PNC TN8420 91-010

社内資料

燃料サイクルフロントエンド〔I〕
ウラン資源・ウラン製錬およびウラン濃縮
〔問題と解答例〕教育資料〔2〕

1990年12月

動力炉・核燃料開発事業団
東 海 事 業 所

社　内　資　料
PNC TN8420 91-010
1990年12月

燃料サイクルフロントエンド〔1〕

ー問題と解答例（新型濃縮技術開発室教育資料2）ー

矢戸　弓雄*

要　旨

燃料サイクルフロントエンド〔1〕（教育資料1）に出題した問題の解答例を示したものである。

* 新型濃縮技術開発室

燃料サイクルフロントエンド〔I〕

〔問題と解答例〕

目　　次

Appendix　　ウラン濃縮カスケードに関する計算式

1．用語の定義と記号及びカスケード構成

1.1　用語の定義と記号

L　:　flow rate

x　:　mole fraction of U-235

1-x :　mole fraction of U-238

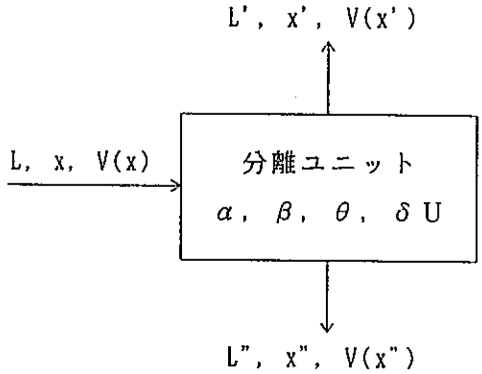
R　:　abundance ratio,　　$R=x/(1-x)$ ····· (1)

α　:　head separation factor,　$\alpha=R'/R$ ····· (2)

β　:　tail separation factor,　$\beta=R/R''$ ····· (3)

$\alpha\beta$:　stage separation factor,　$\alpha\beta=R'/R''$ ····· (4)

(suffix (') for upstream;　(") for downstream)



> 問題1　分離ユニットのカット(cut) θ を $\theta=L'/L$ と定義した時，θ と $1-\theta$ は，それぞれ次式のように濃度のみの式で表されることを示せ。
>
> $$\theta = L'/L = (x-x'')/(x'-x'') \quad \cdots\cdots (5)$$
>
> $$1-\theta = L''/L = (x'-x)/(x'-x'') \quad \cdots\cdots (6)$$

〔解答〕　ウラン及び U-235のそれぞれについて，次の物質収支が成立する。

ウラン :　$L = L' + L''$ ········ ①

U-235 :　$L x = L'x' + L''x''$ ········ ②

L"を消去するため，② - ①×x"の計算を行うと次式が得られる。

$$L(x-x'') = L'(x'-x'') \quad \cdots\cdots ③$$

カットθの定義から，$\theta = L'/L$ であるから

$$\theta = L'/L = (x-x'')/(x'-x'') \quad \cdots\cdots (5)$$

また，①式の両辺を Lで割り整理すると，次の関係が得られる。

$$1 = L'/L + L''/L \quad \cdots\cdots ①'$$

$$\therefore \quad L''/L = 1 - \theta$$

$$= 1 - \frac{x-x''}{x'-x''} = \frac{x'-x}{x'-x''} \quad \cdots\cdots (6)$$

1.2　カスケードの段構成の定義と記号

教育資料ⅠのＰ45参照。

問題２　次の各式を導け。

(a)　$x = R/(1+R)$ ……………… (7)

(b)　$1-x = 1/(1+R)$ ……………… (8)

(c)　$x'-x = (\alpha-1)x(1-x')$ ……………… (9)

(d)　$x-x'' = (1-1/\beta)x(1-x'')$ ……………… (10)

(e)　$x'-x'' = (\alpha\beta-1)x''(1-x')$ ……………… (11)

(f)　$\dfrac{y}{1-y} = k\dfrac{x}{1-x}$ のとき　$y = \dfrac{kx}{kx+(1-x)}$ ……………… (12)

(g)　$x' = \dfrac{\alpha x}{\alpha x+(1-x)} = \dfrac{\alpha\beta x''}{\alpha\beta x''+(1-x'')}$ ……………… (13)

$x = \dfrac{x'}{x'+\alpha(1-x')} = \dfrac{\beta x''}{\beta x''+(1-x'')}$ ……………… (14)

$x'' = \dfrac{x}{x+\beta(1-x)} = \dfrac{x'}{x'+\alpha\beta(1-x')}$ ……………… (15)

(h)　$\theta = \dfrac{(\beta-1)(1+\alpha R)}{(\alpha\beta-1)(1+R)}$ ……………… (16)

$= \dfrac{1+\alpha R}{(\alpha+1)(1+R)} \sim \dfrac{1}{\alpha+1}$　($\alpha=\beta\sim1$ の時) ……………… (17)

〔解答〕

(a)(b)　$R = \dfrac{x}{1-x}$ ……(1)式より　$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$，　$\therefore \dfrac{1}{x} = 1 + \dfrac{1}{R} = \dfrac{1+R}{R}$

従って

$x = \dfrac{R}{1+R}$ ……(7)，　$1-x = 1-\dfrac{R}{1+R} = \dfrac{1}{1+R}$ ……(8)

(c)　$x'-x = \dfrac{R'}{1+R'} - \dfrac{R}{1+R}$　〔(7)式から〕

$= \dfrac{R'(1+R)-R(1+R')}{(1+R')(1+R)} = \dfrac{R'-R}{(1+R')(1+R)} = \dfrac{R(R'/R-1)}{(1+R')(1+R)}$

$= \left(\dfrac{R'}{R}-1\right)\dfrac{R}{1+R}\dfrac{1}{1+R'} = (\alpha-1)x(1-x')$　〔(2)，(7)，(8)式から〕

(d)　$x-x'' = \dfrac{R}{1+R} - \dfrac{R''}{1+R''}$

$= \dfrac{R(1+R'')-R''(1+R)}{(1+R)(1+R'')} = \dfrac{R-R''}{(1+R)(1+R'')} = \dfrac{R(1-R''/R)}{(1+R)(1+R'')}$

$= \left(1-\dfrac{R''}{R}\right)\dfrac{R}{1+R}\dfrac{1}{1+R''} = (1-1/\beta)x(1-x'')$

(e) $$x'-x'' = \frac{R'}{1+R'} - \frac{R''}{1+R''}$$

$$= \frac{R'(1+R'') - R''(1+R')}{(1+R')(1+R'')} = \frac{R' - R''}{(1+R')(1+R'')} = \frac{R''(R'/R''-1)}{(1+R')(1+R'')}$$

$$= \left(\frac{R'}{R''} - 1\right) \frac{R''}{1+R''} \frac{1}{1+R'} = (\alpha\beta - 1)x''(1-x')$$

(f) 原式の両辺について逆数をとると $1 - \frac{1}{y} = \frac{1-x}{kx}$

従って $\frac{1}{y} = \frac{kx + (1-x)}{kx}$, $\therefore \quad y = \frac{kx}{kx + (1-x)}$

(g) x, x', x" は分離係数α，βと次式

$$\frac{x'}{1-x'} = \alpha \frac{x}{1-x} = \alpha\beta \frac{x''}{1-x''}$$

で関係づけられるから，前問(6)の関係を使えば⑬〜⑮の式が得られる。

$$x' = \frac{\alpha x}{\alpha x + (1-x)}$$ 〔前問(6)で $k=\alpha$〕

$$= \frac{\alpha\beta x''}{\alpha\beta x'' + (1-x'')}$$ 〔前問(6)で $k=\alpha\beta$〕

$$x = \frac{(1/\alpha)x'}{(1/\alpha)x' + (1-x')} = \frac{x'}{x' + \alpha(1-x')}$$ 〔前問(6)で $k=1/\alpha$〕

$$= \frac{\beta x''}{\beta x'' + (1-x'')}$$ 〔前問(6)で $k=\beta$〕

$$x'' = \frac{(1/\beta)x}{(1/\beta)x + (1-x)} = \frac{x}{x + \beta(1-x)}$$ 〔前問(6)で $k=1/\beta$〕

$$= \frac{(1/\alpha\beta)x'}{(1/\alpha\beta)x' + (1-x')} = \frac{x'}{x' + \alpha\beta(1-x')}$$ 〔前問(6)で $k=1/\alpha\beta$〕

(h)

$$\theta = \frac{x-x''}{x'-x''} = \frac{\dfrac{R}{1+R} - \dfrac{R''}{1+R''}}{\dfrac{R'}{1+R'} - \dfrac{R''}{1+R''}} = \frac{\dfrac{R-R''}{(1+R)(1+R'')}}{\dfrac{R'-R''}{(1+R')(1+R'')}} = \frac{(R-R'')(1+R')}{(R'-R'')(1+R)}$$

$$= \frac{R''(R/R''-1)(1+R')}{R''(R'/R''-1)(1+R)} = \frac{(\beta-1)(1+\alpha R)}{(\alpha\beta-1)(1+R)}$$

$$= \frac{(1+\alpha R)}{(\alpha+1)(1+R)}$$ 〔$\alpha=\beta$のとき〕

$$= \frac{1}{\alpha+1}$$ 〔$\alpha \sim 1$のとき〕

2. カスケード濃縮域及び回収域における物質収支

問題 3　カスケードの濃縮域及び回収域において，それぞれ次式が成り立つことを示せ。

(1) Enriching section

$$x'_{n-1} - x''_{n} = (P/L''_{n})(x_{P} - x'_{n-1}) \quad \cdots\cdots (18)$$

$$= (P/L'_{n-1})(x_{P} - x''_{n}) \quad \cdots\cdots (19)$$

(2) Stripping section

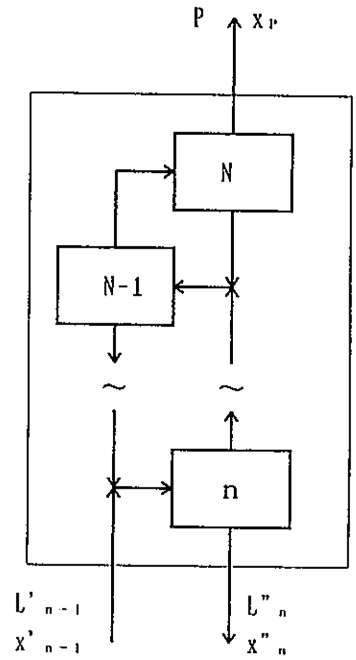
$$x'_{n} - x''_{n+1} = (W/L''_{n+1})(x'_{n} - x_{W}) \quad \cdots\cdots (20)$$

$$= (W/L'_{n})(x''_{n+1} - x_{W}) \quad \cdots\cdots (21)$$

〔解答〕

(1) Enriching Section

右図のようにn～N段までを，まとめて考えると次のような物質収支式が成り立つ。



$$\begin{cases} \text{ウラン :} \quad L''_{n} + P = L'_{n-1} & \cdots\cdots ① \\ \text{U-235 :} \quad L''_{n}\,x''_{n} + P x_{P} = L'_{n-1}\,x'_{n-1} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

{② － ①×x''_{n} } を計算し，L''_{n} を消去すると，

$$L'_{n-1}(x'_{n-1} - x''_{n}) = P(x_{P} - x''_{n}) \quad \cdots\cdots ③$$

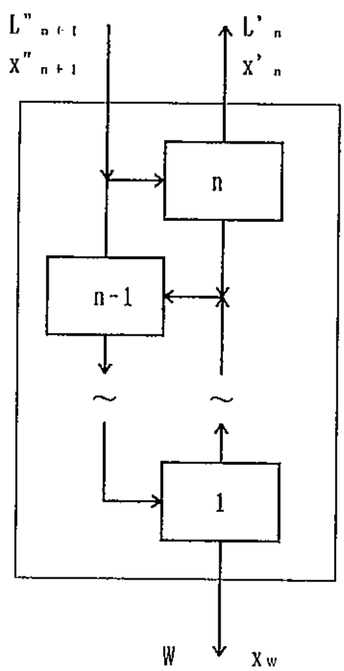
また，{② － ①×x'_{n-1} } を計算し，L'_{n-1} を消去すると，

$$L''_{n}(x''_{n} - x'_{n-1}) + P(x_{P} - x'_{n-1}) = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

③，④式から，次式が得られる。

$$x'_{n-1} - x''_{n} = (P/L'_{n-1})(x_{P} - x''_{n})$$

$$= (P/L''_{n})(x_{P} - x'_{n-1})$$



(2) Stripping Section

濃縮域と同様に，回収域について1～n段までを考えると，次の物質収支式が成り立つ。

$$\begin{cases} L'_{n} + W = L''_{n+1} & \cdots\cdots ⑤ \\ L'_{n}\,x'_{n} + W x_{W} = L''_{n+1}\,x''_{n+1} & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

{⑥ － ⑤×x''_{n+1} } の計算を行い，L''_{n+1} を消去すると，

$$L'_{n}(x''_{n+1} - x'_{n}) + W(x''_{n+1} - x_{W}) = 0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

また，{⑥ － ⑤×x'_{n} } の計算を行い，L'_{n} を消去すると，

$$L''_{n+1}(x'_{n} - x''_{n+1}) = W(x'_{n} - x_{W}) \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧式から次式が得られる。

$$x'_{n} - x''_{n+1} = (W/L'_{n})(x''_{n+1} - x_{W})$$

$$= (W/L''_{n+1})(x'_{n} - x_{W})$$

3. 理想カスケード

3.1 理想カスケードの段数と各段の濃度

問題4　各段で混合損失のない理想カスケードについて次の問に答えよ。

(1) 理想カスケードでは，分離ユニットの分離係数αとβの間に$\alpha=\beta$の関係が成り立つことを示せ。

(2) 理想カスケードの全段数N，濃縮域の段数NP，及び回収域の段数NWが，それぞれ次式で表されることを示せ。

$$N = \left\{ \ln (R_P/R_W) / \ln \alpha \right\} - 1 \quad \cdots\cdots (22)$$

$$NP = \ln (R_P/R_F) / \ln \alpha \quad \cdots\cdots (23)$$

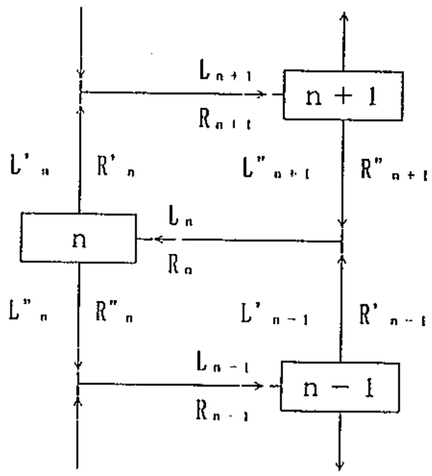
$$NW = \left\{ \ln (R_F/R_W) / \ln \alpha \right\} - 1 \quad \cdots\cdots (24)$$

(3) 理想カスケードの各段の濃度が次式で表されることを示せ。

$$\begin{aligned} R_n &= \alpha^{n} R_W \\ &= \alpha^{n-1-NW} R_F \quad \cdots\cdots (25) \\ &= \alpha^{n-1-N} R_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^{n} x_W}{\alpha^{n} x_W + (1-x_W)} \\ &= \frac{\alpha^{n-1-NW} x_F}{\alpha^{n-1-NW} x_F + (1-x_F)} \quad \cdots\cdots (26) \\ &= \frac{\alpha^{n-1-N} x_P}{\alpha^{n-1-N} x_P + (1-x_P)} \end{aligned}$$

〔解答〕(1) 理想カスケードでは混合ロスがないから，右の図において



$$R_n = R'_{n-1} = R''_{n+1} \quad \cdots\cdots ①$$

$$R_{n-1} = R''_n \quad \cdots\cdots ②$$

また分離係数の定義から

$$R'_n = \alpha R_n \quad \cdots\cdots ③$$

$$\alpha\beta = R'_n / R''_n \quad \cdots\cdots ④$$

従って，③式から次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} R'_n &= \alpha R_n = \alpha (R'_{n-1}) && 〔①式より〕 \\ &= \alpha (\alpha R_{n-1}) && 〔③式より〕 \\ &= \alpha^2 R_{n-1} \\ &= \alpha^2 R''_n \quad \cdots\cdots ⑤ && 〔②式より〕 \end{aligned}$$

④式及び⑤式から，

$$\alpha^2 = R'_n / R''_n = \alpha\beta, \qquad \therefore \alpha = \beta$$

(2) カスケードの段構成の定義図から，

$$N = NP + NW \quad \cdots\cdots ⑥$$

また分離係数の定義から，

$$R_P = \alpha^N R_1 \quad \cdots\cdots ⑦$$

$$R_1 = \alpha R_W \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦，⑧式から，

$$R_P = \alpha^N R_1 = \alpha^N(\alpha R_W) = \alpha^{N+1} R_W \quad \cdots\cdots ⑨$$

$$\therefore N = \{ l n (R_P / R_W)\} / l n \alpha - 1 \quad \cdots\cdots (22)$$

さらに，分離係数の定義から $R_P = \alpha^{NP} R_F$ であるから，

$$NP = \{ l n (R_P / R_F)\} / l n \alpha \quad \cdots\cdots (23)$$

⑥式，(22) 及び(23)式から回収域の段数 NW は次式のようになる。

$$NW = N - NP = \{ l n (R_F / R_W)\} / l n \alpha - 1 \quad \cdots\cdots (24)$$

(3) カスケード段構成の定義図から，

$$R_1 = \alpha R_W \quad \cdots\cdots ⑩$$

$$R_2 = R'_1 = \alpha R_1 = \alpha^2 R_W \quad \cdots\cdots ⑪$$

であるから，原式

$$R_n = \alpha^n R_W \quad \cdots\cdots (25)$$

は n = 1 及び n = 2 の時に成り立つ。いま，

$$R_k = \alpha^k R_W \quad \cdots\cdots ⑫$$

が成り立つと仮定し，

$$R_{k+1} = \alpha^{k+1} R_W \quad \cdots\cdots ⑬$$

が成り立つことを示せば，(25) 式が証明できたことになる（数学的帰納法）。

$R_{k+1} = R'_k = \alpha R_k$ 〔理想カスケードの性質〕

$= \alpha(\alpha^k R_W)$ 〔⑫式より〕

$= \alpha^{k+1} R_W$

また，⑨式などから，R_W を R_F，R_P で表すと次式が得られる。

$R_W = \alpha^{-N-1} R_P$ 〔⑨式より〕

$= \alpha^{-NW-1} R_F$ 〔(24) 式より〕

従って，R_n を R_W，R_F，R_P で表すと

$$R_n = \alpha^n R_W$$

$$= \alpha^{n-NW-1} R_F \quad \cdots\cdots (25)$$

$$= \alpha^{n-N-1} R_P$$

ここで，R = x/(1-x) であるから，問題２の(f) の関係から，(26) 式が得られる。

3. 2　理想カスケードの各段の流量

問題５　理想カスケードの各段の流量が次式で表されることを示せ。

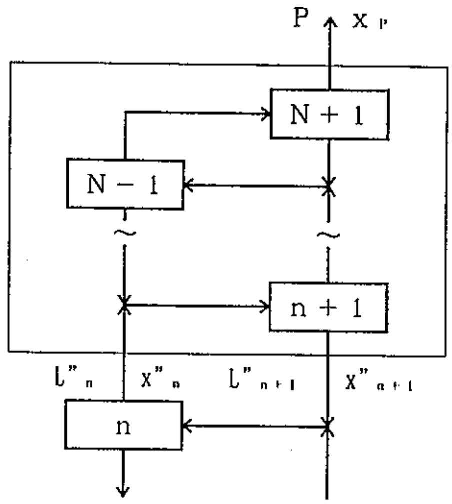
(1)　Enriching section　(n = NW+1 ～ N)

$$L_n = P\ \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\ (\alpha^{N+1-n}-1)\ \frac{1+\alpha^{n-1-NW}R_F}{1+\alpha^{NP}R_F} \quad \cdots\cdots (27)$$

(2)　Stripping section　(n =1 ～ NW)

$$L_n = W\ \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\ (1-\alpha^{-n})\ \frac{\alpha^{NW+1}+\alpha^{n}R_F}{\alpha^{NW+1}+R_F} \quad \cdots\cdots (28)$$

〔解答〕(1)　問題３と同様に右図のように，n+1 段からＮ段までをまとめて流量バランスを考えると，次の２つの物質収支式が成り立つ。



$$\begin{cases} L'_n = L''_{n+1} + P & \cdots\cdots ① \\ L'_n\, x'_n = L''_{n+1}\, x''_{n+1} + P x_P & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，②式からL''_{n+1} を消去すると，

$$L'_n\,(x'_n - x''_{n+1}) = P\,(x_P - x''_{n+1}) \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる。ここで，

$x''_{n+1} = x_n$　　　〔理想カスケードの性質〕

$L'_n = \theta_n L_n$　　　〔カットの定義より　　〕

であるから，③式は次式のように変形できる。

$$L_n = \frac{P\,(x_P - x_n)}{\theta_n\,(x'_n - x_n)} \quad \cdots\cdots ④$$

さらに，次の関係

$$\theta_n = \frac{1+\alpha R_n}{(1+\alpha)(1+R_n)}$$　〔問題２の(h)より　　〕

$$x'_n - x_n = (\alpha-1)\,x_n\,(1-x'_n)$$　〔問題２の(c)より　　〕

を用いれば，④式は次のように変形できる。

$$L_n = P\,\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\ \frac{1+R_n}{1+\alpha R_n}\left\{\frac{x_P - x_n}{x_n\,(1-x'_n)}\right\} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$= P\,\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\ x_P(1+R_n)\left\{\frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_P}\right\} \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$= P\,\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\ (\alpha^{N+1-n}-1)\ \frac{1+\alpha^{n-1-NW}R_F}{1+\alpha^{NP}R_F} \quad \cdots\cdots (27)$$

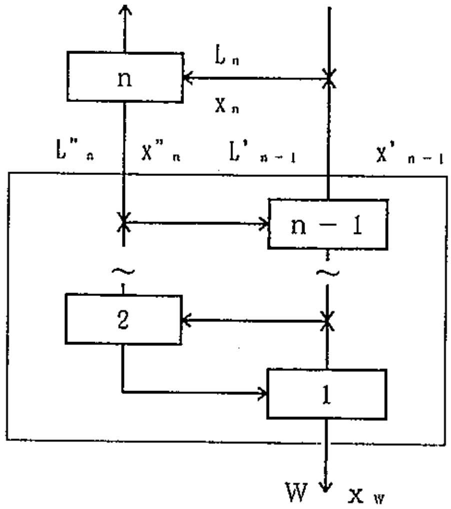
（注１）⑤式から⑥式への変形には，次の関係を用いた。

$x_n = R_n/(1+R_n)$，　$1/(1-x'_n) = 1 + R'_n = 1 + \alpha R_n$

（注２）⑥式から⑦式への変形には，次の関係を用いた。

$$R_n = \alpha^{n-1-NW}R_F,\quad R_P = \alpha^{NP}R_F,\quad x_P = \frac{R_P}{1+R_P} = \frac{\alpha^{NP}R_F}{1+\alpha^{NP}R_F}$$

(2) 右図のように回収域の１～ｎ－１段までをまとめて流量バランスを考えると，次の物質収支式が成り立つ。



$$\begin{cases} L''_n = L'_{n-1} + W & \cdots\cdots⑦ \\ L''_n\, x''_n = L'_{n-1}\, x'_{n-1} + W\, x_w & \cdots\cdots⑧ \end{cases}$$

⑦，⑧式からL'_{n-1}を消去すると次式が得られる。

$$L''_n\,(x'_{n-1} - x''_n) = W\,(x'_{n-1} - x_w) \quad \cdots⑨$$

ここで次の関係

$x'_{n-1} = x_n$ 〔理想カスケード〕

$L''_n = (1-\theta_n)\,L_n$ 〔カットの定義 〕

が成り立つから，⑨式は次のように変形できる。

$$L_n = \frac{W\,(x_n - x_w)}{(1-\theta_n)\,(x_n - x''_n)} \quad \cdots\cdots⑩$$

さらに，次の関係式

$$1-\theta_n = \frac{\alpha + R_n}{(\alpha+1)(1+R_n)}$$ 〔問題２ (h)式より導出〕

$$x_n - x''_n = (1 - 1/\alpha)\,x_n\,(1 - x''_n)$$ 〔問題２ (d)式 〕

を用いれば，⑩式は次のように変形できる。

$$L_n = W\,\frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha-1}\,\frac{1+R_n}{\alpha+R_n}\left\{\frac{(x_n - x_w)}{x_n(1-x''_n)}\right\} \quad \cdots\cdots⑪$$

$$= W\,\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\,x_w(1+R_n)\left\{\frac{1}{R_w} - \frac{1}{R_n}\right\} \quad \cdots\cdots⑫$$

$$= W\,\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\,(1-\alpha^{-n})\,\frac{\alpha^{NW+1} + \alpha^{n} R_F}{\alpha^{NW+1} + R_F} \quad \cdots\cdots (28)$$

（注１）⑪式から⑫式への変形には次の関係を用いた。

$x_n = R_n/(1+R_n)$， $1/(1-x''_n) = 1 + R''_n = 1 + R_n/\alpha$

（注２）⑫式から(28)式への変形には次の関係を用いた。

$R_n = \alpha^{n-1-NW} R_F$， $R_W = \alpha^{-NW-1} R_F$ ． $x_W = \dfrac{\alpha^{-NW-1} R_F}{1 + \alpha^{-NW-1} R_F}$

3. 3 理想カスケードの全循環流量

問題 6　理想カスケードについて，次の問に答えよ。

(1) 各段の上昇流及び下降流が，それぞれ次式で表されることを示せ。

〔濃縮域・上昇流〕

$$L'_{n+1}=P(x_P-x_{n+1})/(x'_{n+1}-x_{n+1})=\frac{P}{\alpha-1}\left\{\alpha x_P(1-\alpha^{n-N})+(1-x_P)(\alpha^{N-n}-1)\right\}$$

〔濃縮域・下降流〕

$$L''_{n+1}=P(x_P-x_{n+1})/(x_{n+1}-x''_{n+1})=\frac{P}{\alpha-1}\left\{x_P(1-\alpha^{n-N})+\alpha(1-x_P)(\alpha^{N-n}-1)\right\}$$

〔回収域・上昇流〕

$$L'_n = W(x_n-x_W)/(x'_n-x_n)=\frac{W}{\alpha-1}\left\{\alpha x_W(\alpha^n-1)+(1-x_W)(1-\alpha^{-n})\right\}$$

〔回収域・下降流〕

$$L''_n = W(x_n-x_W)/(x_n-x''_n)=\frac{W}{\alpha-1}\left\{x_W(\alpha^n-1)+\alpha(1-x_W)(1-\alpha^{-n})\right\}$$

(2) 濃縮域域における循環流量（上昇流と下降流の総和）J_P，回収域における循環流量 J_W がそれぞれ次式で表されることを示せ。

$$J_P' = \sum_{NW}^{N-1}(L'_{n+1}+L''_{n+1})$$

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{\frac{\ln(R_P/R_F)}{\ln\alpha}(2x_P-1)+\frac{(x_P-x_F)[\alpha-(\alpha+1)x_F]}{(\alpha-1)x_F(1-x_F)}\right\}$$

$$J_W = \sum_{1}^{NW}(L'_n+L''_n)$$

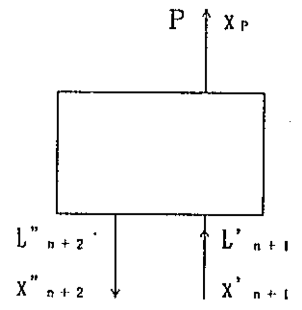
$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{\frac{\ln(R_F/R_W)}{\ln\alpha}(2x_W-1)+\frac{(x_F-x_W)[\alpha-(\alpha+1)x_F]}{(\alpha-1)x_F(1-x_F)}\right\}$$

(3) 理想カスケードの全循環流量 J が次式で表されることを示せ。

$$J=\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ln\alpha}\left\{P\,V(x_P)+W\,V(x_W)-F\,V(x_F)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

〔解答〕〔1〕　まず濃縮域について考える。

(a) 濃縮域の上昇流量　L'_{n+1}



濃縮域の上昇流量 L'_{n+1} に対して次の関係が成り立つ（右図及び問題 3 を参照せよ）。

$$L'_{n+1}(x'_{n+1}-x''_{n+2})=P(x_P-x''_{n+2}) \quad \cdots\cdots ①$$

理想カスケードでは　$x''_{n+2} = x_{n+1}$ であるから，①式は次式のように変形できる。

$$L'_{n+1}=P\frac{x_P-x_{n+1}}{x'_{n+1}-x_{n+1}} \quad \cdots\cdots ②$$

$$=P\frac{x_P(x'_{n+1}+\alpha-\alpha x'_{n+1})-x'_{n+1}}{(\alpha-1)x'_{n+1}(1-x'_{n+1})} \quad \cdots\cdots ③ \quad 〔注 1〕$$

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left[\frac{\alpha x_P}{x'_{n+1}} - \frac{1-x_P}{1-x'_{n+1}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{\frac{\alpha^{n+1}x_P+\alpha^N(1-x_P)}{\alpha^n} - \frac{\alpha^{n+1}x_P+\alpha^N(1-x_P)}{\alpha^N}\right\} \cdots\cdots ⑤$$

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{\alpha x_P + \alpha^{N-n}(1-x_P) - \alpha^{n+1-N}x_P - (1-x_P)\right\}$$

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{\alpha x_P(1-\alpha^{n-N}) + (1-x_P)(\alpha^{N-n}-1)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

（注１）②式から③式への変形には次の関係式を用いて，x_{n+1} を全て x''_{n+1} で表す。

$$x_{n+1} = \frac{x'_{n+1}}{x'_{n+1}+\alpha(1-x'_{n+1})}$$ 〔問題２ (g)の(14)式〕

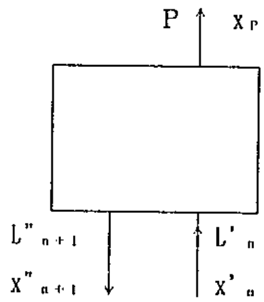
$$x'_{n+1} - x_{n+1} = (\alpha-1)\ x_{n+1}(1-x'_{n+1})$$ 〔問題２ (c)の(9)式〕

$$= \frac{(\alpha-1)\ x'_{n+1}(1-x'_{n+1})}{x'_{n+1}+\alpha(1-x'_{n+1})}$$ 〔x_{n+1} に上式代入〕

（注２）④式から⑤式への変形には次の関係式を用いる。

$$x'_{n+1} = x_{n+2} = \frac{\alpha^{n+1}x_P}{\alpha^{n+1}x_P+\alpha^N(1-x_P)}$$ 〔問題４の(26)式より〕

(b) 濃縮域の下降流量　L''_{n+1}



右図でウランとウラン235 について流量バランスをとり，L'_n を消去すると次式が得られる。

$$L''_{n+1}(x''_{n+1}-x'_n) + P(x_P - x'_n) = 0$$

$$\therefore\ L''_{n+1} = P\frac{x_P - x'_n}{x'_n - x''_{n+1}}$$

$$= P\frac{x_P - x_{n+1}}{x_{n+1} - x''_{n+1}}$$ 〔理想カスケード：$x'_n = x_{n+1}$〕

$$= P\frac{x_P(\alpha x''_{n+1}+1-x''_{n+1}) - \alpha x''_{n+1}}{(\alpha-1)x''_{n+1}(1-x''_{n+1})}$$ 〔注３参照〕

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{\frac{x_P}{x''_{n+1}} - \frac{\alpha(1-x_P)}{1-x''_{n+1}}\right\}$$

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{\frac{\alpha^{n-1}x_P+\alpha^N(1-x_P)}{\alpha^{n-1}} - \frac{\alpha^{n-1}x_P+\alpha^N(1-x_P)}{\alpha^{N-1}}\right\}$$ 〔注４〕

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{x_P + \alpha^{N-n+1}(1-x_P) - \alpha^{n-N}x_P - \alpha(1-x_P)\right\}$$

$$= \frac{P}{\alpha-1}\left\{x_P(1-\alpha^{n-N}) + \alpha(1-x_P)(\alpha^{N-n}-1)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

〔注３〕次の関係式を用い，x_{n+1} を x''_{n+1} で表す。

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x''_{n+1}}{\alpha x''_{n+1}+(1-x''_{n+1})}$$ 〔問題２ (g)の(14)式〕

$$x'_{n+1} - x_{n+1} = (1 - 1/\alpha)x_{n+1}(1 - x''_{n+1})$$ 〔問題2 (c)の(9)式〕

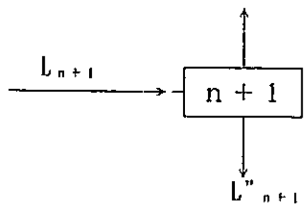
$$= \frac{(\alpha-1)\,x'_{n+1}\,(1 - x'_{n+1})}{\alpha x''_{n+1} + (1 - x''_{n+1})}$$ 〔x_{n+1} に上式代入〕

〔注4〕次の関係式を用いる。

$$x''_{n+1} = x_n = \frac{\alpha^{n-1}x_P}{\alpha^{n-1}x_P + \alpha^N(1 - x_P)}$$ 〔問題4の(26)式より〕

(c) 濃縮域各段の流量 L_{n+1}

右の図から



$$L_{n+1} = L'_{n+1} + L''_{n+1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

であり，L'_{n+1} と L''_{n+1} は，それぞれ⑥式と⑦式で与えられるから，⑫式は次のように書き換えることができる。

$$L_{n+1} = \frac{P}{\alpha-1}\left\{\alpha x_P(1 - \alpha^{n-N}) + (1 - x_P)(\alpha^{N-n} - 1)\right\}$$ 〔⑥式〕

$$+ \frac{P}{\alpha-1}\left\{x_P(1 - \alpha^{n-N}) + \alpha(1 - x_P)(\alpha^{N-n} - 1)\right\}$$ 〔⑦式〕

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{x_P(1 - \alpha^{n-N}) + (1 - x_P)(\alpha^{N-n} - 1)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

(d) 濃縮域の全循環流量 J_P

濃縮域の全循環流量 J_P は濃縮域各段への供給流量（L_{NW+1}〜 L_N まで）の和に等しい。

$$J_P = \sum_{n=NW}^{N-1} L_{n+1}$$

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{x_P\sum_{NW}^{N-1}(1 - \alpha^{n-N}) + (1 - x_P)\sum_{NW}^{N-1}(\alpha^{N-n} - 1)\right\}$$

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{x_P\left[NP - \frac{1-\alpha^{-NP}}{\alpha-1}\right] + (1-x_P)\left[\alpha\frac{\alpha^{NP}-1}{\alpha-1} - NP\right]\right\}$$ 〔注5〕

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(2x_P-1)NP - \frac{1}{\alpha-1}\left[x_P(1-\alpha^{-NP}) + \alpha(1-x_P)(1-\alpha^{NP})\right]\right\}$$

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(2x_P-1)NP - \frac{1}{\alpha-1}\left[x_P\frac{R_P - R_F}{R_P} + \alpha(1-x_P)\frac{R_F - R_P}{R_F}\right]\right\}$$ 〔注6〕

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(2x_P-1)NP - \frac{1}{\alpha-1}(R_P - R_F)\left[\frac{x_P}{R_P} - \frac{\alpha(1-x_P)}{R_F}\right]\right\}$$

$$= P\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(2x_P-1)\frac{\ln(R_P/R_F)}{\ln\alpha} - \frac{x_P - x_F}{(\alpha-1)x_F(1-x_F)}\left[(\alpha+1)x_F - \alpha\right]\right\}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$ ⑩
〔注7〕

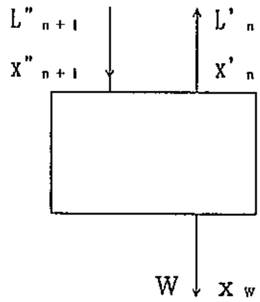
〔注5〕 $\sum_{NW}^{N-1} 1 = N-1-NW+1 = N-NW = NP$,　$\sum_{NW}^{N-1}\alpha^{n-N} = \frac{1-\alpha^{-NP}}{\alpha-1}$,　$\sum_{NW}^{N-1}\alpha^{N-n} = \alpha\frac{\alpha^{NP}-1}{\alpha-1}$

〔注6〕 $\alpha^{NP} = R_P/R_F$

〔注7〕 $NP = [\ln(R_P/R_F)]/\ln\alpha$ で置き換え，R を x で書き換える。

〔2〕回収域について，上昇流量，下降流量，各段の供給流量及び循環流量を求める。

(a) 上昇流量　L'_n



$$L'_n = W\frac{x''_{n+1} - x_w}{x'_n - x''_{n+1}} \quad \text{〔物質収支から〕}$$

$$= W\frac{x_n - x_w}{x'_n - x_n} \quad \text{〔理想ｶｽｹｰﾄﾞ : } x''_{n+1} = x_n \text{〕}$$

$$= W\frac{x'_n - x_w(x'_n + \alpha - \alpha x'_n)}{(\alpha-1)x'_n(1-x'_n)} \quad \text{〔注8〕}$$

$$= W\frac{1}{\alpha-1}\left\{\frac{1-x_w}{1-x'_n} - \frac{\alpha x_w}{x'_n}\right\}$$

$$= W\frac{1}{\alpha-1}\left\{\alpha x_w(\alpha^n - 1) + (1-x_w)(1-\alpha^{-n})\right\} \cdots\cdots\cdots ⑪ \quad \text{〔注9〕}$$

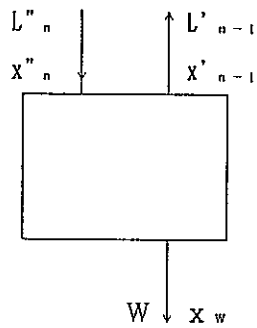
〔注8〕次式を用い x_n をx'_n で表して変形する。

$$x_n = x'_n/[x'_n + \alpha(1-x'_n)], \quad x'_n - x_n = (\alpha-1)x_n(1-x'_n)$$

〔注9〕次式を用いて，x'_n を x_w で表す。

$$x'_n = x_{n+1} = \alpha^{n+1}x_w/[\alpha^{n+1}x_w + (1-x_w)]$$

(b) 下降流量　L''_n



$$L''_n = W\frac{x'_{n-1} - x_w}{x'_{n-1} - x''_n} \quad \text{〔物質収支から〕}$$

$$= W\frac{x_n - x_w}{x_n - x''_n} \quad \text{〔理想ｶｽｹｰﾄﾞ : } x'_{n-1} = x_n \text{〕}$$

$$= W\frac{\alpha x''_n - x_w(\alpha x''_n + 1 - x''_n)}{(\alpha-1)x''_n(1-x''_n)} \quad \text{〔注10〕}$$

$$= W\frac{1}{\alpha-1}\left\{\frac{\alpha(1-x_w)}{1-x''_n} - \frac{x_w}{x''_n}\right\}$$

$$= W\frac{1}{\alpha-1}\left\{x_w(\alpha^n - 1) + \alpha(1-x_w)(1-\alpha^{-n})\right\} \cdots\cdots\cdots ⑫ \quad \text{〔注11〕}$$

〔注10〕 $x_n = \alpha_n x''_n/[\alpha_n x''_n + (1-x''_n)]$，　$x_n - x''_n = (1-1/\alpha)x_n(1-x''_n)$

〔注11〕 $x''_n = x_{n-1} = \alpha^{n-1}x_w/[\alpha^{n-1}x_w + (1-x_w)]$

(c) 回収域各段の流量 L_n

⑪式及び⑫式から次式が得られる。

$$L_n = L'_n + L''_n$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{x_w(\alpha^n-1) + (1-x_w)(1-\alpha^{-n})\right\} \cdots\cdots\cdots ⑬$$

(d) 回収域の全循環流量 J_W

$$J_W = \sum_{n=1}^{NW} L_n$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{x_W\sum_{n=1}^{NW}(\alpha^{n}-1) + (1-x_W)\sum_{n=1}^{NW}(1-\alpha^{-n})\right\}$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{x_W\left(\alpha\frac{\alpha^{NW}-1}{\alpha-1}-NW\right) + (1-x_W)\left(NW-\frac{1-\alpha^{-NW}}{\alpha-1}\right)\right\}$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(1-2x_W)NW + \frac{1}{\alpha-1}\left[\alpha x_W(\alpha^{NW}-1) - (1-x_W)(1-\alpha^{-NW})\right]\right\}$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(1-2x_W)\left(\frac{\ln(R_F/R_W)}{\ln\alpha}-1\right) + \frac{\alpha x_W}{\alpha-1}\left(\frac{R_W}{\alpha x_W}-1\right) - (1-x_W)\left(1-\frac{\alpha x_W}{x_F}\right)\right\} \text{〔注12〕}$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(2x_W-1)\left(\frac{\ln(R_W/R_F)}{\ln\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha-1}(R_F-\alpha R_W)\left(\frac{x_W}{R_W}-\frac{(1-x_W)}{x_F}\right) + (2x_W-1)\right\}$$

$$= W\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left\{(2x_W-1)\frac{\ln(R_W/R_F)}{\ln\alpha} + \frac{(x_F-x_W)[(\alpha+1)x_F-\alpha]}{(\alpha-1)x_F(1-x_F)}\right\} \quad \text{〔注13〕} \quad ⑭$$

〔注12〕 $\alpha^{NW+1} = R_F/R_W$ ， ∴ $\alpha^{NW} = R_F/\alpha R_W$ ， $NW = \ln(R_F/R_W)-1$

〔注14〕 前式の第２項以下の Rをx で表し，整理すれば⑭式が得られる。

〔３〕理想カスケードの全循環流量 J

$$J = J_P + J_W$$

$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ln\alpha}\left\{P(2x_P-1)\ln(R_P/R_F) + W(2x_W-1)\ln(R_W/R_F)\right\} + \frac{(\alpha+1)[\alpha-(\alpha+1)x_F]}{(\alpha-1)^2 x_F(1-x_F)}\left[P(x_P-x_F) - W(x_F-x_W)\right]$$

$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ln\alpha}\left\{P(2x_P-1)\ln(R_P/R_F) + W(2x_W-1)\ln(R_W/R_F)\right\} \quad \text{〔注15〕}$$

$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ln\alpha}\left\{P(2x_P-1)\ln R_P + W(2x_W-1)\ln R_W - [P(2x_P-1)+W(2x_W-1)]\ln R_F\right\}$$

$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ln\alpha}\left\{P(2x_P-1)\ln R_P + W(2x_W-1)\ln R_W - [2(Px_P+Wx_W)-(P+W)]\ln R_F\right\}$$

$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ln\alpha}\left\{P(2x_P-1)\ln R_P + W(2x_W-1)\ln R_W - F(2x_F-1)\ln R_F\right\} \quad \text{〔注16〕}$$

$$= \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)\ \ln\alpha}\left\{ P\ V(x_P) + W\ V(x_W) - F\ V(x_F) \right\} \quad \cdots\cdots (29)$$

〔注15〕 $\frac{P}{F} = \frac{x_F - x_W}{x_P - x_W}$, $\frac{W}{F} = 1 - \frac{P}{F} = \frac{x_P - x_F}{x_P - x_W}$ であるから,

$$P\ (x_P - x_F) = W\ (x_F - x_W)$$

〔注16〕 $P x_P + W x_W = F x_F$, $P + W = F$

4. 方形カスケードの段数と還流比

問題７　方形カスケードについて，次の問に答えよ。

(1)　濃縮域の段間の濃度差について次式が成り立つことを示せ。

$$x'_n - x'_{n-1} = \frac{1}{1+(P/L''_n)} \left\{ (\alpha\beta-1)\, x'_n\, (1-x'_n) - \frac{P}{L''}(x_P - x'_n) \right\}$$

(2)　濃縮域の段数NPと還流比 L"/P の間に次の関係が成り立つことを示せ。

$$NP = \frac{1+P/L''}{(\alpha\beta-1)b} \ln \frac{1+a}{1-a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

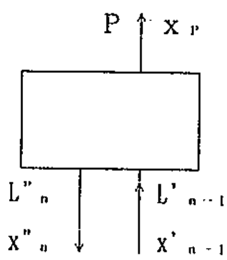
$$\left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{b(x_P - x_F)}{(1+c)(x_P + x_F) - 2x_P x_F - 2cx_P}\ , \\ b = [(1+c)^2 - 4cx_P]^{1/2}\ , \quad c = P/[(\alpha\beta-1)L''] \end{array} \right.$$

(3)　回収域の段数NWと還流比 L'/W の間に次の関係が成り立つことを示せ。

$$NW = \frac{1+W/L'}{(\alpha\beta-1)b} \ln \frac{1+a}{1-a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{b(x_F - x_W)}{(1-c)(x_F + x_W) - 2x_F x_W - 2cx_W}\ , \\ b = [(1-c)^2 + 4cx_W]^{1/2}\ , \quad c = W/[(\alpha\beta-1)L'] \end{array} \right.$$

〔解答〕(1)　濃縮域における物質収支式（右図）



$$\left\{ \begin{array}{l} L'_{n-1} = L''_n + P \\ L'_{n-1}\, x'_{n-1} = L''_n\, x''_n + P\, x_P \end{array} \right.$$

からL'_{n-1}を消去すると次式が得られる。

$$L''_n\,(x''_n - x'_{n-1}) + P\,(x_P - x'_{n-1}) = 0$$

$$\therefore\quad x''_n = x'_{n-1} - \frac{P}{L''_n}(x_P - x'_{n-1})$$

$$= \left(1 + \frac{P}{L''_n}\right) x'_{n-1} - \frac{P}{L''_n} x_P \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

また，問題２の(11)式及び(15)式から次式がえられる。

$$x'_n - x''_n = \frac{(\alpha\beta-1)\, x'_n\, (1-x'_n)}{\alpha\beta - (\alpha\beta-1)\, x'_n}$$

$$\fallingdotseq (\alpha\beta-1)\, x'_n\, (1-x'_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ② \qquad 〔注１〕$$

①式＋②式の計算を行うと，

$$x'_n = (\alpha\beta-1)\, x'_n\, (1-x'_n) + [1+(P/L''_n)]x'_{n-1} - (P/L''_n)x_P \qquad \cdots\cdots ③$$

さらに，③式の両辺に $(P/L''_n)x'_n$ を加えると，

$$[1+(P/L''_n)]x'_n = (\alpha\beta-1)\, x'_n\, (1-x'_n) + [1+(P/L''_n)]x'_{n-1} - (P/L''_n)(x_P - x'_n) \qquad \cdots\cdots ④$$

が得られ，④式の右辺第２項を左辺に移項すると次式が得られる。

$$[1+(P/L''_n)](x'_n - x'_{n-1}) = (\alpha\beta-1)x'_n(1-x'_n) - (P/L''_n)(x_P - x'_n)$$

$$\therefore\quad x'_n - x'_{n-1} = \frac{1}{1+P/L''_n}\left\{(\alpha\beta-1)\ x'_n(1-x'_n) - \frac{P}{L''_n}(x_P - x'_n)\right\} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

（$\alpha\beta-1$）が極めて小さい場合には，１段ごとの濃度変化は小さいので⑤式左辺の差分を微分に置き換えることができる。

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1}{1+P/L''}\left\{(\alpha\beta-1)x(1-x) - \frac{P}{L''}(x_P - x)\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

〔注１〕 $\alpha\beta\fallingdotseq 1$ のとき，分母 $\fallingdotseq 1$ とすることができる。

(2) 濃縮域の段数ＮＰは，⑥式から次のようにして得ることができる。

$$NP = \int_{x_F}^{x_P}\left(\frac{dn}{dx}\right)dx$$

$$= \frac{1+P/L''}{\alpha\beta-1}\int_{x_F}^{x_P}\frac{dx}{x(1-x) - [P/(\alpha\beta-1)L''](x_P-x)}$$

ここで，$c = P/(\alpha\beta-1)L''$ と置き，右辺の積分Ｉを計算する。

$$I = \int_{x_F}^{x_P}\frac{dx}{x(1-x)-c(x_P-x)} = \int_{x_F}^{x_P}\frac{dx}{-x^2+(1+c)x-cx_P}$$

$$= \frac{1}{b}\left[\ l\,n\ \frac{-2x+(1+c)-b}{-2x+(1+c)+b}\right]_{x_F}^{x_P} \qquad 〔注２，３〕$$

$$= \frac{1}{b}\,l\,n\left(\frac{-2x_P(1+c)-b}{-2x_P(1+c)+b}\ \frac{-2x_F+(1+c)+b}{-2x_F+(1+c)-b}\right)$$

$$= \frac{1}{b}\,l\,n\left(\frac{2x_Px_F-(1+c)(x_P+x_F)+2cx_P-b(x_P-x_F)}{2x_Px_F-(1+c)(x_P+x_F)+2cx_P+b(x_P-x_F)}\right) \qquad 〔注４〕$$

$$= \frac{1}{b}\,l\,n\left(\frac{1+\dfrac{b(x_P-x_F)}{(1+c)(x_P+x_F)-2x_Px_F-2cx_P}}{1-\dfrac{b(x_P-x_F)}{(1+c)(x_P+x_F)-2x_Px_F-2cx_P}}\right)$$

すなわち，次式が得られたことになる。

$$NP = \frac{1+P/L''}{(\alpha\beta-1)b}\ \ln\frac{1+a}{1-a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

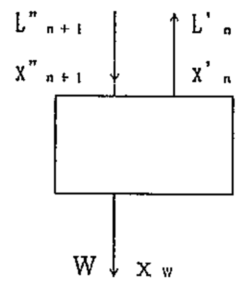
$$\begin{cases} a = \dfrac{b(x_P - x_F)}{(1+c)(x_P+x_F) - 2x_Px_F - 2cx_P}, \\ b = [(1+c)^2 - 4cx_P]^{1/2}, \\ c = P/[(\alpha\beta-1)L''] \end{cases}$$

〔注２〕積分公式集より，$\displaystyle\int\frac{dx}{px^2+qx+r} = \frac{1}{\sqrt{Q}}\ \ln\frac{2px+q-\sqrt{Q}}{2px+q+\sqrt{Q}}$，　$Q = q^2 - 4pr$

〔注３〕 $b = [(1+c)^2 - 4cx_P]^{1/2}$ と置いた。

〔注４〕 $(1+c)^2 - b^2 = 4cx_P$ の関係を用いた。

(3) 回収域における物質収支式（右図参照）



$$\begin{cases} L''_{n+1} = L'_n + W \\ L''_{n+1}\, x''_{n+1} = L'_n\, x'_n + W\, x_W \end{cases}$$

からL''_{n+1} を消去すると次式が得られる。

$$L'_n\,(x'_n - x''_{n+1}) + W\,(x_W - x''_{n+1}) = 0$$

$$\therefore \quad \left(1 + \frac{W}{L'_n}\right) x''_{n+1} = x'_n + \frac{W}{L'_n}\, x_W \quad \cdots\cdots ⑦$$

また，問題２の⑾式及び⒀式から次式がえられる。

$$x'_n - x''_n = \frac{(\alpha\beta - 1)\, x''_n\,(1 - x''_n)}{(\alpha\beta - 1)x''_n + 1}$$

$$\fallingdotseq (\alpha\beta - 1)\, x''_n\,(1 - x''_n) \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦式＋⑧式の計算を行うと，

$$\left(1 + \frac{W}{L'_n}\right) x''_{n+1} - x''_n = (\alpha\beta - 1)\, x''_n\,(1 - x''_n) + \frac{W}{L'_n}\, x_W \quad \cdots\cdots ⑨$$

さらに，⑨式の両辺から $(W/L'_n)x''_n$ を減ずると，

$$\left(1 + \frac{W}{L'_n}\right)(x''_{n+1} - x''_n) = (\alpha\beta - 1)x''_n(1 - x''_n) + \frac{W}{L'_n}(x''_n - x_W)$$

が得られので，濃度変化の式として次式が得られる。

$$x''_{n+1} - x''_n = \frac{1}{1 + W/L'_n}\left\{(\alpha\beta - 1)x''_n(1 - x''_n) - \frac{W}{L'_n}(x''_n - x_W)\right\} \cdots\cdots ⑩$$

（$\alpha\beta - 1$）が極めて小さい場合には，１段ごとの濃度変化は小さいので⑩式左辺の差分を微分に置き換えることができる。

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1}{1 + W/L'}\left\{(\alpha\beta - 1)x(1 - x) - \frac{W}{L'}(x - x_W)\right\} \quad \cdots\cdots ⑪$$

回収域の段数NW は，⑪式から次のように得ることができる。

$$NW = \int_{x_W}^{x_F} \left(\frac{dn}{dx}\right) dx$$

$$= \frac{1 + W/L'}{\alpha\beta - 1} \int_{x_W}^{x_F} \frac{dx}{x(1 - x) - [\,W/(\alpha\beta - 1)L'\,](x - x_W)}$$

ここで，$c = W/(\alpha\beta - 1)L'$ と置き，右辺の積分 I を計算する。

$$I = \int_{x_W}^{x_F} \frac{dx}{-x^2 + (1 - c)x + cx_W}$$

$$= \frac{1}{b}\left[\,\ln \frac{-2x + (1 - c) - b}{-2x + (1 - c) + b}\right]_{x_W}^{x_F}$$

〔但し， $b = \{(1 - c)^2 + 4cx_W\}^{1/2}$ 〕

$$= \frac{1}{b} \ln \left[\frac{2x_F x_W - (1-c)(x_F + x_W) - 2cx_W - b(x_F - x_W)}{2x_F x_W - (1-c)(x_F + x_W) - 2cx_W + b(x_F - x_W)} \right] \qquad \text{〔注 4〕}$$

$$= \frac{1}{b} \ln \left[\frac{1 + \dfrac{b(x_F - x_W)}{(1-c)(x_F + x_W) - 2x_F x_W + 2cx_W}}{1 - \dfrac{b(x_F - x_W)}{(1-c)(x_F + x_W) - 2x_F x_W + 2cx_W}} \right]$$

すなわち，次式が得られたことになる。

$$NW = \frac{1 + W/L'}{(\alpha \beta - 1)b} \ln \frac{1 + a}{1 - a} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{b(x_F - x_W)}{(1-c)(x_F + x_W) - 2x_F x_W + 2cx_W} , \\ b = [(1-c)^2 + 4cx_W]^{1/2} , \\ c = W/[(\alpha \beta - 1)L'] \end{cases}$$

5. 分離作業量と最適廃棄濃度

問題 8　分離ユニットの分離作業量 δU が次の式で表されることを示せ。

(1) Cohen の式 :

$$\delta U = P\,V(x_P) + W\,V(x_W) - F\,V(x_F),$$

$$V(x) = (2x-1)\ \ln\left\{\frac{x}{1-x} \Big/ \frac{x_0}{1-x_0}\right\} + \frac{(2x_0-1)(x_0-x)}{x_0(1-x_0)} \quad \cdots\cdots\cdots (32)$$

(2) Groth の式 :

$$V(x) = V\left(\frac{R}{1+R}\right) = v(R)$$ で表した時

$$v(R) = \frac{R-A}{R+A}\ \ln\frac{R}{R_0} + \frac{(R-R_0)(A-R_0)}{(1+R)R_0}$$

$$A = -\frac{\alpha(\beta-1)\ \ln\alpha - (\alpha-1)\ \ln\beta}{(\beta-1)\ \ln\alpha - \beta(\alpha-1)\ \ln\beta}$$

となり，次式が得られることを示せ。

$$\delta U = F\frac{\alpha(\beta-1)\ \ln\alpha - (\alpha-1)\ \ln\beta}{\alpha\beta - 1} \quad \cdots\cdots\cdots (33)$$

〔解答〕(1)　Cohen の式の導出についてはテキスト参照。ここでは δU が xに依存しない条件式

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2(1-x)^2}$$

の積分についてのみ記す。

$$V(x) = \iint \frac{dx^2}{x^2(1-x)^2} = \int I\,dx$$

とおくと，積分 I は次のようにして求めることができる。

$$I = \int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{X} + \frac{2}{1-X}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + 2\ln x - 2\ln(1-x) + C_1$$

従って，V(x) は次のようにして求めることができる。

$$V(x) = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + 2\ln x - 2\ln(1-x) + C_1\right)dx$$

$$= -\ln x - \ln(1-x) + 2(x\ln x - x) - 2\{-(1-x)\ln(1-x) + (1-x)\} + C_1x + C_2$$

$$= (2x-1)\ln\frac{1}{1-x} + C_1x + C_2' \qquad (但し，C_2' = C_2 + 2)$$

$V(x_0)=0$ の条件から，　$C_2' = -C_1x_0 - (2x_0-1)\ln[x_0/(1-x_0)]$

$dV(x_0)/dx=0$ の条件から，　$C_1 = -(2x_0-1)/[x_0(1-x_0)] - 2\ln[x_0/(1-x_0)]$

$\therefore\ C_2' = \ln[x_0/(1-x_0)] + (2x_0-1)/(1-x_0)$

$V(x)$の式に，C_1，C_2' を代入すると，(32) 式が得られる。

(2) 分離作業量の式：　$\delta U = P\,V(x') + W\,V(x'') - F\,V(x)$ ……………… ①

を次式のように変形しておく。

$$\delta U/F = \theta V(x') + (1-\theta)V(x'') - V(x) \qquad \text{②}$$

ここで，

$$V(x) = V\left(\frac{R}{1+R}\right) = v(R) \qquad \text{③}$$

と置き，θを Rで表す次式

$$\theta = \frac{(\beta-1)(1+\alpha R)}{(\alpha\beta-1)(1+R)}, \quad 1-\theta = \frac{(\alpha-1)(\beta+R)}{(\alpha\beta-1)(1+R)}$$ 〔問題 2　(h)式より〕

を用いて②式を書き換えると次のようになる。

$$\delta U/F = \frac{1}{(\alpha\beta-1)(1+R)}\{(\beta-1)(1+\alpha R)v(\alpha R)+(\alpha-1)(\beta+R)v(R/\beta)-(\alpha\beta-1)(1+R)v(R)\} \qquad \text{④}$$

④式が Rに依存しないように v(R) の関数形を決めればよい。ここで，さらに

$$w(R) = (1+R)v(R) \qquad \text{⑤}$$

と置くと，④式は次のよう書くことができる。

$$(\alpha\beta-1)(1+R)[\delta U/F] = (\beta-1)w(\alpha R)+\beta(\alpha-1)w(R/\beta)-(\alpha\beta-1)w(R) \qquad \text{⑥}$$

⑥式の両辺を Rで微分すると，次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}(\alpha\beta-1)[\delta U/F] &= \alpha(\beta-1)w'(\alpha R)+(\alpha-1)w'(R/\beta)-(\alpha\beta-1)w'(R)\\ &= \alpha(\beta-1)[w'(\alpha R)-w'(R)]+(\alpha-1)[w'(R/\beta)-w'(R)] \qquad \text{⑦}\end{aligned}$$

次に，

$$\begin{cases} R = e^{z} \\ \alpha = e^{a} \\ \beta = e^{b} \\ w'(R) = f(z) \end{cases}$$

と置き換え，$w'(\alpha R)$と $w'(R/\beta)$ を zのまわりで Taylor 展開すると，次式

$$w'(R) = w'(e^{z}) = f(z)$$

$$w'(\alpha R) = w'(e^{z+a}) = f(z+a) = f(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n}}{n!}f^{(n)}(z)$$

$$w'(R/\beta) = w'(e^{z-b}) = f(z-a) = f(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-b)^{n}}{n!}f^{(n)}(z)$$

が得られるから，⑦式は次のように変形できる。

$$\frac{\delta U}{F} = \frac{\alpha(\beta-1)}{\alpha\beta-1}\sum\frac{a^{n}}{n!}f^{(n)}(z) + \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}\sum\frac{(-b)^{n}}{n!}f^{(n)}(z) \qquad \text{⑧}$$

⑧式は定係数微分方程式であり，その一般解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{i=1}^{\infty}C_i\exp(\lambda_i z) + Cz\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}C_i R^{\lambda_i} + C\ln R \qquad \text{⑨}\end{aligned}$$

$f(z)=w'(R)$であるから，⑦式を⑨式の解で書き換えると次式が得られる。

$$(\alpha\beta-1)\frac{\delta U}{F}=\alpha(\beta-1)\Sigma C_i(\alpha R)^{\lambda_i}+(\alpha-1)\Sigma C_i(R/\beta)^{\lambda_i}$$
$$-(\alpha\beta-1)\ \Sigma C_i R^{\lambda_i}$$
$$+[\alpha(\beta-1)+(\alpha-1)-(\alpha\beta-1)]C\ \ln R$$
$$+\{\alpha(\beta-1)\ \ln\alpha-(\alpha-1)\ \ln\beta\}\ C \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑩式の右辺の第1項から第4項までが Rを含んでいるが，第4項の〔 〕内は0となるので，第1項から第3項に着目してλ_iを決めればよい。⑩式が Rに依存しなくなるのは，

$$\begin{cases} i=1\text{の場合} & \lambda_1=0 \\ i=2\text{の場合} & \lambda_2=-1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ⑪$$

としたときだけである。この特別な解で⑩を書き換えると次のようになる。

$$(\alpha\beta-1)(\delta U/F)=C_1[\alpha(\beta-1)+(\alpha-1)-(\alpha\beta-1)]$$
$$+(C_2/R)[\alpha(\beta-1)(1/\alpha)+\beta(\alpha-1)-(\alpha\beta-1)]$$
$$+\{\alpha(\beta-1)\ \ln\alpha-(\alpha-1)\ \ln\beta\}\ C$$

この式の第1項と第2項は0となるから，$\delta U/F$ は Rに依存しない次式となる。

$$\frac{\delta U}{F}=\frac{\alpha(\beta-1)\ \ln\alpha-(\alpha-1)\ \ln\beta}{\alpha\beta-1}C$$

ここで，δUの式が最も簡単になる Cの値として，$C=1$ としている。

また，⑪の条件のとき，⑨式で表される解は次のようになる。

$$w'(R)=f(z)=C_1+C_2e^{-z}+Cz=C_1+C_2/R+C\ln R$$
$$\therefore\ w(R)=C_1R+C_2\ln R+C(R\ln R-R)+C_3=(C_2+CR)\ln R+(C_1-C)R+C_3$$

従って $v(R)$ は次の形の関数であることが分かる。

$$v(R)=\frac{w(R)}{1+R}=\frac{C_2+CR}{1+R}\ln R-\frac{(C_1-C)R+C_3}{1+R} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

⑫式を④式に代入すると，

$$(\alpha\beta-1)(1+R)(\delta U/F)=(\beta-1)[(C_2+CR)(\ln R+\ln\alpha)+(C_1-C)\alpha R+C_3]$$
$$+\ (\alpha-1)[(C_2\beta+CR)(\ln R-\ln\beta)+(C_1-C)R+C_3\beta]$$
$$-(\alpha\beta-1)[(C_2+CR)\ln R+(C_1-C)R+C_3]$$
$$=(C_1-C)R[\alpha(\beta-1)+(\alpha-1)-(\alpha\beta-1)]+C_2\ln R[(\beta-1)+\beta(\alpha-1)-(\alpha\beta-1)]$$
$$+C_2\{(\beta-1)\ln\alpha-\beta(\alpha-1)\ln\beta\}+C_3[(\beta-1)+\beta(\alpha-1)-(\alpha\beta-1)]$$
$$+CR\{\alpha(\beta-1)\ln\alpha-(\alpha-1)\ln\beta\} \qquad \cdots\cdots ⑬$$
$$=C_2[(\beta-1)\ln\alpha-\beta(\alpha-1)\ln\beta]\left\{1+\frac{C}{C_2}\frac{\alpha(\beta-1)\ln\alpha-(\alpha-1)\ln\beta}{(\beta-1)\ln\alpha-\beta(\alpha-1)\ln\beta}R\right\} \qquad \cdots\cdots ⑭$$

〔注1〕

⑭式の｛ ｝内の値が $1+R$ になれば，δU は Rに依存しなくなるので

$$\frac{C_2}{C}=\frac{\alpha(\beta-1)\ln\alpha-(\alpha-1)\ln\beta}{(\beta-1)\ln\alpha-\beta(\alpha-1)\ln\beta} \qquad \cdots\cdots ⑮$$

とすればよい。また C_1, C_3は $C=1$として，$v(R_0)=0$, $v'(R_0)=0$ の条件から決めることができる。

$$V'(R) = \frac{1-C_2}{(1+R)^2}\ \ln R + \frac{C_2(1+rR)+(C_1-C_3)R+R^2}{R(1+R)^2}$$

$v(R_0)=0$ から，$C_3=-C_1R_0-C_2\ln R_0-R_0(\ln R_0-1)$

$v'(R_0)=0$ から，$C_1=-C_2/R_0-\ln R_0$，　$\therefore C_3=C_2(1-\ln R_0)+R_0$

C_1, C_3 の関係式を⑫式に代入すると

$$v(R)=\frac{C_2+R}{1+R}\ \ln R + \frac{-(C_2+R_0)(R/R_0)+(C_2+R_0)-(C_2+R)\ln R_0}{1+R}$$

$$=\frac{C_2+R}{1+R}\ \ln(R/R_0) - \frac{(C_2+R_0)(R-R_0)}{(1+R)R_0}$$

ここで，$A=-C_2$ と置くと

$$\begin{cases} v(R) = \dfrac{R-A}{1+R}\ \ln(R/R_0) - \dfrac{(A-R_0)(R-R_0)}{(1+R)R_0} \\[2ex] A = -\dfrac{\alpha(\beta-1)\ln\alpha-(\alpha-1)\ln\beta}{(\beta-1)\ln\alpha-\beta(\alpha-1)\ln\beta} \\[2ex] \delta U = F\dfrac{(\beta-1)\ln\alpha-\beta(\alpha-1)\ln\beta}{\alpha\beta-1} \end{cases}$$

〔注１〕⑬式右辺の［　］内の値は０になることに注意せよ。

問題9　濃縮役務単価をC_E（\$/kgSWU），供給原料単価をC_F（\$/kgU）とし，濃縮ウランの製品原価C_P（\$/kgU）を次式

$$P C_P = \Delta U \cdot C_E + F \cdot C_F$$

で表すとした場合，C_Pを最小にするテイル濃度x_W（最適廃棄濃度）は次式で表されることを示せ。

$$\frac{C_F}{C_E} = (2x_F - 1)\ \ln\left\{ \frac{x_F}{1 - x_F} \Big/ \frac{x_W}{1 - x_W} \right\} + \frac{(x_F - x_w)(1 - 2x_W)}{x_W(1 - x_W)} \quad \cdots\cdots (34)$$

〔解答〕カスケードの分離作業量ΔUの式を次のように変形しておく。

$$\begin{aligned}\Delta U &= P\ V(x_P) + W\ V(x_W) - F\ V(x_F) \\ &= F\ \{\theta V(x_P) + (1-\theta)V(x_W) - V(x_F)\} \\ &= F\ \{\theta[V(x_P) - V(x_F)] + (1-\theta)[V(x_W) - V(x_F)]\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots ①$$

この式を，次式

$$P\ C_P = \Delta U \cdot C_E + F \cdot C_F \quad \cdots\cdots ②$$

に代入すると，$P = \theta F$であるから，次式が得られる。

$$\theta C_P = \{\theta[V(x_P) - V(x_F)] + (1-\theta)[V(x_W) - V(x_F)]\}\ C_E + C_F$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad C_P &= \left\{[V(x_P) - V(x_F)] + \frac{1-\theta}{\theta}[V(x_W) - V(x_F)]\right\} C_E + \frac{1}{\theta} C_F \\ &= \left\{[V(x_P) - V(x_F)] + \frac{x_P - x_F}{x_F - x_W}[V(x_W) - V(x_F)]\right\} C_E + \frac{x_P - x_F}{x_F - x_W} C_F \end{aligned} \quad \cdots\cdots ③$$

C_Pを最小にするx_Wは，$(\partial C_P/\partial x_W) = 0$の条件から得られる。ここで，

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(x_W)}{\partial x_W} &= \frac{\partial}{\partial x_W}[(2x_W - 1)\ln x_W - (2x_W - 1)\ln(1 - x_W)] \\ &= 2\ln x_W + \frac{2x_W - 1}{x_W} - 2\ln(1 - x_W) + \frac{2x_W - 1}{1 - x_W} = 2\ln R_W + \frac{2x_W - 1}{x_W(1 - x_W)}\end{aligned}$$

であることに注意して，$(\partial C_P/\partial x_W) = 0$の微分を行うと，

$$\left\{\frac{x_P - x_F}{(x_F - x_W)^2}[V(x_W) - V(x_F)] + \frac{x_P - x_F}{x_F - x_W}\left(2\ln R_W + \frac{2x_W - 1}{x_W(1 - x_W)}\right)\right\} C_E + \frac{x_P - x_F}{(x_F - x_W)^2} C_F = 0 \quad \cdots\cdots ④$$

が得られる。④式を整理すると目的の(34)式を得ることができる。

$$\frac{C_F}{C_E} = (2x_F - 1)\ \ln\left\{ \frac{x_F}{1 - x_F} \Big/ \frac{x_W}{1 - x_W} \right\} + \frac{(x_F - x_w)(1 - 2x_W)}{x_W(1 - x_W)} \quad \cdots\cdots (34)$$

問題10　米国エネルギー省（USDOE)では、高濃縮ウランのＳＷＵ料金を次のように定めている。

(a)　区分濃度（x_a =10.5%）以上の役務については、$922/SWUとする(1989.1.1)。

(b)　区分濃度未満の役務については、$153/SWUとする。

(c)　高濃縮ウラン１kg（濃縮度x_P）当たりの役務費C_Eは次式から計算する。

$$C_E = \{C_1\gamma + C_2(1-\gamma)\}\ \Delta U/P$$

ここで、

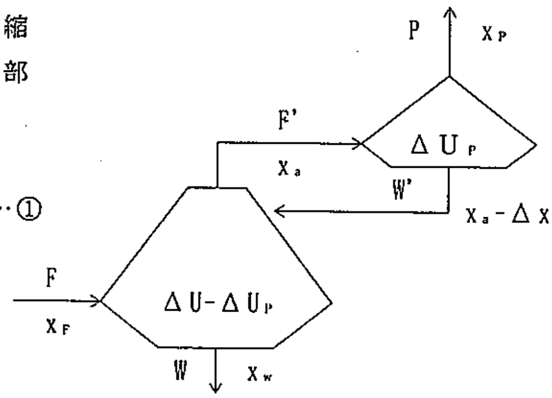
$$\begin{cases} C_1 = \$922/SWU,\ C_2 = \$153/SWU \\ \Delta U/P = V(x_P) + \dfrac{x_P - x_F}{x_F - x_w} V(x_w) - \dfrac{x_P - x_W}{x_F - x_w} V(x_F) \\ \gamma = \dfrac{V(x_P) - V(x_a) - (x_P - x_a)\left\{2\ln\dfrac{x_a}{1-x_a} + \dfrac{2x_a - 1}{x_a(1-x_a)}\right\}}{V(x_P) + \dfrac{x_P - x_F}{x_F - x_W} V(x_W) - \dfrac{x_P - x_w}{x_F - x_w} V(x_F)} \end{cases}$$

〔問１〕上の式を導け。

〔問２〕20%の高濃縮ウラン１kgを製造するための、濃縮料金は下記のようになることを確かめよ。但し、テイル濃度を0.2%とする。

高濃縮部分	$　317.79
低濃縮部分	$ 6,946.57
合　計	$ 7,264.36

〔解答１〕右側の図のように、区分濃度までの濃縮ウランをつくる部分と高濃縮ウランをつくる部分に分けて考える。



このカスケード全体の分離作業量ΔＵは

$$\Delta U = P\,V(x_P) + W\,V(x_w) - F\,V(x_F) \quad \cdots\cdots ①$$

で表される。また、カットθは次式

$$\theta = \frac{x_F - x_w}{x_P - x_w} \quad \cdots\cdots ②$$

で表され、

$$\Delta U/F = \theta V(x_P) + (1-\theta)V(x_w) - V(x_F)$$

$$1/F = \theta/P$$

であるから、高濃縮ウランを単位重量生産するのに必要な分離作業量は次式から求めることができる。

$$\Delta U/P = V(x_P) + \frac{x_P - x_F}{x_F - x_W} V(x_w) - \frac{x_P - x_W}{x_F - x_W} V(x_F) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

次に、区分濃縮度の原料から高濃縮ウランを生産する部分の分離作業量ΔU_Pは

$$\Delta U_P = P\,V(x_P) + W'V(x_a - \Delta x) - F'V(x_a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

で表され、この部分のカットをθ’とすると、θ’は

$$\theta' = \frac{x_a-(x_a-\Delta x)}{x_P-(x_a-\Delta x)} = \frac{\Delta x}{x_P-x_a-\Delta x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑤$$

で表されるから、区分濃縮度のウランから単位重量の高濃縮ウランを生産するのに必要な分離作業量は、次式で表されることになる。

$$\Delta U_P/F' = \theta' V(x_P)+(1-\theta')V(x_a-\Delta x)-V(x_a)$$
$$= \theta' \{V(x_P)-V(x_a-\Delta x)\} + \{V(x_a-\Delta x)-V(x_a)\}$$

$F'=P/\theta'$ $(1/F' = \theta'/P)$であるから

$$\frac{\Delta U_P}{P} = \{V(x_P)-V(x_a-\Delta x)\} + \frac{1}{\theta'}\{V(x_a-\Delta x)-V(x_a)\}$$

$$= \{V(x_P)-V(x_a-\Delta x)\} + (x_P-x_a+\Delta x)\frac{V(x_a-\Delta x)-V(x_a)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots \quad ⑥$$

ΔU及びΔU_Pが最小になるのは、$\Delta x \to 0$ のときであるが、$\Delta x \to 0$ のとき⑥式の右辺第２項の分数は関数$V(x)$の微分の定義から

$$\frac{V(x_a-\Delta x)-V(x_a)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x=x_a}$$

であるので、次式が得られる。

$$\left(\frac{\Delta U_P}{P}\right)_{min} = \left(\frac{\Delta U_P}{P}\right)_{\Delta x \to 0}$$

$$= \{V(x_P)-V(x_a)\} - (x_P-x_a)\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x=x_a} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ⑦$$

$V(x)=(2x-1)\ln[x/(1-x)]$ であるから、微分を実行すると次式が得られる。

$$\frac{dv(x)}{dx} = 2\ln\frac{x}{1-x} + \frac{2x-1}{x(1-x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ⑧$$

⑧式を⑦式に代入すると、次の式が得られる。

$$\frac{\Delta U_P}{P} = \{V(x_P)-V(x_a)\} -(x_P-x_a)\left\{2\ln\frac{x_a}{1-x_a} + \frac{2x_a-1}{x_a(1-x_a)}\right\} \quad \cdots \quad ⑨$$

③式及び⑨式から、$\gamma = \Delta U_P/\Delta U$の式として、問題10の(c)の式が得られる。

〔解答２〕 V(0.2) =0.831777

V(0.105) =1.692862

V(0.00711) =4.868883

V(0.002) =6.187756

ΔU/P = (0.831777)+(37.747554)(6.187756)-(38.747554)(4.868883)

= 45.7471

γ = {(0.831777)-(1.692862)-(0.095)(-12.6922178) } /(45.7471)

= 0.00753436

C_E = {(922)(0.00753436)+(153)(1-0.00753436)} (45.7471)

= \$317.79+\$6,946.57 = \$7,264.36

〔2〕一般問題と解答例

問題１．核燃料物質の取扱いに関連して次の用語を説明せよ。

(1) ピッチブレンド
(2) イエローケーキ
(3) インプレースリーチング
(4) カスケード
(5) 回収ウラン
(6) グリーンソルト
(7) ＳＷＵ (Separative Work Unit)
(8) ステップカスケード
(9) ウラン濃縮における最適廃棄濃度
(10) レーザー濃縮

〔解答例〕

(1) ピッチブレンド

れき青ウラン鉱とも呼ばれる主要ウラン鉱物の一つであり，世界で産出されるウラン鉱の大部分はこれである。センウラン鉱（UO_2）が結晶質であるのに対し，れき青ウラン鉱は結晶質のUO_2と非結晶質のUO_3が混合した不定形の結晶構造をもち，もともとはセンウラン鉱であったものと考えられており，センウラン鉱と同義語として使われることもある。

(2) イエローケーキ

ピッチブレンドなどのウラン鉱石を粗精錬して，ウラン含有量を増したものであり，イエローケーキと呼ばれる。。原石のまま輸送するとコスト高となるので，採石場の近くで粗精錬して U_3O_8 換算で４０～８０％のウランを含有するイエローケーキをつくる。イエローケーキは粗精錬工程の違いによって化学組成が異なるため，国際的には U_3O_8 換算での取引が行われている。

(3) インプレースリーチング

ウラン鉱石を採掘せずに，鉱床に浸出液を注入する井戸と浸出液を取り出す井戸を掘って，鉱床から直接ウラン溶液を取り出すウラン浸出法のことである。ウラン浸出液によって硫酸浸出とアルカリ浸出法に分けられる。

この方法が使われるのは，鉱床が砂岩層にあり，この砂岩層の上下が不透水層で挟まれていること，近くに地下水脈がないことなど，特殊な地層条件がみたされており，環境問題が発生しない場合に限られることに注意する必要がある。

(4) カスケード

現在実用化されているガス拡散法や遠心分離法では，一段の分離係数が小さいため，天然ウランを軽水炉用燃料とするためには多段分離操作が必要となる。カスケードとは，この多段分離操作を連続化し，かつ劣化流を還流させ原料ウランの有効活用を図るものである。このカスケードにおいて，各分離段に合流する濃縮流と劣化流のＵ－２３５濃度を同じにし，混合ロスをなくすように，各分離段の流量を調節したものが理想カスケードである。遠心分離法のように小流量分離機の場合に理想カスケードが構成し易い。ガス拡散法のように大流量分離機の場合には，方形カスケードから理想カスケードに近づけたステップカスケードがとられる。

(5) 回収ウラン

ウランを燃料として使用する原子炉の使用済燃料を再処理することによって回収されるウランのことをいう。回収ウラン中のＵ－２３５濃度は，燃焼度等によって異なるが，天然濃度（０．７１％）より高いため，再濃縮すれば燃料として再利用できる。ただし，回収ウラン中には，微量ではあるがＦＰ，プルトニウム，ウラン同位体が含まれるので，加工工程において品質管理や被爆管理が重要となる。ウランの微量同位体として注意しなければならないのはＵ－２３６とＵ－２３２である。Ｕ－２３６は中性子吸収断面積がマトリックスのＵ－２３８と異なるため，Ｕ－２３５濃縮度補償が問題となり，Ｕ－２３２はその娘核種に高エネルギーγ線を放射するＢｉ－２１２やＴｌ－２０８をもっていることに注意する必要がある。

(6) グリーンソルト
四ふっ化ウランの別名であり，常温で緑色の粉末であることからこの名が付けられた。UF_4 は非常に安定な化合物であり，空気中で 200℃程度まで変化せず，取扱いが容易であること，ふっ化してウラン濃縮工程の作業物質である UF_6 に，またアルカリ金属等により還元して金属ウランにもすることができることから，ウラン精製錬の最終製品となっている。UF_4 製造工程の管理が悪いと UO_2 や U_3O_8 等が含まれたり，UF_4 が吸湿性をもつため焼結状態になったりするので注意が必要。

(7) SWU (Separative Work Unit)
ウラン濃縮工程における分離作業単位を表わす。ウランの同位体分離は物質投入量や製品量に比べて，延べ処理量がはるかに大きいので，この延べ処理量がコストを大きく左右する。分離機やカスケードの入出口の流量及び ^{235}Uのモル分率を F, P, W 及び x_F, x_P, x_W とすると分離機やカスケードの分離作業量 δU は

$$\delta U = P\,V(x_P) + W\,V(x_W) - F\,V(x_F)$$
$$V(x) = (2x - 1)\ \ln[x/(1-x)]$$

で表される。分離作業量 δU は F, P, Wと同じ流量や重量の単位をもつが，流量や重量と区別するため SWUを付して，kgSWU あるいはtSWU/yなどの単位を用いる。なお米国では，kgSWU を単に SWUと記す。

(8) ステップカスケード
混合損失のない理想カスケードは各段の流量を変える必要があるため，ガス拡散法のように大型分離機を使い段数を多くしなければならない場合には，大きさの異なる分離機を多数製作することになる（機器製作コストが高くなる）。このため数種類の大きさの分離機を使い理想カスケードに近づけたものがステップカスケードである。現在米国や仏国で稼働中のガス拡散工場は濃縮域 3 ～ 4 ステップ，回収域 2 ～ 3 ステップのステップカスケードである。

(9) ウラン濃縮における最適廃棄濃度
テイル濃度を低くするとSWU（分離作業量）が増加し，テイル濃度を高くすると原料供給量が増加することから，濃縮役務費と原料費の合計が最小になるように決められたテイル濃度。最適廃棄濃度は濃縮役務単価と原料単価の比によって決まり，原料単価が安い場合にはテイル濃度を高くした方が最適となる。通常 0.2～0.3%である。

(10) レーザー濃縮
ウラン濃縮の新手法。従来のガス拡散法やガス遠心分離法がマクロな性質（気体分子の速度分布や圧力分布）の違いを利用した統計的分離法であるのに対し，レーザー法はミクロな原子や分子に同位体選択的にエネルギーを注入し同位体分離を行うものであることから，カスケードが不要となり効率が高く，経済性も高い濃縮法となる可能性があることから，現在世界各国で大規模な研究開発が進められている。レーザー濃縮には，作業物質として金属ウラン蒸気を使う原子法と UF_6 を用いる分子法があり，前者は米国，仏国，日本等が，後者は独国，日本が研究開発を行っている。

問題２．次の各項で，正しいものには○印を，誤っているものには×印をつけよ。また，誤っている場合には，その理由を簡単に記せ。

(1) 六フッ化ウラン（UF_6）は四フッ化ウラン（UF_4）より分子量が大きいため，ウラン濃縮の場合に有利である。
(2) 原子レーザー法は密度の大きい金属ウランを作業物質とするため，従来のガス拡散法やガス遠心分離法よりも高効率で経済性に優れた濃縮法となる可能性がある。
(3) 劣化ウランは価値がないので，ウラン濃縮を行う場合にはテイル濃度をできるだけ低くするほうが良い。

〔解答例〕

(1)－×

UF_4 は常温で固体であるのに対し，UF_6 は56.5℃で気化し，また常温でも蒸気圧が高いので，ガス拡散法やガス遠心分離法の作業物質として用いることができる。

(2)－×

従来のガス拡散法やガス遠心分離法がマクロな性質の違いを利用した統計的分離法であるのに対し，レーザー法はミクロな原子や分子に同位体選択的にエネルギーを注入し同位体分離を行うものであることから，カスケードが不要となり効率が高く，経済性も高い濃縮法となる可能性がある。

(3)－×

テイル濃度を低くするとＳＷＵ（分離作業量）が増加し，テイル濃度を高くすると原料供給量が増加することから，テイル濃度は濃縮役務費と原料費の合計が最小になるように決める必要がある。

問題３．ウラン濃縮の方法には，ガス拡散法，ガス遠心分離法，ノズル法，化学交換法，レーザー法（原子法及び分子法）などがあるが，このうち，化学法，レーザー原子法及びレーザー分子法の原理と特徴について簡単に述べよ。

〔解答例〕

〔化学法〕

原理：　日本ではイオン交換法，フランスでは溶媒抽出法が用いられている。イオン交換法では，①Ｕ－２３５がウラナスイオンよりもウラニルイオンの方に僅かながら濃縮される性質があることを利用して，②ウラニルイオンを選択的に吸着するイオン交換樹脂を用いU-235を濃縮する。一段の分離係数が小さいため，イオン交換樹脂塔に長いウラン吸着帯を形成し，その前方には酸化剤を配し，吸着帯の後方から還元剤で溶出しつつ向流を形成して特殊な方形カスケードとし，濃縮操作の多段連続化を図っている。

特徴：　化学法の一段の分離係数は１．００２程度であり，ガス拡散法よりも小さいため，天然ウランから軽水炉燃料の濃縮度をえるためには２０００～３０００段程度の多段濃縮が必要となるほか，ＳＷＵ当たりの電力消費はガス拡散法より小さいが遠心分離法よりも大きい。しかし，プラントの構成は一般化学プラントと同じで，建設コストは小さい。また，水溶液を使用するため，高濃縮度ウランの製造には適さず，核不拡散上好ましい方法との評価がある。

〔レーザー原子法〕

原理：　電子状態の遷移エネルギは，同位体によって僅かに異なる（同位体シフト）ためＵ－２３５の遷移エネルギに相当する波長のレーザ光（一般に可視，紫外領域）を照射すれば，Ｕ－２３５の電子は励起されるが，Ｕ－２３８の電子は励起されない。これを同位体選択励起という。ここに，さらに適当な波長のレーザ光を照射すると，励起状態にあるＵ－２３５のみが電子を放出して陽イオンとなることを利用する方法である。光イオン化の方法としては，２波長２段階法，３波長３段階法，４波長３段階法が考えられている。陽イオンとなったＵ－２３５は電極によって捕集することができる。

特徴：　原理的には一段で１００％のＵ－２３５が得られる（分離係数が大きい）方法であり，複雑なカスケードを組む必要がなく，濃縮コストの低下を期待できる方法として米国，フランス，日本等で開発が進められている。ただし，高効率レーザーの開発のほか，金属ウランの融点が１１３３°Ｃであることを考えると実用上は２０００°Ｃ以上での蒸気発生が必要となり，化学的に活性な溶融金属ウランの取扱や，高温耐食性材料の開発などが技術課題となっている。

〔レーザー分子法〕

原理：　分子内振動の遷移エネルギは，同位体置換分子によって僅かに異なるため（同位体シフト），$^{235}UF_6$ の分子振動遷移エネルギに相当する波長のレーザ光（赤外領域）を照射すると，$^{235}UF_6$ の分子振動運動は励起されるが，$^{238}UF_6$ のそれは励起されない。これを同位体選択励起という。ここに，さらに適当な波長のレーザ光を照射すると励起された $^{235}UF_6$ の分子振動のみがさらに激しくなり，ついにはＦ原子が解離して $^{235}UF_5$ となる。光解離法には２波長２段階法，赤外多光子解離法がある。$^{235}UF_5$ は固体であるため気体である $U^{238}F_6$ と容易に分離できることを利用するウラン濃縮法である。

特徴：　原理的には一段で１００％のＵ－２３５が得られる（分離係数が大きい）方法であり，複雑なカスケードを組む必要がなく，濃縮コストの低下を期待できる方法として西独，日本等で開発が進められている。作業物質が充分な取扱経験のある UF_6 であり核燃料産業構造を変える必要がないことが原子法に比べ有利であるが，高繰り返し（高速発振）赤外レーザの開発が技術課題となっている。

問題4．次の文章中の空欄に記入すべき語句または数値等を下欄から選び，その記号を記せ。
　　但し，同じ語句または数値等を何度使ってもよい。
　　〔解答例〕　㉚ —ユ

ウラン同位体分離すなわちウラン濃縮は，わが国の【 ① 】やフランスの【 ② 】のような化学交換法を除き，原子または分子の気体状態で行うのが一般的である。

現在，商業化されているウラン濃縮法は，設備容量順で【 ③ 】と【 ④ 】であり，いずれもウラン化合物のひとつである【 ⑤ 】（化学式）を採用している。【 ⑤ 】は常温常圧では無色透明の固体であるが，低圧にしたり加温すると容易に【 ⑥ 】すること，【 ⑦ 】が56.5° Cと低いことなどが，採用の理由である。また，【 ⑤ 】の構成元素である【 ⑧ 】は質量数【 ⑨ 】の同位体のみであり，分離原理からも重要な特質となっており，西独，日本で開発が進められている【 ⑩ 】の作業物質ともなっている。【 ⑩ 】において問題となるのは，【 ⑤ 】が低温では蒸気圧が極めて低いことである。また，この物質は比熱比が【 ⑪ 】と小さく，【 ⑫ 】のような非平衡過程によって過冷却するためには，比熱比の大きい【 ⑬ 】などの不活性な単原子分子と混合する必要がある。

原子蒸気を得るための出発物質としては【 ⑭ 】が用いられるが，融点【 ⑮ 】における蒸気圧は極めて低く，実用上【 ⑯ 】° C以上の高温に加熱する必要がある。米国，フランスで開発が進められている【 ⑰ 】はこの系を用い，一段の【 ⑱ 】が著しく【 ⑲ 】ため，従来の濃縮法のように【 ⑳ 】を組む必要がない等の特長をもっている。

イ．イオン交換法，　ロ．遠心分離法，　ハ．ガス拡散法，　ニ．溶媒抽出法，
ホ．ＡＶＬＩＳ（原子法），　ヘ．ＭＬＩＳ（分子法），　ト．除染係数，　チ．分離係数，
リ．塩素，　ヌ．塩化物，　ル．ふっ素，　ヲ．ふっ化物，　ワ．アルゴン，　カ．酸素，
ヨ．カルコゲン化物，　タ．ハロゲン化物，　レ．融点，　ソ．沸点，　ツ．昇華点，
ネ．臨界点，　ナ．三重点，　ラ．安定，　ム．不安定，　ウ．大きい，　ノ．小さい，
オ．ウラン金属，　ク．二酸化ウラン，　ヤ．UF_6，　マ．UCl_6，　ケ．UF_4，
フ．UCl_4，　コ．18，　エ．19，　テ．35，　ア．36，　サ．1033，　キ．1133，
ユ．1500，　メ．2000，　ミ．2860，　シ．1.004，　エ．1.04，　ヒ．分離ユニット，
ヒ．断熱膨張，　モ．断熱圧縮，　セ．カスケード，　ス．ミキサセトラ　ン．気化

〔解答例〕

①—イ	②—ニ	③—ハ	④—ロ	⑤—ヤ
⑥—ン	⑦—ナ	⑧—ル	⑨—エ	⑩—ヘ
⑪—エ	⑫—ヒ	⑬—ワ	⑭—オ	⑮—キ
⑯—メ	⑰—ホ	⑱—チ	⑲—ウ	⑳—セ

問題5．次の文章中の空欄に記入すべき語句または化学式等を下欄から選べ。但し，同じ語句または化学式等を何度使ってもよい。

〔解答例〕　㉚ —再処理

ウランの化合物であるUF_4は【　①　】とも呼ばれ，常温，常圧で【　②　】色の極めて安定な固体であり取り扱いが容易で，融解塩燃料となるほか，UF_6や金属ウラン製造の原料でもあるため，【　③　】工程の最終製品となっている。

UF_6は常温，常圧では無色透明の固体であるが，高温，高圧状態にすると【　④　】となる。この時大きな【　⑤　】を起こす。輸送容器である30Bシリンダーや48YシリンダーにUF_6を充塡する場合には，シリンダー再加熱時の【　⑥　】事故を避けるため，特に【　⑦　】に注意する必要がある。UF_6は水と激しく反応し，【　⑧　】と【　⑨　】を生成する。UF_6と水が共存する場合は，生成した【　⑨　】がガラスを侵すため，ガラスを容器として使用することはできない。UF_6は金属と反応して一般に【　⑩　】を生成するので容器材料の選定には注意を要する。純金属の中では【　⑪　】，【　⑫　】，【　⑬　】などは比較的耐食性がある。パッキンなどでも通常のゴムは使えないので【　⑭　】系のものを用いるか，金属系のものを用いる必要がある。

UF_4に【　⑮　】を加温接触させて生成する金属ウランは，極めて反応性が高く，ほとんど全ての非金属元素と容易に反応し，多くの金属元素と金属間化合物を形成する。室温の空気中に放置された金属ウランの塊は【　⑯　】酸化するが，この酸化反応は表面に形成された酸化膜によって抑止【　⑰　】。大量のウラン金属粒や切り屑を空気中に放置すると【　⑱　】によって徐々に熱がたまり，700°C以上になると光を発して酸化反応を起こすので，取り扱いには注意を要する。【　⑲　】との反応は極めて遅いので【　⑲　】中に保管するのが火災事故防止に有効であるが，酸化を防ぐためには【　⑳　】中に保管することが必要となる。

ウラン精製錬	グリーンソルト	不燃性油	される	UF_6	Ni
転換	落下破損	圧力変化	されない	UO_2	Pb
ウラン濃縮	液圧破裂	温度変化	黄	UO_2F_2	Mo
再処理	過充塡	体積膨張	緑	HF	W
気体	水	酸化熱	UF_4	Al	
液体	窒素ガス	輻射熱	UF_5	Cu	
固体	フッ素樹脂	迅速に	希土類金属	Ta	
イエローケーキ	パラフィン	ゆっくりと	アルカリ土類金属		

〔解答例〕

①グリーンソルト	②緑	③ウラン精製錬	④液体	⑤体積膨張
⑥液圧破裂	⑦過充塡	⑧UO_2F_2	⑨HF	⑩UF_4
⑪Ni	⑫Cu	⑬Al	⑭フッ素樹脂	⑮アルカリ土類金属
⑯ゆっくりと	⑰される。	⑱酸化熱	⑲水	⑳不燃性油

問題６．次の文章中の空欄の部分に記入すべき語句または数値を記号とともに記せ。

（１）ウラン濃縮カスケードにおいて，製品の濃縮度及び量が一定の場合，【 ① 】を高めると【 ② 】の必要量は増加するが，【 ③ 】は減少するという関係がある。この関係と両者の単価から【 ④ 】がきめられる。廃品ウランの価値を無視できる場合には，【 ④ 】は両者の単価の【 ⑤ 】によって一義的に決定されるという特徴がある。

（２）UF_4 の乾式製造法では，【 ① 】と無水【 ② 】の反応によって UF_4 を製造する。一方，湿式法では，【 ③ 】イオンに $S_2O_4^-$ や Sn^+ を加えるか，または電解還元によって【 ④ 】イオンとし，これに【 ⑤ 】を添加することによって，不溶性の UF_4 を沈澱させる方法がとられる。

〔解答例〕

(1) ①―テイル濃度　②―供給原料　③―濃縮役務量　④―最適廃棄濃度　⑤―比

(2) ①―UO_2　②―HF　③―ウラニル〔または UO_2^{2+})〕
④―ウラナス〔または U^{4+}〕　⑤―フッ酸