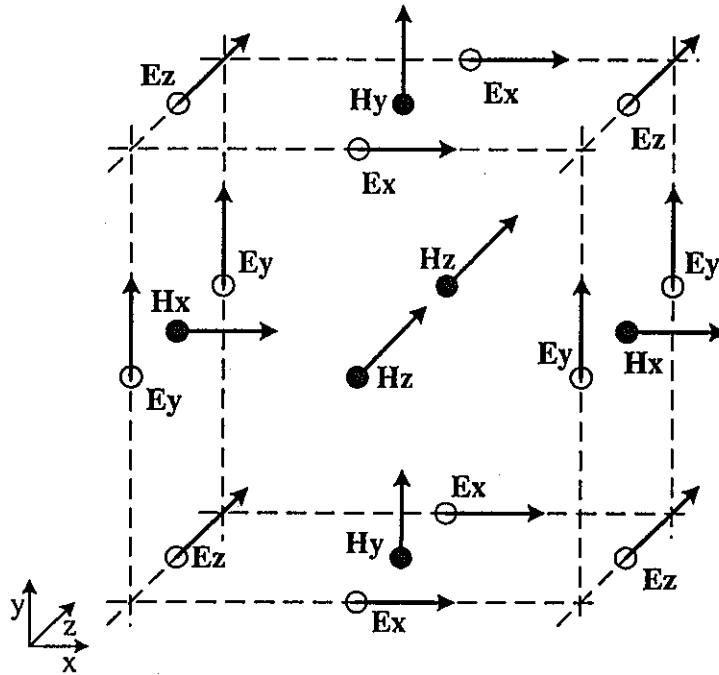
$$\left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (3.43)$$

ただし、 n は境界での外向き法線方向である。(3.43)の第1項は後方へ進行する波であり、第2項は前方へ進行する波である。Mur(1981)は、境界において反射波を発生させないために、次式に示すような前方へ進行する波のみの微分方程式を仮定した。

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (3.44)$$

(3.44)式を差分化した式の例を(3.45)式に示す。

$$\mathbf{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(1, j) = \mathbf{E}_y^{n-\frac{1}{2}}(2, j) - \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} \left[\mathbf{E}_y^{n+\frac{1}{2}}(2, j) - \mathbf{E}_y^{n-\frac{1}{2}}(1, j) \right] \quad (3.45)$$



第 3.2 図 3次元における変数配置と基本ブロック (Yee 格子)

(3.45) 式を Mur の 1 次の吸収境界条件という。良好な吸収境界条件を用いることによって解析領域を必要最小限にすることができる。

同様の手順は、容易に 3 次元での差分式に拡張できる。3 次元空間における離散点網を第 3.2 図に示した。Mur の 1 次の吸収境界条件だけでなく、より高次の吸収境界条件や、最近では Burenger(1994) による PML と呼ばれる完全吸収境界条件も提唱されている。

FDTD 法の特徴

FDTD 法の特徴としては

- 差分を用いているので定式化が容易である。
- 汎用性が高い。
- 多くの計算機のメモリを必要とする。
- 逐次計算のため計算が早い。
- 良好な吸収境界条件が定式化されている。

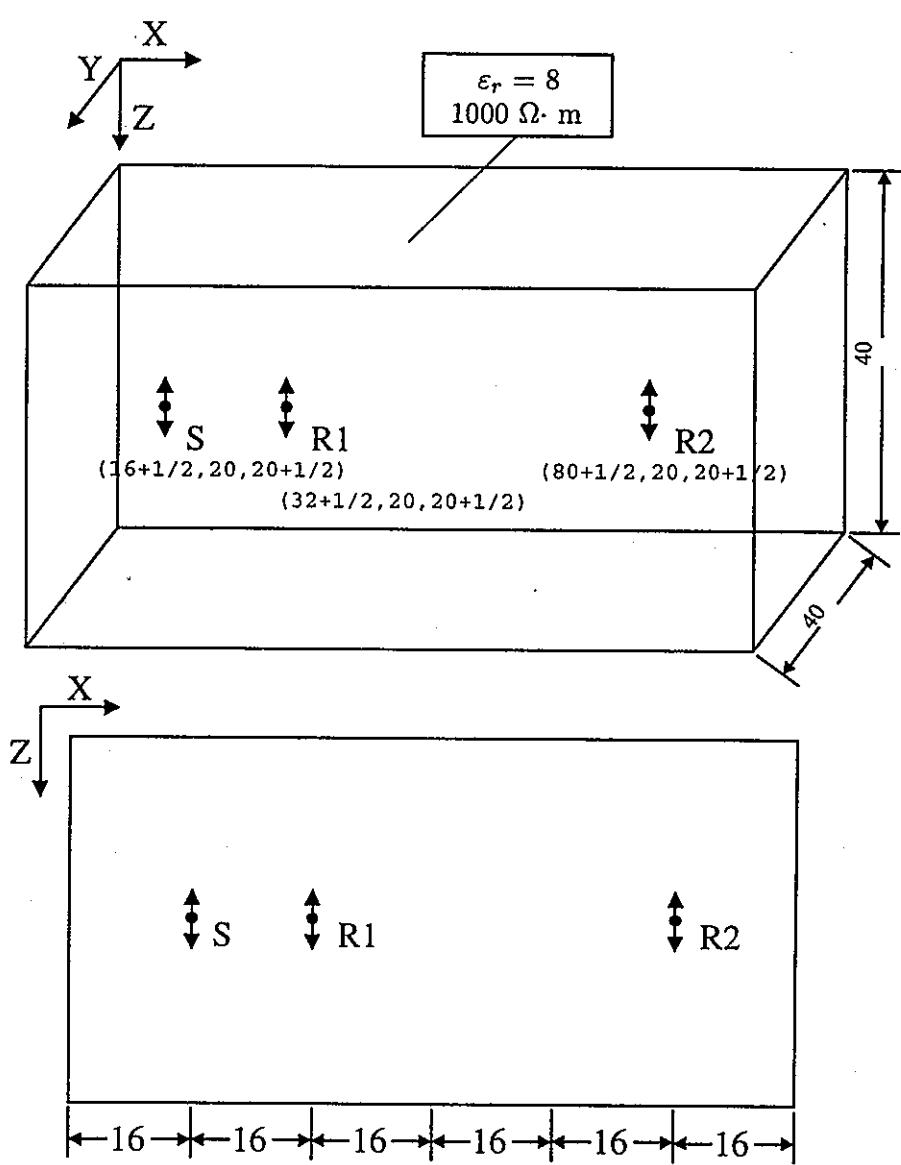
などがあげられる。時間間隔および解析領域を細かく区切ることにより、種々の入力波形や複雑な形状などに対して柔軟に解析できる。また、時間を追って各成分の電磁界を解析できる。また、単純な四則演算によってのみ計算が行われるので、有限要素法などの他の解析法に比べて計算時間が短く、ベクトル化による高速計算においても効率がよい。しかし、解析領域における各媒質条件および電界、磁界の値を計算機の記憶領域に確保する必要があり、多くのメモリが必要であるという短所がある。特に3次元解析においては、より多くのメモリが必要である。

3.2 電磁波動現象の基礎的性質に関するシミュレーション

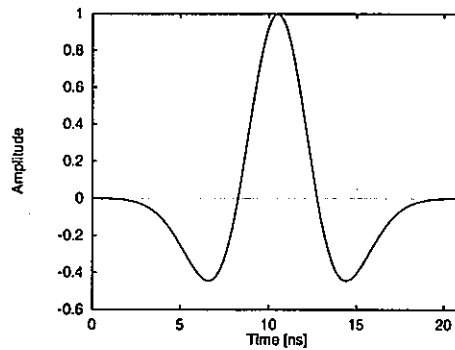
3.2.1 基本モデル1

まず、電磁波パルスが均質な岩盤を伝播した場合に観測される波形についてモデリングを行った。計算モデルを第3.3図に示す。図に示すように、1つの発信点Sおよび2つの観測点R1、R2を配置した。1ブロックは6.25cmとし、解析領域は x, y, z 方向が、それぞれ40, 40, 96ブロックの直方体とした。発信点は $(16+1/2, 20, 20+1/2)$ における z 方向の電流源とし、入力波形はRicker waveletを用いた。中心周波数が100MHzのRicker waveletを第3.4図に示した。R1およびR2は、それぞれ $(32+1/2, 20, 20+1/2)$ および $(80+1/2, 20, 20+1/2)$ における z 方向の電界強度を観測する。すなわち、 $S-R_2$ 間は $S-R_1$ 間の4倍離れていることになる。ここで、 $1/2$ はブロックの中心を表す。時間ステップは100MHzおよび50MHzの場合には0.21ns、200MHzの場合には数値計算の安定性のため100MHzの場合の半分である0.10nsとした。モデルの媒質は一般的な花崗岩を想定し、比誘電率を8.0、比抵抗を $1000\Omega\cdot\text{m}$ 、比透磁率を1.0の岩盤とした。したがって、(3.23)式から電磁波伝播速度は $1.06 \times 10^8 \text{m/s}$ となる。中心周波数が100MHzである入力波形の波長は1.06mとなるので、およそ16ブロックで1波長とみなせる。同様に50MHzおよび200MHzにおける波長では、それぞれ32ブロック、8ブロックとなる。

第3.5図(a)および(b)、(c)および(d)、(e)および(f)に、それぞれ発信点の中心周波数を50MHz、100MHzおよび200MHzに変化させた場合のR1およびR2における観測波形を示した。図中の矢印および数値は、(3.23)式から求めた電磁波伝播速度 $1.06 \times 10^8 \text{m/s}$ を用いて計算した初動走時の位置を示している。どの周波数においても数値計算による初動走時とよく一致していることがわかる。R1における波形の振幅よりR2の振幅の方が小さく



第 3.3 図 計算モデル (基本モデル 1)



第 3.4 図 入力波形 (Ricker wavelet) [100MHz]

なっているのは、媒質の比抵抗による減衰および発信点から放出した電磁波が3次的に拡がっていくためである。周波数の変化によって初動走時に変化はないが、周波数が高くなり波長が短くなるにつれて、波形の乱れも大きくなっている。特に200MHzにおいては、時間間隔を半分にしたにもかかわらずリングングが大きく長く続いている。以下、この中心周波数100MHzを用いたモデルを基本モデル1と呼ぶ。

3.2.2 比抵抗による変化

その他のパラメータは基本モデル1と同じとし、媒質の比抵抗を、絶縁体および $100\Omega\cdot\text{m}$ に変化させた。第3.6図(a)および(b)、(c)および(d)、(e)および(f)に、それぞれ中心周波数を50MHz、100MHzおよび200MHzに変化させた場合の観測波形を示した。いずれの周波数においても、比抵抗が低くなるほど減衰のため振幅も小さくなっているが、波動の形は変化しないことがわかる。R1よりR2の方が減衰が大きく、波が進行するにしたがって振幅が減衰していることがわかる。また、絶縁体から $1000\Omega\cdot\text{m}$ では減衰が比較的少ないが、 $100\Omega\cdot\text{m}$ ではかなり振幅が減衰している。 $100\Omega\cdot\text{m}$ の導電性媒質において、周波数の変化と振幅の減衰を比べてみる。第3.1表に、それぞれの最初の正の振幅を示した。 R_2/R_1 で比較すると、導電性媒質を透過した電磁波は周波数が高くなるほど減衰が激しいことがわかる。

3.2.3 誘電率による変化

媒質の比誘電率を3, 20, 40に変化させた場合のR1およびR2における観測波形を、第3.7図(a)から(f)に示した。前節より比抵抗による変化は、波動の形に影響を及ぼさないこ

第 3.1 表 周波数の変化による振幅の変化

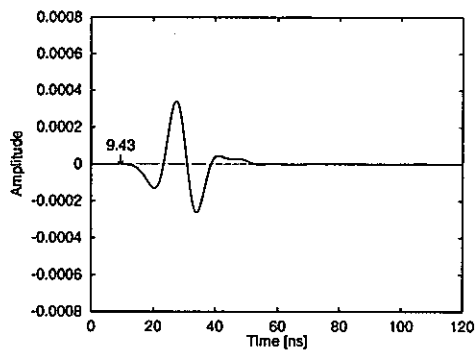
周波数 (MHz)	$R_1(10^{-4})$	$R_2(10^{-4})$	R_2/R_1
50	190	6.6	0.034
100	340	9.8	0.029
200	440	6.8	0.015

とがわかったため、媒質は絶縁体とした。その他のパラメータは基本モデル1と同じである。誘電率が大きくなるほどリングングが激しくなっていることがわかる。図中の矢印および数値は、(3.23)式から求めた電磁波伝播速度を用いて計算した初動走時の位置を示している。比誘電率が10までは数値計算による初動走時とほぼ一致している。しかし、比誘電率が20以上になると、比誘電率が大きくなるほど理論による走時より数値計算による走時の方が数 ns 程度小さくなっている。

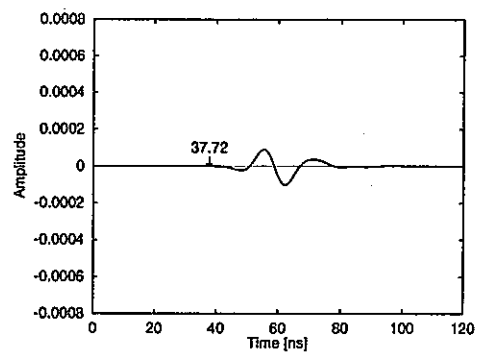
3.2.4 まとめ

以上の解析により、比誘電率が10程度までの場合、周波数の変化による波形の変化、比抵抗の変化による振幅の減衰、および誘電率の変化による電磁波伝搬速度の変化は理論とよく一致していることがわかった。すなわち、これらの結果は最初に仮定した線形、均質、等方性媒質における Maxwell 方程式を忠実に再現している。一方で、高周波数帯における激しいリングングや、比誘電率が大きくなるにしたがって、電磁波伝播速度が速くなること等が、理論と異なる結果となった。これらの現象は FDTD 法のアルゴリズムだけでなく、数値計算による誤差も含まれると考えられるため、原因をより詳細に調べる必要がある。

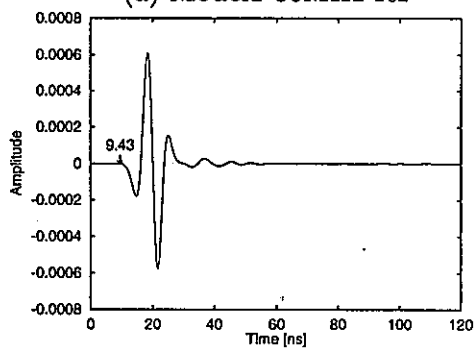
FACOM VP2600/20E を用いて、基本モデル1をベクトル計算を行った結果、CPU TIME が9分16秒、MEMORY SIZEが203MBであった。前章で述べたように、計算時間は非常に高速であったが、メモリーを大量に消費した。



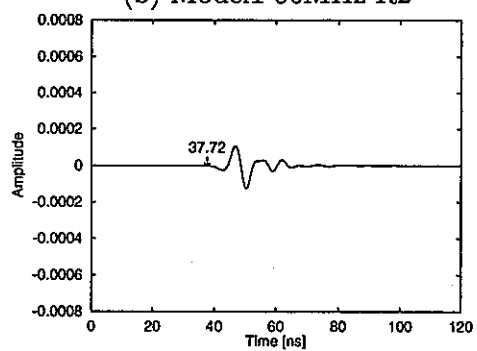
(a) Model1 50MHz R1



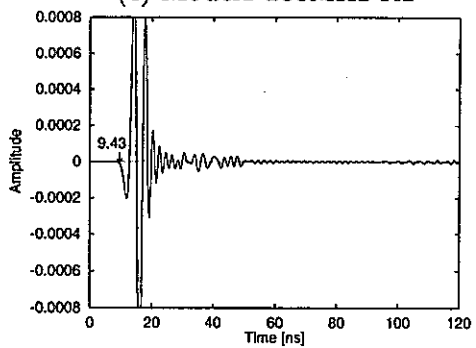
(b) Model1 50MHz R2



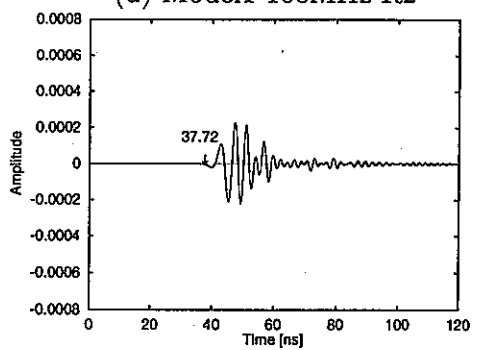
(c) Model1 100MHz R1



(d) Model1 100MHz R2

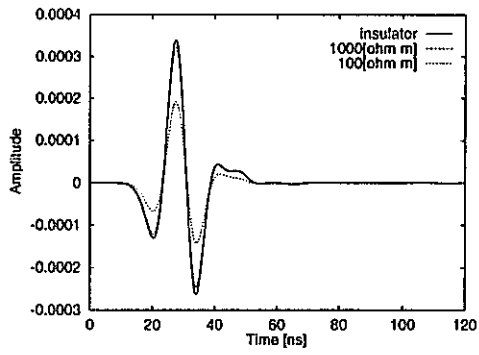


(e) Model1 200MHz R1

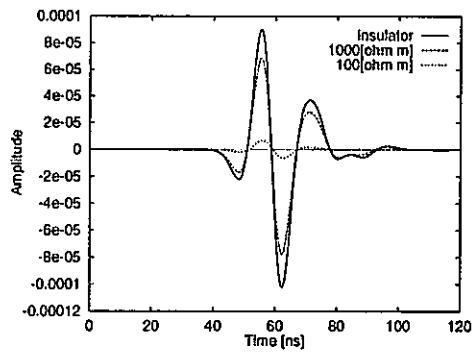


(f) Model1 200MHz R2

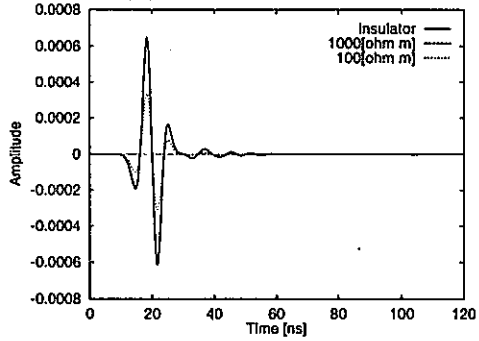
第 3.5 図 基本モデル 1(比抵抗 $1000\Omega\cdot\text{m}$) に対する計算結果



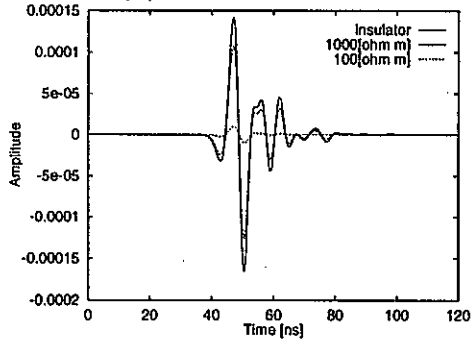
(a) Model1 50MHz R1



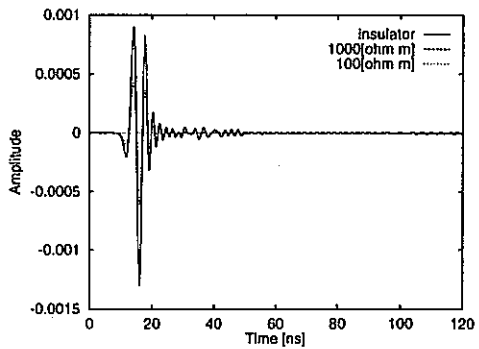
(b) Model1 50MHz R2



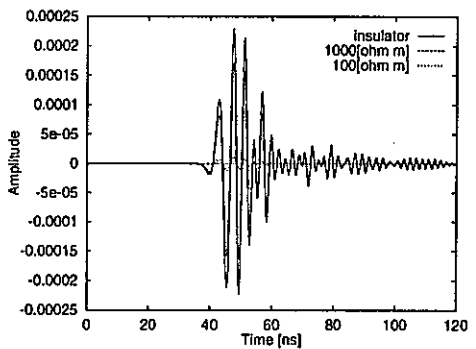
(c) Model1 100MHz R1



(d) Model1 100MHz R2

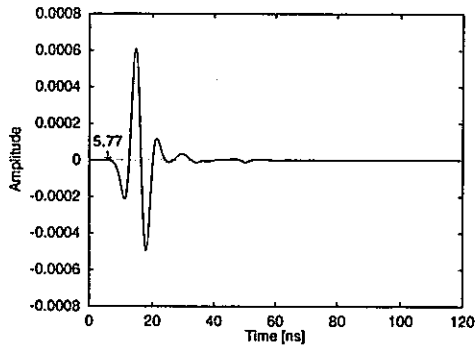


(e) Model1 200MHz R1

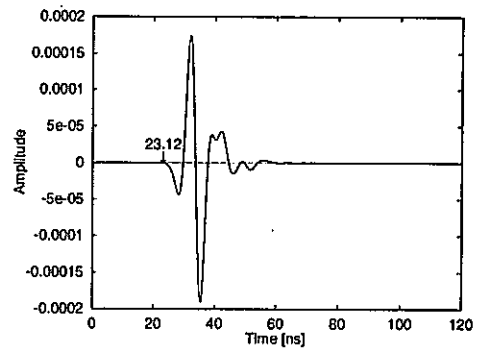


(f) Model1 200MHz R2

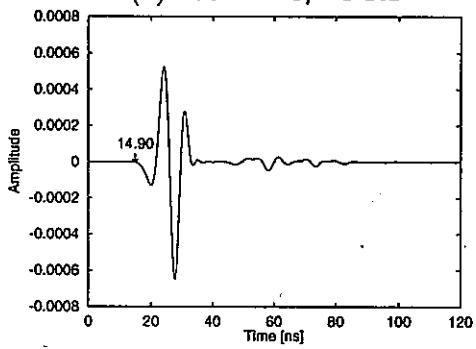
第 3.6 図 基本モデル1(比抵抗 100Ω·m)に対する計算結果



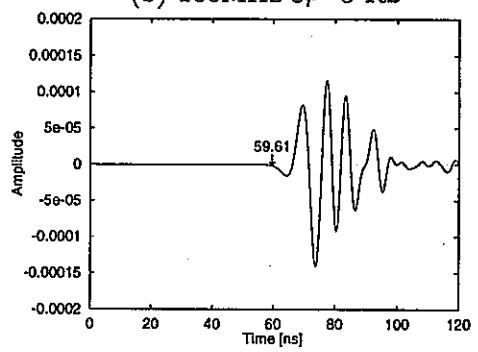
(a) 100MHz $\epsilon_r=3$ R1



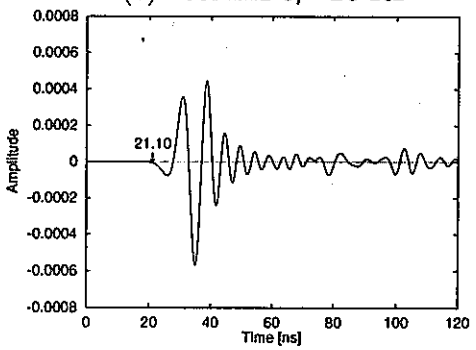
(b) 100MHz $\epsilon_r=3$ R2



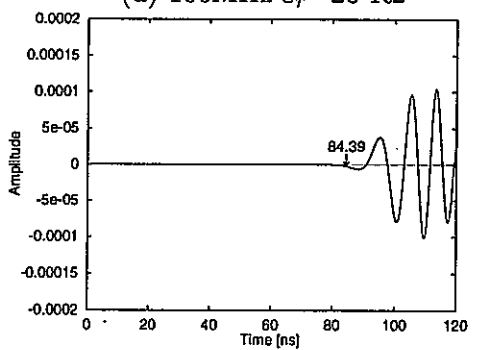
(c) 100MHz $\epsilon_r=20$ R1



(d) 100MHz $\epsilon_r=20$ R2

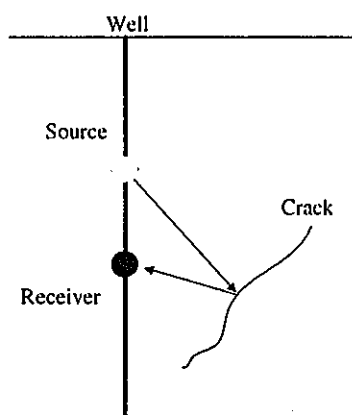


(e) 100MHz $\epsilon_r=40$ R1

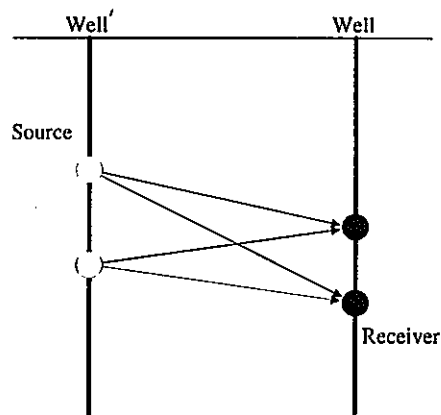


(f) 100MHz $\epsilon_r=40$ R2

第 3.7 図 基本モデル 1(比誘電率変化)に対する計算結果



第 3.8 図 シングルホール法の模式図



第 3.9 図 クロスホール法の模式図

3.3 ボアホールレーダーによる含水破碎帯の検出

地下の割れ目、破碎帯は地下水の経路で、いわゆる”水みち”である。割れ目、破碎帯などの位置や大きさをより詳細に知ることは防災、地下空間利用などにおいて重要な問題である。

ボアホールレーダーとは、ボーリング孔を用いて、電磁波の透過や反射などの性質によって孔周辺の岩盤亀裂や地質構造を調査する装置である。第3.8図に示したように、一本の孔中に一对の送信アンテナおよび受信アンテナを設置し、移動しながら孔周辺の亀裂などを検出する方法はシングルホール法と呼ばれる。特に岩盤と水を含む岩盤との境界は誘電率の差が大きく電磁波の良好な反射面となる。一方、第3.9図に示したように、2本の孔を用いてそれぞれに送信アンテナおよび受信アンテナを配置し、透過波の走時や振幅を用いて孔間の地質構造を調査する方法は、クロスホール法または電磁波トモグラフィと呼ばれる。

一般に花崗岩の比誘電率は3から10程度であり、水の比誘電率は80である。岩盤の誘電率に比べ水の誘電率が大きいため、含水破碎帯の性質は、水の性質に大きな影響を受ける。ここでは、含水破碎の帯を比誘電率30、比抵抗 $100\Omega\cdot m$ の導電性低速度帯として、その境界における反射波および透過波について考察する。

計算モデル

計算モデルを第3.10図、第3.11図に示した。モデル2においては、第3.10図に示したように、発信点、受信器および1波長幅の含水破碎帯を想定した領域を配置した。含水破碎

第 3.2 表 モデルの物性値

媒質名	ϵ_r	ρ ($\Omega \cdot m$)	μ_r
岩盤	8.0	1000	1.0
含水破碎帯	30.0	100	1.0

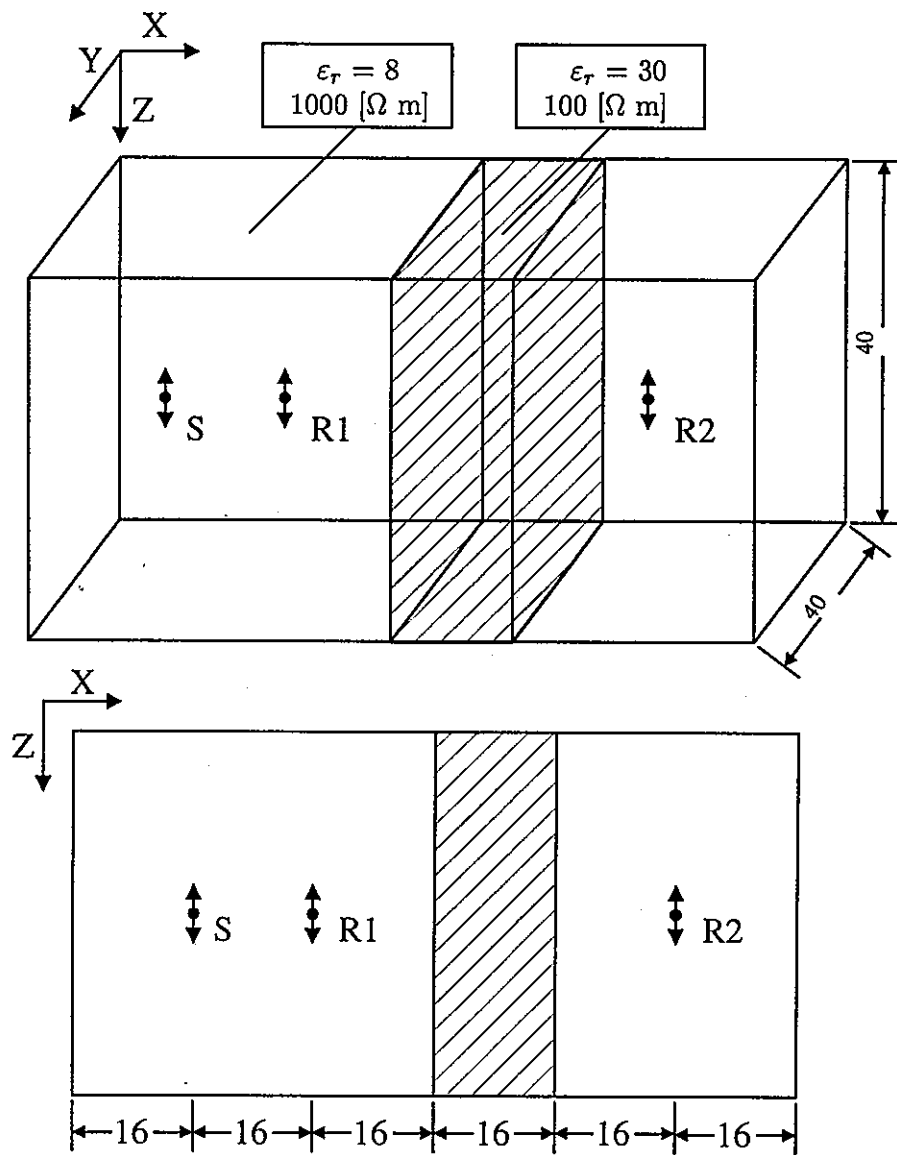
帯は R1 と R2 の間に存在し、R1 では直接波と左側面および右側面からの反射波 (以下、反射波 1 および反射波 2 と呼ぶ)、R2 では透過波を観測できると考えられる。モデル 3 においては含水破碎帯の幅を波長の 1/2 とした。含水破碎帯の存在を除けば、電流源のパラメータおよび発信点、受信器の位置はモデル 1 と同様とした。モデル 2 およびモデル 3 の物性値を表 3.2 に示した。

計算結果

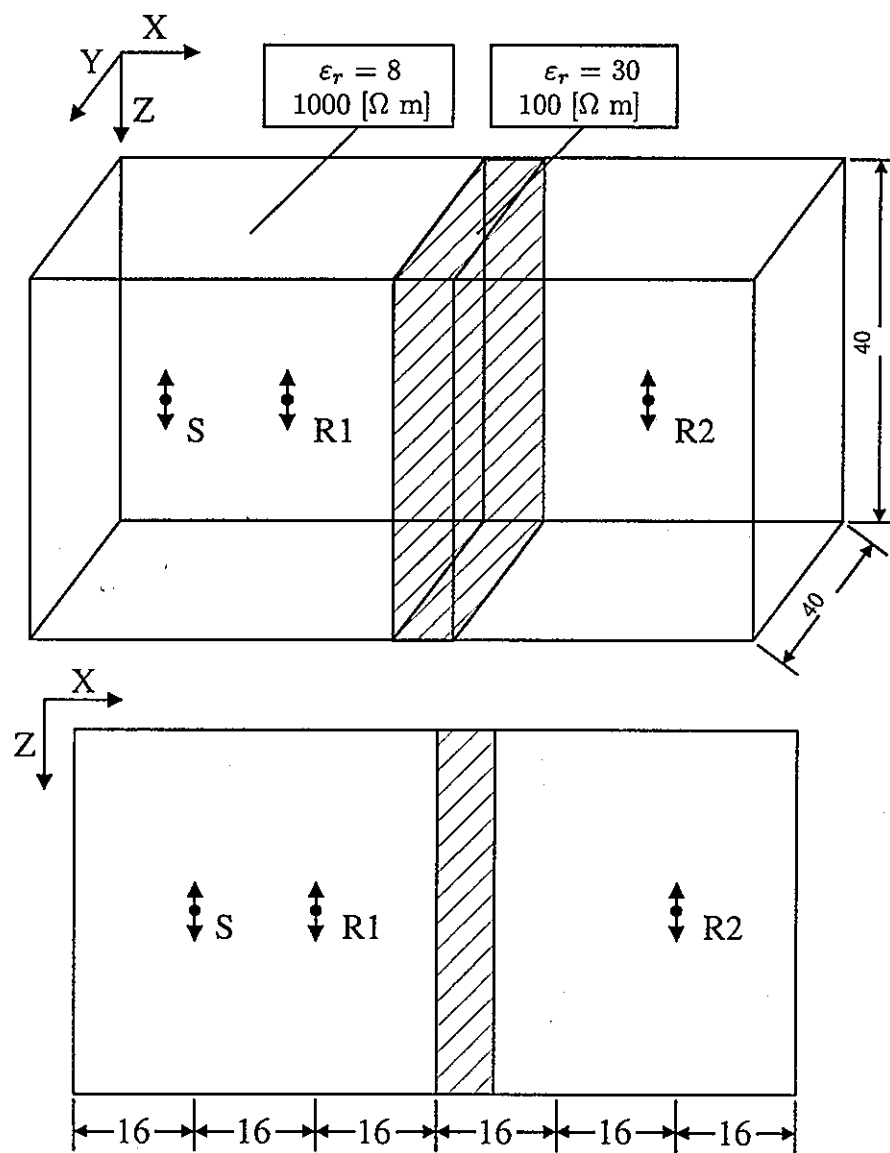
第 3.12 図 (a) および (b) に、モデル 2 の R1 および R2 における観測波形を示した。図中における矢印は、(a) においては順に (3.23) 式から計算した直接波、反射波 1 および反射波 2 の到達時間、(b) においては透過波の到達時間を示す。R1 において、減衰して振幅が小さくなっているが反射波 2 が認識可能である。一方、反射波 1 は直接波のリングングと合成されてしまうために認識は難しい。反射波のみを抽出するために、モデル 2 の R1 における観測波形から均質モデルである基本モデル 1 の R1 の観測波形を引いた波形を (c) に示した。逆位相の反射波 1 および同位相の反射波 2 が識別できる。

次に、第 3.13 図 (a) および (b) に、モデル 3 の R1 および R2 における波形を示した。モデル 2 と同様に、モデル 3 の R1 における観測波形からモデル 1 の R1 の観測波形を引いた波形を (c) に示した。逆位相の反射波 1 は識別できるが、反射波 2 は反射波 1 のリングングに隠れて識別できない。一般に反射係数の絶対値が等しく異符号の層の分解能は波長の 1/8 と言われるが、実際に波形の減衰やリングングを考慮に入れると分解能は大きく下がることがわかる。

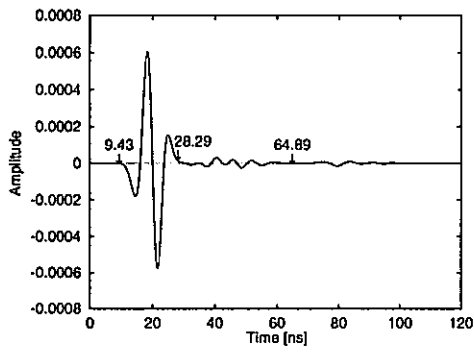
したがって、このモデリングの例においては、リングングの影響が大きいため、電磁波の波長と検出できる破碎帯の幅との定量的な解析するには至らなかった。実際に測定される波形においても、リングングは現れており、解析の分解能を著しく下げている。今後、リングングを除去するためのハードの改良およびデータ処理が必要であると考えられる。



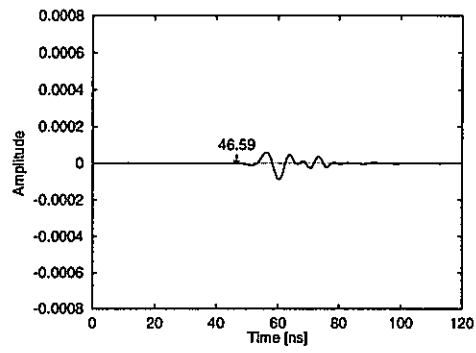
第 3.10 図 含水破碎帯モデル 2



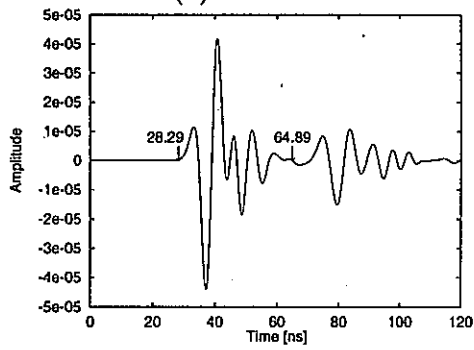
第 3.11 図 含水破碎帯モデル 3



(a) Model2 R1

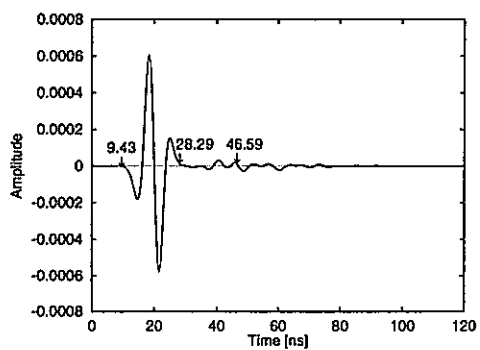


(b) Model2 R2

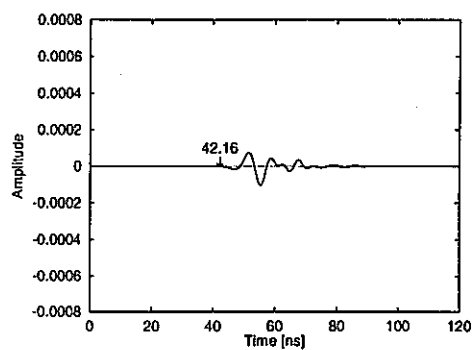


(c) Model2-Model1 R1

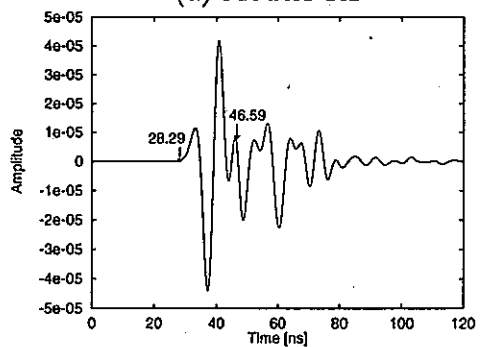
第 3.12 図 基本モデル2 に対する計算結果



(a) Model3 R1



(b) Model3 R2



(c) Model3-Model1 R1

第 3.13 図 基本モデル3に対する計算結果

第 3.3 表 モデルの物性値

媒質名	ϵ_r	ρ ($\Omega \cdot m$)	μ_r
空気	1.0	∞	1.0
岩盤	8.0	1000	1.0

3.4 空気・岩盤境界近傍の電磁波動現象の解析

地下レーダーの測定時には、アンテナを出来るだけ岩盤に密着して測定を行うが、実際には岩盤近傍の空気中に置かれたアンテナから岩盤に電磁波を放射しており、この空気と岩盤との境界を無視できないこともある。そこで、FDTD法を用いて第3.14図のモデルにおいて岩盤・空気境界付近の電磁波の入射のモデリングを行った。

計算モデル

計算モデルを第3.14図に示した。また、モデルの物性値を表3.3に示した。計算における各ブロック長は、 x, y, z 方向とも6.25cm、時間間隔は0.10nsとした。発信点は200MHzのRicker waveletを用いた。解析領域の吸収境界条件はMurの1次の吸収境界条件を用いた。

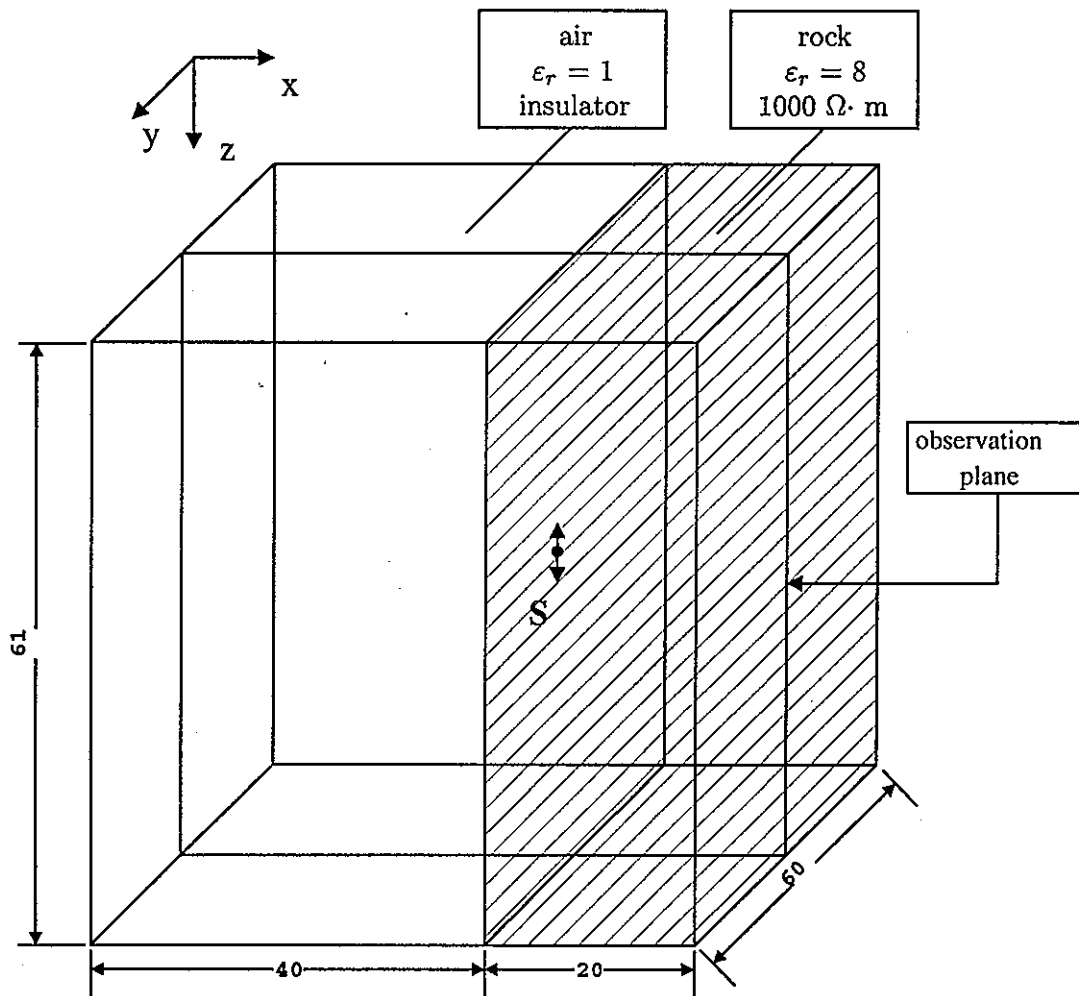
計算結果

まず、第3.14図のモデルの全領域を空気として、計算領域中央に発信点を配置した場合のスナップショットを第3.15図に示した。観測面は第3.14図上の $y = 30 + 1/2$ の x - y 平面上であり、数値は40, 60, 80, 100, 120ステップ後の z 成分の各電界強度の相対値である。図中矢印は、発信点の位置および方向を示した。電磁波が x 軸方向に指向性を持ち拡がっていく様子がわかる。

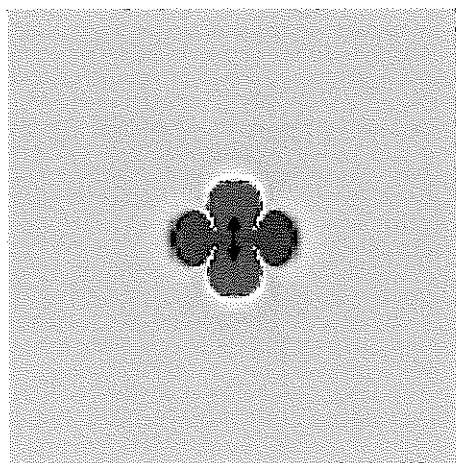
次に、発信点を境界の4ブロック空気側においた場合のスナップショットを第3.16図および第3.17図に示した。図中に岩盤と空気との境界を点線で示した。発信点から電磁波が進行し、境界面で反射波および透過波が発生していることがわかる。また、空気中に比べて岩盤中の方が、電磁波伝搬速度が遅く、波長も短いことが確認できる。

最後に、発信点を境界の1ブロック空気側においた場合のスナップショットを第3.18図お

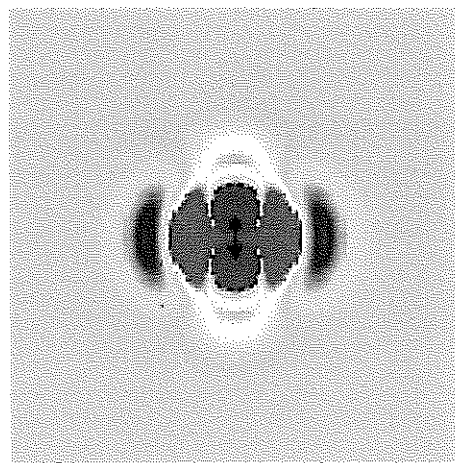
よび第3.19図に示した。4ブロック離れた場合と同様に、反射波および透過波が発生していることがわかる。境界に近づけた場合の方が、反射波の振幅が小さくなり、透過波の振幅は大きくなっていることがわかる。また、透過波がより球面状に進行していることもわかる。



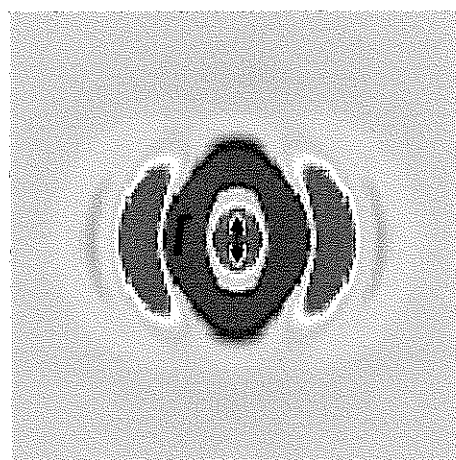
第 3.14 図 岩盤・空気境界モデル



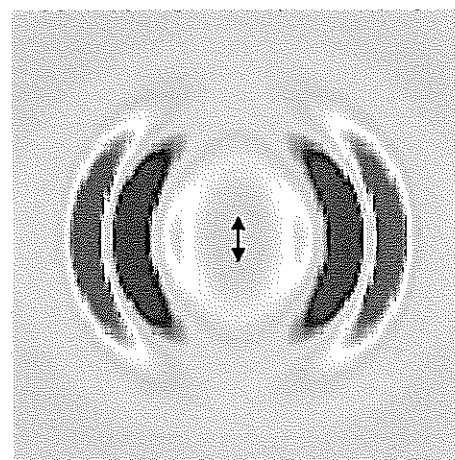
40steps (4.2ns)



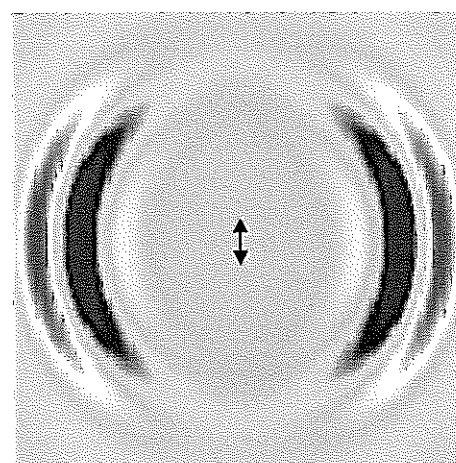
60steps (6.2ns)



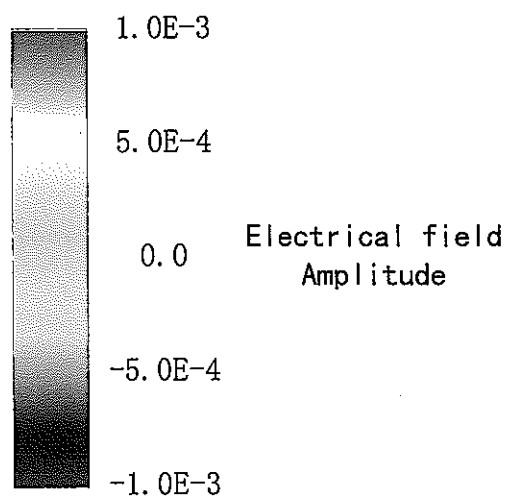
80steps (8.3ns)



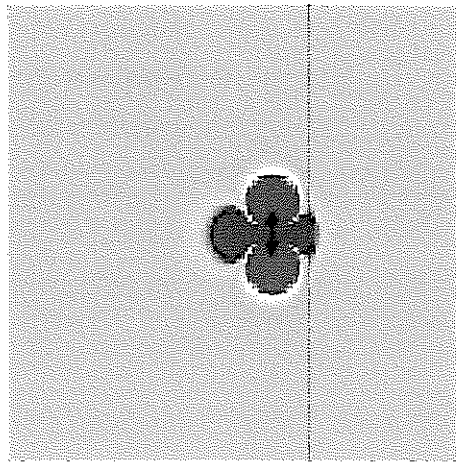
100steps (10.4ns)



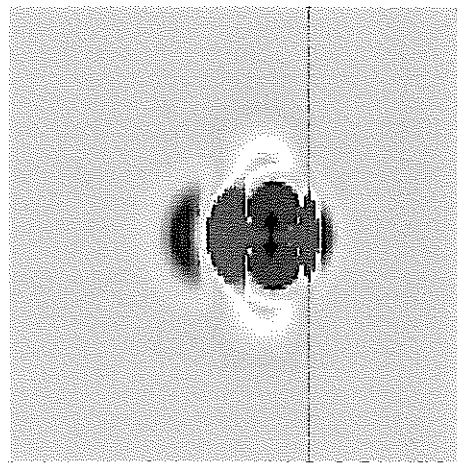
120steps (12.5ns)



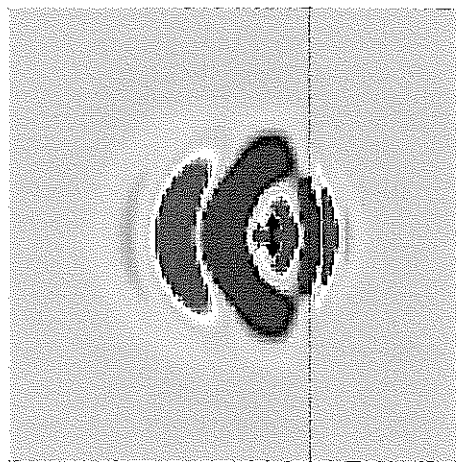
第 3.15 図 空気中における snap shots



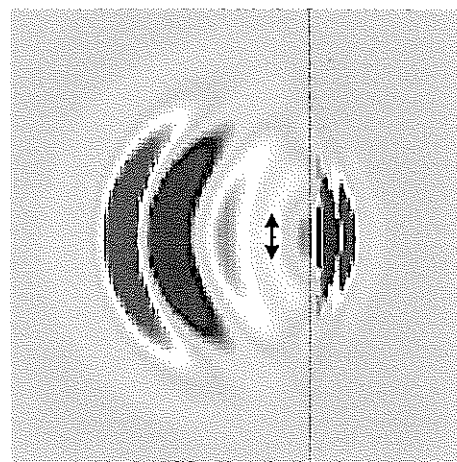
40steps (4.2ns)



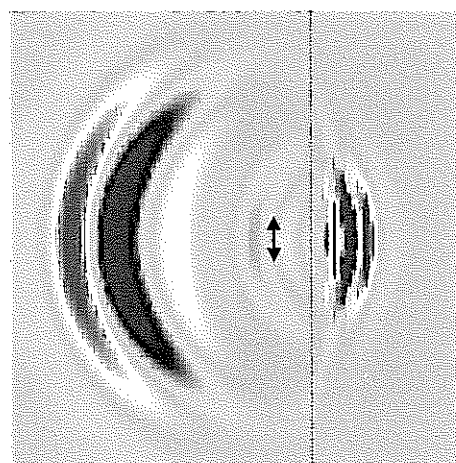
60steps (6.2ns)



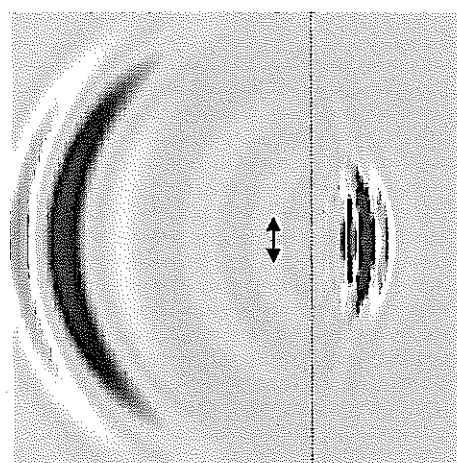
80steps (8.3ns)



100steps (10.4ns)

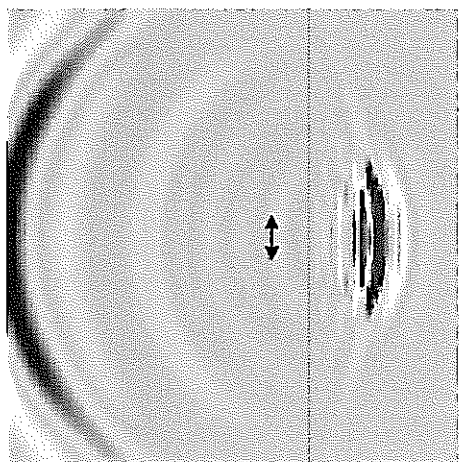


120steps (12.5ns)

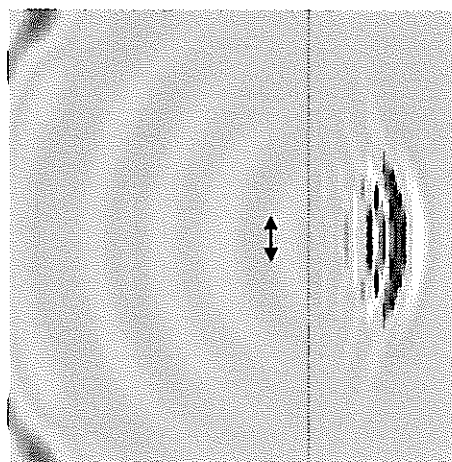


140steps (14.6ns)

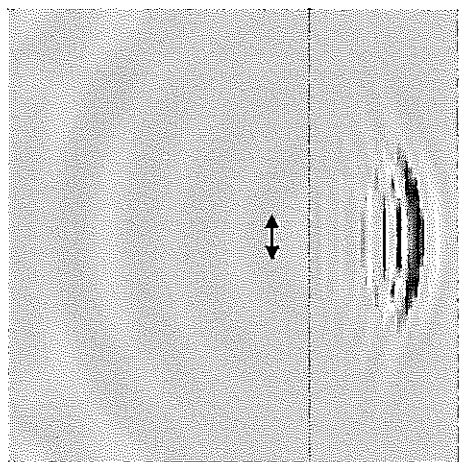
第 3.16 図 岩盤・空気境界 4ブロック離れた場合 (40-140steps)



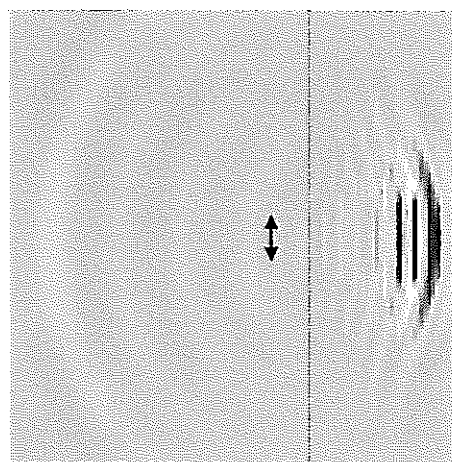
160steps (16.6ns)



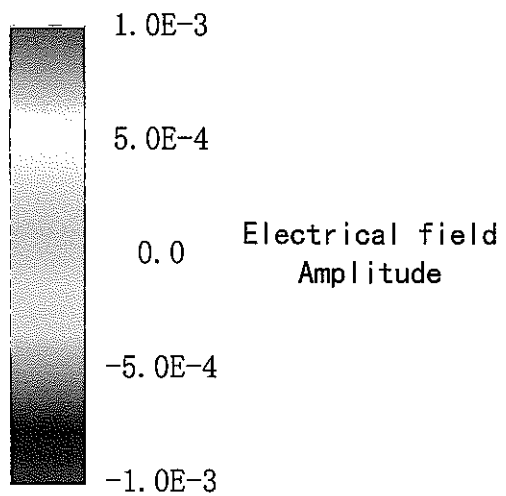
180steps (18.7ns)



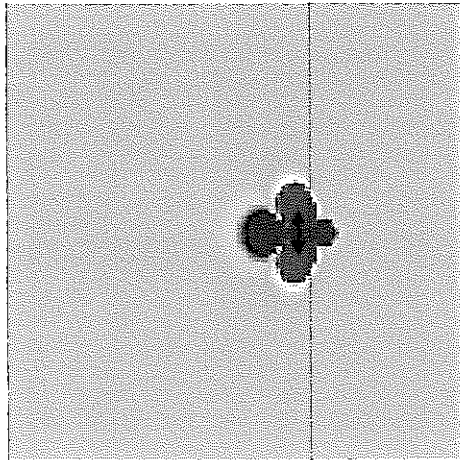
200steps (20.8ns)



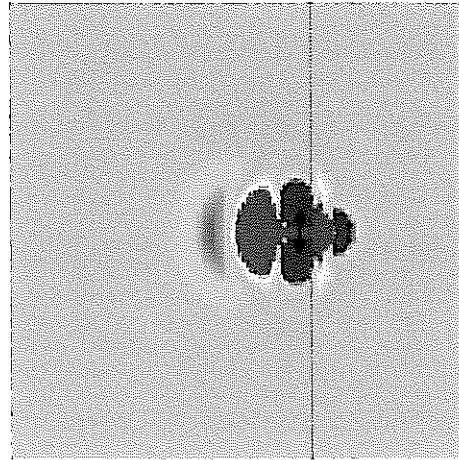
220steps (22.9ns)



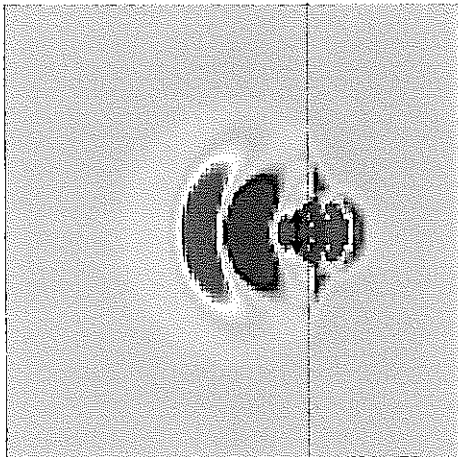
第 3.17 図 岩盤・空気境界 4 ブロック離れた場合 (160-220steps)



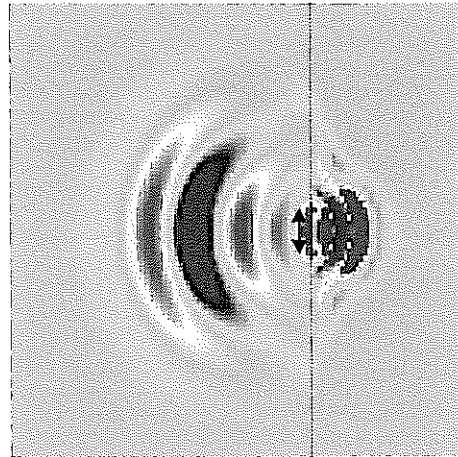
40steps(4.2ns)



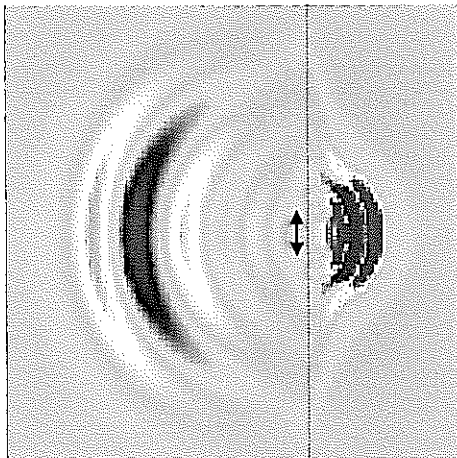
60steps(6.2ns)



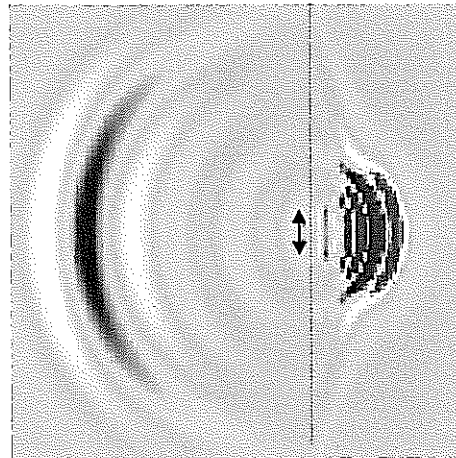
80steps(8.3ns)



100steps(10.4ns)

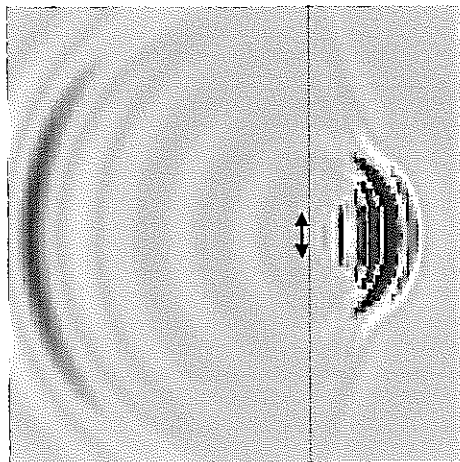


120steps(12.5ns)

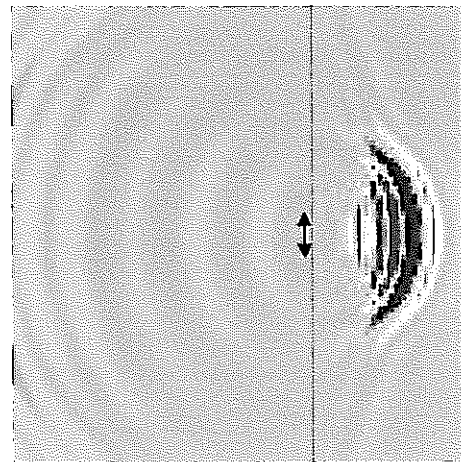


140steps(14.6ns)

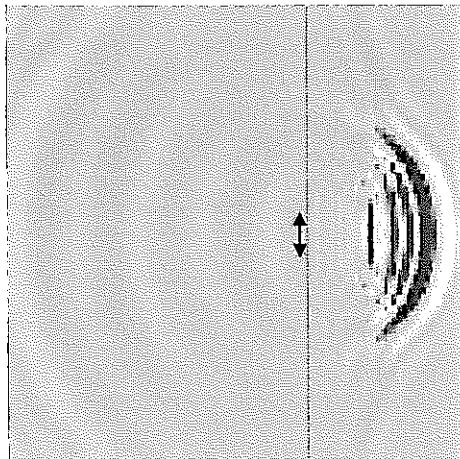
第 3.18 図 岩盤・空気境界 1ブロック離れた場合 (40-140steps)



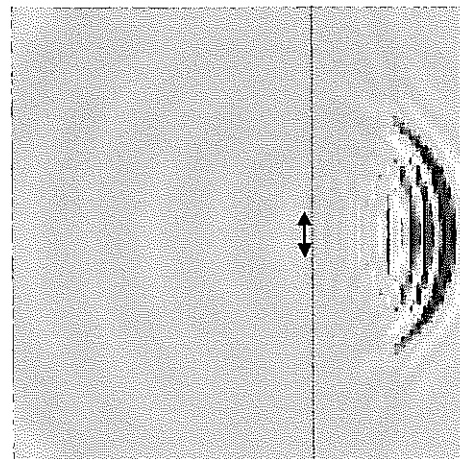
160steps (16.6ns)



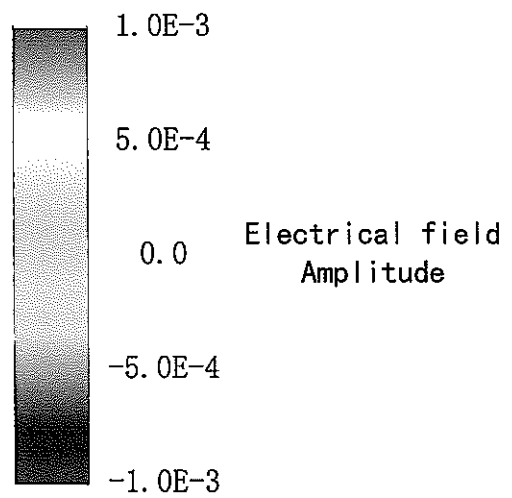
180steps (18.7ns)



200steps (20.8ns)



220steps (22.9ns)



第 3.19 図 岩盤・空気境界 1ブロック離れた場合 (160-220steps)

第4章 結 言

本研究では、まず、比較的低い送信周波数を用いた電磁誘導現象を把握するために、積分方程式法および有限要素法による3次元モデリングを行った。3次元的な構造を含むモデルについて計算を行い、VMDの送信周波数、構造の形状、深さ、比抵抗コントラストといった種々のパラメータの変化によって生じる電磁応答について検討した。その結果、構造が浅く比抵抗コントラストが大きいほど電磁応答が大きいことが明らかになった。今回、有限要素法による3次元モデリングで得られた結果の精度は期待されたほど十分ではなかったが、電磁場の基本性質は把握することができた。今後、直方体要素の高次化、要素の形状比の縮小、内挿関数の改良、四面体要素の利用、要素分割および境界条件の選択などにより、精度の向上が期待できる。また、3次元有限要素法は多量の計算機資源を必要とするため、この点の改良も必要である。

次に、比較的高い送信周波数を用いた地下レーダー法について、FDTD法による3次元モデリングを行った。媒質の誘電率、透磁率、比抵抗および電磁波の周波数をパラメータすることにより計算によって得られる結果が理論と一致することを確認し、電磁波動現象の基本的な性質を明らかにした。また、ボアホールレーダを用いた含水破碎帯の検出および空気・岩盤境界近傍の解析を行った。その結果、本研究で行ったようなモデリングが実際の地下レーダの探査計画あるいは解析に有効なことがわかった。しかし、シミュレーションでは誘電率が大きくなると電磁波伝播速度が早くなること、激しいリングングが生じることなど理論と一致しない点も残っており、シミュレーションの精度を向上させる必要がある。また、実際の地盤の不均質異方性、誘電率等の分散性、パルス波形の非線形性なども無視できない場合もあると考えられ、今後検討していく必要がある。

参考文献

- 1) Wannamaker, P. E., Hohmann G. W. and SanFilipo, W. L. : Electromagnetic modeling of three-dimensional bodies in layered earth using integral equations, *Geophysics*, vol. 49, pp.60-74, 1984.
- 2) 荒井 英一 : MT法探査におけるスタティック効果の除去及び3次元有限要素法モデリングに関する研究, 京都大学大学院工学研究科資源工学専攻修士論文, 1993.
- 3) Ward, S. H. and Hohmann, G. W. : Electromagnetic theory for geophysical applications : Electromagnetic Method in Applied Geophysics, pp.131-308.
- 4) 佐々木 裕 : 有限要素法によるMT法の3次元モデリング, *物理探査*, 第37巻, pp.35-43, 1984.
- 5) 佐々木 裕 : 電磁法におけるFEM3次元モデリングの精度, *物理探査学会学術講演会論文集*, pp.265-269, 1996.
- 6) Pridmore, D. F., Hohmann, G. W. Ward, S. H. and Sill, W. R. : An investigation of finite-element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions, *Geophysics*, vol.46, pp.1009-1024, 1981.
- 7) 内田 利弘・斎藤 章 : 電磁法探査システムの開発動向, *物理探査*, 第47巻, pp.472-500, 1994.
- 8) ツィエンキービッツ, O. C. : 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館.
- 9) 矢川 元基・吉村 忍 : 有限要素法, サイエンス社.
- 10) Berenger J. P. : A Perfectly Mached Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves : *J. Comput. Phys.*, vol.114, pp.185-200, 1994.
- 11) 橋本 修, 阿部 琢美 : FDTD時間領域差分式入門, 森北出版, 1996.
- 12) 何 一偉, 宇野 亨, 安達 三郎 : FDTD法を用いた地中柱状埋設物による円筒波の過渡散乱解析, *電気学会電磁界理論研資*, EMT-91-130, pp.41-48, 1991.
- 13) 上乘 有希, 園田 潤, 宮崎 保光 : FD-TD法によるランダム媒質中の地下埋設物からの電磁波散乱解析, *電気学会電磁界理論研資*, EMT-95-37, pp.1-10, 1995.
- 14) Mur G. : Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference Approximation of the Time-Domain Electromagnetic-Field Equations : *IEEE Trans. Electromag. Compatibility*, MC-23, pp.377-382, 1981.

- 15) 仙波 毅, 尾方 伸久, 長谷川 健, 岩崎 浩, 渡辺 邦夫 : ボアホールレーダーによる花崗岩岩盤特性調査, 応用地質, 第32巻, pp.34-42, 1992.
- 16) 山下 榮吉 : 電磁波問題解析の実際, 電子情報通信学会, 1993.
- 17) Yee K. S. : Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media : IEEE Trans. Antennas and Propagat., AP-14, pp.302-307, 1996.
- 18) Widess, M. B. : How thin is a thin bed? :Geophysics, vol.38, pp.1176-1180, 1973.