

ベローズの解析のための簡易計算手法

1986年12月

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせください。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation)

ベローズの解析のための簡易計算手法

月森和之*, 岩田耕司*, 今津 彰*

要 旨

現在, FBR大型炉のコスト低減方策の一つであるベローズ継手に関するR & Dが動燃事業団において進められている。

本報告書は, ベローズの構造設計評価のために新たに開発した各種簡易解析法, 構造力学的諸特性の簡易評価法および設計公式等について報告するもので, 以下の内容を含む。

- (1) 配管系解析のためのベローズ継手有限要素モデル
(二重円筒ファスニングモデル)
- (2) コンボリューション板厚分布のモデル化
- (3) ベローズ自重(地震荷重)によって発生する応力の簡易評価式
- (4) ベローズのねじりに関する評価法
- (5) コンボリューション毎の寸法のばらつきによって生じるひずみ集中の簡易評価法
- (6) ルートバルジと弾性コラム型座屈の中間領域の座屈評価法
(弾塑性コラム型座屈の簡易評価法)
- (7) ベローズのはりモード固有振動数の簡易評価法
(せん断変形及び回転慣性を考慮した評価法)

これらの計算手法は, FBR配管用ベローズ継手設計方針策定の中で活用されるとともに各R&D試験, 解析結果の検討の中に反映される。

* 大洗工学センター 機器構造開発部 構造工学室

Simplified Analysis Methods for Bellows Analyses

Kazuyuki Tsukimori*, Koji Iwata* and
Akira Imazu*

Abstract

The R & D of the bellows expansion joint, which is one of the cost reduction measures for large scale FBR plants, is now going on in PNC. In addition to various tests and FEM analyses, investigations and examinations of the past studies and evaluation methods have been developed, and some new simplified calculating methods for bellows analyses have been proposed.

In this report the following seven simplified analysis methods are proposed and their applications are illustrated.

- (1) Bellows expansion joint finite element model for the analysis of the piping system with bellows expansion joints
(Double Cylinder Fastening Model)
- (2) Modeling of the convolution thickness distribution
- (3) Simplified evaluation method of stresses generated by the dead load of bellows (or seismic load)
- (4) Evaluation method of the bellows torsion
- (5) Simplified evaluation method of the strain concentration factor generated by the irregularity of the dimensions of each convolution.
- (6) The critical pressure evaluation method of bellows in the transient region between the root bulge and the elastic column type buckling
(Simplified evaluation method of the elastic-plastic column type buckling of bellows)

* Structural Engineering Section, O-arai Engineering Center, PNC.

(7) Simplified evaluation method of the beam mode natural frequency of bellows

(Evaluation method considered the shear deformation and the rotary inertia)

These analysis methods are to be utilized for establishing the design guide of FBR piping bellows expansion joints.

目 次

1. まえがき	1
2. 配管系解析のためのベローズ継手有限要素モデル （二重円筒ファスニングモデル）	3
3. コンポリューション板厚分布のモデル化	32
4. ベローズ自重（地震荷重）によって発生する応力の簡易評価式	47
5. ベローズのねじりに関する評価法	51
6. コンポリューション毎の寸法のばらつきによって生じるひずみ集中の簡易評価法	62
7. ルートバルジと弾性コラム型座屈の中間領域の座屈評価法 （弾塑性コラム型座屈の簡易評価法）	70
8. ベローズのはりモード固有振動数の簡易評価法 （せん断変形及び回転慣性を考慮した評価法）	88
9. あとがき	125
謝 辞	126
附 録（用語説明）	127

1. ま え が き

現在、FBR大型炉のコスト低減方策のひとつであるベローズ継手の適用に関するR&Dが進められている。この中で各種試験、FEM解析の他に従来の研究、評価手法の調査、検討も行われており、ベローズを対象とした簡易計算手法も提案されている。

本書は、こうしたベローズ継手R&D検討の中から生まれたベローズに関する簡易計算手法を取挙げて解説したものである。

これらの手法は、FBR配管用ベローズ継手設計方針策定の中に反映されるとともに、各R&D試験結果の評価の一助として利用される。

以下に、各手法を列挙するとともに若干の注釈を加える。なお、FEM等による解析データがあるものについては極力適用例として比較を行い、簡易手法の妥当性、保守性を示すよう努めた。

① 配管系解析のためのベローズ継手有限要素モデル

これは、ベローズ継手適用配管系の熱膨張変位、配管発生応力、或いは地震応答を評価する場合のベローズ継手のモデル化であり、従来行われている梁要素やバネ要素よりも忠実に特性をモデル化できる。数値解析によりその合理性を示した。(第2章)

② コンボリューション板厚分布のモデル化

ベローズは成形時の加工度の違いにより、コンボリューションの山谷間で板厚が分布する。通常は簡単のため、一様板厚として解析するが、厳密な評価を行う場合は合理的なモデル化が必要となる。ここでは、定式化、評価プログラムの作成を行い、レプリカベローズの実測値と比較してその妥当性を示した。(第3章)

③ ベローズ自重(地震荷重)によって発生する応力の簡易評価式

等分布荷重を受ける両端固定はりのたわみ式とEJMAスタンダードの応力評価式を利用して、自重或いは地震によるベローズの子午線方向最大曲げ応力の簡易評価式を導出した。(第4章)

④ ベローズのねじりに関する評価法

ベローズのねじり剛性を与える厳密式を導出し、FEM解と良く一致することを確認した。また、近似式についても検討した。(第5章)

⑤ コンボリューション毎の寸法のばらつきによって生じるひずみ集中の簡易評価法

ベローズは謂ば直列のバネ系であり、コンボリューション単位の剛性のばらつきがあるため、各コンボリューションの受持つ吸収変位は実際は均一ではない。ここではASME C. C. N - 290 - 1の寸法公差を前提にコンボリューション毎の寸法のばらつきによるひずみの増倍係数を保守的に評価する手法を示した。(第6章)

⑥ 弾塑性コラム型座屈の簡易評価法

ベローズは内圧によって座屈を生じるが、山数の多少によってその挙動は異なり、山数が少な

い場合はルートバルジと呼ばれる軸心の変位を伴わない塑性座屈を生じ、山数が多い場合は弾性範囲でスクワームと呼ばれるオイラータイプの座屈を生じる。両者の中間領域ではオイラータイプの座屈モードを呈するものの塑性域の進展により座屈圧は弾性を仮定する場合よりも低下する。ここでは、FEM解析（半山軸対称弾塑性解析）を援用し、山数をパラメータとして弾塑性コラム型座屈圧を求める手法を示した。（第7章）

⑦ ベローズのはりモード固有振動数の簡易評価法

EJMAスタンダードには薄肉はり理論に基づくベローズのはりモード固有振動数の評価式が与えられているが、FEM解析や実験値と合わないことが知られている。ここでは、せん断変形及び回転慣性を考慮した近似式を導出し、例題においてFEM解と実験値と良く一致することを示した。（第8章）

2. 配管系解析のためのベローズ継手有限要素モデル (二重円筒ファスニングモデル)

ベローズ適用配管系の解析において、ハードウェアを含めたベローズ継手の特性を従来のはり要素、バネ要素以上に忠実に表わすためのモデルであり、ジンバルリング或いはヒンジリングをピンで結合したハードウェアを2つのパイプ要素で、ベローズを1つのパイプ要素で表現し、これら3つの要素をリンクしてベローズ継手モデルを形成する。

Figure List

Fig. 1	Definition of the Hinge-type Bellows Expansion Joint Spring rates	14
Fig. 2	Deformed Shape ($\delta_x = +1$ mm)	15
Fig. 3	Deformed Shape ($\delta_y = +1$ mm)	15
Fig. 4	Deformed Shape ($\delta_z = +1$ mm)	16
Fig. 5	Deformed Shape ($\theta_x = +1$ rad)	16
Fig. 6	Deformed Shape ($\theta_y = +1$ rad)	17
Fig. 7	Deformed Shape ($\theta_z = +1$ rad)	17
Fig. 8	Piping Layout	18
Fig. 9	Piping Model and Result (Step 1)	19
Fig. 10	Piping Model and Result (Step 2)	20
Fig. 11	Piping Model and Result (Step 1) (effect of shearing coefficient)	21
Fig. 12	Piping Model and Result (Step 2) (effect of shearing coefficient)	22

Table List

Tab. 1	Hinge-type Bellows Spring rates of each direction	23
	Attached Figure of Tab. 1	
Tab. 2	Modeling Procedures of Gimbal-type Bellows	26
Tab. 3	Characteristics of three FEM models	27
	(Gimbal-type Bellows)	
Tab. 4	Piping Model Analysis by Beam Model and Fastening Model Step 1 (displacement only)	28
Tab. 5	Piping Model Analysis by Beam Model and Fastening Model Step 2 (disp. + thermal expansion)	29
Tab. 6	Piping Model Analysis by Fastening Model (effect of shearing coefficient) step 1 (displacement only)	30
Tab. 7	Piping Model Analysis by Fastening Model (effect of shearing coefficient) Step 2 (disp. + thermal expansion)	31

(1) 配管要素としてのベローズ継手の有限要素モデル化

ベローズ継手を含む配管系の FEM 解析を行う場合、使用するプログラムの機能によっても異なるが、通常、ベローズ継手の部分を長さのない仮想の 6 自由度バネ要素あるいは、3次元はり要素で置き換える。この章では、これら 2 種類のモデルに比べて、よりベローズ継手の特性に忠実なモデルを提案する。

更に、これら 3 種のモデルを比較し、はり要素モデルと新しいモデルを用いた若干の比較計算例を示す。

(2) 二重円筒ファスニングモデル*

① 概要

ベローズ継手は、ある自由度については柔であるが、ハードウェアに拘束される自由度については比較的剛となる。ここで提案するモデルは、汎用非線形構造解析システム FINAS のファスニング機能¹⁾を利用して、ベローズ継手を柔な円筒要素と剛な円筒要素 (PIPE 2 element) の並列結合として扱う。

以下、これを二重円筒ファスニングモデルと呼ぶ。

② ヒンジ型ベローズ継手の 1 例

以下にモデル化の例として、ヒンジ型ベローズをとりあげて示す。

(a) ヒンジ型ベローズ継手の剛性

Fig. 1 に示す様に、各方向のばね定数を定め、軸方向には充分剛な値、回転方向についてはベローズの曲げばね定数を与える。

・軸方向 $K_x \approx 10^4 \text{ kg/mm}$

$$(K_x = \frac{\pi E d \cdot t_2}{L})$$

・回転方向 $K_{\theta y} = 2.88 \times 10^7 \text{ kg mm/rad}$

$$(K_{\theta y} = \frac{\pi E \cdot d^3 \cdot t_1}{8 L})$$

(b) 寸法

・ベローズ長さ $L = 600 \text{ mm}$ (12 山)

・等価円筒直径 $d = 1000 \text{ mm}$ (ピッチ径程度)

* 補遺 A に要素剛性マトリックスを示す。

・等価円筒肉厚 ($K_x, K_{\theta y}$ の式より算出)

- ベローズコンポリューション $t_1 = 2.768 \times 10^{-3} \text{ mm}$
- ハードウェア $t_2 = 0.12 \text{ mm}$

(c) 材料定数

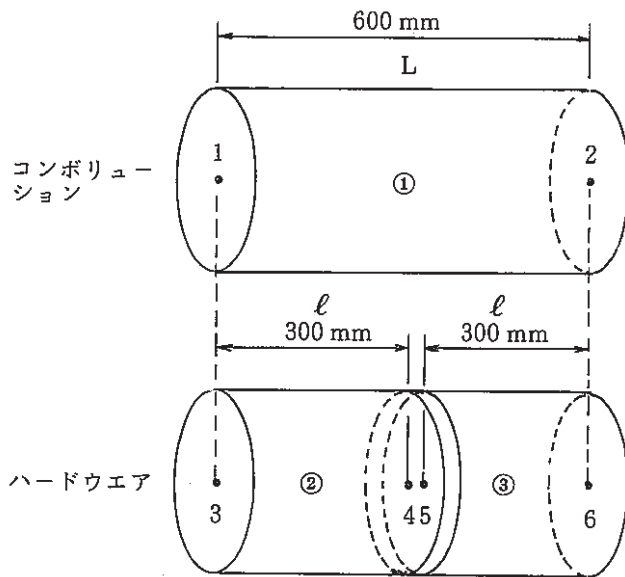
- ・ヤング率 $E = 1.59 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
- ・ポアソン比 $\nu = 0.3$

(d) 有限要素によるモデル化

◦ 要素と節点

ベローズ継手モデルは、下図の様に3つの2節点配管要素 (PIPE 2) と6つの節点から成っている。

要素①は、ベローズコンポリューションを、要素②及び③は、ヒンジ構造を模擬しており、節点4と5の結合部はピン構造部分に相当する。



- Number of nodes : 6
- Number of elements : 3
- Element Code : PIPE 2

◦ 幾何形状

円筒要素の寸法は(b)に従って次の様に定める。

要素① ; 外径 $d = 1000 \text{ mm}$, 長さ $L = 600 \text{ mm}$

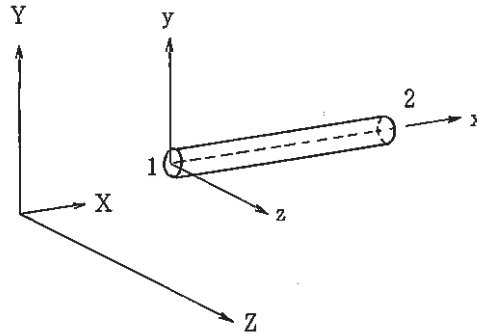
板厚 $t_1 = 2.768 \times 10^{-3} \text{ mm}$

要素②, ③ ; 外径 $d = 1000 \text{ mm}$, 長さ $l = 300 \text{ mm}$,

板厚 $t_2 = 0.12 \text{ mm}$

○ 座標系

要素座標系及び全体座標系を下図のように定める。回転変位については、各軸まわりに右ねじ方向を正とする。



○ ファスニング

ベローズを表わす要素①の節点1とハードウェアを表わす要素②の節点3，同じく節点2と節点6は一体となって動く。又，ヒンジ構造を表わす要素②と③の結合（節点4と5）はピンまわりの回転（ θ_y ）のみ独立で他の自由度は一致する。従ってファスニングの条件は，次の様になる。

- ・ 節点 1と3 ; $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$
- ・ 節点 2と6 ; $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$
- ・ 節点 4と5 ; $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_z$

(e) ベローズ継手モデルの特性

Tab. 1 に各自由度のバネ定数について，はり理論式と，FINASによる計算結果を示す。二重円筒ファスニングモデルによって，継手構造も含め，全ての自由度の剛性が表わされることが確認できる。付表ははり理論による算出方法を示している。

Fig. 2 から Fig. 7 に片端固定で6つの自由度に単位変位を加えた場合の変形形状を示す。破線は変形前，実線は変形後の形状を示す。

ピン回りの変位を与えた場合（Fig. 4，Fig. 6），ハードウェアはほとんど変形せず，ベローズが撓んでいるのがわかる。

③ まとめ

ヒンジ型ベローズ継手を例に挙げてファスニングを利用した有限要素モデルの組立て手順及び特性を示したが，この方法は，ジンバル型ベローズ継手にも容易に適用できる。しかしながら，言うまでもなく，このモデルは，配管系にベローズ継手を組込んだ場合の配管系の挙動解

析を目的としたもので、ベローズ継手そのものの各部の応力解析を行うものではない。

(3) 各種モデルの比較

冒頭でベローズ継手の特性を表わすためにバネ要素やはり要素によるモデル化が行われていることを述べた。Tab.2 ははりモデルと二重円筒ファスニングモデルの形状パラメータの決定手順を対比して示したものである。はりモデルの方が単純ではあるが、曲げやせん断方向の変位に対する反力特性を正確に表わすことはできない。

Tab.3 にジンバルタイプのベローズ継手3種類のモデル(バネモデル、はりモデル、二重円筒ファスニングモデル)について各方向のばね定数の表示式を示す。

バネモデルは、6自由度のばね特性のみを与える要素であり、長さを有しない。はりモデルでは、せん断のばね定数(K_{sz} , K_{sy})はせん断面積 A' を大きくしても高々 $12EI/L^3$ (コンボリューション並み)であるが、実際はハードウエアで受けもつので剛性はかなり高くなる。このような点からも、二重円筒ファスニングモデルはベローズ継手の特性をより忠実に表わせる簡易モデルと言える。

(4) 配管系解析例

① 解析モデル

- 配管レイアウト …… Fig.8 参照
- 配管断面形状
 - 口 径 $d = 1066.8 \text{ mm}$
 - 肉 厚 $t = 14.3 \text{ mm}$
 - エルボ一部 $R = 1066.8 \text{ mm}$
- 配管部材料
 - 配管部, ハードウエア SUS 304
 - ベローズ SUS 316
- ベローズ継手ばね定数他
 - 継手長さ $L = 2100 \text{ mm}$
 - 弾性定数 $E = 19800 \text{ kg/mm}^2 \text{ (R. T)}$
 - ポアソン比 $\nu = 0.3$
 - 軸方向ばね定数 $K_x = 1.273 \times 10^4 \text{ kg/mm (R. T)}$
 - ねじりばね定数 $K_{\theta_x} = 1.224 \times 10^9 \text{ kg mm/rad (R. T)}$
 - 曲げばね定数 $K_{\theta_y} = K_{\theta_z} = 3.587 \times 10^7 \text{ kg mm/rad (R. T)}$

② 有限要素

- 配管部 …… 2 節点配管要素 PIPE2
- ベローズ継手部

・はりモデル (SBEAM2)

断面積	$A = 377.3 \text{ mm}^2$
断面2次モーメント	$I = 1.087 \times 10^6 \text{ mm}^4$
断面2次極モーメント	$I' = 1.31 \times 10^{10} \text{ mm}^4$
せん断面積	$A' = 981.1 \text{ mm}^2$

・二重円筒ファスニングモデル (PIPE2)

コンボリューション等価円筒	直径	$d_1 = 1.0 \times 10^3$
〃	肉厚	$t_1 = 2.768 \times 10^{-3} \text{ mm}$
ハードウェア等価円筒	直径	$d_2 = 1.0 \times 10^3$
〃	肉厚	$t_2 = 0.12 \text{ mm}$
せん断係数		$K_s = 2.00$

③ 荷重条件

◦ step 1 ; 変位負荷

配管端部 A	Y 軸方向の変位	$\delta_{yA} = -20.0 \text{ mm}$
		Z 軸方向 " $\delta_{zA} = 73.0 \text{ mm}$
配管端部 B	Y 軸方向 "	$\delta_{yB} = -25.0 \text{ mm}$
	Z 軸方向 "	$\delta_{zB} = 30.0 \text{ mm}$

◦ step 2 ; 変位+熱膨張

配管端部 A	} step 1 + 配管の熱膨張による伸び ($\Delta T = 530 \text{ }^\circ\text{C}$)
配管端部 B	

④ 解析結果

i) はりモデルと二重円筒ファスニングモデルによる比較

◦ 変位負荷 (step 1)

Fig. 9 解析モデル及び解析結果

Tab.4 解析結果一覧

◦ 変位+熱膨張 (step 2)

Fig. 10 解析モデル及び解析

Tab. 5 解析結果一覧

ii) 二重円筒ファスニングモデルにおけるせん断係数の効果

◦ 変位負荷 (step 1)

Fig. 11 解析モデル及び解析結果

Tab. 6 解析結果一覧

◦変位+熱膨張 (step 2)

Fig. 12 解析モデル及び解析結果

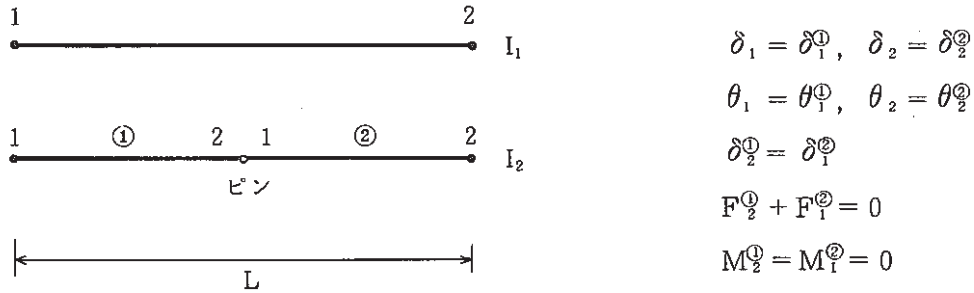
Tab. 7 解析結果一覧

Fig. 9, Fig. 10, Tab. 4 及び Tab. 5 は, はりモデルと二重円筒モデルを用いた配管系静的解析の比較であるが, この解析例では, 代表節点での反力の差異は1%程度であった。

Fig. 11, Fig. 12, Tab. 6 及び Tab. 7 は, 二重円筒ファスニングモデルにおいてせん断変形の影響を考慮した場合と考慮しない場合を比較したものであるが, この解析例では系の挙動としては両者の間に大きな差異は認められない。

補遺 A—ヒンジ型ベローズ要素剛性マトリックス

(2) のモデルについて、単純なはり要素の重ね合わせとして要素剛性マトリックスを求める。



得られた要素剛性マトリックスを次頁に示す。

(参考) はりの一般の要素剛性マトリックス²⁾

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\phi_y)l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} & 0 \\ \frac{12EI_y}{(1+\phi_z)l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\phi_z)l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{(1+\phi_z)l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{(1+\phi_z)l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{(1+\phi_z)l} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi_z)l^2} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{(1+\phi_z)l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)l} & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\phi_y)l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\phi_y)l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{(対称)} & \frac{12EI_y}{(1+\phi_z)l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+\phi_z)l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{(1+\phi_z)l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{(1+\phi_y)l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \tag{5.45}$$

ここに、 $\phi_y = \frac{12EI_z}{GA_{sy}l^2}$, $\phi_z = \frac{12EI_y}{GA_{sz}l^2}$

A_{sy} : y 方向変位に対するせん断断面積, A_{sz} : z 方向変位に対するせん断断面積

ヒンジ型ベローズ要素剛性マトリックス

$(I = I_1 + I_2)$

	δ_{x1}	δ_{y1}	δ_{z1}	θ_{x1}	θ_{y1}	θ_{z1}	δ_{x2}	δ_{y2}	δ_{z2}	θ_{x2}	θ_{y2}	θ_{z2}
F_{x1}	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
F_{y1}		$\frac{12EI}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI}{L^2}$
F_{z1}			$\frac{12EI}{L^3}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0
M_{x1}				$K\theta_x$	0	0	0	0	0	$-K\theta_x$	0	0
M_{y1}					$\frac{3EI}{L}(1 + \frac{I_1}{3I})$	0	0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{3EI}{L}(1 - \frac{I_1}{3I})$	0
M_{z1}						$\frac{4EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI}{L}$
F_{x2}							$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
F_{y2}								$\frac{12EI}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI}{L^2}$
F_{z2}									$\frac{12EI}{L^3}$	0	$\frac{6EI}{L^2}$	0
M_{x2}										$K\theta_x$	0	0
M_{y2}											$\frac{3EI}{L}(1 + \frac{I_1}{3I})$	0
M_{z2}												$\frac{4EI}{L}$

SYM.

参 考 文 献

- 1) 高速炉非弾性構造解析システム使用説明書 V. 8.0 (昭和 60 年)
(PNC SN 952 85 - 03)
- 2) 例えば, 薄板構造解析 (日本鋼構造協会編), 川井他, 培風館, 1973.

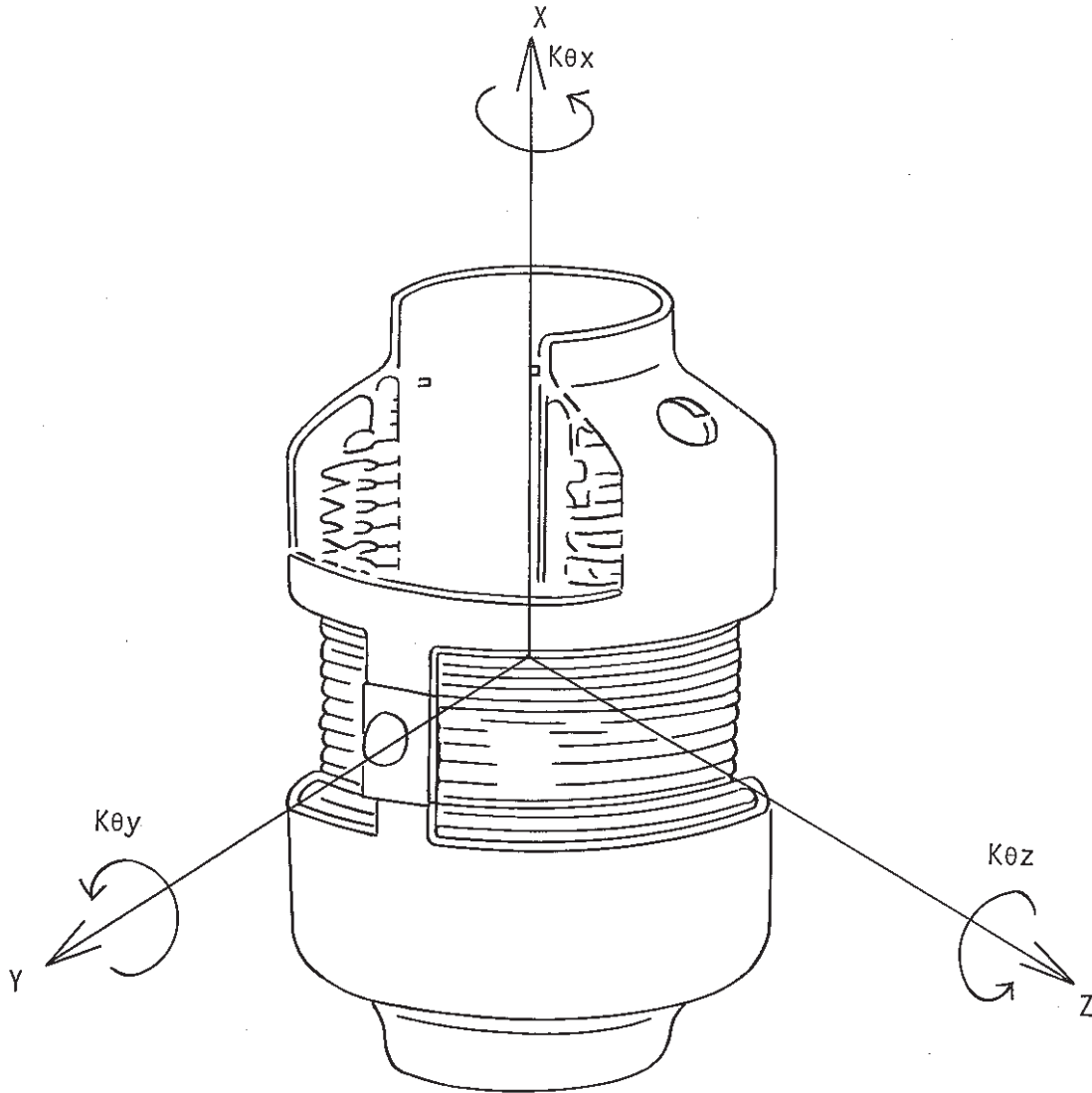


Fig. 1 Definition of the Hinge-type Bellows Expansion Joint Spring Rates

FINAS
DEFORMED SHAPE

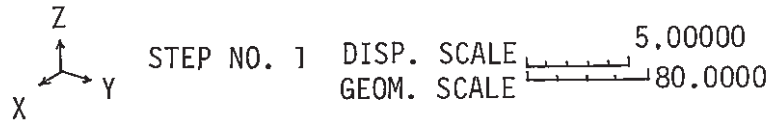
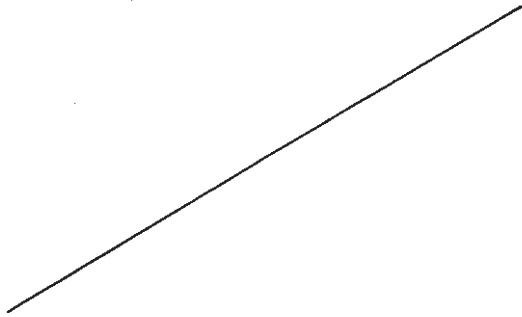


Fig. 2 Deformed Shape ($\delta x = +1\text{mm}$)

FINAS
DEFORMED SHAPE

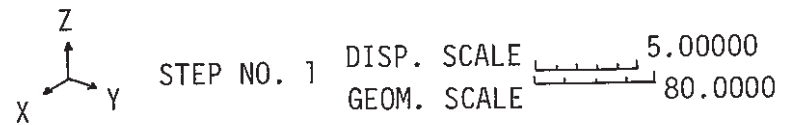
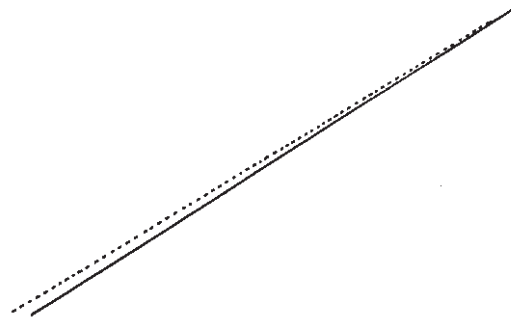
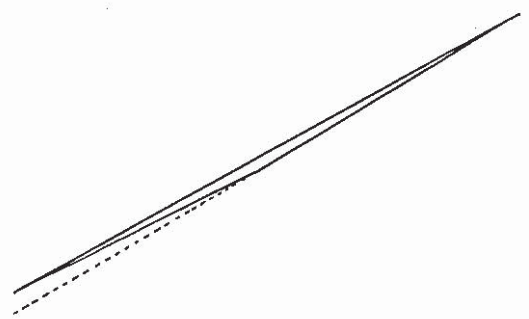


Fig. 3 Deformed Shape ($\delta y = +1\text{mm}$)

FINAS
DEFORMED SHAPE




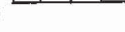
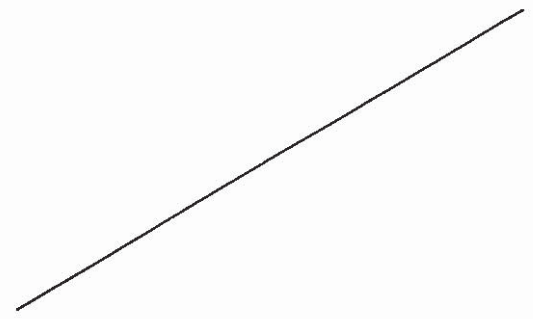
STEP NO. 1 DISP. SCALE  5.00000
GEOM. SCALE  80.0000

Fig. 4 Deformed Shape ($\delta_Z = +1\text{mm}$)

FINAS
DEFORMED SHAPE




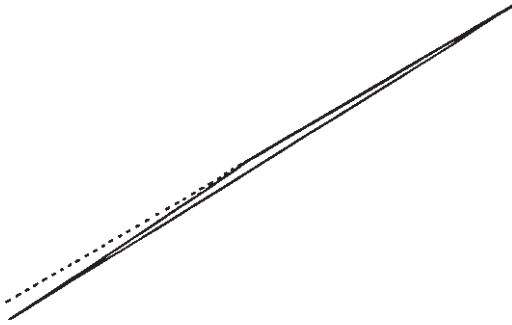
STEP NO. 1 GEOM. SCALE  80.0000

Fig. 5 Deformed Shape ($\theta_X = 1 \text{ rad}$)

FINAS
DEFORMED SHAPE



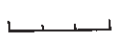

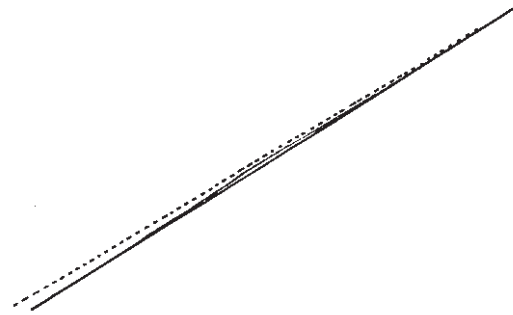
STEP NO. 1
DISP. SCALE  1500.00
GEOM. SCALE  80.0000

Fig. 6 Deformed Shape ($\theta_Y = +1$ rad)

FINAS
DEFORMED SHAPE




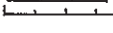
STEP NO. 1
DISP. SCALE  1500.00
GEOM. SCALE  80.0000

Fig. 7 Deformed Shape ($\theta_Z = +1$ rad)

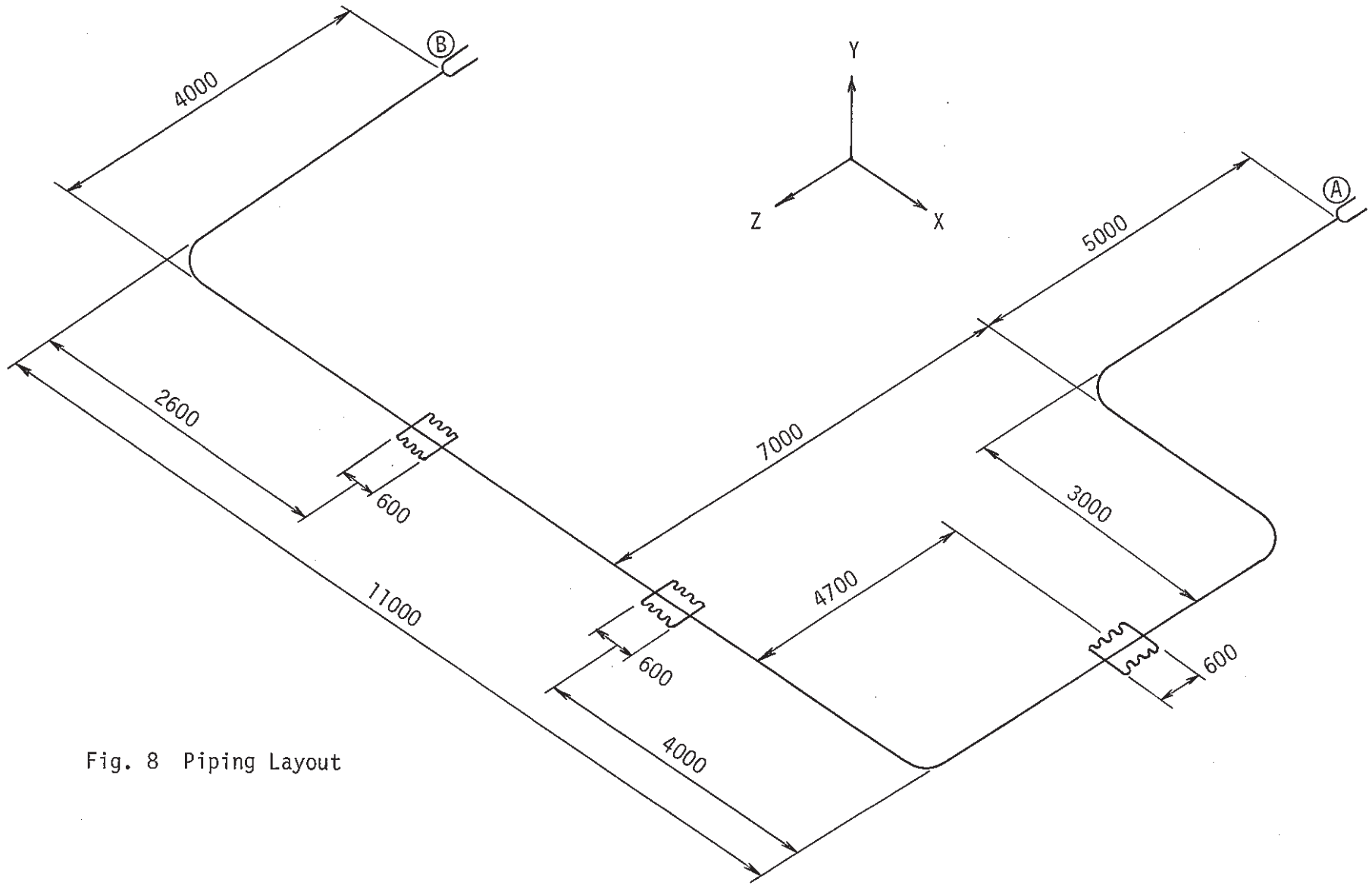


Fig. 8 Piping Layout

o STEP 1 (Displacement only)

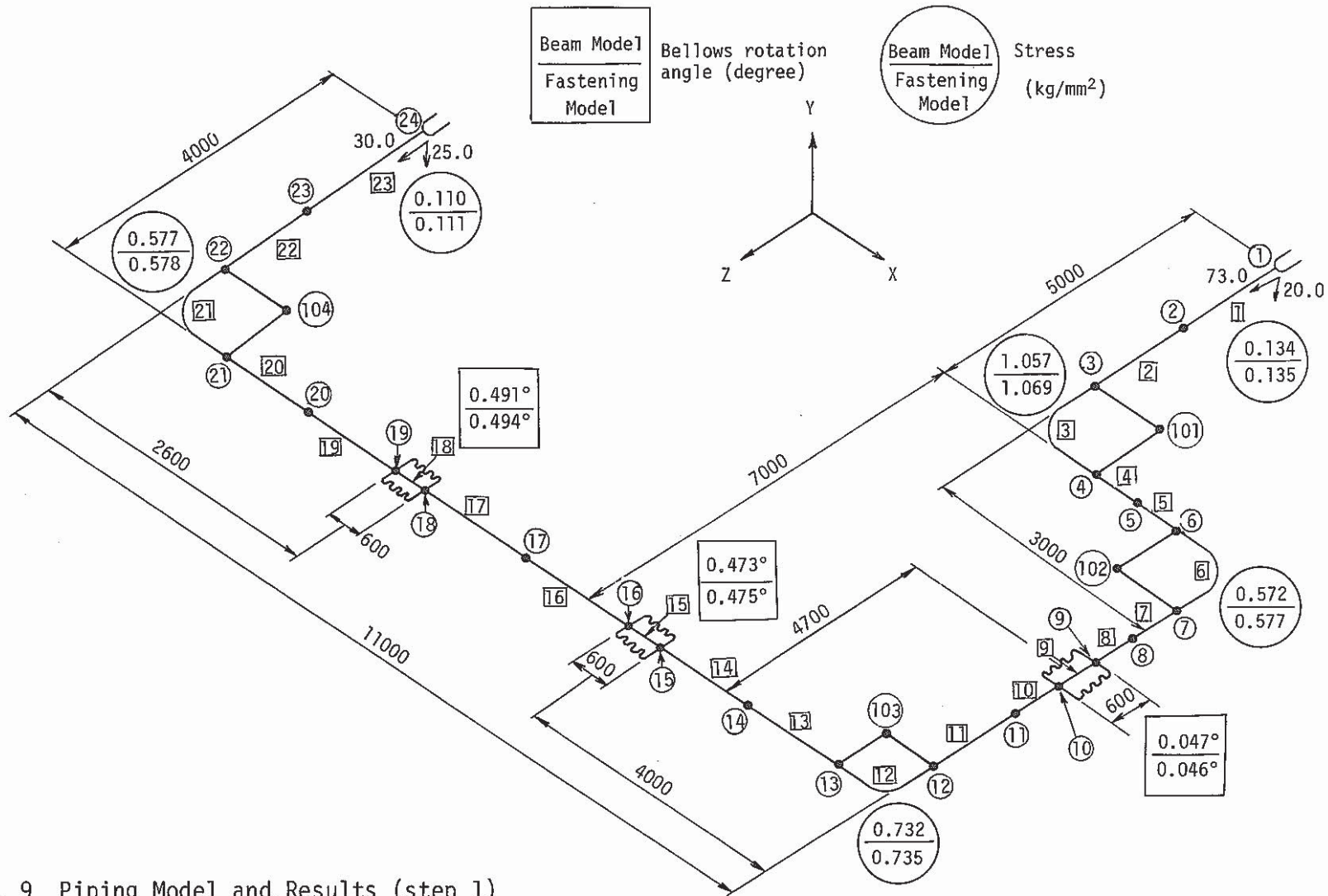


Fig. 9 Piping Model and Results (step 1)

o STEP 2 (Displacement+thermal expansion)

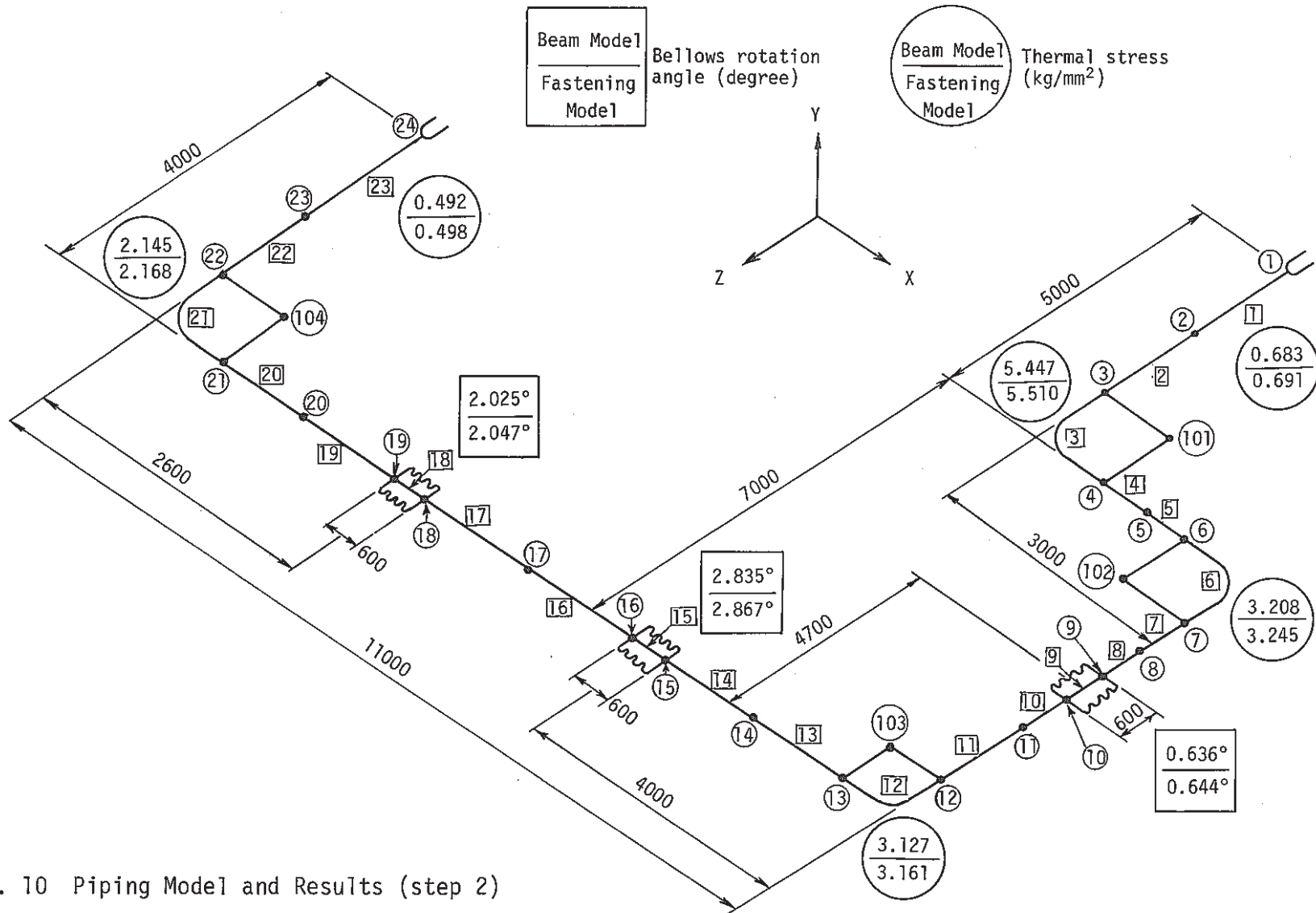


Fig. 10 Piping Model and Results (step 2)

o STEP 1 (Displacement only)

$$\frac{K_s \neq 0}{K_s}$$

Bellows rotation angle (degree)

$$\frac{K_s \neq 0}{K_s}$$

Stress (kg/mm²)

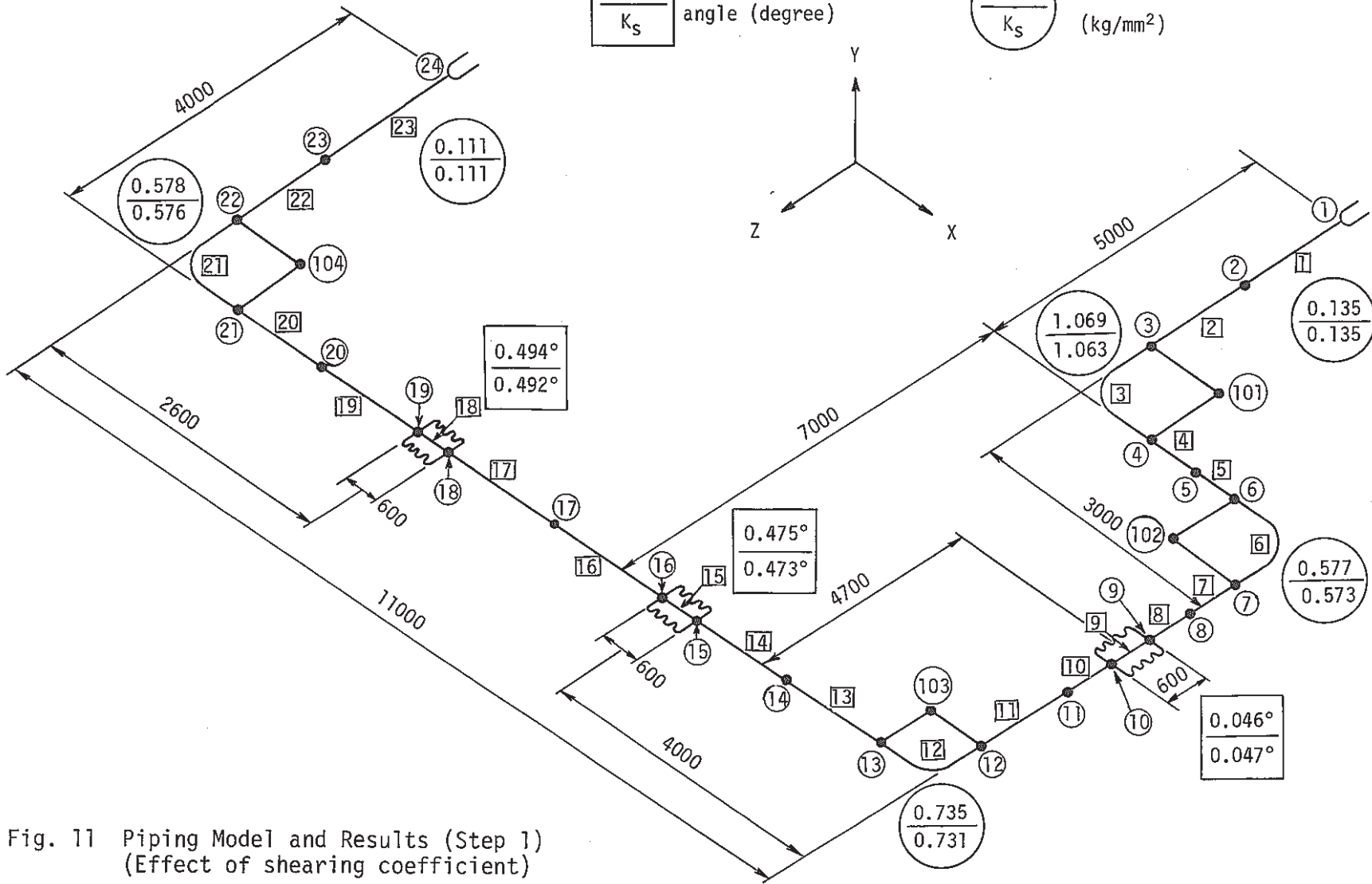
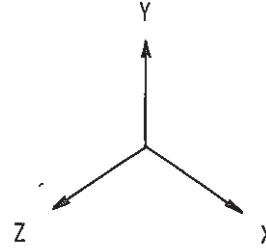


Fig. 11 Piping Model and Results (Step 1)
(Effect of shearing coefficient)

o STEP 2 (Disp.+thermal expansion)

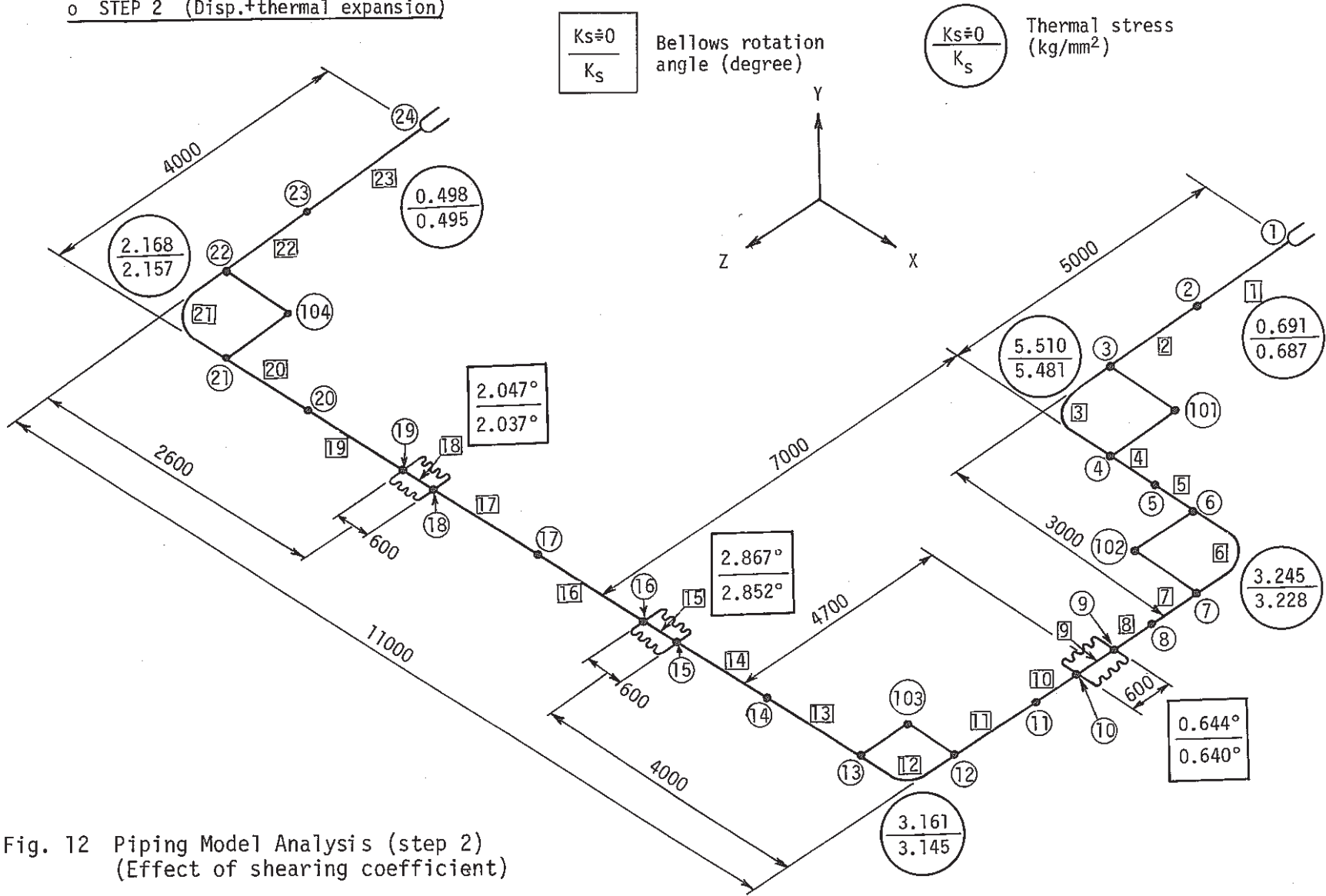


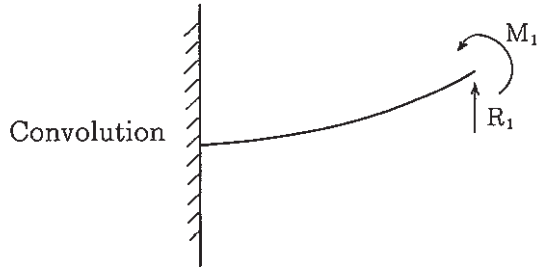
Fig. 12 Piping Model Analysis (step 2)
(Effect of shearing coefficient)

Tab.1 Hinge -type Bellows Spring rates of each direction $I = \frac{\pi d^3 t}{8}$

※1 CASE1: せん断係数考慮, CASE2: せん断係数 = 1.0×10^{-19}

		理論式	FINAS	
			unit disp. (CASE 1 / CASE 2) ※1	
軸 方 向	K_x (kg/mm)	$K_x = k_{1x} + k_{2x}$ $k_{1x} = \frac{E \cdot \pi \cdot d \cdot t_1}{L} = 230.44$ $k_{2x} = \frac{E \cdot \pi \cdot d \cdot t_2}{L} = 9990.26$ $\therefore K_x = 1.02207 \times 10^4$	$K_x = k_{1x} + k_{2x}$ (CASE 1 = CASE 2) $= 2.3014 \times 10^2 + 9.98906 \times 10^3$ $= 1.02195 \times 10^4$	
		曲 げ	$K_y = k_{1y} + k_{2y}$ $k_{1y} = \frac{3EI_1}{L^3} = 2.40046 \times 10^2$ $k_{2y} = \frac{3EI_2}{L^3} = 1.04065 \times 10^4$ $\therefore K_y = 1.06466 \times 10^4$	$K_y = k_{1y} + k_{2y}$ $= 3.74083 \times 10^1$ $+ 1.62154 \times 10^3$ $= 1.65894 \times 10^3$
	$K_z = k_{1z} + k_{2z}$ ※2 $k_{1z} = \frac{4EI_1}{L^3} = 3.200611 \times 10^2$ $k_{2z} \div 0$ $\therefore K_z = 3.200611 \times 10^2$		$K_z = k_{1z} + k_{2z}$ $= 6.16647$ $+ 2.67298 \times 10^2$ $= 2.73464 \times 10^2$	$K_z = k_{1z} + k_{2z}$ $= 7.16479$ $+ 3.10503 \times 10^2$ $= 3.17668 \times 10^2$
ね じ り	$K_{\theta x}$ (kg・mm/rad)	$K_{\theta x} = k_{1\theta x} + k_{2\theta x}$ $k_{1\theta x} = \frac{E \cdot I_1}{L(1+\nu)} = 2.21581 \times 10^7$ $k_{2\theta x} = \frac{E \cdot I_2}{L(1+\nu)} = 9.60604 \times 10^8$ $\therefore K_{\theta x} = 9.82762 \times 10^8$	$K_{\theta x} = k_{1\theta x} + k_{2\theta x}$ (CASE 1 = CASE 2) $= 2.21577 \times 10^7 + 9.60256 \times 10^8$ $\div 9.82413 \times 10^8$	
回 転	$K_{\theta y}$ (kg・mm/rad)	$K_{\theta y} = k_{1\theta y} + k_{2\theta y}$ $k_{1\theta y} = \frac{E \cdot I_1}{L} = 2.88055 \times 10^7$ $k_{2\theta y} \div 0$ $\therefore K_{\theta y} = 2.88055 \times 10^7$	$K_{\theta y} = k_{1\theta y} + k_{2\theta y}$ (CASE 1 = CASE 2) $= 2.88050 \times 10^7 + 2.38419 \times 10^{-7}$ $\div 2.88050 \times 10^7$	
	$K_{\theta z}$ (kg・mm/rad)	$K_{\theta z} = k_{1\theta z} + k_{2\theta z}$ $k_{1\theta z} = \frac{E \cdot I_1}{L} = 2.88055 \times 10^7$ $k_{2\theta z} = \frac{E \cdot I_1}{L} = 1.24878 \times 10^9$ $\therefore K_{\theta z} = 1.27758 \times 10^9$	$K_{\theta z} = k_{1\theta z} + k_{2\theta z}$ (CASE 1 = CASE 2) $= 2.88050 \times 10^7 + 1.24833 \times 10^9$ $= 1.27713 \times 10^9$	
せ ん 断	K_{sz} (kg/mm)	$K_{sz} = k_{1sz} + k_{2sz}$ $k_{1sz} = \frac{12EI_1}{L^3} = 9.60183 \times 10^2$ $k_{2sz} = \frac{12EI_2}{L^3} = 4.25864 \times 10^4$ $\therefore K_{sz} = 4.35466 \times 10^4$	$K_{sz} = k_{1sz} + k_{2sz}$ $= 4.23605 \times 10^1$ $+ 1.83621 \times 10^3$ $= 1.87857 \times 10^3$	$K_{sz} = k_{1sz} + k_{2sz}$ $= 9.60167 \times 10^2$ $+ 4.16111 \times 10^4$ $= 4.25713 \times 10^4$
		$K_{sz} = k_{1sz} + k_{2sz}$ $k_{1sz} = \frac{12EI_1}{L^3} = 9.60183 \times 10^2$ $k_{2sz} = \frac{12EI_2}{L^3} = 4.25864 \times 10^4$ $\therefore K_{sz} = 4.35466 \times 10^4$	$K_{sz} = k_{1sz} + k_{2sz}$ $= 4.23605 \times 10^1$ $+ 1.83621 \times 10^3$ $= 1.87857 \times 10^3$	$K_{sz} = k_{1sz} + k_{2sz}$ $= 9.60167 \times 10^2$ $+ 4.16111 \times 10^4$ $= 4.25713 \times 10^4$

※2 Attached Figure of Tab. 1

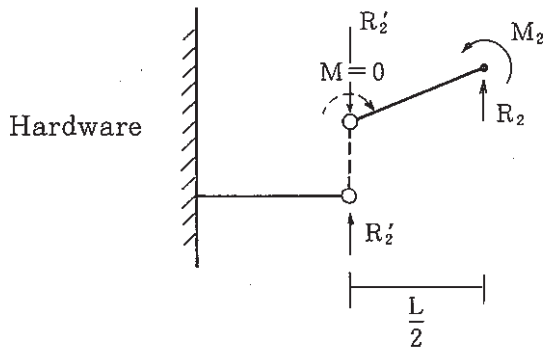


① : $F = K \delta \quad \delta = 1 \therefore F = K$

② : $R_1 + R_2 - F = 0$

$$w_{R1} = \frac{R_1 L^3}{3EI_1}, \quad w_{M1} = \frac{M_1 L^2}{2EI_1}$$

$$\theta_{R1} = \frac{R_1 L^2}{2EI_1}, \quad \theta_{M1} = \frac{M_1 L}{EI_1}$$



③ :
$$\begin{cases} w_{R1} + w_{M1} = 1 \\ \theta_{R1} + \theta_{M1} = \frac{2}{L} \end{cases}$$

from eqs. ③
$$\begin{cases} 2R_1 L + 3M_1 = \frac{6EI_1}{L^2} \\ R_1 L + 2M_1 = \frac{4EI_1}{L^2} \end{cases}$$

$$\therefore M_1 = \frac{2EI_1}{L^2}, \quad R_1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} R_2 + R_2' = 0 \\ M_2 - R_2' \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M_2 + R_2 \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} M_1 + M_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 - R_2 \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\therefore R_2 = \frac{2M_1}{L} = \frac{4EI_1}{L^3}$$

$$\left[R_1 = 0, R_2 = \frac{4EI_1}{L^3} \right]$$

then from eq. ① and ② $F = K = R_2 = \frac{4EI_1}{L^3}$

Tab.2 Modeling Procedures of Gimbal-type Bellows

Beam Model (SBEAM2)	Double-Cylinder Fastening Model (PIPE2)
<p>断面積</p> $A = \frac{L \cdot K_x}{E}$	<p>d_1 : ベローズコンボリューションのピッチ径</p>
<p>ねじり</p> $I' = \frac{L(1+\nu) \cdot K_{\theta x}}{E}$	$t_1 = \frac{8L \cdot K_{\theta y}}{\pi E d_1^3}$
<p>回転</p> $I = \frac{L \cdot K_{\theta y}}{E}$	$d_2 = \sqrt{\frac{\frac{8L(1+\nu) \cdot K_{\theta x} - d_1^3 t_1}{E \pi}}{\frac{L \cdot K_x}{E \pi} - d_1 t_1}}$
<p>* 参考</p> <p>有効せん断面積</p>	$t_2 = \frac{1}{d_2} \left(\frac{L \cdot K_x}{E \pi} - d_1 t_1 \right)$
$A' = \frac{6(1+\nu) IL \cdot K_z}{3EI - L^3 \cdot K_z}$	<p>せん断係数 K_s.</p> $K_s = \frac{(d_1 t_1 + d_2 t_2)}{(1+\nu)} \left(\frac{E \pi}{2LK_{sz}} - \frac{L^2}{3(d_1^3 t_1 + d_2^3 t_2)} \right)$
	<p>コンボリューション等価円筒 $\left\{ \begin{array}{l} \text{直径 } d_1 \\ \text{肉厚 } t_1 \end{array} \right.$</p> <p>ハードウェア等価円筒 $\left\{ \begin{array}{l} \text{直径 } d_2 \\ \text{肉厚 } t_2 \end{array} \right.$</p>

Tab.3 Characteristics of three FEM models (Gimbal - type bellows)

	バネモデル	梁 (SBEAM2) モデル	二重円筒ファスニング (PIPE 2) モデル
軸方向 K _x	K _x	$\frac{EA}{L}$	$\frac{E \pi (d_1 t_1 + d_2 t_2)}{L}$
ねじり K _{θx}	K _{θx}	$\frac{EI'}{L(1+\nu)}$	$\frac{E \pi (d_1^3 t_1 + d_2^3 t_2)}{8L(1+\nu)}$
回転 K _{θz} , K _{θy}	K _{θz} , K _{θy}	$\frac{EI}{L}$	$\frac{E \pi d_1^3 t_1}{8L}$
せん断 K _{sz} , K _{sy}	K _{sz} , K _{sy}	$\frac{12EI}{L^3} \left/ \left(\frac{24(1+\nu)I}{L^2 A'} + 1 \right) \right.$ せん断変形補正分	$\frac{1}{\left(\frac{2L^3}{3E\pi(d_1^3 t_1 + d_2^3 t_2)} + \frac{2(1+\nu)K_s L}{E\pi(d_1 t_1 + d_2 t_2)} \right)}$
曲げ (参考) K _z , K _y	—————	$\frac{3EI}{L^3} \left/ \left(\frac{6(1+\nu)I}{L^2 A'} + 1 \right) \right.$ せん断変形補正分	$\frac{E \pi d_1^3 t_1}{2L^3}$ (せん断変形無視)

K_s : せん断係数

Tab. 4 Piping Model Analysis by Beam Model and Fastening Model
step 1 (displacement only)

節点	主要節点	ベローズ部の要素	相対変位角 (ベローズ端)	曲げ (kg・mm)	ねじり (kg・mm)	せん断 (kg)	軸反力 (kg)
①	①～②	SBEAM 2	—	1.64×10^6	-1.26×10^5	137.5	-172.4
	(直管)	PIPE 2 (FAS)	—	※ 1.66×10^6	-1.08×10^5	138.6	※-174.5
③	③～④	SBEAM 2	—	7.98×10^4	-9.60×10^5	219.9	17.2
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	6.78×10^4	※ -9.72×10^5	※222.4	14.2
⑥	⑥～⑦	SBEAM 2	—	5.20×10^5	4.01×10^4	137.5	172.4
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	5.25×10^5	3.67×10^4	138.6	※174.5
⑨	⑨～⑩	SBEAM 2	0.047°	1.08×10^5	-5.72×10^3	137.5	-172.4
	(ベローズ)	PIPE 2 (FAS)	0.046°	8.96×10^4	-8.25×10^3	138.6	-174.5
⑫	⑫～⑬	SBEAM 2	—	1.23×10^5	-6.56×10^5	219.9	-17.2
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	9.87×10^4	-6.63×10^5	※222.4	-14.2
⑮	⑮～⑯	SBEAM 2	0.473°	3.38×10^5	8.02×10^4	137.5	-172.4
	(ベローズ)	PIPE 2 (FAS)	0.475°	3.41×10^5	6.28×10^4	138.6	-174.5
⑱	⑱～⑲	SBEAM 2	0.491°	2.68×10^5	8.02×10^4	137.5	-172.4
	(ベローズ)	PIPE 2 (FAS)	0.494°	2.69×10^5	6.28×10^4	138.6	-174.5
㉑	㉑～㉒	SBEAM 2	—	5.20×10^5	8.02×10^4	137.5	-172.4
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	5.23×10^5	6.28×10^4	138.6	-174.5
㉔	㉔～㉕	SBEAM 2	—	1.35×10^6	-1.15×10^4	137.5	172.4
	(直管)	PIPE 2 (FAS)	—	1.37×10^6	-5.96×10^3	138.6	※174.5

※：最大値

Tab. 5 Piping Model Analysis by Beam Model and Fastening Model
 step 2 (disp + thermal expansion)

節点	主要節点	ベローズ部の要素	相対変位角 (ベローズ端)	曲げ (kg・mm)	ねじり (kg・mm)	せん断 (kg)	軸反力 (kg)
①	①～②	SBEAM 2	—	8.39×10^6	-1.26×10^5	575.5	-869.3
	(直管)	PIPE 2 (FAS)	—	※ 8.48×10^6	-1.08×10^5	581.9	-879.3
③	③～④	SBEAM 2	—	7.98×10^4	-4.97×10^6	1043.4	17.2
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	6.78×10^4	※ -5.02×10^6	※ 1055.3	14.2
⑥	⑥～⑦	SBEAM 2	—	2.93×10^6	4.01×10^4	576.9	869.6
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	2.96×10^6	3.67×10^4	583.2	※ 879.6
⑨	⑨～⑩	SBEAM 2	0.636°	5.80×10^5	-5.72×10^3	577.1	-869.3
	(ベローズ)	PIPE 2 (FAS)	0.644°	5.84×10^5	-8.25×10^3	583.5	-879.3
⑫	⑫～⑬	SBEAM 2	—	1.23×10^5	-2.85×10^6	1042.9	-17.2
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	9.87×10^4	-2.88×10^6	1054.8	-14.2
⑮	⑮～⑯	SBEAM 2	2.835°	1.64×10^6	8.02×10^4	577.1	-869.3
	(ベローズ)	PIPE 2 (FAS)	2.867°	1.66×10^6	6.28×10^4	583.5	-879.3
⑱	⑱～⑲	SBEAM 2	2.025°	8.97×10^5	8.02×10^4	577.1	869.3
	(ベローズ)	PIPE 2 (FAS)	2.047°	9.06×10^5	6.28×10^4	583.5	-879.3
㉑	㉑～㉒	SBEAM 2	—	1.95×10^6	8.02×10^4	577.4	-869.0
	(エルボ)	PIPE 2 (FAS)	—	1.98×10^6	6.28×10^4	583.8	-879.0
㉔	㉔～㉕	SBEAM 2	—	6.05×10^6	-1.15×10^4	578.8	869.3
	(直管)	PIPE 2 (FAS)	—	6.12×10^6	-5.96×10^3	585.2	879.3

※：最大値

Tab. 6 Piping Model Analysis by Fastening Model (Effect of shearing coefficient)
step 1 (displacement only)

節点	主要節点	せん断係数	相対変位角 (ベローズ端)	曲 げ (kg・mm)	ねじり (kg・mm)	せん断 (kg)	軸反力 (kg)
①	①～②	$K_s \doteq 0$	—	1.66×10^6 ※2	-1.08×10^5	138.6	-174.5 ※2
	(直 管)	※1 K_s	—	1.65×10^6	-1.07×10^5	137.9	-173.6
③	③～④	$K_s \doteq 0$	—	6.78×10^4	-9.72×10^5 ※2	222.4 ※2	14.2
	(エルボ)	※1 K_s	—	6.76×10^4	-9.67×10^5	221.3	14.2
⑥	⑥～⑦	$K_s \doteq 0$	—	5.25×10^5	3.67×10^4	138.6	174.5 ※2
	(エルボ)	※1 K_s	—	5.21×10^5	3.66×10^4	137.9	173.6
⑨	⑨～⑩	$K_s \doteq 0$	0.046°	8.96×10^4	-8.25×10^3	138.6	-174.5 ※2
	(ベローズ)	※1 K_s	0.047°	8.91×10^4	-8.22×10^3	137.9	-173.5 ※2
⑫	⑫～⑬	$K_s \doteq 0$	—	9.87×10^4	-6.63×10^5	222.4 ※2	-14.2
	(エルボ)	※1 K_s	—	9.83×10^4	-6.60×10^5	221.3	-14.2
⑮	⑮～⑯	$K_s \doteq 0$	0.475°	3.41×10^5	6.28×10^4	138.6	-174.5 ※2
	(ベローズ)	※1 K_s	0.473°	3.39×10^5	6.26×10^4	137.9	-173.5 ※2
⑱	⑱～⑲	$K_s \doteq 0$	0.494°	2.69×10^5	6.28×10^4	138.6	-174.5 ※2
	(ベローズ)	※1 K_s	0.492°	2.68×10^5	6.26×10^4	137.9	-173.5 ※2
㉑	㉑～㉒	$K_s \doteq 0$	—	5.23×10^5	6.28×10^4	138.6	-174.5 ※2
	(エルボ)	※1 K_s	—	5.21×10^5	6.26×10^4	137.9	-173.6
㉔	㉔～㉕	$K_s \doteq 0$	—	1.37×10^6	-5.96×10^3	138.6	174.5 ※2
	(直 管)	※1 K_s	—	1.36×10^6	-5.94×10^3	137.9	173.6

※1 : $K_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{r_{out}^2 + r_{out} \cdot r_{in} + r_{in}^2}{r_{out}^2 + r_{in}^2}$ (中空円形断面のせん断係数)

※2 : 最大値

Tab. 7 Piping Model Analysis by Fastening Model (Effect of shearing coefficient)
step 2 (disp.+thermal expansion)

節点	主要節点	せん断係数	相対変位角 (ベローズ端)	曲 げ (kg・mm)	ねじり (kg・mm)	せん断 (kg)	軸反力 (kg)
①	(①)～(②)	$K_s \doteq 0$	—	※2 8.48×10^6	-1.08×10^5	581.9	-879.3
	(直 管)	※1 K_s	—	8.44×10^6	-1.07×10^5	578.9	-874.7
③	(③)～(④)	$K_s \doteq 0$	—	6.78×10^4	※2 -5.02×10^6	※2 1055.3	14.2
	(エルボ)	※1 K_s	—	6.76×10^4	-5.00×10^6	1049.8	14.2
⑥	(⑥)～(⑦)	$K_s \doteq 0$	—	2.96×10^6	3.67×10^4	583.2	※2 879.6
	(エルボ)	※1 K_s	—	2.94×10^6	3.66×10^4	580.3	875.0
⑨	(⑨)～(⑩)	$K_s \doteq 0$	0.644°	5.84×10^5	-8.25×10^3	583.5	-879.3
	(ベローズ)	※1 K_s	0.640°	5.81×10^5	-8.23×10^3	580.6	-874.7
⑫	(⑫)～(⑬)	$K_s \doteq 0$	—	9.87×10^4	-2.88×10^6	1054.8	-14.2
	(エルボ)	※1 K_s	—	9.83×10^4	-2.87×10^6	1049.4	-14.2
⑮	(⑮)～(⑯)	$K_s \doteq 0$	2.867°	1.66×10^6	6.28×10^4	583.5	-879.3
	(ベローズ)	※1 K_s	2.852°	1.65×10^6	6.26×10^4	580.6	-874.7
⑱	(⑱)～(⑲)	$K_s \doteq 0$	2.047°	9.06×10^5	6.28×10^4	583.5	-879.3
	(ベローズ)	※1 K_s	2.037°	9.02×10^5	6.26×10^4	580.6	-874.7
㉑	(㉑)～(㉒)	$K_s \doteq 0$	—	1.98×10^6	6.28×10^4	583.8	-879.0
	(エルボ)	※1 K_s	—	1.97×10^6	6.26×10^4	580.8	-874.4
㉔	(㉓)～(㉔)	$K_s \doteq 0$	—	6.12×10^6	-5.96×10^3	585.2	879.3
	(直 管)	※1 K_s	—	6.08×10^6	-5.94×10^3	582.2	874.7

※1 : $K_s = \frac{4}{3} \cdot \frac{r_{out}^2 + r_{out} \cdot r_{in} + r_{in}^2}{r_{out}^2 + r_{in}^2}$ (中空円形断面のせん断係数)

※2 : 最大値

3. コンボリユーション板厚分布のモデル化

ベローズは液圧成形によって板厚は一様とはならず、山谷の間で板厚は分布する。ベローズに発生する応力等を正確に解析するためには、コンボリユーションの板厚分布を考慮することが不可欠である。ここでは、ベローズの成形過程を単軸引張による塑性加工と仮定してコンボリユーションの任意の位置での板厚を求める式を導出する。

Figure List

Fig. 1	Change of tube cross section by bellows forming	34
Fig. 2	Symbols of convolution	35
Fig. 3	Distribution of thickness (ex. 1, case 1)	39
Fig. 4	Distribution of thickness (ex. 1, case 2)	40
Fig. 5	Distribution of thickness (ex. 2)	41

Table List

Tab. 1	Comparison with measured values (ex. 1)	37
Tab. 2	Comparison with measured values (ex. 2)	38

(1) 成形によって生じる子午線方向の肉厚分布

ベローズコンプレッションの成形に際しては、液圧によって素管を型に沿って膨らませる訳であるが、軸方向に圧縮荷重を加えることによって成形加工を容易にしている。即ち、理想的には単軸引張による塑性加工とみなせる。

下図の様に素管のリング状の要素(1)が成形によって(2)のように引延ばされたとすると、体積一定の条件から、

$$\pi d_o t_o ds = \pi d \cdot t \cdot ds'$$

引張方向と直交する方向の拘束がないものとする、

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{t}{t_o} \quad (1-1)$$

従って、

$$t = t_o \sqrt{\frac{d_o}{d}} \quad (1-2)$$

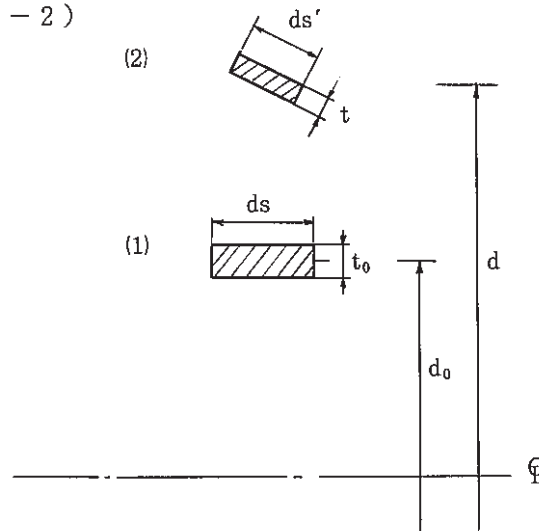


Fig.1 Change of tube cross section by Bellows forming

次に子午線方向の肉厚の分布を考える。ベローズの形状を次項下図の様に置くと、各領域の任意の直径 \$d\$ は、パラメータ \$s\$ を介して次の様に与えられる。

(I) 谷アール部

$$d = d_o + \frac{q}{2} (1 - \cos \theta) \quad , \quad s = \frac{q\theta}{4} \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}) \quad (1-3a)$$

or

$$d = d_o + \frac{q}{2} (1 - \cos (\frac{4s}{q})) \quad (0 \leq s < \frac{\pi q}{8}) \quad (1-3b)$$

(II) 直線部

$$d = d_o + \frac{q}{2} + 2 (s - \frac{\pi q}{8}) \quad (\frac{\pi q}{8} \leq s < H + \frac{\theta}{2} (\frac{\pi}{4} - 1)) \quad (1-4)$$

(III) 山アール部

$$d = d_o + 2 \left(H - \frac{q}{4} \right) + \frac{q}{2} \sin \theta, \quad s = H + \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) + \frac{q}{4} \theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

(1-5a)

or

$$d = d_o + 2H - \frac{q}{2} \left\{ 1 - \sin \frac{4}{q} \left(s - H + \frac{q}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right\}$$

$$\left(H + \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \leq s \leq H + \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) \quad (1-5b)$$

式(1-3), (1-4), (1-5)を式(1-2)に用いると, コンボリューションの任意の位置での肉厚 t が得られる。

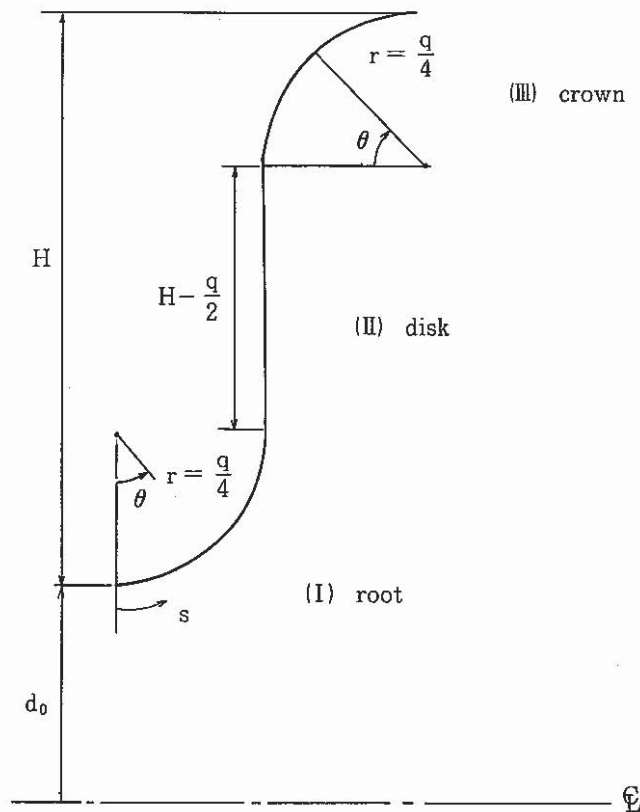


Fig. 2 Symbols of Convolution

式(1-2)について、近似式として次式を考慮する。

$$t = t_0 \sqrt{\frac{d_0}{d}} = t_0 \sqrt{\frac{d_0}{d_0 + \Delta d}}$$

$$\approx t_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{d_0}\right) \quad (1-6)$$

式(1-6)に式(1-3)～式(1-5)を用いると、

(I) 谷アール部

$$t = t_0 \left\{ 1 - \frac{q}{4d_0} \left(1 - \cos\left(\frac{4s}{q}\right)\right) \right\} \quad \left(0 \leq s < \frac{\pi q}{8}\right) \quad (1-7)$$

$$= t_0 \left\{ 1 - \frac{q}{4d_0} + \frac{q}{4d_0} \cos\left(\frac{4s}{q}\right) \right\}$$

(II) 直線部

$$t = t_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2d_0} \left(2s - \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \right\}$$

$$= t_0 \left\{ 1 + \frac{q}{4d_0} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{s}{d_0} \right\} \quad \left(\frac{\pi q}{8} \leq s < H + \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)\right) \quad (1-8)$$

(III) 山アール部

$$t = t_0 \left[1 - \frac{1}{2d_0} \left\{ 2H - \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \sin \frac{4}{q} \left(s - H + \frac{q}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right\} \right]$$

$$= t_0 \left\{ 1 - \frac{1}{d_0} \left(H - \frac{q}{4}\right) - \frac{q}{4d_0} \sin \frac{4}{q} \left(s - H + \frac{q}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right\}$$

$$\left(H + \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) \leq s \leq H + \frac{q}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) \quad (1-9)$$

(2) ASME C. C. N-290-1におけるベローズ肉厚に関する基本寸法公差 (basic tolerance) 規定

ASME C. C. N-290-1では、ベローズ各山の基本寸法公差 (basic tolerance) として肉厚に関し次の規定を設けている。

(I) 山頂での肉厚 (t_c) 公差

$$\pm \left[1.05 - 0.95 \left(\frac{D_i}{D_o}\right)^{\frac{1}{2}} \right] t \quad (2-1)$$

(II) 谷底での肉厚 (t_r) 公差

$$\pm 0.10 t \quad (2-2)$$

上式において、 D_i は短管の内径 ($\approx d_0 + 2H$)、 t は公称肉厚である。

式(2-1)の寸法公差と式(1-2)で表わされる山頂肉厚の関係を調べる。

$$t \left[1 \pm \left(1.05 - 0.95 \sqrt{\frac{D_i}{D_o}}\right) \right] - t \sqrt{\frac{D_i}{D_o}} \quad \left(\frac{D_i}{D_o} < 1\right)$$

$$= \begin{cases} t \left(2.05 - 1.95 \sqrt{\frac{D_i}{D_o}} \right) & (2-3a) \\ -t \left[0.05 \left(1 + \sqrt{\frac{D_i}{D_o}} \right) \right] & (2-3b) \end{cases}$$

上式からわかる様に C. C. N-290-1 の寸法規定は、公称寸法で理想的な成形によって得られた山頂の肉厚 $t \sqrt{\frac{D_i}{D_o}}$ に対し、マイナス公差で、公称肉厚の 5% と成形後山頂肉厚（理想化）の 5% の和となっており、呼び径に対してコンポリューション寸法が相対的に大きくなると見かけ上公差は厳しくなる。プラス公差については、公称肉厚に対し、マイナス公差と同じ幅を取っており、液圧成形ベローズを対象とした場合、適当とは言えない。

山頂の肉厚公差については、若干厳しくなるが、成形後の山頂肉厚（理想化）をベースにした次の様な公差の方が妥当と考えられる。

$$t_c \sim t \sqrt{\frac{D_i}{D_o}} \pm 0.10 t \sqrt{\frac{D_i}{D_o}} \quad (2-4)$$

但し、上式において、公差の幅は式(2-2)に倣っている。

(3) 実測値との比較

(ex. 1)

- 公 称 肉 厚 $t = 2 \text{ mm}$
- 短 管 内 径 $D_i = 1100 \text{ (T社)}, 1096 \text{ (O社)}$
- ベ ロ ー ズ 外 径 $D_o = 1224 \text{ (T社)}, 1220 \text{ (O社)}$
- ピ ッ チ $q = 50$
- 山 高 $H = 60$
- 素材板厚(実測) $t^* = 2.14 \text{ (T社)}, 1.91 \text{ (O社)}$

Tab.1 Comparison with measured values (ex.1)

		山 頂 肉 厚 $t_c \text{ (mm)}$	谷 底 肉 厚 $t_r \text{ (mm)}$
計 算 値 式(1-2)		1.896	2.0
公 差	C. C. N-290-1	1.701 ~ 2.299	1.8 ~ 2.2
	式(2-4)	1.706 ~ 2.085	1.8 ~ 2.2
実 測 値	case 1	1.95* (1.98 ~ 2.02)	2.07* (2.08 ~ 2.12)
	case 2	1.73* (1.80 ~ 1.82)	1.83* (1.90 ~ 1.93)

(計器最小目盛 0.01 mm)

子午線方向の肉厚の分布を Fig. 3 及び Fig. 4 に示す。

* 熱処理, 酸洗後の表面仕上げによってペローズは若干薄くなる。

case 1 ~ BF 42 及び BB 42 シリーズレプリカペローズ

(T 社製番 850428 N-4)

case 2 ~ BB 42 シリーズレプリカペローズ

(O 社製番 C-299)

(ex. 2) (T 社)

- 公 称 肉 厚 $t = 3 \text{ mm}$
- 短 管 内 径 $D_i = 1130$
- ペ ロ ー ズ 外 径 $D_o = 1256$
- ピ ッ チ $q = 50$
- 山 高 $H = 60$
- 素材板厚(実測) $t^* = 2.96 \sim 3.02$

Tab. 2 Comparison with measured values (ex. 2)

		山 頂 肉 厚 $t_c \text{ (mm)}$	谷 底 肉 厚 $t_r \text{ (mm)}$
計 測 値 式 (1 - 2)		2.846	3.0
公 差	C. C. N-290-1	2.554 ~ 3.446	2.70 ~ 3.30
	式 (2 - 4)	2.561 ~ 3.130	2.70 ~ 3.30
実 測 値		2.79* (2.82 ~ 2.85)	2.95* (2.99 ~ 3.01)

BB 42-00 レプリカペローズ (T 社製番 850214 N)

* 熱処理, 酸洗後の表面仕上げによってペローズは若干薄くなる。

子午線方向の肉厚の分布を Fig. 5 に示す。

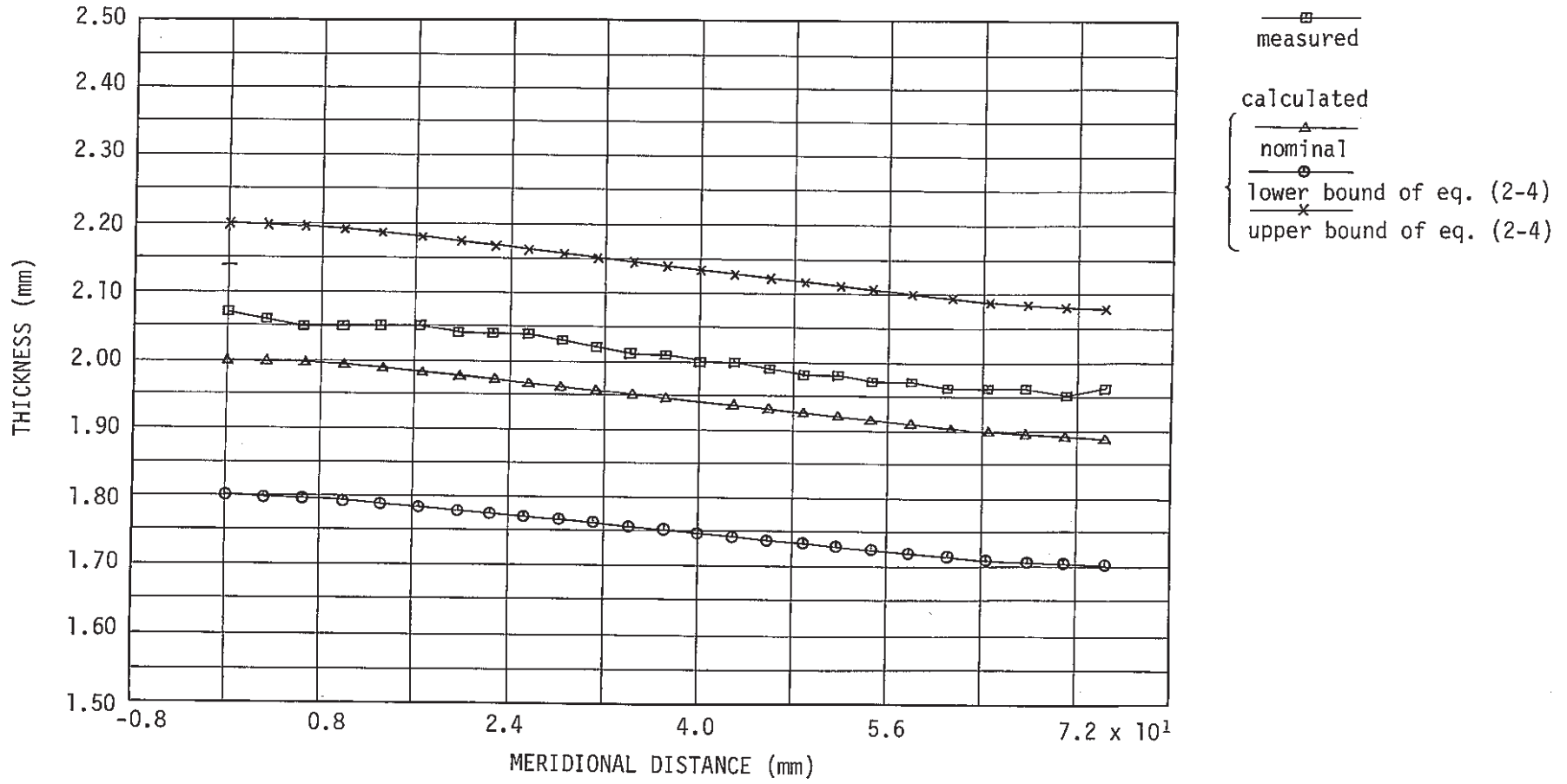


Fig. 3 Distribution of Thickness (ex. 1, Case 1)

- 40 -

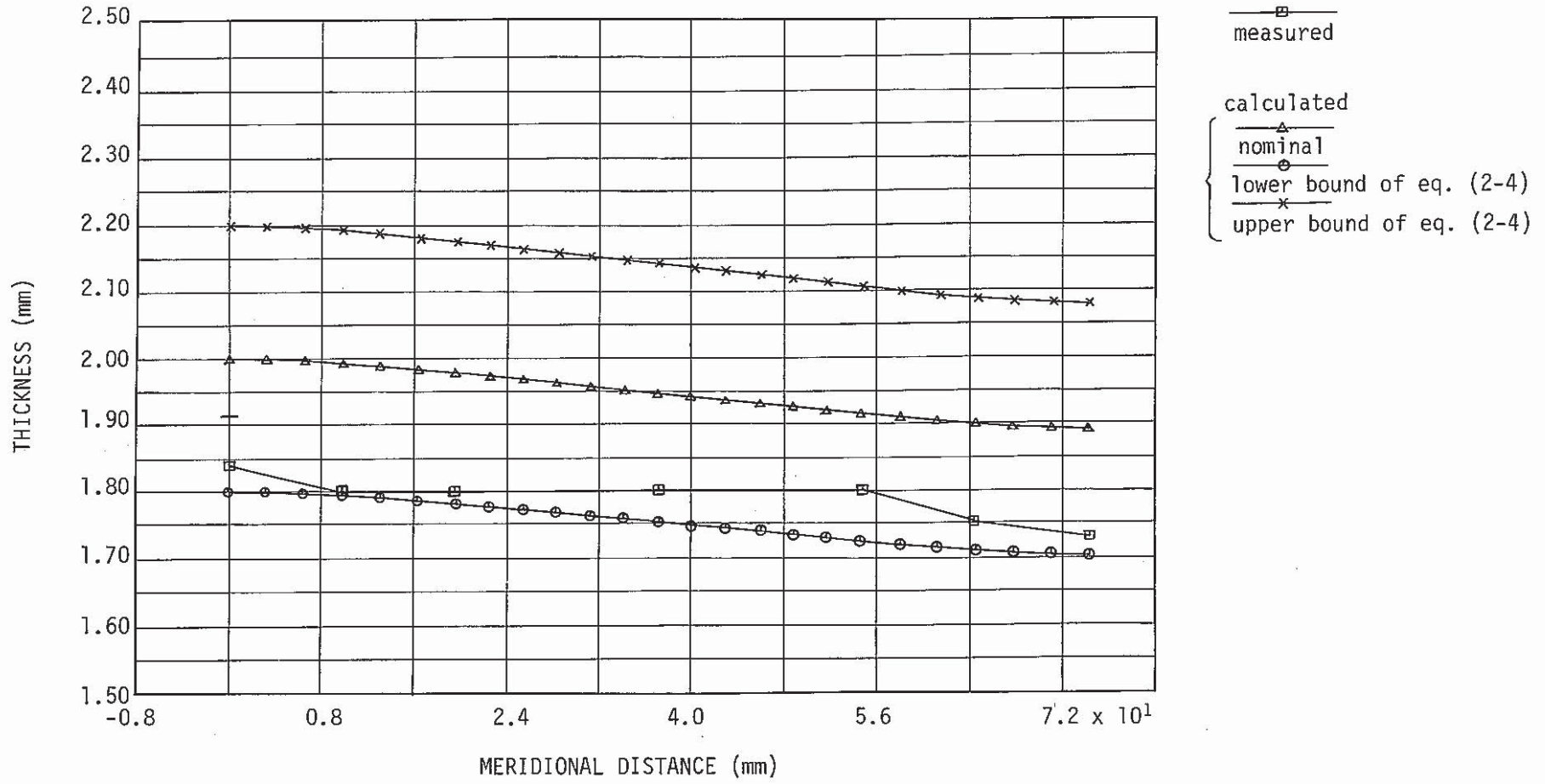


Fig. 4 Distribution of Thickness (ex. 1, Case 2)

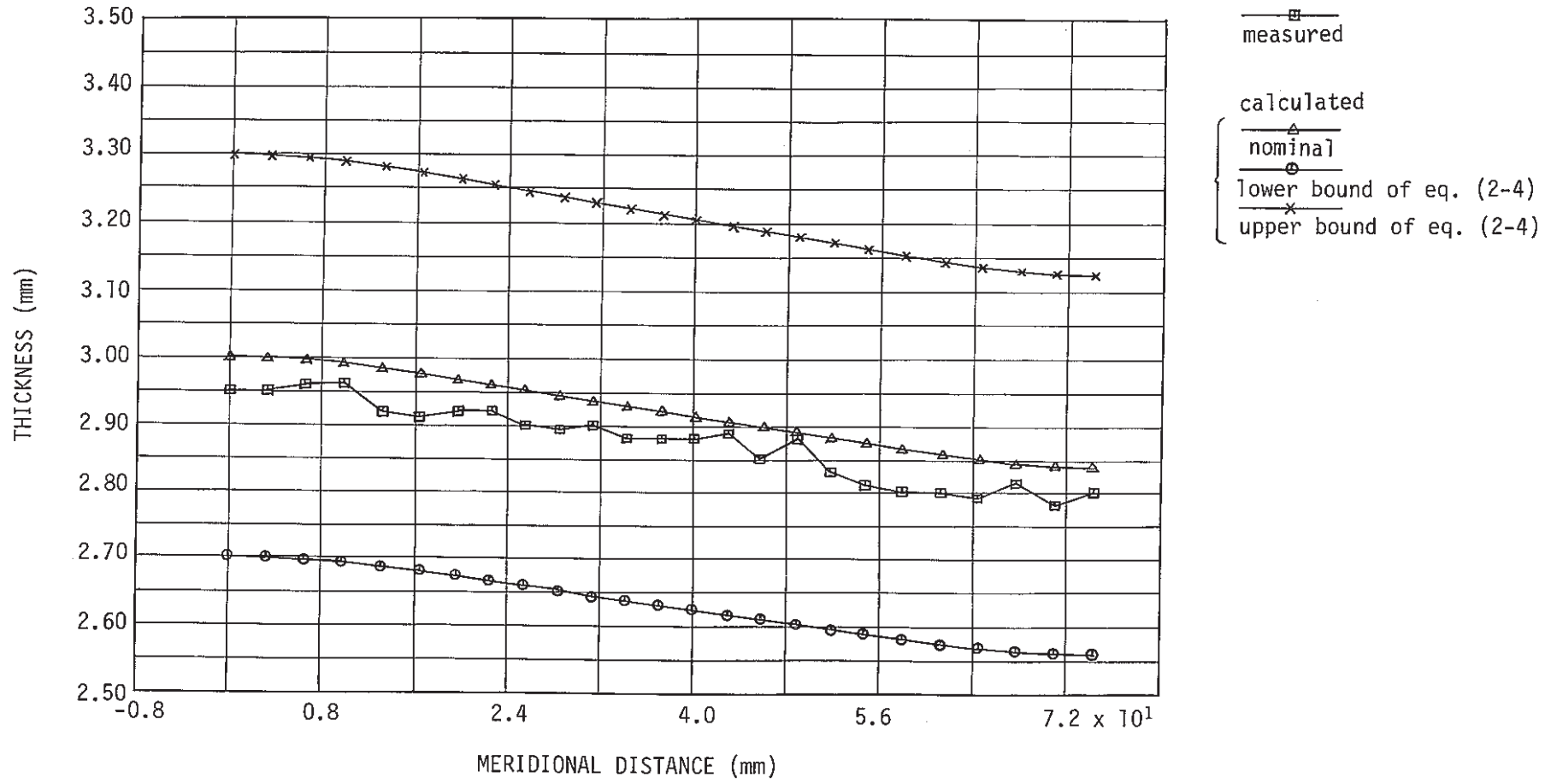


Fig. 5 Distribution of Thickness (ex. 2)

付録A 板厚分布データ作成プログラム

1. 入力方法

1.1 フリーフォーマットで入力する。

1.2 入力データ順序

1. 曲り部 分割数 (自然数)
2. 直線部 分割数 (自然数)
3. 板厚 t_0 (実数)
4. 直径 d_0 (実数)
5. ピッチ q (実数)
6. 山高 H (実数)

1.3 入力データ例

```
EDIT --- Q303C.2FG.DATA(DATA1) - 01.00 -----  
COMMAND ==>  
***** TOP OF DATA *****  
000001 6,6,2,1100,50,60  
***** BOTTOM OF DATA *****
```

2. 出力

出力例を次頁に示す。

3. 使用方法

バッチ形式におけるジョブカードを出力例の次頁に示す。

4. プログラムソースリスト

プログラムソースリストをジョブガードの次頁に示す。

出力例

YVALU	1	2.00000	1.99972	1.99889	1.99753	1.99567	1.99338
		1.99070	1.98770	1.98448	1.98110	1.97765	1.97153
		1.96546	1.95945	1.95349	1.94759	1.94174	1.93594
		1.93020	1.92450	1.91886	1.91572	1.91268	1.90981
		1.90716	1.90482	1.90282	1.90122	1.90005	1.89933
		1.89909					
XVALU	1	0.0	1.96349	3.92699	5.89048	7.85398	9.81747
		11.78097	13.74446	15.70795	17.67145	19.63495	23.13495
		26.63495	30.13495	33.63495	37.13495	40.63495	44.13495
		47.63495	51.13495	54.63495	56.59843	58.56194	60.52542
		62.48892	64.45241	66.41591	68.37939	70.34290	72.30640
		74.26988					


```
EDIT --- Q303C.0FG.DATA(¥ITAJCL) - 01.02 ----- COLUMNS 001 072
COMMAND ===> SCROLL ===> PAGE
***** ***** TOP OF DATA *****V10L20*****
000001 //Q303CF JOB (ENG),F.GOTOH,MSGCLASS=S,NOTIFY=Q303C,
000002 // MSGLEVEL=(1,1),SYSTEM=BEP1,
000003 // ATTR=(TO,CO,WO)
000004 // EXEC FORT7CLG,PARM=NOPRINT,GOREGN=1400K
000005 //FORT.SYSPRINT DD SYSOUT=*
000006 //FORT.SYSIN DD DSN=Q303C.FG.FORT(ITAATU),UNIT=SYSDA,DISP=SHR
000007 //LKED.SYSPRINT DD DUMMY
000008 //GO.FT05F001 DD DSN=Q303C.0FG.DATA(DATA1),UNIT=DASD,DISP=SHR
000009 //GO.FT09F001 DD DSN=Q303C.0FG.DATA(OUT1),UNIT=DASD,DISP=SHR
000010 //GO.FT21F001 DD DSN=&&PDS,UNIT=WORK,
000011 // SPACE=(TRK,(5,5),RLSE),DISP=(NEW,PASS),
000012 // DCB=(RECFM=FB,LRECL=80,BLKSIZE=3200,BUFND=1)
000013 //*SYSIN DD DDUMMY
000014 //
***** ***** BOTTOM OF DATA *****
```

ソースリスト

```

10005 C *****
20005 C *****
30005 C *           BELOWS THICKNESS DISTRIBUTION *
40005 C *****
50005 C *****
60007     DIMENSION HAN(100),HAP(100),HAI(100),HAPS(100),
70005     1           T1(100),T2(100),T3(100)
80005     1 READ (5,*,END=999) N,M,TT,DD,QQ,HH
90005 C
100005     DATA PAI/3.141592654/
110005 C
120005     HANI=QQ*PAI/8
130005     HANE=HH-QQ/2
150005     HANJ=HANI/N
160005     HANF=HANE/M
161007     AJ=HH+QQ/2*(PAI/4-1)
162007     AAJ=DD+2*HH
170005 C
180005     HAN(1)=0.0
190005     DO 20 J=1,N
200005         HAN(J)=HAN(J)+HANJ*(J-1)
210005         T1(J)=(TT*SQRT(DD))/SQRT(DD+QQ/2-QQ/2*COS(4*HAN(J)/QQ))
220005     20 CONTINUE
230005 C
240005     HAI(1)=QQ*PAI/8
250005     DO 30 I=1,M
260005         HAI(I)=HAI(1)+HANF*(I-1)
270005         T2(I)=(TT*SQRT(DD))/SQRT(DD+QQ/2+2*HAI(I)-QQ*PAI/4)
280005     30 CONTINUE
290005 C
300005     HAP(1)=HH+QQ/2*(PAI/4-1)
310005     DO 40 J=1,N+1
320005         HAP(J)=HAP(1)+HANJ*(J-1)
321007         HAPS(J)=(4/QQ)*(HAP(J)-AJ)
330007         T3(J)=(TT*SQRT(DD))/SQRT(AAJ-QQ/2*(1-SIN(HAPS(J))))
340005     40 CONTINUE

```

```

350005 C
360008 WRITE ( 6 , 910 ) (T1(I),I=1,N),(T2(I),I=1,M),(T3(I),I=1,N+1)
370008 WRITE ( 6 , 920 ) (HAN(J),J=1,N),(HAI(J),J=1,M),
380005 1 (HAP(J),J=1,N+1)
381008 WRITE ( 9 , 910 ) (T1(I),I=1,N),(T2(I),I=1,M),(T3(I),I=1,N+1)
382008 WRITE ( 9 , 920 ) (HAN(J),J=1,N),(HAI(J),J=1,M),
383008 1 (HAP(J),J=1,N+1)
390005 120 CONTINUE
400005 910 FORMAT ('YVALU'9X,'1',5X,6F10.5/(20X,6F10.5))
410005 920 FORMAT ('XVALU'9X,'1',5X,6F10.5/(20X,6F10.5))
420005 999 CONTINUE
430005 STOP
440005 END

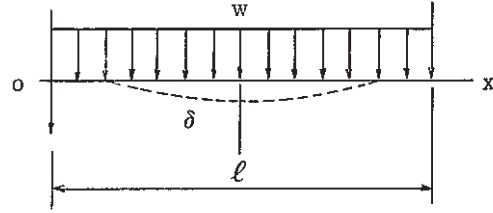
```

4. ベローズ自重(地震荷重)によって発生する応力の簡易評価式

〔 等分布荷重を受ける両端固定はりのたわみ式と EJMA スタンダードの応力評価式を利用して、自重、及び地震によって生じるベローズ子午線方向最大曲げ応力の簡易評価式を導出する。 〕

(1) 水平置きベローズの自重による応力の評価

右図に示す等分布荷重を受ける両端固定はりのたわみは次式で表わされる。



$$\delta = \frac{w \ell^4}{24 EI} \left(\frac{x^2}{\ell^2} - 2 \frac{x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4} \right) \quad (1-1)$$

ここで、 δ : たわみ

w : 等分布荷重

(単位長さ当りの自重)

ℓ : はり(ベローズ)長さ

EI : 曲げ剛性

曲率は、

$$\delta'' = \frac{w \ell^2}{12 EI} \left(1 - \frac{6x}{\ell} + \frac{6x^2}{\ell^2} \right) \quad (1-2)$$

$$\delta'' \Big|_{x=0, \ell} = \frac{w \ell^2}{12 EI}, \quad \delta'' \Big|_{x=\frac{\ell}{2}} = -\frac{w \ell^2}{24 EI} \quad (1-3a, b)$$

曲率は、 $x = \frac{\ell}{2}$ (中央) で最大となる。

曲率半径を R 、1ピッチの回転角を θ とすると、

$$R \theta = q \quad (1-4)$$

ここで、 q : ベローズのピッチ

曲げによる1山の軸方向相当変位 e_θ は、

$$e_\theta = \frac{d_p}{2} \theta = \frac{d_p q}{2 R} \quad (1-5)$$

EJMA スタンド¹⁾では、ベローズの曲げ剛性 \widetilde{EI} を次のように評価している。

$$\widetilde{EI} = \frac{f_{iu} d_p^3 q}{8} \quad (1-6)$$

ここで、 f_{iu} : ベローズ1山当りの軸方向ばね定数

d_p : ベローズピッチ径

式(1-3b)、式(1-5)及び式(1-6)より、

$$\begin{aligned} e_\theta^{\max} &= \frac{w q^2 N^2}{3 d_p} \cdot \frac{1}{f_{iu}} \\ &= \frac{w q^2 N^2 H^3 C_f}{5 d_p^2 t_p^3 E n} \end{aligned} \quad (1-7)$$

ここで、 $\ell = qN$

$$(1-8)$$

$$f_{iu} = \frac{5}{3} \cdot \frac{d_p E t_p^3 n}{H^3 C_f}, \quad t_p = \sqrt{\frac{d}{d_p}} t \quad (1-9a, b)$$

を用いている。又、
 N : 山数
 H : 山高
 n : 層数
 E : 弾性係数
 d : ベローズ谷径
 t : 公称板厚

C_f, C_d : EJMA スタンドの係数

EJMA スタンドの応力評価式により、子午線方向最大曲げ応力 σ_{bw} は、

$$\begin{aligned} \sigma_{bw} &= \frac{5 E t_p}{3 H^2 C_d} e_{\theta}^{\max} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{C_f}{C_d} \right) \cdot \left(\frac{qN}{d_p t_p} \right)^2 \cdot \frac{H}{n} w \end{aligned} \quad (1-10)$$

(2) 横方向地震荷重による応力の評価

ベローズ軸心に対し垂直方向に作用する地震荷重によって発生する静的子午線方向最大曲げ応力 σ_{be} は、式(1-10)に換算加速度 a を乗じることによって得られる。

$$\sigma_{be} = \frac{1}{3} \left(\frac{C_f}{C_d} \right) \cdot \left(\frac{qN}{d_p t_p} \right)^2 \cdot \frac{H}{n} w a \quad (2-1)$$

但し、 a は次式で与えられる。

$$a = \delta \omega^2 / g \quad (2-2)$$

ここで、

δ : 応答変位

ω : 卓越角振動数

g : 重力加速度

参 考 文 献

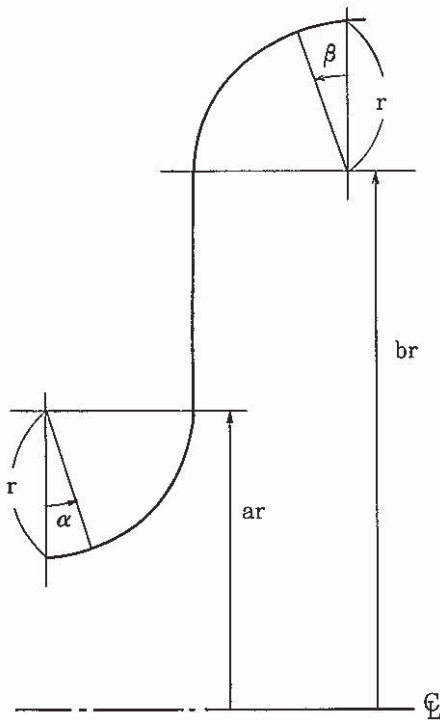
- 1) Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc. , 5th edition, 1980.

5. ベローズのねじりに関する評価法

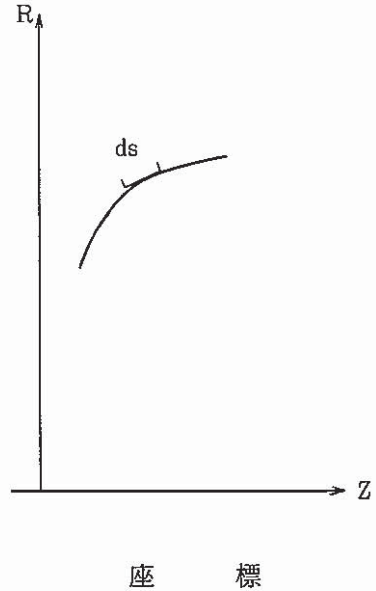
ハードウェアの変形やピン部のガタ等により、ベローズ自体にねじりモーメントが働くことが予想される。本来ベローズはねじり角変位を吸収する構造ではないため、これを正しく評価し、適切に制限することは、設計上重要である。

ここでは、ベローズのねじり剛性を与える厳密式を導出し、FEM解析と比較する。また、近似式についても検討し、EJMAスタンダードの式とも比較する。

(1) 基礎式



$$\begin{aligned}
 q &= 4r \\
 d_p &= (a+b)r \\
 H &= (b-a+2)r \\
 D &= 2(b+1)r \\
 d &= 2(a-1)r \\
 t & \text{ (thickness)}
 \end{aligned}$$



記号の定義

ペローズの半山を取出して、上左図のように記号を定める。通常用いられるペローズ寸法記号との関係は同図の右に併記する通りである。

薄肉軸対称シェルのねじりを考える。上右図の円筒座標を用いると、線素 ds についてせん断ひずみ γ とねじれ角 $d\theta$ の関係は、半径 R を介して、

$$R \cdot d\theta = ds \cdot \gamma \tag{1-1}$$

また、せん断応力 τ は

$$\tau = rG \tag{1-2}$$

Z 軸方向に伝達されるトルク T は、

$$T = \tau \cdot t \cdot 2\pi R^2 = \text{const.} \tag{1-3}$$

式(1-1)～式(1-3)より

$$d\theta = \frac{T}{2\pi Gt} \cdot \frac{ds}{R^3} \tag{1-4}$$

式(1-4)が、ねじり剛性を求める基礎式となる。

式(1-4)をペローズ半山に適用すると,

$$\theta = \frac{T}{\pi G t} (\tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_B + \tilde{\theta}_C) \quad (1-5)$$

ここで,

$$\tilde{\theta}_A = \frac{1}{r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(a - \cos \alpha)^3} \quad (1-6)$$

$$\tilde{\theta}_B = \int_{ar}^{br} \frac{dR}{R^3} = \left[-\frac{1}{2R^2} \right]_{ar}^{br} \quad (1-7)$$

$$\tilde{\theta}_C = \frac{1}{r^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-d\beta}{(b + \cos \beta)^3} = \frac{1}{r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{(b + \cos \beta)^3} \quad (1-8)$$

ただし, 式(1-5)における θ は, ペローズ1山当りのねじれ角を表わす。

(2) 第0近似式

式(1-5)を算出するに当たって, 次の項を微小量として, 省略する。

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \ll 1 \quad (2-1)$$

式(1-6)~式(1-8)は, それぞれ

$$\tilde{\theta}_A = \frac{\pi}{2a^3 r^2} \quad (2-2a)$$

$$\tilde{\theta}_B = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{2r^2 a^2 b^2} (b+a)(b-a) \quad (2-2b)$$

$$\tilde{\theta}_C = \frac{\pi}{2b^3 r^2} \quad (2-2c)$$

更に,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_B + \tilde{\theta}_C &= \frac{1}{2a^3 b^3 r^2} \left\{ ab(b+a)(b-a) + \pi(a^3 + b^3) \right\} \\ &= \frac{1}{2a^3 b^3 r^2} (b+a) \left\{ ab(b-a) + \pi(a^2 - ab + b^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2r^3 b^3} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left\{ \frac{b}{a} (b-a)r + \pi r \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{(D - \frac{q}{2})^3} (1 + \xi) \left\{ \xi \left(H - \frac{q}{2} \right) + \frac{\pi}{4} q (1 - \xi + \xi^2) \right\} \end{aligned} \quad (2-3)$$

改めて, 式(1-5)は,

$$\theta^{(0)} = \frac{4T}{\pi G t (D - \frac{q}{2})^3} (1 + \xi) \left\{ \xi \left(H - \frac{q}{2} \right) + \frac{\pi}{4} q (1 - \xi + \xi^2) \right\} \quad (2-4)$$

ここで,

$$\xi = \frac{b}{a} = \frac{2D-q}{2d+q} \quad (2-5)$$

式(2-4)において, $\xi \div 1$ とすると, EJMA スタンダードと類似した式が得られるが, 更に精度は落ちる。

(3) 第1次近似式

式(1-5)を算出するに当って, 式(2-1)を1次微小項まで考慮すると, 式(1-6), 式(1-8)は,

$$\tilde{\theta}_A \approx \frac{1}{a^3 r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{3 \cos \alpha}{a}\right) d\alpha = \frac{\pi}{2a^3 r^2} \left(1 + \frac{6}{\pi a}\right) \quad (3-1)$$

$$\tilde{\theta}_C \approx \frac{1}{b^3 r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{3 \cos \beta}{b}\right) d\beta = \frac{\pi}{2b^3 r^2} \left(1 - \frac{6}{\pi b}\right) \quad (3-2)$$

式(2-2b)と併せて,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_A + \tilde{\theta}_B + \tilde{\theta}_C &= \frac{1}{2a^3 b^3 r^2} \left\{ ab(b+a)(b-a) + \pi(a^3 + b^3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{6}{ab}(b^2 + a^2)(b+a)(b-a) \right\} \\ &= \frac{1}{2r^3 b^3} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left\{ \frac{b}{a}(b-a)r + \pi r \left(1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{6r}{ab} \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)(b-a) \right\} \quad (3-3) \end{aligned}$$

式(1-5)は,

$$\theta^{(1)} = \theta^{(0)} + \frac{4T}{\pi G t (D - \frac{q}{2})^3} (1 + \xi) (1 + \xi^2) \left(H - \frac{q}{2}\right) \times \frac{3/2 q^2}{(d + \frac{q}{2})(D - \frac{q}{2})} \quad (3-4)$$

式(3-4)の第2項は, 2次の微小量となっていることがわかる。

次に,

$$\frac{H}{D}, \frac{H}{d}, \frac{H}{d_p} \ll 1 \quad (3-5)$$

として, 式(2-4)の第1次近似を考える。

$$\frac{1}{(D - \frac{q}{2})^3} = \frac{1}{(d + 2H - \frac{q}{2})^3} \approx \frac{1}{d^3} \left\{ 1 - \frac{3}{d} \left(2H - \frac{q}{2}\right) \right\} \quad (3-6a)$$

or

$$\frac{1}{(D - \frac{q}{2})^3} = \frac{1}{(d_p + H - \frac{q}{2})^3} \approx \frac{1}{d_p^3} \left\{ 1 - \frac{3}{d_p} (H - \frac{q}{2}) \right\} \quad (3-6b)$$

また、式(2-5)は、

$$\xi = \frac{2D - q}{2d + q} = \frac{2d + 4H - q}{2d + q} \approx (1 + \frac{4H - q}{2d}) (1 - \frac{q}{2d}) \approx 1 + \frac{2H - q}{d} \quad (3-7a)$$

or

$$\xi = \frac{2d_p + 2H - q}{2d_p - 2H + q} \approx (1 + \frac{2H - q}{2d_p})^2 \approx 1 + \frac{2H - q}{d_p} \quad (3-7b)$$

式(3-6a), 式(3-7a)を用いると, 式(2-4)は、

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \frac{4T}{\pi G t d^3} \left\{ 1 - \frac{3}{d} (2H - \frac{q}{2}) \right\} \left(2 + \frac{2H - q}{d} \right) \left\{ \left(1 + \frac{2H - q}{d} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(H - \frac{q}{2} \right) + \frac{\pi}{4} q \left(1 + \frac{2H - q}{d} \right) \right\} \\ &= \frac{4T \times 2}{\pi G t d^3} \left(1 - \frac{3(2H - \frac{q}{2})}{d} \right) \left(1 + \frac{2H - q}{2d} \right) \left(1 + \frac{2H - q}{d} \right) \\ &\quad \times \left(H + \frac{\pi - 2}{4} q \right) \\ &= \frac{4T}{\pi G t d^3} \times 2 \left(H + \frac{\pi - 2}{4} q \right) \left(1 - \frac{3H}{d} \right) \end{aligned} \quad (3-8)$$

式(3-8)中, $2 \left(H + \frac{\pi - 2}{4} q \right)$ は, 1山の子午線方向展開長さである。これを L_d とすると,

$$\theta^{(0)} = \frac{4L_d}{\pi G t d^3} T \cdot \left(1 - \frac{3H}{d} \right) \quad (3-9)$$

$$\text{ここで, } L_d = 2 \left(H + \frac{\pi - 2}{4} q \right) \quad (3-10)$$

ちなみに EJMA スタスタード¹⁾は、

$$\theta = \frac{4L_d}{\pi G t d^3} T \quad (3-11)$$

で与えられており, 実際よりもねじれ角は多目に評価される。

今度は, 式(2-4)に式(3-6b), 式(3-7b)を用いると,

$$\begin{aligned}\theta^{(0)} &= \frac{4T}{\pi G t d_p^3} \left\{ 1 - \frac{3}{d_p} \left(H - \frac{q}{2} \right) \right\} \left(2 + \frac{2H-q}{d_p} \right) \left(1 + \frac{2H-q}{d_p} \right) \\ &\quad \times \left(H + \frac{\pi-2}{4} q \right) \\ &= \frac{4T \times 2}{\pi G t d_p^3} \left(H + \frac{\pi-2}{4} q \right)\end{aligned}\quad (3-12)$$

式(3-9)と同様に,

$$\theta^{(0)} = \frac{4L_d}{\pi G t d_p^3} T \quad (3-13)$$

式(3-13)から, わかるように, ピッチ径 d_p を用いて評価すると1次微小項はキャンセルされる。このことから, 式(3-11)において d のかわりに d_p を用いた方が精度がよいことがわかる。

(4) 厳密な式

式(1-15)を厳密に求めることは, 扱いがやや繁雑になるが可能である。²⁾

まず, 次の積分を考える。

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{(a - \cos \alpha)^3} \quad (4-1)$$

次の変数変換を行う。

$$x = \tan \frac{\alpha}{2} \quad (4-2)$$

$$dx = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}) d\alpha$$

$$\text{つまり, } d\alpha = \frac{2dx}{1+x^2} \quad (4-3)$$

$$\text{また, } \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} - 1$$

$$\text{つまり, } \cos \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad (4-4)$$

$$\text{積分範囲は, } x [0, 1] \quad (4-5)$$

従って, 式(4-1)は次の有理関数の積分になる。

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{2}{\left(a - \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3} dx = \int_0^1 \frac{2(1+x^2)^2}{\{(a-1) + (a+1)x^2\}^3} dx \\
 &= \frac{2}{(a+1)^2} \int_0^1 \frac{\{2 + (a-1) + (a+1)x^2\}^2}{\{(a-1) + (a+1)x^2\}^3} dx \\
 &= \frac{2}{(a+1)^2} \int_0^1 \left\{ \frac{4}{\{(a-1) + (a+1)x^2\}^3} + \frac{4}{\{(a-1) + (a+1)x^2\}^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\{(a-1) + (a+1)x^2\}} \right\} dx \\
 &= \frac{2}{(a+1)^2} \left\{ \frac{4}{(a+1)^3} I_3 + \frac{4}{(a+1)^2} I_2 + \frac{1}{(a+1)} I_1 \right\} \tag{4-6}
 \end{aligned}$$

ここで, $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^n}$ (4-7)

式(4-7)は, 部分積分により,

$$I_{n+1} = \frac{a+1}{2n(a-1)} \left\{ \frac{x}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^n} + (2n-1) I_n \right\} \tag{4-8}$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} x \tag{4-9}$$

式(4-8), 式(4-9)の関係を用いると式(4-6)は,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{(a+1)^3} \left\{ \frac{4}{(a+1)^2} \times \frac{a+1}{4(a-1)} \left\{ \frac{x}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^2} + 3I_2 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{a+1} I_2 + I_1 \right\} \\
 &= \frac{2}{(a+1)^3} \left\{ \frac{1}{(a^2-1)} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^2} + \frac{4a-1}{a^2-1} I_2 + I_1 \right\} \\
 &= \frac{2}{(a+1)^3} \left\{ \frac{1}{a^2-1} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^2} + \frac{4a-1}{a^2-1} \cdot \frac{a+1}{2(a-1)} \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ \frac{x}{x^2 + \frac{a-1}{a+1}} + I_1 \right\} + I_1 \right\} \\
 &= \frac{2}{(a+1)^3} \left\{ \frac{1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^2} + \frac{4a-1}{2(a-1)^2} \cdot \frac{x}{x^2 + \frac{a-1}{a+1}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \frac{2a^2+1}{2(a-1)^2} I_1 \right\} \\
 = & \frac{2}{(a+1)^3(a-1)} \left\{ \frac{1}{a+1} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{a-1}{a+1}\right)^2} + \frac{4a-1}{2(a-1)} \cdot \frac{x}{x^2 + \frac{a-1}{a+1}} \right. \\
 & \left. + \frac{2a^2+1}{2(a-1)} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} x \right\} \quad (4-10)
 \end{aligned}$$

定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ を考えると式(4-10)は、

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{1}{(a+1)^3(a-1)} \left\{ \frac{a+1}{2a^2} + \frac{(4a-1)(a+1)}{2a(a-1)} + \frac{2a^2+1}{a-1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right. \\
 & \left. \times \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right\} \\
 = & \frac{1}{(a+1)^2(a-1)^2} \left\{ \frac{4a^2-1}{2a^2} + \frac{2a^2+1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right\} \quad (4-11)
 \end{aligned}$$

次に、

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{(b+\cos\beta)^3} \quad (4-12)$$

についても同様な手順を踏んで、最終的に次式が得られる。

$$I = \frac{1}{(b-1)^2(b+1)^2} \left\{ -\frac{4b^2-1}{2b^2} + \frac{2b^2+1}{\sqrt{(b-1)(b+1)}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \right\} \quad (4-13)$$

式(2-2b)、式(4-11)及び式(4-13)より、式(1-5)は、

$$\begin{aligned}
 \theta = & \frac{T}{\pi G I r^2} \left[\frac{1}{(a+1)^2(a-1)^2} \left\{ \frac{4a^2-1}{2a^2} + \frac{2a^2+1}{\sqrt{(a+1)(a-1)}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2a^2b^2} (b+a)(b-a) \right] \\
 = & \frac{1}{(b-1)^2(b+1)^2} \cdot \left[-\frac{4b^2-1}{2b^2} + \frac{2b^2+1}{\sqrt{(b-1)(b+1)}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \right] \quad (4-14)
 \end{aligned}$$

式(4-14)が、ねじり剛性を厳密に与える式である。

ここで、次式を仮定して、式(4-14)の第1次近似を考える。

$$\frac{1}{a} \ll 1, \quad \frac{1}{b} \ll 1 \quad (4-15)$$

式(4-14)は,

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{T}{\pi G t r^2} \left[\frac{2}{a^4} \left\{ 1 + a \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2a} \right) \right\} + \frac{1}{2a^2 b^2} (b+a)(b-a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{b^4} \left\{ -1 + b \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2b} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{T}{\pi G t r^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{1}{2a^2 b^2} (b+a)(b-a) + 3 \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} \right) \right\}\end{aligned}\quad (4-16)$$

式(4-16)において、右辺最終項を微小項として無視すると、式(2-4)に一致する。

一方、最大せん断応力は、

$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi t d^2} \quad (4-17)$$

(5) 計算例

以上の数値計算例として、以下の寸法、形状及び材料定数を考える。

q = 50 mm	r = 12.5 mm
H = 60 mm	a = 45
d = 1100 mm	b = 47.8
d _p = 1160 mm	E = 1.98 × 10 ⁴ kg/mm ²
D = 1220 mm	ν = 0.266
t = 2 mm	G = $\frac{E}{2(1+\nu)}$ = 7.82 × 10 ³ kg/mm ²
	ξ = $\frac{b}{a}$ = 1.062

(i) 式(2-4)より,

$$\frac{1}{K_{\theta 1}} = 7.774 \times 10^{-12} \text{ rad/kg mm}$$

$$K_{\theta 1} = 1.286 \times 10^{11} \text{ kg mm/rad}$$

(ii) 式(3-8)より,

$$\frac{1}{K_{\theta 2}} = 7.599 \times 10^{-12}$$

$$K_{\theta 2} = 1.316 \times 10^{11} \text{ kg mm/rad}$$

(iii) 式(3-11)より,

$$\frac{1}{K_{\theta EJ}} = 9.085 \times 10^{-2}$$

$$K_{\theta EJ} = 1.101 \times 10^{11} \text{ kgmm/rad}$$

(iv) 式(3-13)より,

$$\frac{1}{K_{\theta 3}} = 7.747 \times 10^{-12}$$

$$K_{\theta 3} = 1.291 \times 10^{11} \text{ kgmm/rad}$$

(v) 式(4-14)より,

$$\frac{1}{K_{\theta 4}} = 7.802 \times 10^{-12}$$

$$K_{\theta 4} = 1.282 \times 10^{11} \text{ kgmm/rad}$$

(vi) FEM (軸対称シェルによる非軸対称解析)³⁾

$$K_{\theta FEM} = 1.283 \times 10^{11} \text{ kgmm/rad}$$

(i)~(vi)の比較を次表に示す。

	ねじり剛性 K_{θ} (kgmm/rad)	厳密解との比
厳密解 : 式(4-14)	1.282×10^{11}	
第0 (1)次近似解 : 式(2-4)	1.286×10^{11}	1.003
近似解(1) : 式(3-8) $\frac{\pi G t d^3}{4 L_d (1 - \frac{3H}{d})}$	1.316×10^{11}	1.027
近似解(2) : 式(3-13) $\frac{\pi G t d^3 p}{4 L_d}$	1.291×10^{11}	1.007
EJMAスタンダード : 式(3-11) $\frac{\pi G t d^3}{4 L_d}$	1.101×10^{11}	0.859
FEM	1.283×10^{11}	1.001

参 考 文 献

- 1) Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc. , 5th edition, 1980 .
- 2) 例えば, 理工系微積分学, 西村勇城著, 昭和48年, 槇書店.
- 3) ベローズコンポリューションの弾性非軸対称解析, 1986
(PNC SN 9410 86 - 069)

6. コンボリューション毎の寸法のばらつき によって生じるひずみ集中の簡易評価法

ベローズは、謂ば直列のバネ系であり、コンボリューション単位の剛性のばらつきがあるため、各コンボリューションが負担する変位は均一ではない。従って、ベローズに実際に発生する最大ひずみを保守的に評価するためには、基本的な1山(半山)の解析で得られる最大ひずみについて山毎の剛性のばらつきによるひずみの増倍率を合理的に設定する必要がある。

ここでは、ASME C.C.N-290-1の寸法公差を前提にEJMAスタンダードの評価式を採用し、コンボリューション毎の寸法のばらつきによるひずみの増倍率を保守的に評価する手法を示す。

ペローズは、理想的には、まったく同一の特性を有する山（コンボリューション）の連続構造であるが、実際には寸法、形状のバラツキにより各山の特性がわずかず異なる。ここでは、各山をバネとし、ペローズをこれらのバネの直列結合として変位の集中度を評価する。

各山のバネ定数を k_i ($i=1, N$)、反力を F 、各バネの伸びを δ_i とすると、

$$F = k_i \cdot \delta_i \quad (i = 1, N) \tag{1}$$

全体の伸び δ は、

$$\delta = \sum_{i=1}^N \delta_i = F \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \tag{2}$$

全体のバネ定数を K とすると

$$K = F / \delta \tag{3}$$

$$\text{但し、} K = 1 / \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \tag{4}$$

次に、簡単のため、 N 山のばねの中からばね定数が最大のものと最小のものを取り、この2種類で構成される直列ばね系を考える。ばね定数を k_1 及び k_2 とし、それぞれ n 山、 $(N-n)$ 山とすると、全体のばね定数は式(4)より、

$$K = \frac{1}{\frac{n}{k_1} + \frac{N-n}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 N + (k_2 - k_1) n} \tag{5}$$

各ばねの変位 δ_1 、 δ_2 は、

$$\delta_1 = \frac{K}{k_1} \delta = \frac{k_2}{k_1 N + (k_2 - k_1) n} \delta \tag{6a}$$

$$\delta_2 = \frac{K}{k_2} \delta = \frac{k_1}{k_1 N + (k_2 - k_1) n} \delta \tag{6b}$$

ばね 1 山の平均変位は、

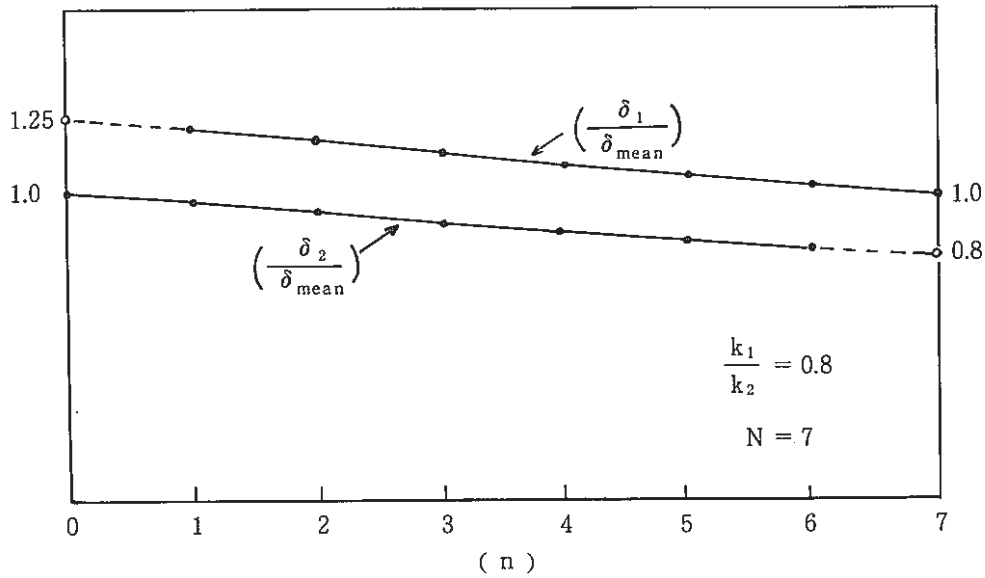
$$\delta_{\text{mean}} = \frac{\delta}{N} \tag{7}$$

各変位 δ_1 、 δ_2 と平均変位の比は、

$$\frac{\delta_1}{\delta_{\text{mean}}} = \frac{k_2}{k_1 + (k_2 - k_1) \frac{n}{N}} = \frac{k_2 / k_1}{1 + (\frac{k_2}{k_1} - 1) \frac{n}{N}} \tag{8a}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_{\text{mean}}} = \frac{k_1}{k_1 + (k_2 - k_1) \frac{n}{N}} = \frac{1}{1 + (\frac{k_2}{k_1} - 1) \frac{n}{N}} \tag{8b}$$

例えば、 $N = 7$ 、 $k_1 / k_2 = 0.8$ ($k_1 < k_2$) の場合、式(8)から変位の集中度は、下図のように表わされる。



ある変位と平均変位の比が最大となるのは、 $k_1 < k_2$ の場合、式(8)からわかるように、 $n=1$ のときである。

$$\left(\frac{\delta_1}{\delta_{\text{mean}}}\right)_{\text{max}} = \frac{\frac{k_2}{k_1}}{1 + \left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right) \frac{1}{N}} \quad (n=1, k_1 < k_2) \quad (9)$$

式(9)を次の様に置く。

$$\frac{\delta_1}{\delta_{\text{mean}}} = \frac{\alpha}{1 + (\alpha - 1) \frac{1}{N}} \quad (10)$$

但し、 $\alpha = \frac{k_2}{k_1} > 1$ ($k_1 < k_2$) (11)

EJMA スタンダード¹⁾によるとベローズ 1 山の軸方向ばね定数は、

$$f_{1u} = 1.7 \frac{d_p E t_p^3 n}{H^3 C_f} \quad (12)$$

従って、

$$\alpha_t \doteq \left(\frac{d_{p2}}{d_{p1}}\right) \cdot \left(\frac{t_{p2}}{t_{p1}}\right)^3 \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^3 \quad (13)$$

一方、1山の曲げのばね定数は、

$$k_b = \frac{f_{iu} d_p^2}{8} \quad (14)$$

従って、

$$\alpha_b \doteq \left(\frac{d_{p2} \cdot t_{p2} \cdot H_1}{d_{p1} \cdot t_{p1} \cdot H_2} \right)^3 \quad (15)$$

一方、ベローズ1山当たり δ の軸方向変位により生じるひずみは、肉厚、山高比が小さい場合、大部分子午線方向曲げ成分とみなせる。EJMA スタンドから、ひずみの子午線方向曲げ成分は、

$$\varepsilon = \frac{5 t_p}{3 H^2 C_d} \delta \quad (16)$$

各コンボリューションの最大ひずみの平均値を ε_{mean} 、最大値を ε_1 とすると、各コンボリューションの剛性のばらつきによるひずみの集中を表わす係数 f_3 (弾性ベース)は次式により保守的に評価される。

$$f_3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{mean}} \quad (17)$$

$$= \left(\frac{t_{p1}}{t_{p\ mean}} \right) \left(\frac{H_{mean}}{H_1} \right)^2 \left(\frac{\delta_1}{\delta_{mean}} \right) \quad (17)$$

式(10)を用いて、上式を次の様に置く。

$$f_3 = \frac{\alpha \beta}{1 + (\alpha - 1) / N} \quad (18)$$

$$\beta = \left(\frac{t_{p1}}{t_{p\ mean}} \right) \cdot \left(\frac{H_{mean}}{H_1} \right)^2 \quad (19)$$

次に式(13)、式(15)で表わされる α 、式(19)で表わされる β を評価する。

山高 H について平均値 H_{av} に対する公差を $\pm \beta_1 H_{av}$ とすると、

$$(1 - \beta_1) H_{av} \leq H \leq (1 + \beta_1) H_{av} \quad (20)$$

山高 H の最大、最小値をそれぞれ H_1 、 H_2 とし、山数 N のうち1ヶ所のみ大きい、即ち H_1 の山が1ヶ所、他は H_2 とすると、

$$H_{av} = \{ H_1 + (N-1) H_2 \} / N \quad (21)$$

H_1 、 H_2 の差を Δ とすると、

$$\Delta = H_1 - H_2 \quad (22)$$

式(21)、式(22)より、 H_2 を消去すると、

$$H_1 - H_{av} = \frac{N-1}{N} \Delta \quad (23)$$

ここで、次の値を式(23)を用いて変形する。

$$\begin{aligned} \frac{H_1}{H_2} &= 1 + \frac{\Delta}{H_2} \\ &= 1 + \frac{N}{N-1} \cdot \frac{H_1 - H_{av}}{H_2} \end{aligned} \quad (24)$$

一方,

$$H_1 - H_{av} \leq \beta_1 H_{av}, \quad (1 - \beta_1) H_{av} \leq H_2 \quad (25a, b)$$

式(24), 式(25a, b)より,

$$\frac{H_1}{H_2} \leq 1 + \frac{N}{N-1} \cdot \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \quad (26)$$

ピッチ径 d_p , 板厚 t_p についても同様な扱いをすると,

$$\frac{d_{p2}}{d_{p1}} \leq 1 + \frac{N}{N-1} \cdot \frac{\beta_2}{1 - \beta_2} \quad (27)$$

$$\frac{t_{p2}}{t_{p1}} \leq 1 + \frac{N}{N-1} \cdot \frac{\beta_3}{1 - \beta_3} \quad (28)$$

また, 式(21)及び式(26)より,

$$\frac{H_{av}}{H_1} \geq \left\{ 1 + \frac{N-1}{1 + \frac{N}{N-1} \cdot \frac{\beta_1}{1 - \beta_1}} \right\} \cdot \frac{1}{N} \quad (29a)$$

$$\approx 1 - \beta_1 \quad (\text{但し, } N=1 \text{ では, } 1) \quad (29b)$$

同様に, 式(28)を用いて,

$$\frac{t_{pav}}{t_{p1}} \leq \frac{1}{1 - \beta_3}$$

即ち,

$$\frac{t_{p1}}{t_{pav}} \geq 1 - \beta_3 \quad (\text{但し, } N=1 \text{ では, } 1) \quad (30)$$

式(19)の β (≤ 1) は, ひずみの集中を緩和する方向に働く。

式(13), 式(15)の α の導出仮定との整合性から, β は次の様に定める。

$$\beta = (1 - \beta_3) (1 - \beta_1)^2 \quad (\text{但し, } N=1 \text{ で } \beta=1) \quad (31)$$

ここで, C.C.N-290-1²⁾ の製作寸法公差をもとに式(13), 式(15)を検討する。コンボリューションの規則性の寸法公差は,

$$0.97 H_{av} \leq H \leq 1.03 H_{av} \quad (32a)$$

$$0.94 t_{av} \leq t \leq 1.06 t_{av} \quad (32b)$$

D_i (谷外径)適用せず。 (32c)

$$0.997 D_{oav} \leq D_o \leq 1.003 D_{oav} \quad (32d)$$

従って,

$$\beta_1 = 0.03, \quad \beta_2 = 0.0015, \quad \beta_3 = 0.06 \quad (33a, b, c)$$

但し, β_2 は, 式(32c)から, 式(32d)の半分をとった。

式(33a, b, c)より, 式(26)~式(28)は,

$$\frac{d_{p2}}{d_{p1}} \leq 1 + \frac{N}{N-1} \times 0.0015 \quad (34)$$

$$\frac{t_{p2}}{t_{p1}} \leq 1 + \frac{N}{N-1} \times 0.0638 \quad (35)$$

$$\frac{H_1}{H_2} \leq 1 + \frac{N}{N-1} \times 0.0309 \quad (36)$$

式(13), 式(15)は,

$$\alpha_t = \left(1 + 0.0015 \frac{N}{N-1}\right) \left(1 + 0.0638 \frac{N}{N-1}\right)^3 \left(1 + 0.0309 \frac{N}{N-1}\right)^3 \quad (37a)$$

$$\alpha_b = \left(1 + 0.0015 \frac{N}{N-1}\right)^3 \left(1 + 0.0638 \frac{N}{N-1}\right)^3 \left(1 + 0.0309 \frac{N}{N-1}\right)^3 \quad (37b)$$

また, 式(33a), (33c)より, 式(31)は,

$$\beta \doteq 0.885 \quad (N \geq 2) \quad (38a)$$

$$\beta = 1.0 \quad (N = 1) \quad (38b)$$

式(10), 式(37a, b)及び式(38a, b)を用いて, 山数 N と f_3 の関係を次頁の図に示す。

図からわかるように, 山数の増加に伴い, f_3 は, 単調に増加し, $\alpha\beta$ に漸近する。 f_3 として, $N \rightarrow \infty$ の値を採用すれば, 保守的な評価となる。

$$f_3 = 1.173 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (41)$$

因に, 式(19)において, ASME C.C. N-290-1 の寸法公差(式(32a, b))に照らして最大値を考えると,

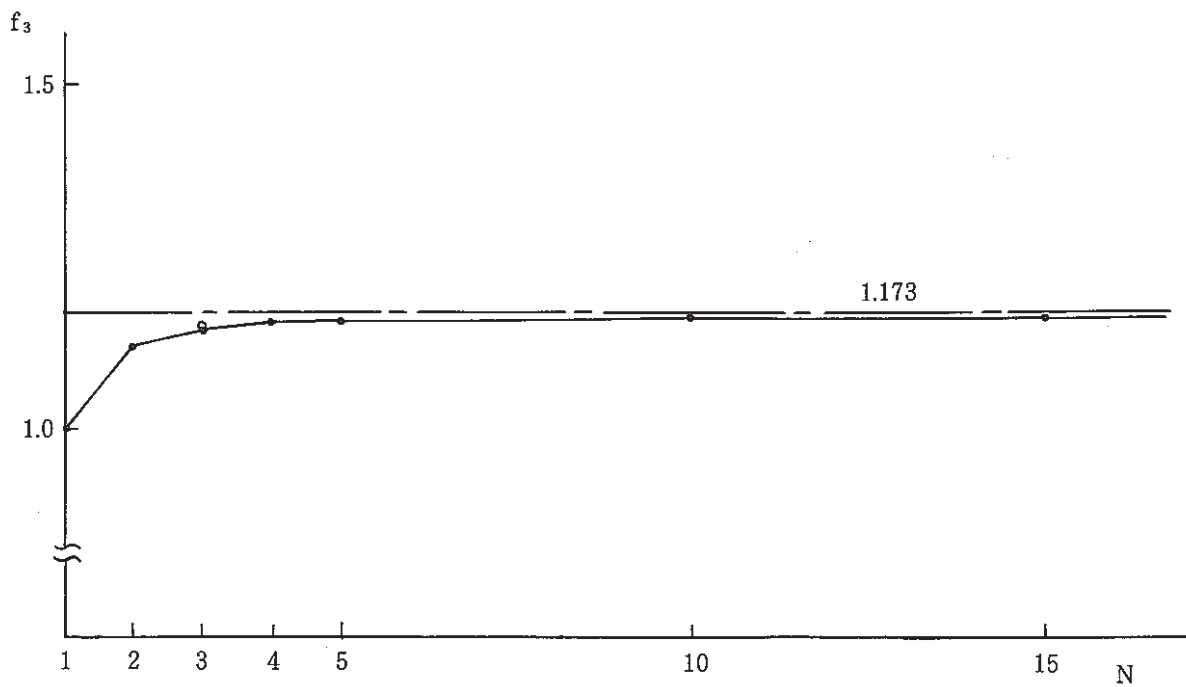
$$\beta_{\max} = 1.125 \quad (39)$$

保守的に $\delta_1 / \delta_{\text{mean}} = 1$ とすると,

$$f_3' = 1.125 \quad (40)$$

次頁の表中の f_3 の値から, 式(18) ($N \geq 3$) は, 式(40) に比べて保守的な評価であることがわかる。

N	α_t	α_b	$\frac{\delta_1}{\delta_{\text{mean}}}(\alpha_t)$	$\frac{\delta_1}{\delta_{\text{mean}}}(\alpha_b)$	$f_3(\alpha_t)$	$f_3(\alpha_b)$
1	∞	∞	1.	1.	1.	1.
2	1.7214	1.7318	1.2651	1.2679	1.1196	1.1221
3	1.5104	1.5172	1.2908	1.2941	1.1424	1.1453
4	1.4449	1.4507	1.3003	1.3038	1.1508	1.1539
5	1.4131	1.4184	1.3052	1.3088	1.1551	1.1583
.						
10	1.3613	1.3658	1.3138	1.3176	1.1627	1.1661
.						
15	1.3467	1.3511	1.3163	1.3202	1.1649	1.1684
.						
.						
∞	1.3209	1.3249	1.3209	1.3249	1.1690	1.1725



参 考 文 献

- 1) Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc., 5th edition, 1980.
- 2) Cases of ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Case N-290-1, Expansion Joints in Class 1, Liquid Metal Piping Section III, Division 1, 1983.
(PNC N951 83-02 (邦訳))

7. ルートバルジと弾性コラム型座屈の中間領域の座屈評価法 (弾塑性コラム型座屈の簡易評価法)

ベローズは内圧によって座屈を生じるが、山数の多少によってその挙動は異なり、山数が少ない場合はルートバルジと呼ばれる軸心の変位を伴わない塑性座屈を生じ、山数が多い場合は弾性範囲でスクワームと呼ばれるオイラータイプの座屈を生じる。両者の中間領域ではオイラータイプの座屈モードを呈するものの塑性域の進展により座屈圧は弾性を仮定する場合よりも低下するために弾性で評価すると非安全側となることが予想される。ここでは、FEM 解析（半山軸対称弾塑性解析）を援用し、山数をパラメータとして弾塑性コラム型座屈圧を求める手法を示す。

Figure List

Fig. 1 Pressure vs Spring rate ($p - f_{tu}$) 76
Fig. 2 Tensile test result of Bellows tube material 76
Fig. 3 FEM modeling (element mesh and boundary conditions) 77
Fig. 4 (1) ~ (6)
 Axial displacement vs Reaction force 78~80
Fig. 5 Pressure vs Convolution displacements 81
Fig. 6 (1) ~ (4)
 Pressure vs Spring rate 82~83
Fig. 7 (1) ~ (3)
 Number of convolutions vs Buckling pressure 84~85

Table List

Tab. 1 Stress-Strain relation of Bellows tube material 86

(1) 解析手法

解析は、FEM によるベローズ半山の軸対称弾塑性解析データをもとに、弾性コラム状座屈圧を与える EJMA スタンドの式を応用するもので、弾性柱状座屈とルートバルジの遷移領域に相当する弾塑性コラム状座屈を対象としている。

まず、EJMA スタンドの式は、次式で与えられる。¹⁾

$$p_s = \alpha \left(\frac{\pi f_{iu}}{N^2 q} \right) \quad (1-1)$$

ここで、 p_s は弾性柱状座屈圧、 q はピッチ、 N は山数、 f_{iu} は次式で与えられる 1 山あたりのばね定数である。

$$f_{iu} = 1.7 \cdot \frac{d_p E \cdot t_p^3 n}{H^3 C_f} \quad (1-2)$$

d_p はピッチ径、 H は山高、 n は層数、 E は縦弾性係数、 C_f は定数、 t_p は公称板厚 t と谷外径 d 及び d_p から次式で与えられる。

$$t_p = t \sqrt{\frac{d}{d_p}} \quad (1-3)$$

式 (1-1) の α は、係数で、EJMA スタンドの場合、安全率 2.25 を除いて、

$$\alpha_{EJMA} = 0.675 \quad (1-4)$$

一方、オイラー座屈は、周知のように次式で与えられる。

$$P_{cr} = \frac{\bar{n} \pi^2 (EI)}{\ell^2} \quad (1-5)$$

ここで、 P_{cr} は、座屈軸荷重、 (EI) は曲げ剛性、 ℓ は柱の長さ、 \bar{n} は、境界条件によって定まり、

$\bar{n} = 1$: 両端単純支持

$\bar{n} = 4$: 両端固定

P_{cr} が、ピッチ径に相当する断面に作用する圧力 p_s による軸方向荷重であるとすると、

$$P_{cr} = \frac{\pi}{4} d_p^2 \cdot p_s \quad (1-6)$$

また、

$$\ell = qN \quad (3-1-107)$$

式 (1-6)、(1-7) を用いると式 (1-5) は、

$$p_s = \frac{4 \pi \bar{n} (EI)}{d_p^2 q^2 H^2} \quad (1-8)$$

ところで、EJMA スタンドによると、曲げモーメント M と曲げ角変位 θ の関係は、

$$M = \frac{f_{iu} d_p^2}{8N} \theta \quad (1-9)$$

であり、はりの純曲げの式

$$M = \frac{(EI)}{\ell} \theta \quad (1-10)$$

と比較すると、次式が得られる。

$$(EI) = \frac{f_{iu} q d_p^2}{8} \quad (1-11)$$

式(1-11)を式(1-8)に代入すると、

$$p_s = \frac{\bar{n}}{2} \left(\frac{\pi f_{iu}}{N^2 q} \right) \quad (1-12)$$

式(1-1)と式(1-12)を比較すると、 α は、次のようになる。

$$\alpha_{ss} = 0.5 \quad (\text{両端単純支持}) \quad (1-13)$$

$$\alpha_{cc} = 2.0 \quad (\text{両端固定}) \quad (1-14)$$

以上を改めて、記述すると

$$p_s = \alpha \left(\frac{\pi f_{iu}}{N^2 q} \right) \quad (1-1)$$

$$\alpha_{EJMA} = 0.675 \quad (1-4)$$

$$\alpha_{ss} = 0.5 \quad (1-13)$$

$$\alpha_{cc} = 2.0 \quad (1-14)$$

但し、 α_{EJMA} の根拠、式(1-6)の妥当性については不明である。

さて、弾塑性コラム状座屈を解析するために、式(1-1)を弾塑性領域に拡張することを考える。 f_{iu} は弾性における1山相当の軸方向ばね定数であるが、内圧の増加によって降伏に達し、塑性域の進展とともに見かけ上のばね定数が低下することが予想される。

ベローズ半山について、軸対称弾塑性解析を実施し、定圧力下での軸方向の変位-反力の関係を調べることにより、見かけ上のばね定数を算定できる。こうして、得られるばね定数を圧力をパラメータとして、 $f_{iu}(p)$ と表わす。こうして、弾塑性に拡張した式(1-1)は、

$$p_s = \alpha \left(\frac{\pi f_{iu}(p)}{N^2 q} \right) \quad (1-15)$$

となり、(1-16)

$$p_s = p$$

のとき、座屈圧を与える。実際には、FEMにより、サーベイして $f_{iu}(p)$ を求めることになるが、Fig.1における2つの曲線の交点が求める座屈圧を与えることになる。

(2) 解析例

(i) 解析対称ベローズ仕様

イ) 形状(公称寸法)

- ・谷内径 D_i : 545 mm
- ・山高 H : 30 mm
- ・ピッチ q : 25 mm
- ・板厚 t : 1 mm

ロ) 材料データ

SUS 316, 熱処理材の引張試験データ(室温)²⁾

(Fig. 2, Table 1)

(ii) 解析方法

イ) 使用プログラム

FINAS

ロ) 使用要素

軸対称シェル要素(CONIC 2)

ハ) 解析の種類

大変形弾塑性解析

ニ) 要素分割(解析は半山)

30要素(曲がり部, 平行部をそれぞれ10要素ずつ)

(Fig. 3 参照)

ホ) 境界条件

谷軸方向, 山谷回転を拘束(Fig. 3 参照)

ヘ) 負荷条件

一定圧力下で軸方向変位を負荷する。Table 2

圧力レベルは, 0, 5, 7.5, 10, 12.5, 15 (kg/cm²G) の6種類である。

(iii) 解析結果

イ) EJMA スタンダードによる f_{iu}

$$C_f \doteq 1.6 \quad \left(\frac{q}{2H} = 0.417, \frac{q}{2.2\sqrt{d_p t_p}} = 0.479 \right)$$

$$f_{iu} = 1.7 \times \frac{577 \times 19900 \times 0.974^3 \times 1}{30^3 \times 1.6} = 417.1 \text{ kg/mm} \quad (1-17)$$

ロ) 式(1-15)

$$p_s = 0.12566 \frac{\alpha f_{iu}(p)}{N^2} \quad (1-18)$$

ハ) FEM 解析結果

- 軸方向変位－反力関係 (Fig. 4 (1)～(6))
- 圧力－コンポリューション変位関係 (Fig. 5)

ニ) 弾塑性座屈圧力

- 圧力－ばね定数関係図 (Fig. 6 (1)～(4))
〔式 (1 - 18) , Fig. 4 (1)～(6)より〕
- Fig. 4 (1)～(6)より, $f_{iu}(p)$ を読みとる場合, 接線のひき方により多少の誤差は生じるが, Fig. 6 (1)の実線で示すように大体外側に凸の曲線となる。
ここで, 降伏開始圧力点と半山で内圧により不安定を生じる圧力点を結ぶ直線 (Fig. 6 (1)一点鎖線) を考えると, 扱いが簡単になる上に若干安全側の評価を与えることがわかる。この直線は, 次式で表わされる。

$$f_{iu} = (-37.40 p + 703.1) \times 10^2 \quad (1-19)$$

式 (1 - 18) と式 (1 - 19) より, f_{iu} を消去すると,

$$p_s = \frac{8835.}{N^2 / \alpha + 469.9} \quad (1-20)$$

ホ) 山数による座屈圧力の変化

- 山数－座屈圧力関係 (Fig. 7 (1)～(3))
- Fig. 7 (1)～(3)は, 3つの α について, 式 (1 - 20) を用いて山数の減少に伴い, 弾性柱状座屈から, 弾塑性柱状座屈に移行する状態を表わしている。降伏開始点より, 分岐して, より低い圧力に移るが, 更に山数が減少していくとより低い複雑なシェル型弾塑性座屈に分岐することが予想される。

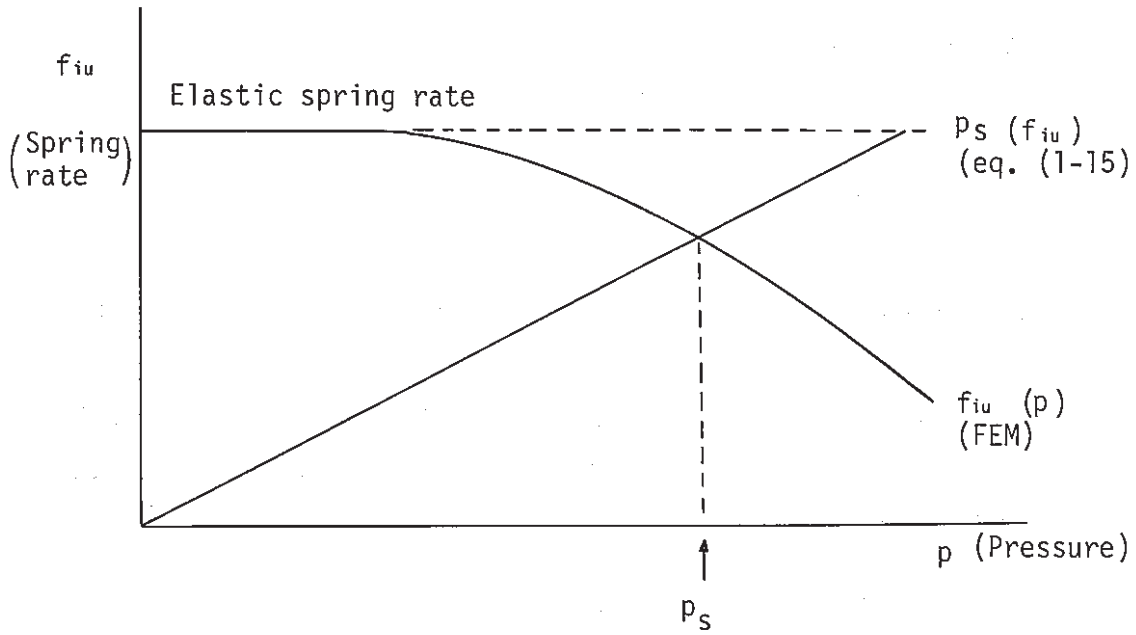


Fig. 1 Pressure vs Spring rate (p- f_{iu})

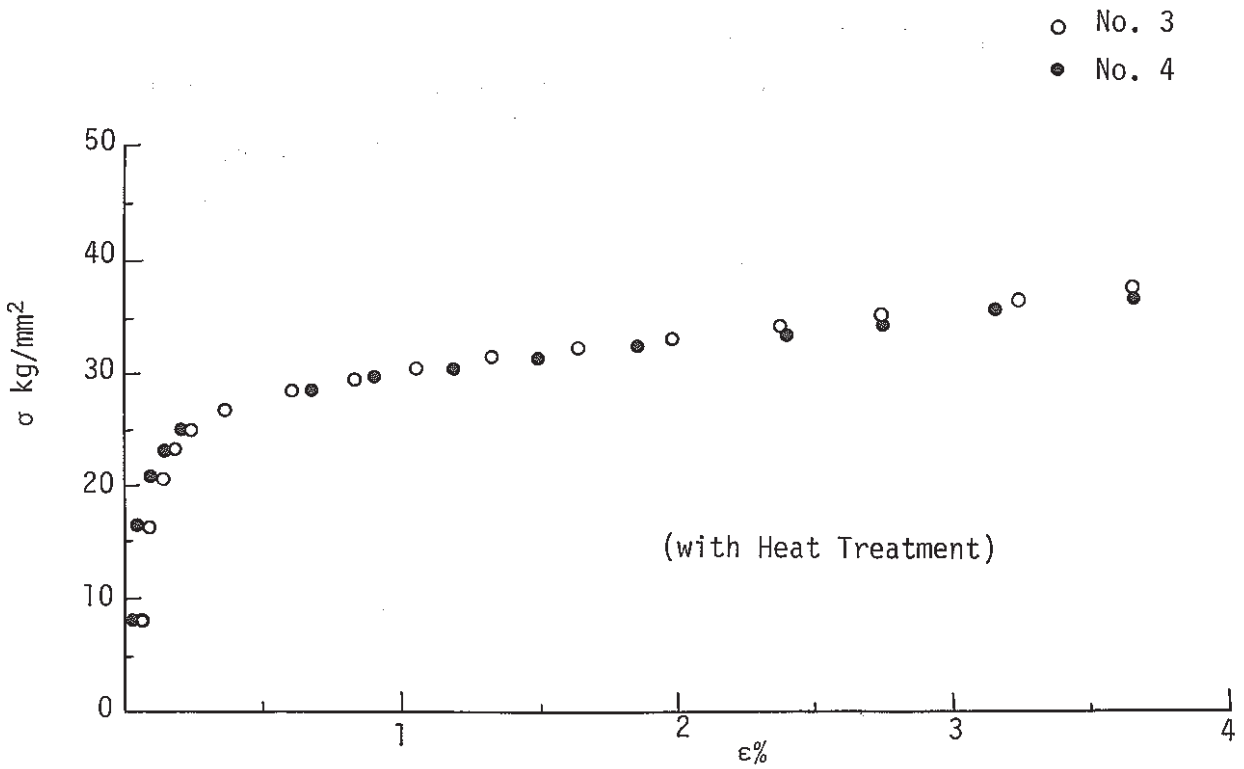
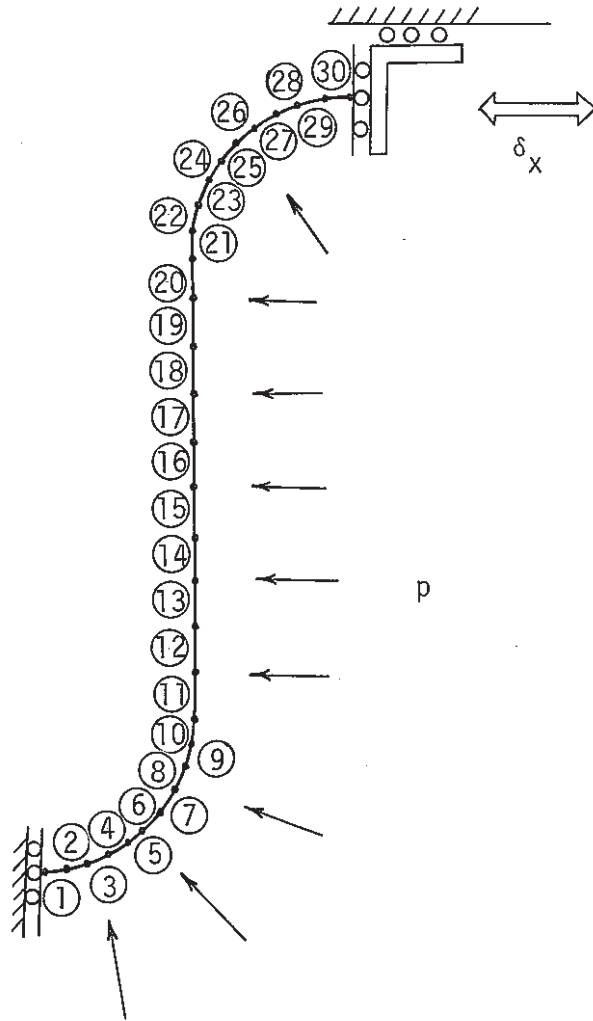


Fig. 2 Tensile Test result of Bellows tube Material



----- ζ

Fig. 3 FEM Modeling(Element Mesh and Boundary Conditions)

-78-

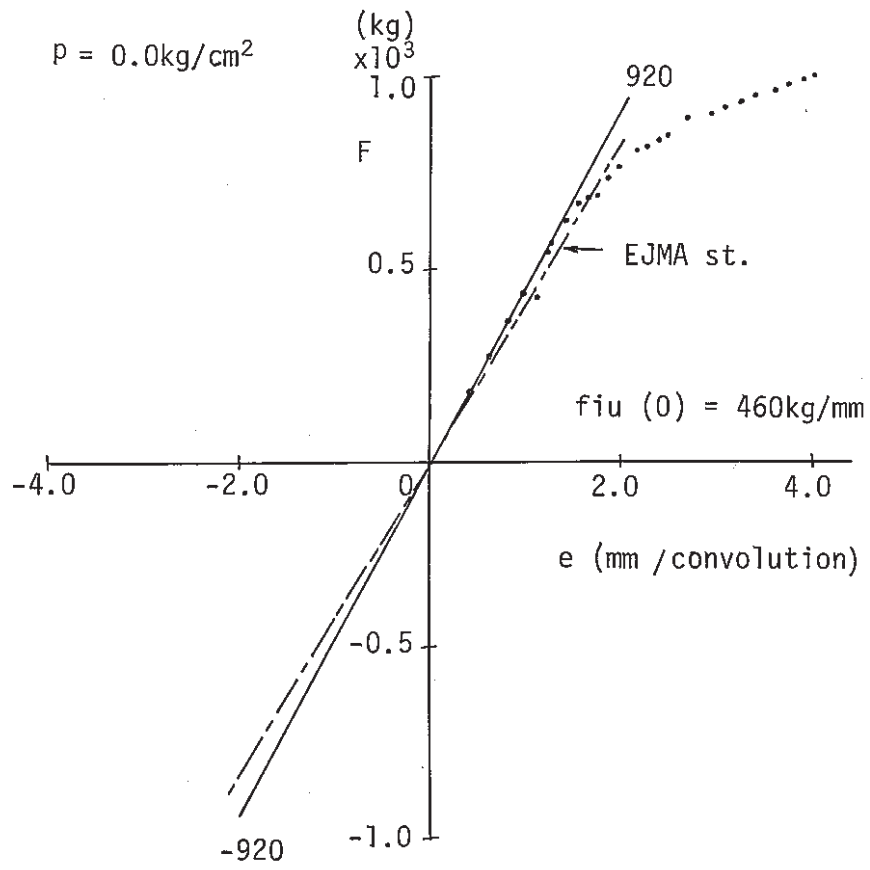


Fig. 4 (1) Axial Displacement vs Reaction Force ($p = 0.0 \text{ kg/cm}^2 \text{G}$)

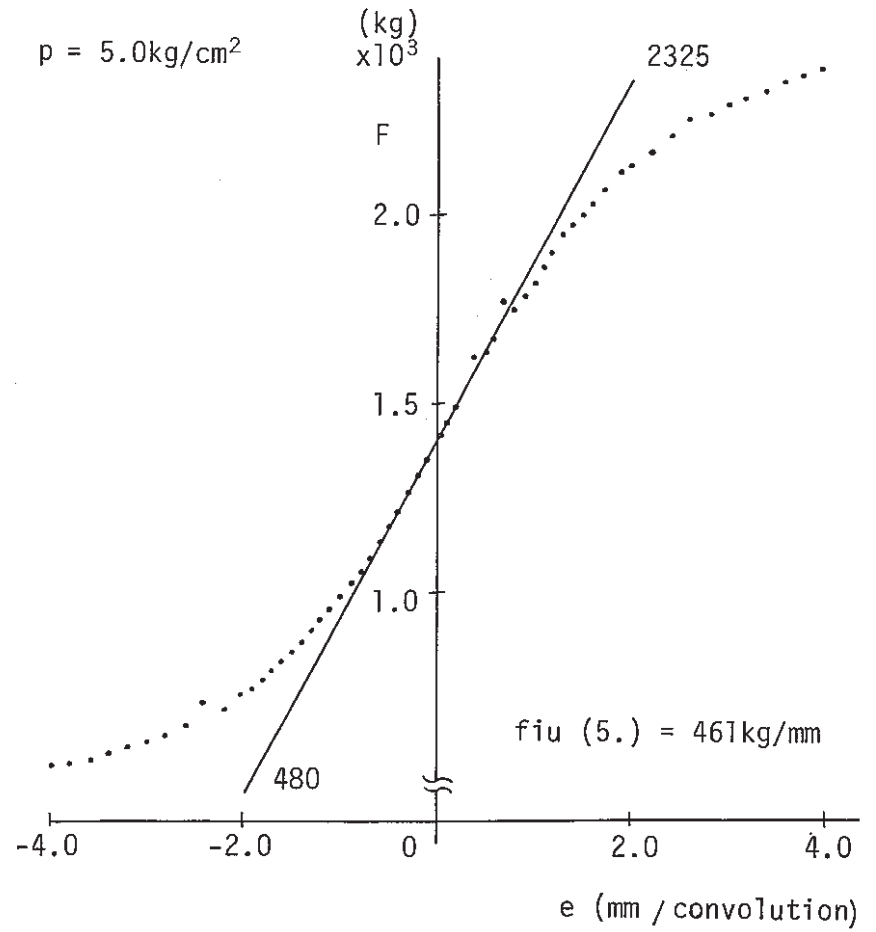


Fig. 4 (2) Axial Displacement vs Reaction Force ($p = 5.0 \text{ kg/cm}^2 \text{G}$)

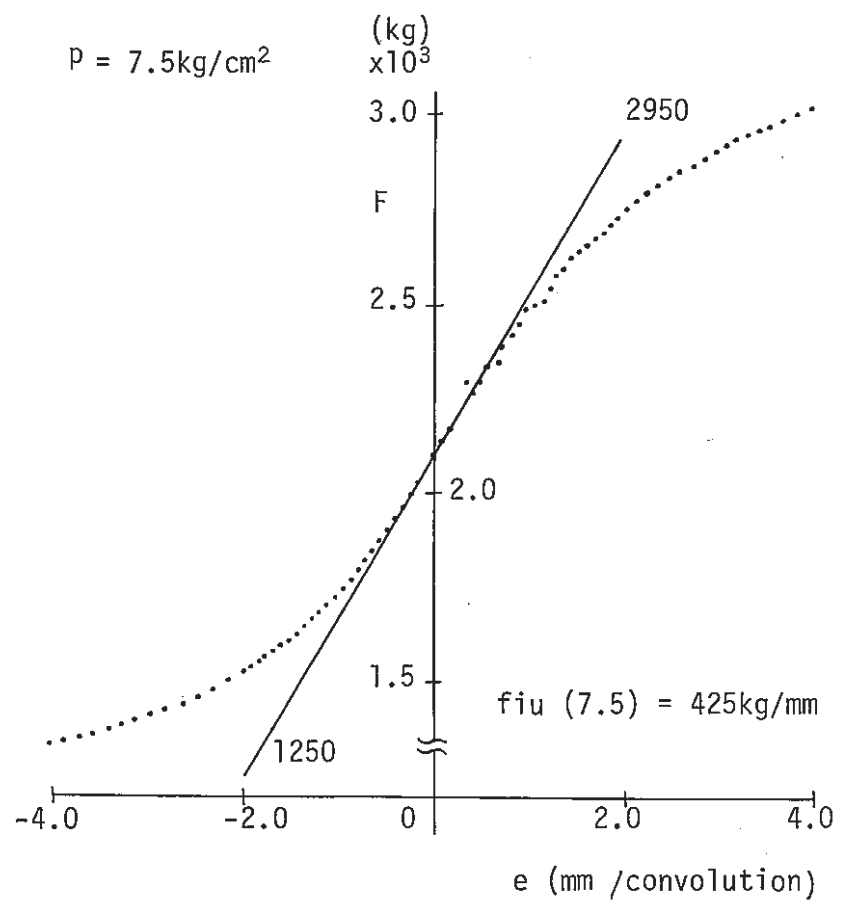


Fig. 4 (3) Axial Displacement vs Reaction Force ($p = 7.5 \text{ kg/cm}^2 \text{G}$)

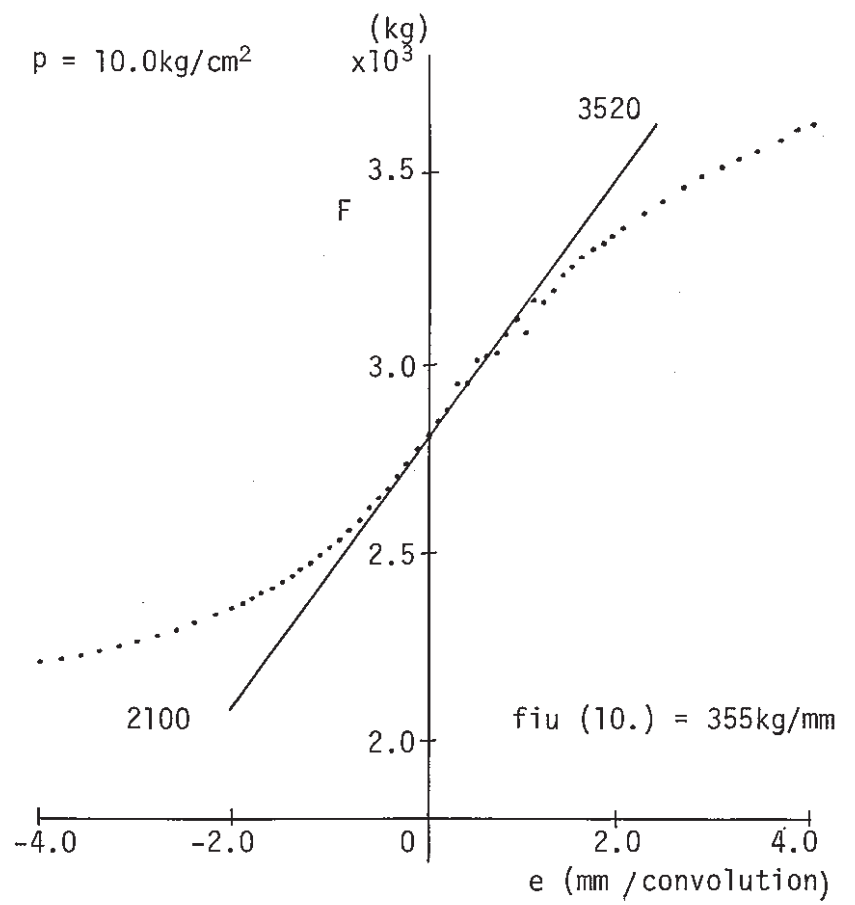


Fig. 4 (4) Axial Displacement vs Reaction Force ($p = 10.0 \text{ kg/cm}^2 \text{G}$)

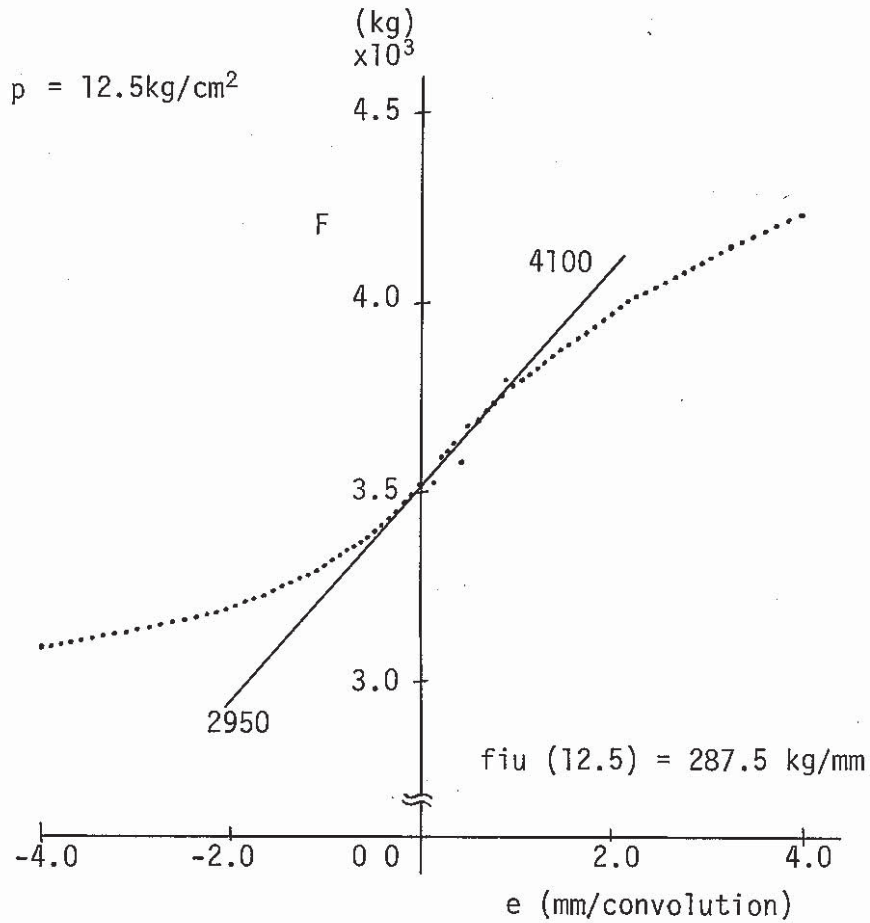


Fig. 4 (5) Axial Displacement vs Reaction Force ($p = 12.5 \text{ kg/cm}^2 \text{G}$)

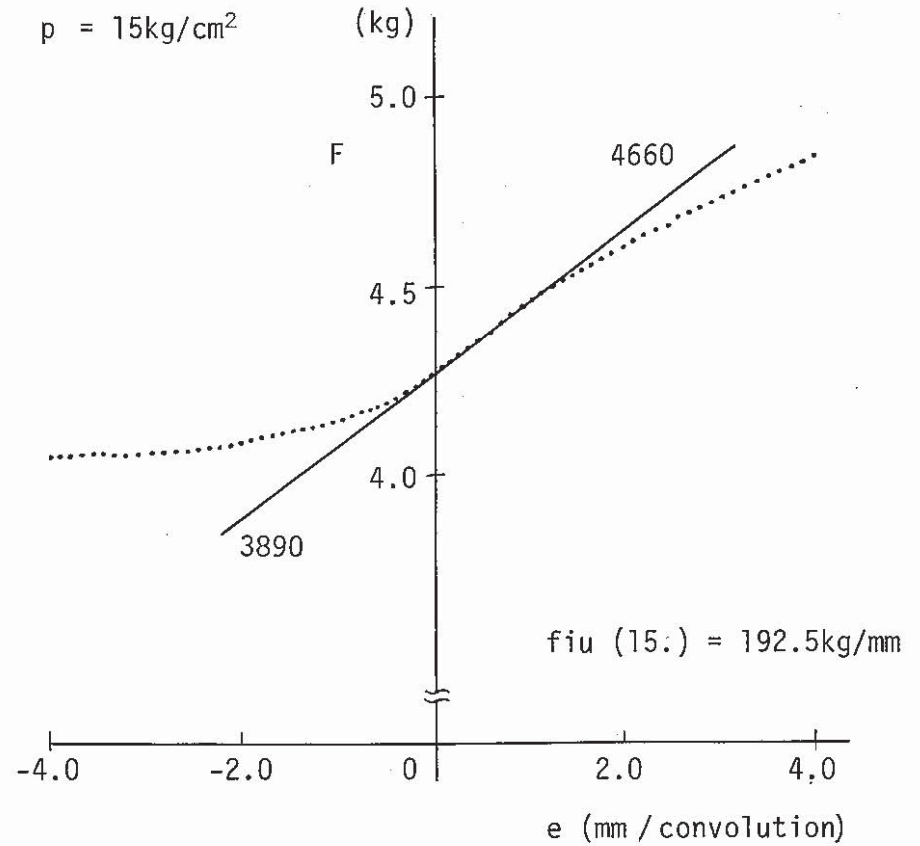


Fig. 4 (6) Axial Displacement vs Reaction Force ($p = 15.0 \text{ kg/cm}^2 \text{G}$)

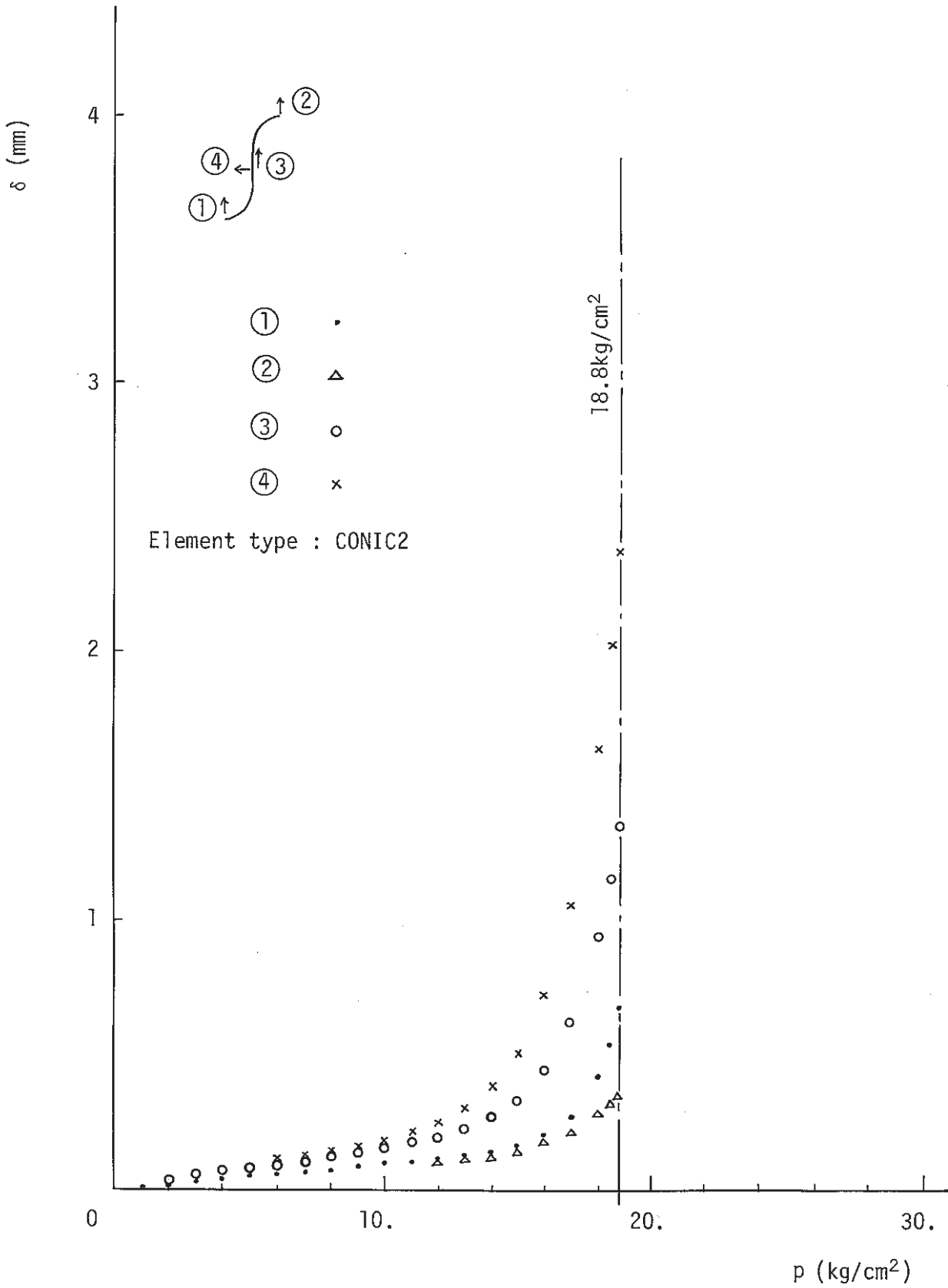


Fig. 5 Pressure vs Convolution Displacements

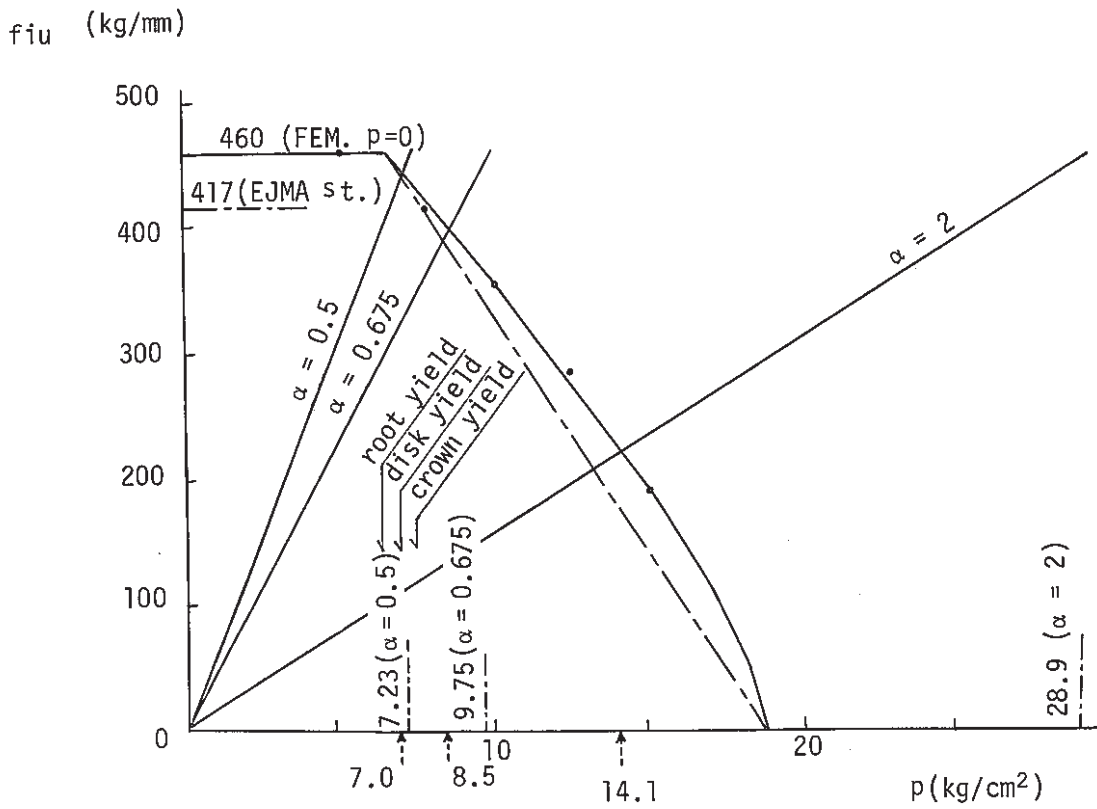


Fig. 6 (1) Pressure vs Spring Rate ($N = 20$)

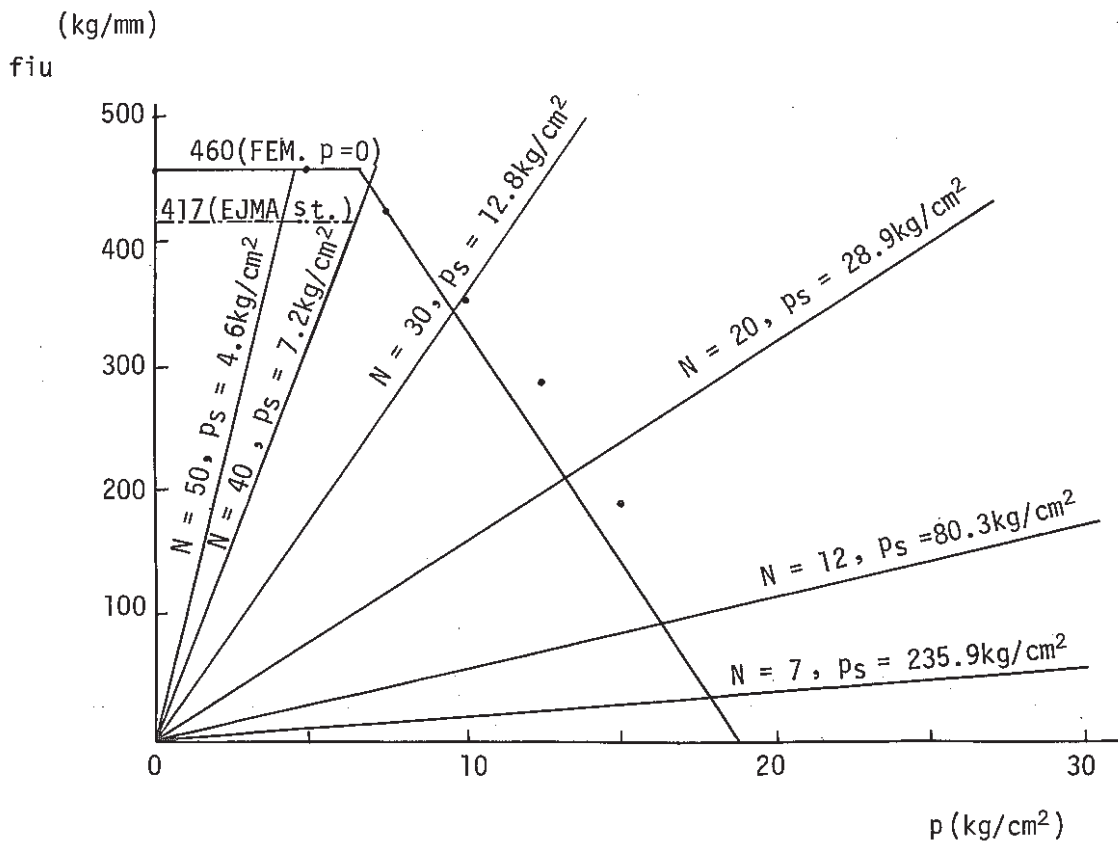


Fig. 6 (2) Pressure vs Spring Rate ($\alpha = 2$)

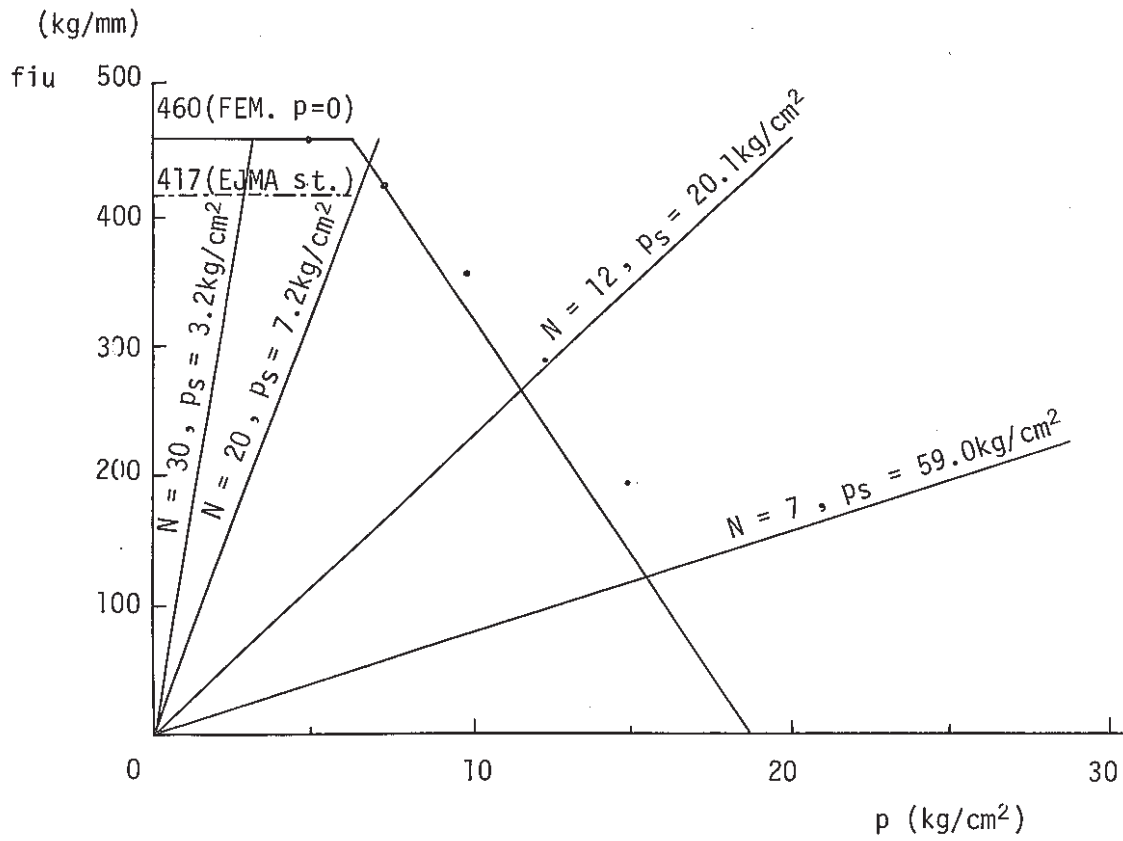


Fig. 6 (3) Pressure vs Spring Rate ($\alpha = 0.5$)

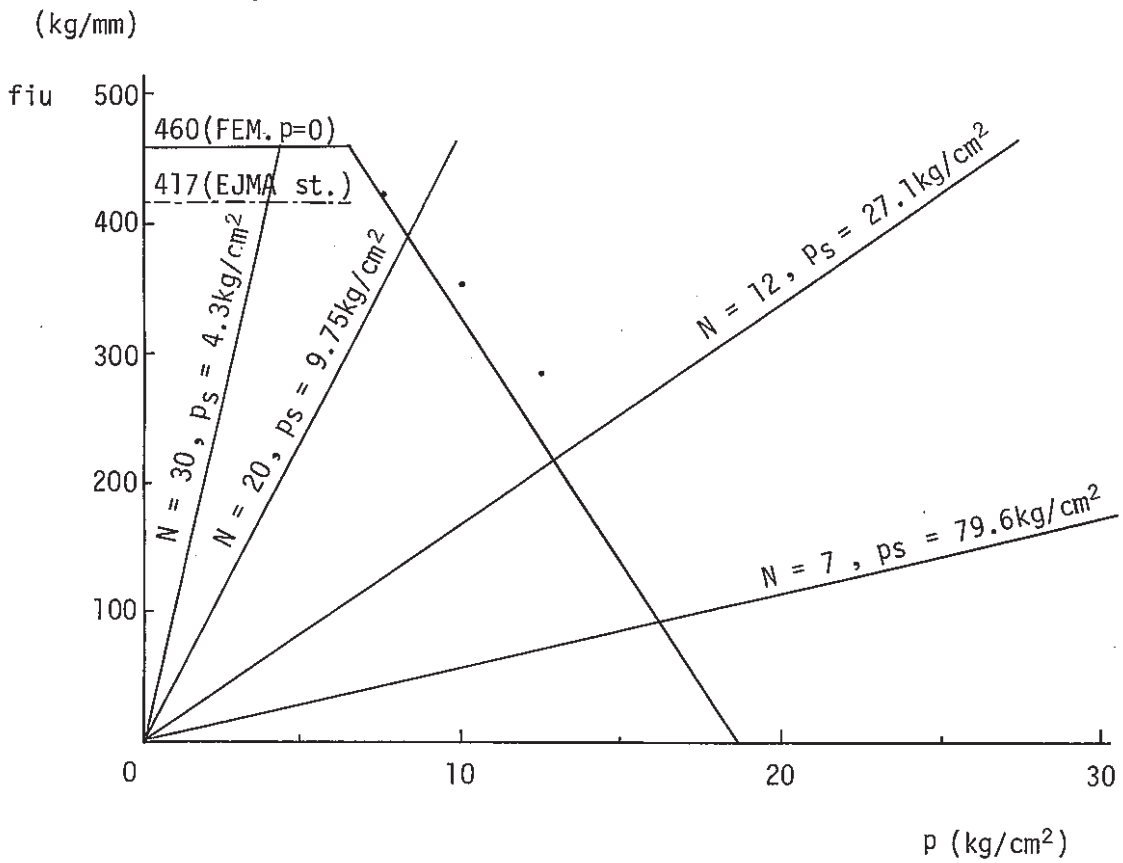


Fig. 6 (4) Pressure vs Spring Rate ($\alpha = 0.675$)

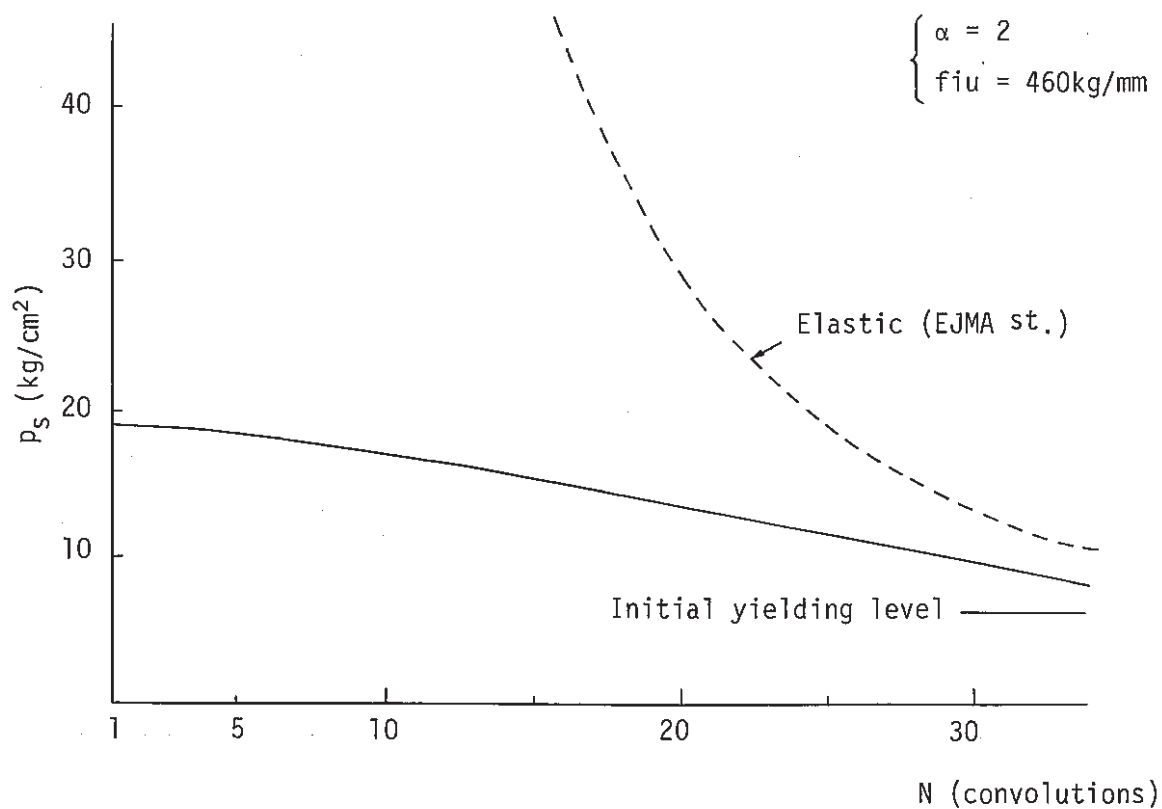


Fig. 7 (1) Number of Convolutions vs Buckling Pressure

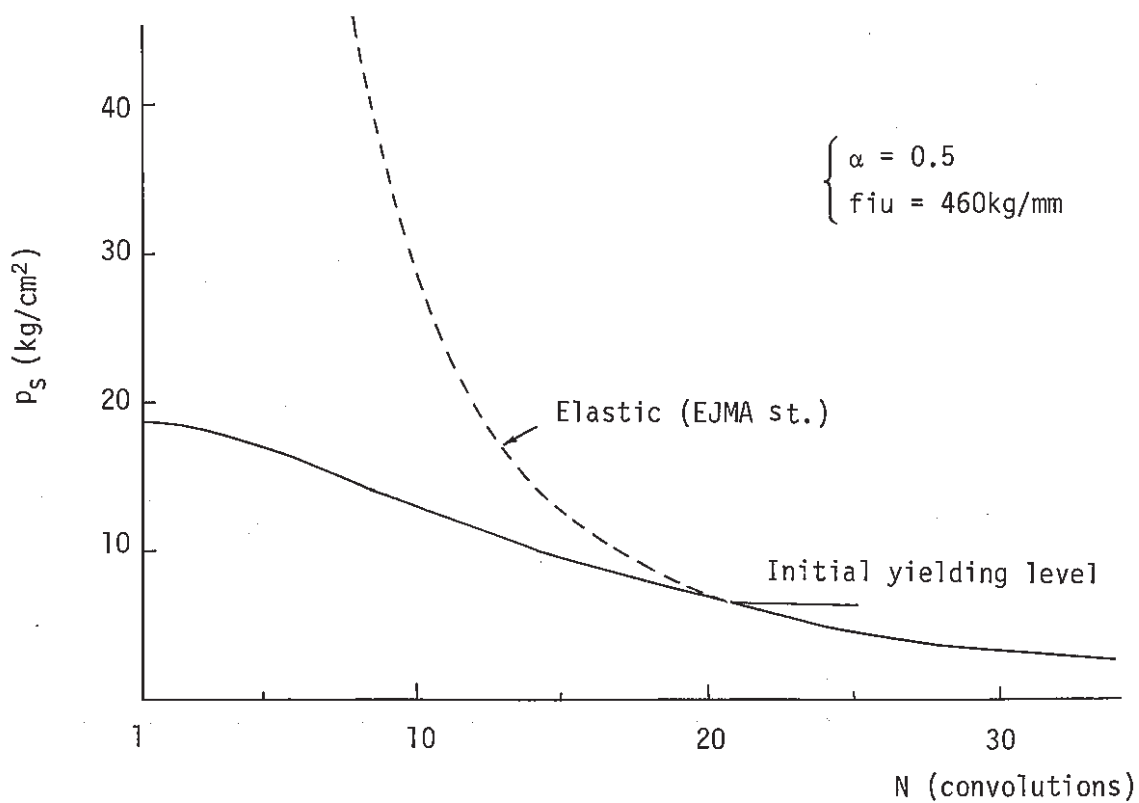


Fig. 7 (2) Number of Convolutions vs Buckling Pressure

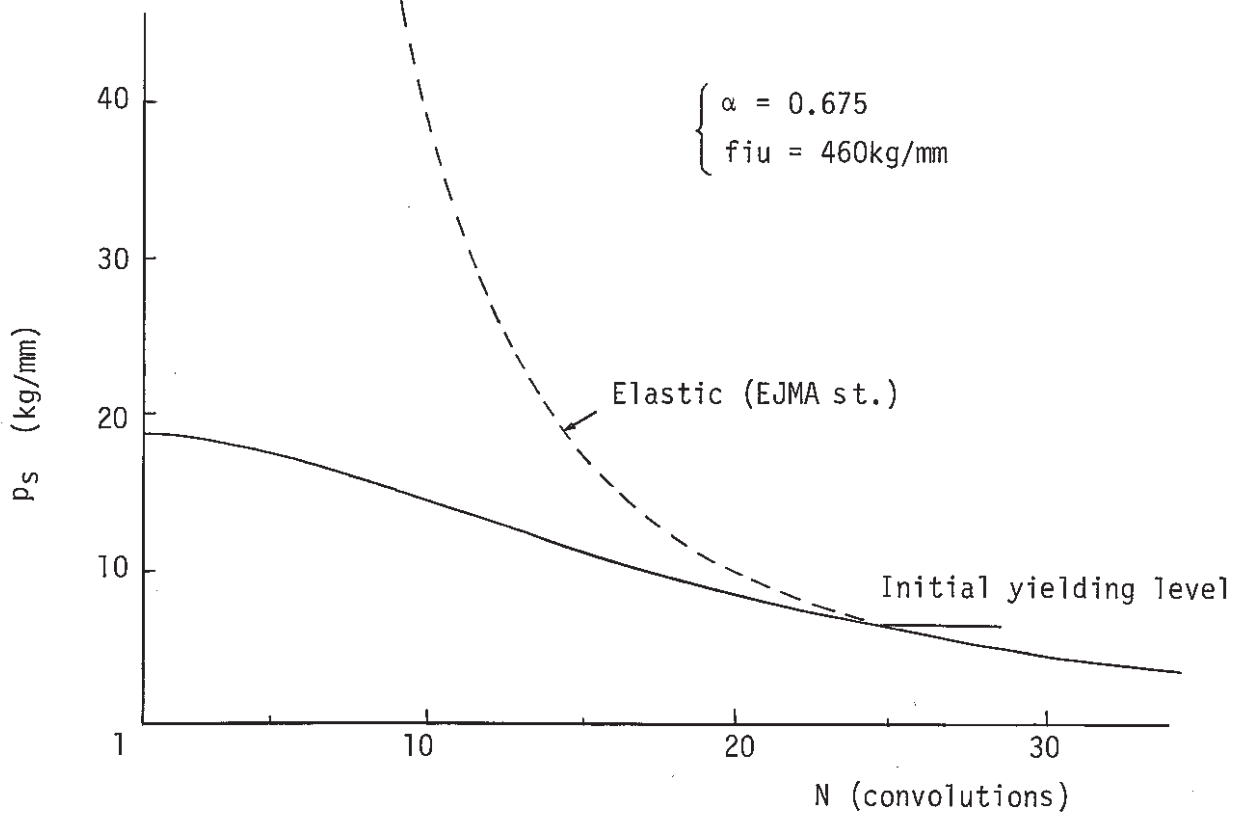


Fig. 7 (3) Number of Convolutions vs Buckling Pressure

Table 1 Stress-Strain relation of Bellows tube material

塑性ひずみ ϵ_p (%)	加工硬化係数 $d\sigma/d\epsilon_p$ (kg/mm ²)
縦弾性係数 ポアソン比 比例限度力	$E = 19900 \text{ kg/mm}^2$ $\nu = 0.3$ $\sigma_y = 20.0 \text{ kg/mm}^2$
0.0	5751
0.0586	3421
0.108	1320
0.247	605
0.538	395
0.766	326
1.051	309
1.355	269
1.715	192
2.245	287
2.583	250
2.987	211

参 考 文 献

- 1) Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc., 5th edition, 1980.
- 2) 川崎重工技報, 第91号, p 40~48, 昭和61年1月.

8. ベローズのはりモード固有振動数の簡易評価法
(せん断変形及び回転慣性を考慮した評価法)

EJMA スタンダードには薄肉はり理論に基づくベローズのはりモード固有振動数の評価式が与えられているが、FEM 解析や実験値と合わないことが知られている。ここでは、せん断変形及び回転慣性を考慮した近似式を導出し、例題において FEM 解と実験値と比較検討する。

Figure List

Fig. 1 Number of Convolutions (N) vs Natural Frequency ratio ($\frac{\omega}{\omega_0}$)
..... 124

1)
EJMAスタンダードには、ベローズの固有振動数の計算式があるが、梁モード振動については、薄肉梁の横振動に基づくものである。ベローズは薄肉、大口径であることも多く、この場合、せん断変形、回転慣性の影響が比較的大きくなる可能性があるため、Timoshenko梁理論に基づく固有振動数の導出を示す。

(1) Timoshenko梁理論に基づく一様断面梁の固有値の導出²⁾

図のように長手方向をx座標、横(振動)方向をz座標として、軸方向変位をu、横(z)方向変位をwとする。uは、曲げによる回転角φを用いて、

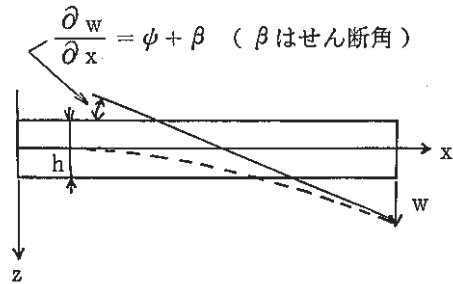
$$u = -z \phi(x, t) \quad (1-1)$$

$$w = w(x, t) \quad (1-2)$$

上式より、ひずみは、

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1-3)$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \quad (1-4)$$



上式から、応力は、ポアソン比 $\nu = 0$ として、

$$\sigma = E \epsilon = -z \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot E \quad (1-5)$$

$$\tau = G \gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) G \quad (1-6)$$

上式から、曲げモーメント及びせん断力は、

$$M = \int \sigma z b dz = -E \frac{\partial \phi}{\partial x} \int z^2 dA = -EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1-7)$$

$$Q = \int \tau b dz = kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \quad (1-8)$$

ここで、 E, G : 各々縦弾性係数, 横弾性係数
A, I : 断面積及び断面2次モーメント
k : せん断係数

次に運動エネルギーは次式で表わされる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \iiint \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \iiint \rho (z^2 \dot{\phi}^2 + \dot{w}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L (\rho I \dot{\phi}^2 + \rho A \dot{w}^2) dx \end{aligned} \quad (1-9)$$

ここで、 ρ : 密度
 L : はり長さ
 V : 体積

一方、全ポテンシャルエネルギーは、

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1}{2} \iint \sigma \varepsilon b \, dz \, dx + \frac{1}{2} \iint \tau \gamma b \, dz \, dx - \int q w \, dx \\ &= \int_0^L \left\{ \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{kGA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 - qw \right\} dx\end{aligned}\quad (1-10)$$

ここで、 q : 梁横方向に分布する荷重

式(1-9)、式(1-10)を用いると Hamilton の原理は、

$$\begin{aligned}\delta^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} (T - \pi) \, dt &= \delta^{(1)} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} (\rho I \dot{\phi}^2 + \rho A \dot{w}^2) - \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{kGA}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 + qw \right\} dx \, dt = 0\end{aligned}\quad (1-11)$$

第1変分を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ \rho I \dot{\phi} \cdot \delta \dot{\phi} + \rho A \dot{w} \cdot \delta \dot{w} - EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \cdot \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \cdot \delta \phi + q \cdot \delta w \right\} dx \, dt = 0\end{aligned}\quad (1-12)$$

上式において、最初の2項を t に関して、第3項、第4項を x に関して部分積分し、時刻 t_1 、 t_2 において、 $\delta w = \delta \phi = 0$ を考慮すると、

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (\rho I \dot{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right\} \delta \phi \right. \\ \left. + \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (\rho A \dot{w}) + \frac{\partial}{\partial x} \left[kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right] + q \right\} \delta w \right] dx \, dt \\ - \int_{t_1}^{t_2} EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \phi \Big|_{x_1}^{x_2} dt - \int_{t_1}^{t_2} kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \cdot \delta w \Big|_{x_1}^{x_2} dt = 0\end{aligned}\quad (1-13)$$

従って、Euler-Lagrange の式は、

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\rho A \dot{w}) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \right\} + q = 0\quad (1-14)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\rho I \dot{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0\quad (1-15)$$

ρ 、 A 、 I 、 E 、 G 、 k が、一定とすると、上式は、

$$\rho A \ddot{w} - kGA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - q = 0 \quad (1-16)$$

$$\rho I \ddot{\phi} - EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \quad (1-17)$$

式(1-16), 式(1-17)において, (ρA)は単位長さ当りの質量, (ρI)は単位長さ当りの回転慣性, (EI)は曲げ剛性, また A は断面積である。ペローズの場合, 断面積 A や断面2次モーメント I は, x の関数となるが, これを厳密に扱うとその後の式の展開が非常に複雑になる。ペローズを想定した場合, これらは固有の量として扱った方が便利である。そこで, この2式を次の様に表わす。

$$\tilde{\rho} A \ddot{w} - kGA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - q = 0 \quad (1-18)$$

$$\tilde{\rho} A \ddot{\phi} - \tilde{E} I \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \quad (1-19)$$

ここで, $\tilde{\rho} A$: 単位長さ当りの質量
 $\tilde{\rho} I$: 単位長さ当りの回転慣性
 $\tilde{E} I$: 曲げ剛性
 A : 断面積

上の2式から, w を分離すると,

$$\begin{aligned} \tilde{E} I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{\rho} A \ddot{w} - \left(\tilde{\rho} I + \frac{\tilde{\rho} A \cdot \tilde{E} I}{kGA} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\tilde{\rho} I \cdot \tilde{\rho} A}{kGA} \ddot{w} \\ = q + \frac{\tilde{\rho} I}{kGA} \ddot{q} - \frac{\tilde{E} I}{kGA} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1-20)$$

$q=0$ の場合, 上式は

$$\tilde{E} I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{\rho} A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\tilde{\rho} I + \frac{\tilde{\rho} A \cdot \tilde{E} I}{kGA} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\tilde{\rho} I \cdot \tilde{\rho} A}{kGA} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^4} = 0 \quad (1-21)$$

式(1-21)の解として次の変数分離形を仮定する。

$$w(x, t) = W(x) \cos \omega t \quad (1-22)$$

式(1-22)を式(1-21)に代入すると,

$$\tilde{E} I \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \tilde{\rho} A \omega^2 W - \left(\tilde{\rho} I + \frac{\tilde{\rho} A \cdot \tilde{E} I}{kGA} \right) \omega^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\tilde{\rho} I \cdot \tilde{\rho} A}{kGA} \omega^4 W = 0 \quad (1-23)$$

式(1-23)を次の様に表示する。

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 2 \alpha \omega^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \beta (1 - \gamma \omega^2) \omega^2 W = 0 \quad (1-24)$$

ここで,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\rho I}}{\tilde{E} I} + \frac{\tilde{\rho A}}{kGA} \right) \quad (1-25)$$

$$\beta = \frac{\tilde{\rho A}}{\tilde{E} I} \quad (1-26)$$

$$\gamma = \frac{\tilde{\rho I}}{kGA} \quad (1-27)$$

式(1-24)の解を得るために,

$$W = e^{\lambda x} \quad (1-28)$$

と置いて, 式(1-24)に代入すると, 次の式を得る。

$$\lambda^4 - 2\alpha\omega^2\lambda^2 - \beta(1 - \gamma\omega^2)\omega^2 = 0 \quad (1-29)$$

上式の判別式は,

$$D = \alpha^2\omega^4 + \beta(1 - \gamma\omega^2)\omega^2 \quad (1-30)$$

式(1-29)の解は, 式(1-30)の判別式Dの値によって5つの場合に分けられる。

(a) $\alpha^2\omega^4 < D$, 即ち $\gamma\omega^2 < 1$ の場合, 2実根, 2虚根となる。

$$\lambda_0, -\lambda_0; i\theta, -i\theta \quad (1-31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = \sqrt{\alpha\omega^2 + \sqrt{\alpha^2\omega^4 + \beta(1 - \gamma\omega^2)\omega^2}} \\ \theta = \sqrt{\sqrt{\alpha^2\omega^4 + \beta(1 - \gamma\omega^2)\omega^2} - \alpha\omega^2} \end{array} \right. \quad (1-32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \sqrt{\sqrt{\alpha^2\omega^4 + \beta(1 - \gamma\omega^2)\omega^2} - \alpha\omega^2} \end{array} \right. \quad (1-33)$$

この場合, 式(1-24)の一般解は,

$$W = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 e^{-\lambda_0 x} + C_3 \cos \theta x + C_4 \sin \theta x \quad (1-34)$$

一方, 式(1-22)を式(1-18)に用いて($q=0$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\tilde{\rho A}}{kGA} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= \left(\frac{d^2 W}{dx^2} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho A}}{kGA} W \right) \cos \omega t \end{aligned} \quad (1-35)$$

従って,

$$\phi(x, t) = \left(\frac{dW}{dx} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho A}}{kGA} \int W dx \right) \cos \omega t + C(t) \quad (1-36)$$

ところで, 式(1-18), 式(1-19)の2式から, ϕ を分離すると, 式(1-21)において w を ϕ に置き換えただけの同形の微分方程式が得られることが確認できる。従って, 式(1-22)と同形の変数分離の形で表示されることがわかる。

$$\phi(x, t) = \Psi(x) \cos \omega t \quad (1-37)$$

式(1-36)と式(1-37)の比較から

$$\Psi(x) = \frac{dW}{dx} + \omega^2 \frac{\tilde{\rho A}}{kGA} \int W dx \quad (1-38)$$

式(1-34)を用いると、式(1-38)は、

$$\Psi(x) = C_1 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) e^{\lambda_0 x} - C_2 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) e^{-\lambda_0 x} - C_3 \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\theta^2}\right) \sin \theta x + C_4 \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\theta^2}\right) \cos \theta x \quad (1-39)$$

境界条件は、

$$\begin{cases} x=0 & : w=0, \quad \phi=0 & (1-40a) \\ x=L & : w=0, \quad \phi=0 & (1-40b) \end{cases}$$

式(1-34)、式(1-39)に上式を用いると、

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad (1-41)$$

$$e^{\lambda_0 L} C_1 + e^{-\lambda_0 L} C_2 + \cos \theta L \cdot C_3 + \sin \theta L \cdot C_4 = 0 \quad (1-42)$$

$$\lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) C_1 - \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) C_2 + \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\theta^2}\right) C_4 = 0 \quad (1-43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) e^{\lambda_0 L} \cdot C_1 - \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) e^{-\lambda_0 L} \cdot C_2 - \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) \sin \theta \cdot L \cdot C_3 \\ + \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) \cos \theta L \cdot C_4 = 0 \end{aligned} \quad (1-44)$$

但し、 $\eta = \frac{\tilde{\rho} A}{kGA}$ (1-45)

$C_1 \sim C_4$ が全て零にならないためには、

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ e^{\lambda_0 L} & e^{-\lambda_0 L} & \cos \theta L & \sin \theta L \\ \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) & -\lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) & 0 & \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) \\ \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) e^{\lambda_0 L} - \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) e^{-\lambda_0 L} - \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) \sin \theta \cdot L & \theta \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right) \cos \theta \cdot L & & \end{vmatrix} = 0 \quad (1-46)$$

上式を展開すると、

$$\begin{aligned} 4 \lambda_0 \theta \left(1 - \eta^2 \frac{\omega^4}{\lambda_0^4}\right) - 2 \lambda_0 \theta \left(1 - \eta^2 \frac{\omega^4}{\lambda_0^4}\right) (e^{\lambda_0 L} + e^{-\lambda_0 L}) \cos \theta L \\ + \left\{ \lambda_0^2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right)^2 - \theta^2 \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2}\right)^2 \right\} (e^{\lambda_0 L} - e^{-\lambda_0 L}) \sin \theta L = 0 \end{aligned} \quad (1-47)$$

上式において、 λ_0 , θ は式 (1-32), (1-33) に示される様に ω の関数であり、式 (1-47) を満たす ω が求める固有振動数である。

(b) $D = \alpha^2 \omega^4$, 即ち, $r \omega^2 = 1$ の場合, 零重根を含む 3 実根となる。

$$\lambda_0, -\lambda_0, 0 \text{ (重根)} \quad (1-48)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{2 \alpha \omega^2} \quad (1-49)$$

この場合, 式 (1-27) と $r \omega^2 = 1$ より,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \sqrt{\frac{kGA}{\tilde{\rho} I}} \quad (1-50)$$

が求める固有振動数であることは明らかであるが, 式 (1-24) の一般解は,

$$W = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 e^{-\lambda_0 x} + C_3 x + C_4 \quad (1-51)$$

式 (1-38) は,

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & C_1 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) e^{\lambda_0 x} - C_2 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) e^{-\lambda_0 x} \\ & + C_3 \left(1 + \frac{\eta}{2} \omega^2 x^2 \right) + C_4 \eta \omega^2 x \end{aligned} \quad (1-52)$$

式 (1-51), (1-52) に境界条件式 (1-40 a) 及び式 (1-42 b) を用いると,

$$C_1 + C_2 + C_4 = 0 \quad (1-53)$$

$$C_1 e^{\lambda_0 L} + C_2 e^{-\lambda_0 L} + C_3 L + C_4 = 0 \quad (1-54)$$

$$C_1 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) - C_2 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) + C_3 = 0 \quad (1-55)$$

$$C_1 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) e^{\lambda_0 L} - C_2 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) e^{-\lambda_0 L} + C_3 \left(1 + \frac{\eta}{2} \omega^2 L^2 \right) + C_4 \eta \omega^2 L = 0 \quad (1-56)$$

先程と同様に,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ e^{\lambda_0 L} & e^{-\lambda_0 L} & L & 1 \\ \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) & -\lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) & 1 & 0 \\ \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) e^{\lambda_0 L} - \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) e^{-\lambda_0 L} & 1 + \frac{\eta}{2} \omega^2 L^2 & \eta \omega^2 L & \end{vmatrix} = 0 \quad (1-57)$$

上式を展開すると,

$$-\eta \omega^2 L (e^{\lambda_0 L} - e^{-\lambda_0 L}) - 2 \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) \left(2 - \frac{\eta}{2} \omega^2 L^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \lambda_0 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right) \left(2 + \frac{\eta}{2} \omega^2 L^2 \right) (e^{\lambda_0 L} - e^{-\lambda_0 L}) - \lambda_0^2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \right)^2 L (e^{\lambda_0 L} - e^{-\lambda_0 L}) \\
 & = 0 \tag{1-58}
 \end{aligned}$$

(c) $0 < D < \alpha^2 \omega^4$ 即ち, $1 < r \omega^2 < 1 + \frac{\alpha^2 \omega^2}{\beta}$ の場合, 4つの異なる実根となる。

$$\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2 \tag{1-59}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\alpha \omega^2 + \sqrt{\alpha^2 \omega^4 + \beta(1 - r \omega^2)} \omega^2} \\ \lambda_2 &= \sqrt{\alpha \omega^2 - \sqrt{\alpha^2 \omega^4 + \beta(1 - r \omega^2)} \omega^2} \end{aligned} \right. \tag{1-60}$$

$$\tag{1-61}$$

この場合, 式(1-24)の一般解は,

$$W(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_2 x} + C_4 e^{-\lambda_2 x} \tag{1-62}$$

式(1-38)は,

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) &= C_1 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{\lambda_1 x} - C_2 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{-\lambda_1 x} + C_3 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) e^{\lambda_2 x} \\
 &\quad - C_4 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) e^{-\lambda_2 x} \tag{1-63}
 \end{aligned}$$

式(1-62), 式(1-63)に境界条件式(1-40a)及び式(1-40b)を用いると,

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \tag{1-64}$$

$$C_1 e^{\lambda_1 L} + C_2 e^{-\lambda_1 L} + C_3 e^{\lambda_2 L} + C_4 e^{-\lambda_2 L} = 0 \tag{1-65}$$

$$C_1 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) - C_2 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) + C_3 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) - C_4 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) = 0 \tag{1-66}$$

$$\begin{aligned}
 & C_1 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{\lambda_1 L} - C_2 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{-\lambda_1 L} + C_3 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) e^{\lambda_2 L} \\
 & \quad - C_4 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) e^{-\lambda_2 L} = 0 \tag{1-67}
 \end{aligned}$$

従って,

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\lambda_1 L} & e^{-\lambda_1 L} & e^{\lambda_2 L} & e^{-\lambda_2 L} \\ \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) & -\lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) & \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) & -\lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) \\ \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{\lambda_1 L} - \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{-\lambda_1 L} & \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) e^{\lambda_2 L} - \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) e^{-\lambda_2 L} & & \end{array} \right| = 0 \tag{1-68}$$

上式を展開すると,

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) - \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) \right\}^2 (e^{(\lambda_1 + \lambda_2)L} + e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)L}) + 8 \lambda_1 \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) \\ & - \left\{ \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_2^2} \right) \right\}^2 (e^{(\lambda_1 - \lambda_2)L} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)L}) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1-69)$$

(d) $D = 0$ 即ち, $r \omega^2 = 1 + \frac{\alpha^2 \omega^2}{\beta}$ の場合, 2つの重根となる。

$$\lambda_1, -\lambda_1 \quad (\text{重根}) \quad (1-70)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha \omega} \quad (1-71)$$

この場合, 式(1-24)の一般解は,

$$W(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{-\lambda_1 x} + C_4 x e^{-\lambda_1 x} \quad (1-72)$$

式(1-38)は,

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & C_1 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{\lambda_1 x} + C_2 \left\{ \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) + \lambda_1 x \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) \right\} e^{\lambda_1 x} \\ & - C_3 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{-\lambda_1 x} + C_4 \left\{ \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) - \lambda_1 x \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) \right\} e^{-\lambda_1 x} \end{aligned} \quad (1-73)$$

式(1-72), 式(1-73)に境界条件式(1-40a)及び式(1-40b)を用いると,

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (1-74)$$

$$C_1 e^{\lambda_1 L} + C_2 L e^{\lambda_1 L} + C_3 e^{-\lambda_1 L} + C_4 L e^{-\lambda_1 L} = 0 \quad (1-75)$$

$$C_1 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) + C_2 \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) - C_3 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) + C_4 \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) = 0 \quad (1-76)$$

$$\begin{aligned} & C_1 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{\lambda_1 L} + C_2 \left\{ \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) + \lambda_1 L \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) \right\} e^{\lambda_1 L} \\ & - C_3 \lambda_1 \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) e^{-\lambda_1 L} + C_4 \left\{ \left(1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) - \lambda_1 L \left(1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \right) \right\} e^{-\lambda_1 L} = 0 \end{aligned} \quad (1-77)$$

従って,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e^{\lambda_1 L} & Le^{\lambda_1 L} & e^{-\lambda_1 L} & Le^{-\lambda_1 L} \\ \lambda_1(1+\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2}) & 1-\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2} & -\lambda_1(1+\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2}) & 1-\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2} \\ \lambda_1(1+\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2})e^{\lambda_1 L} & \{(1-\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2})+\lambda_1 L(1+\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2})\}e^{\lambda_1 L} & -\lambda_1(1+\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2})e^{-\lambda_1 L} & \{(1-\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2})-\lambda_1 L(1+\eta\frac{\omega^2}{\lambda_1^2})\}e^{-\lambda_1 L} \end{vmatrix} = 0$$

上式を展開すると,

(1-78)

$$\{ 2 \lambda_1 L (1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}) - (1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}) (e^{\lambda_1 L} - e^{-\lambda_1 L}) \}$$

$$\times \{ 2 \lambda_1 L (1 + \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}) + (1 - \eta \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}) (e^{\lambda_1 L} - e^{-\lambda_1 L}) \} = 0$$

(1-79)

(e) $D < 0$ 即ち $1 + \frac{\alpha^2 \omega^2}{\beta} < \gamma \omega^2$ の場合, 4つの複素数となる。

$$\lambda = \pm (\lambda_0 \pm \theta i) \tag{1-80}$$

$$\lambda_0^2 - \theta^2 = \alpha \omega^2 \tag{1-81}$$

$$2 \lambda_0 \theta = \sqrt{-\alpha^2 \omega^4 - \beta (1 - \gamma \omega^2) \omega^2} \tag{1-82}$$

この場合, 式(1-24)の一般解は,

$$W(x) = C_1 e^{\lambda_0 x} \cos \theta x + C_2 e^{\lambda_0 x} \sin \theta x + C_3 e^{-\lambda_0 x} \cos \theta x + C_4 e^{-\lambda_0 x} \sin \theta x \tag{1-83}$$

式(1-38)は,

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & C_1 \left\{ \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \cos \theta x - \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \sin \theta x \right\} e^{\lambda_0 x} \\ & + C_2 \left\{ \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \sin \theta x + \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \cos \theta x \right\} e^{\lambda_0 x} \\ & + C_3 \left\{ -\lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \cos \theta x - \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \sin \theta x \right\} e^{-\lambda_0 x} \\ & + C_4 \left\{ -\lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \sin \theta x + \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2} \right) \cos \theta x \right\} e^{-\lambda_0 x} \end{aligned} \tag{1-84}$$

式(1-83), 式(1-84)に境界条件式(1-40a)及び式(1-40b)を用いると,

$$C_1 + C_3 = 0 \tag{1-85}$$

$$C_1 e^{\lambda_0 L} \cos \theta L + C_2 e^{\lambda_0 L} \sin \theta L + C_3 e^{-\lambda_0 L} \cos \theta L + C_4 e^{-\lambda_0 L} \sin \theta L = 0 \tag{1-86}$$

$$C_1 \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) + C_2 \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) - C_3 \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) + C_4 \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) = 0 \quad (1-87)$$

$$\begin{aligned} & C_1 \left\{ \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \cos \theta L - \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \sin \theta L \right\} e^{\lambda_0 L} \\ & + C_2 \left\{ \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \sin \theta L + \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \cos \theta L \right\} e^{\lambda_0 L} \\ & - C_3 \left\{ \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \cos \theta L + \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \sin \theta L \right\} e^{-\lambda_0 L} \\ & - C_4 \left\{ \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \sin \theta L - \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \cos \theta L \right\} e^{-\lambda_0 L} = 0 \end{aligned} \quad (1-88)$$

従って,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e^{\lambda_0 L} \cos \theta L & e^{\lambda_0 L} \sin \theta L & e^{-\lambda_0 L} \cos \theta L & e^{-\lambda_0 L} \sin \theta L \\ \tilde{\lambda}_0 & \tilde{\theta} & -\tilde{\lambda}_0 & \tilde{\theta} \\ (\tilde{\lambda}_0 \cos \theta L - \tilde{\theta} \sin \theta L) e^{\lambda_0 L} & (\tilde{\lambda}_0 \sin \theta L + \tilde{\theta} \cos \theta L) e^{\lambda_0 L} & -(\tilde{\lambda}_0 \cos \theta L + \tilde{\theta} \sin \theta L) e^{-\lambda_0 L} & -(\tilde{\lambda}_0 \sin \theta L - \tilde{\theta} \cos \theta L) e^{-\lambda_0 L} \end{vmatrix} = 0 \quad (1-89)$$

$$\text{ここで, } \tilde{\lambda}_0 = \lambda_0 \left(1 + \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right), \quad \tilde{\theta} = \theta \left(1 - \frac{\eta \omega^2}{\lambda_0^2 + \theta^2}\right) \quad (1-90 \text{ a, b})$$

式(1-89)を展開すると,

$$\{ 2 \tilde{\lambda}_0 \sin \theta L - \tilde{\theta} (e^{\lambda_0 L} - e^{-\lambda_0 L}) \} \{ 2 \tilde{\lambda}_0 \sin \theta L + \tilde{\theta} (e^{\lambda_0 L} - e^{-\lambda_0 L}) \} = 0 \quad (1-91)$$

(2) 基礎方程式の近似解法

前述の扱いは複雑なので、Rayleigh法による近似を考える。²⁾

最低次の固有関数(振動モード)として、せん断変形を考慮した等分布荷重(単位荷重)を受ける両端固定梁の撓み曲線を用いる場合:

Euler-Lagrangeの基礎方程式は,

$$EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + kGA \left(\frac{dW}{dx} - \Psi \right) = 0 \quad (2-1)$$

$$kGA \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{d\Psi}{dx} \right) + \underbrace{1}_{\text{単位分布荷重}} = 0 \quad (2-2)$$

上の2式から、 Ψ を分離すると、

$$\frac{d^3\Psi}{dx^3} = \frac{1}{\widetilde{EI}} \quad (2-3)$$

式(2-3)を次の境界条件のもとに積分する。

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = 0 \quad (x = \frac{L}{2}) \quad (2-4)$$

$$\Psi = 0 \quad (x = 0, L) \quad (2-5)$$

第1式は、せん断力が、梁中央で零となることを示す。

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{L^3}{12\widetilde{EI}} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \\ &= \frac{L^3}{12\widetilde{EI}} \left(\frac{x}{L}\right) \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{aligned} \quad (2-6)$$

式(2-6)を式(2-1)に用いて、

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= -\frac{\widetilde{EI}}{kGA} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \Psi \\ &= -\frac{L}{2kGA} \left(2\frac{x}{L} - 1\right) + \frac{L^3}{12\widetilde{EI}} \left\{ 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{x}{L} \right\} \end{aligned} \quad (2-7)$$

境界条件 $W=0$ ($x=0$)のもとに積分すると、

$$\begin{aligned} W &= \frac{L^4}{24\widetilde{EI}} \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{12\widetilde{EI}}{kGAL^2} \right\} \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ &= \frac{L^4}{24\widetilde{EI}} \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \kappa_1 \right\} \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \end{aligned} \quad (2-8)$$

$$\text{ここで、} \quad \kappa_1 = \frac{12\widetilde{EI}}{kGAL^2} \quad (2-9)$$

式(1-22)と式(1-37)から、式(2-9)と式(2-6)を用いて最低次の近似式を次のように置く。

$$w(x, t) = \frac{L^4}{24\widetilde{EI}} \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \kappa_1 \right\} \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cos \omega t \quad (2-10)$$

$$\phi(x, t) = \frac{L^3}{12\widetilde{EI}} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(\frac{x}{L}\right) \cos \omega t \quad (2-11)$$

運動エネルギーは、式(1-9)より、

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \widetilde{\rho I} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \widetilde{\rho A} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\omega^2}{2} \left[\tilde{\rho I} \left(\frac{L^3}{12 \tilde{E I}} \right)^2 \cdot L \sin^2 \omega t \int_0^1 (1-2\xi)^2 (1-\xi)^2 \xi^2 d\xi \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{\rho A} \left(\frac{L^4}{24 \tilde{E I}} \right)^2 \cdot L \cdot \sin^2 \omega t \int_0^1 \{ (1-\xi) + \kappa_1 \}^2 \xi^2 (1-\xi)^2 d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \frac{\tilde{\rho A} L^9}{(24 \tilde{E I})^2} \cdot \frac{1}{630} \left\{ (1+9\kappa_1+21\kappa_1^2) + \frac{12 \tilde{\rho I}}{\tilde{\rho A} L^2} \right\} \quad (2-12)
 \end{aligned}$$

歪エネルギーは、式(1-10)右辺第1, 2項より、

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \tilde{E I} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \left[\tilde{E I} \left(\frac{L^2}{12 \tilde{E I}} \right)^2 \cdot L \int_0^1 (1-6\xi+6\xi^2)^2 d\xi \right. \\
 &\quad \left. + kGA \left(\frac{L^3}{24 \tilde{E I}} \right)^2 \cdot L \cdot \kappa_1^2 \int_0^1 (1-2\xi)^2 d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \cdot \frac{L^5}{720 \tilde{E I}} \left(1 + \frac{5 \kappa_1^2 kGA L^2}{12 \tilde{E I}} \right) \quad (2-13)
 \end{aligned}$$

式(2-12), 式(2-13)より、

$$T_{\max} = U_{\max} \quad (2-14)$$

を置くことにより、

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= \frac{L^5}{720 \tilde{E I}} \left(1 + \frac{5 \kappa_1^2 kGA L^2}{12 \tilde{E I}} \right) / \frac{\tilde{\rho A} L^9}{(24 \tilde{E I})^2} \cdot \frac{1}{630} \left\{ (1+9\kappa_1+21\kappa_1^2) + \frac{12 \tilde{\rho I}}{\tilde{\rho A} \cdot L^2} \right\} \\
 &= \frac{504}{L^4 \beta} (1+5\kappa_1) / \left(1+9\kappa_1+21\kappa_1^2 + \frac{12 \tilde{\rho I}}{L^2 \tilde{\rho A}} \right) \quad (2-15)
 \end{aligned}$$

但し、 $\beta = \tilde{\rho A} / \tilde{E I}$ (1-26)

今度は、最低次の固有関数として、せん断変形を考慮した中央集中荷重(単位荷重)を受ける両端固定梁の撓み曲線を用いる。

Euler-Lagrangeの方程式は、式(2-2)において単位分布荷重が欠落する他は同じである。

2式から、 Ψ を分離すると、

$$\frac{d^3 \Psi}{dx^3} = 0 \quad (2-16)$$

梁中央に集中荷重(単位)を受けることから、

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} = -\frac{1}{2 \tilde{E I}} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (2-17)$$

式(2-17)を次の境界条件,

$$\Psi = 0 \quad \left(x = 0, \frac{L}{2}\right) \quad (2-18)$$

のもとに積分すると,

$$\Psi = \frac{L^2}{8\tilde{E}\tilde{I}} \cdot \frac{x}{L} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad (2-19)$$

式(2-19)を式(2-1)に用いて,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= -\frac{\tilde{E}\tilde{I}}{kGA} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \Psi \\ &= \frac{1}{2kGA} + \frac{L^2}{8\tilde{E}\tilde{I}} \cdot \frac{x}{L} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \end{aligned} \quad (2-20)$$

境界条件 $W = 0$ ($x = 0$)のもとに積分すると,

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{L^3}{48\tilde{E}\tilde{I}} \left\{ \frac{x}{L} \left(3 - \frac{4x}{L}\right) + \frac{24\tilde{E}\tilde{I}}{kGAL^2} \right\} \left(\frac{x}{L}\right) \\ &= \frac{L^3}{48\tilde{E}\tilde{I}} \left\{ \frac{x}{L} \left(3 - \frac{4x}{L}\right) + 2\kappa_1 \right\} \left(\frac{x}{L}\right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \end{aligned} \quad (2-21)$$

ここで, $\kappa_1 = \frac{12\tilde{E}\tilde{I}}{kGAL^2}$ (2-9)

式(1-22)と式(1-37)から, 式(2-21)と式(2-19)を用いて最低次の近似式を次のように置く。

$$w(x, t) = \frac{L^3}{48\tilde{E}\tilde{I}} \left\{ \frac{x}{L} \left(3 - \frac{4x}{L}\right) + 2\kappa_1 \right\} \frac{x}{L} \cos \omega t \quad (2-22)$$

$$\phi(x, t) = \frac{L^2}{8\tilde{E}\tilde{I}} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \cdot \frac{x}{L} \cos \omega t \quad (2-23)$$

運動エネルギーは, 式(1-9)より,

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \tilde{\rho}\tilde{I} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \tilde{\rho}\tilde{A} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{\omega^2}{2} \sin^2 \omega t \left[\tilde{\rho}\tilde{I} \frac{2L^5}{64\tilde{E}\tilde{I}^2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2\xi)^2 \xi^2 d\xi \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\rho}\tilde{A} \frac{2L^7}{(48\tilde{E}\tilde{I})^2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \xi \left(3 - 4\xi\right) + 2\kappa_1 \right\}^2 \xi^2 d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sin^2 \omega t \frac{\tilde{\rho}\tilde{A}L^7}{(48\tilde{E}\tilde{I})^2} \frac{13}{560} \left\{ \left(1 + \frac{98}{13}\kappa_1 + \frac{560}{39}\kappa_1^2\right) + \frac{168\tilde{\rho}\tilde{I}}{13\tilde{\rho}\tilde{A} \cdot L^2} \right\} \end{aligned} \quad (2-24)$$

歪エネルギーは、式(1-10)右辺第1, 2項より、

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{\frac{L}{2}} \left\{ \widetilde{EI} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + kGA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \left[\widetilde{EI} \frac{2L^3}{64 \widetilde{EI}^2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-4\xi)^2 d\xi + kGA \frac{2L^5}{(24 \widetilde{EI})^2} \int_0^{\frac{1}{2}} \kappa_1^2 d\xi \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cos^2 \omega t \cdot \frac{L^3}{192 \widetilde{EI}} \left(1 + \frac{\kappa_1^2 kGAL^2}{3 \widetilde{EI}} \right) \tag{2-25}
 \end{aligned}$$

式(2-24), 式(2-25)を式(2-14)のように置いて、

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= \frac{L^3}{192 \widetilde{EI}} \left(1 + \frac{\kappa_1^2 kGAL^2}{3 \widetilde{EI}} \right) \bigg/ \frac{\widetilde{\rho A} L^7}{(48 \widetilde{EI})^2} \cdot \frac{13}{560} \left\{ 1 + \frac{98}{13} \kappa_1 + \frac{560}{39} \kappa_1^2 + \frac{168 \widetilde{\rho I}}{13 \widetilde{\rho A} \cdot L^2} \right\} \\
 &= \frac{12 \times 560}{13 L^4 \cdot \beta} (1 + 4 \kappa_1) \bigg/ \left(1 + \frac{98}{13} \kappa_1 + \frac{560}{39} \kappa_1^2 + \frac{168 \widetilde{\rho I}}{13 L^2 \widetilde{\rho A}} \right) \tag{2-26}
 \end{aligned}$$

但し, $\beta = \widetilde{\rho A} / \widetilde{EI}$ (1-26)

$$\kappa_1 = \frac{12 \widetilde{EI}}{kGAL^2} \tag{2-9}$$

以上、せん断変形及び回転慣性を考慮した両端固定梁の最低次の固有振動数の近似値の導出を示したが、次頁にこれらをまとめる。

なお、これまでの定式化は、最低次のモードを対象としたものであるが、複数個の線形独立な適当な関数を選んで Rayleigh - Ritz の方法を適用することによって、より高次のモードについても近似的に扱うことができることを付記する。

両端固定梁 (Timoshenko beam) の固有値の近似式

◦ Rayleigh 法による近似

(a) 固有関数として等分布荷重を受ける静的撓み曲線を用いる場合

$$\omega^2 = \frac{504}{L^4 \tilde{\rho}} (1 + 5 \kappa_1) \Big/ \left(1 + 9 \kappa_1 + 21 \kappa_1^2 + \frac{12 \tilde{r}^2}{L^2} \right) \quad (2-15)$$

(b) 固有関数として中央に集中荷重を受ける静的撓み曲線を用いる場合

$$\omega^2 = \frac{12 \times 560}{13 L^4 \tilde{\rho}} (1 + 4 \kappa_1) \Big/ \left(1 + \frac{98}{13} \kappa_1 + \frac{560}{39} \kappa_1^2 + \frac{168 \tilde{r}^2}{13 L^2} \right) \quad (2-16)$$

※ 式中のパラメータ

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho} A / \tilde{E} I$$

$$\gamma = \tilde{\rho} I / k G A$$

$$\kappa_1 = 12 \tilde{E} I / k G A L^2$$

$$\tilde{r}^2 = \tilde{\rho} I / \tilde{\rho} A$$

L : はり長さ

G : 横弾性係数

k : せん断係数 (薄肉円筒の場合 : $\frac{2(1+\nu)}{4+3\nu} \approx \frac{1}{2}$)

$\tilde{\rho} A$, $\tilde{E} I$, $\tilde{\rho} I$, A については後述。

(3) $A, \tilde{\rho}A, \tilde{\rho}I, \tilde{E}I$ の決定

(2)で導入された式中のパラメータ $A, \tilde{\rho}A, \tilde{\rho}I$ 及び $\tilde{E}I$ はそれぞれ断面積, 単位長さ当りの質量, 単位長さ当りの回転慣性及び曲げ剛性を表わすが, 前述のように, ベローズを想定する場合, これらは x (長手) 方向の関係となり, 扱いが複雑になるため, 一様断面形状として式を展開してきた。ここでは, これらの形状及び材料パラメータをベローズについて近似的に定めることを考える。

(a) A の算出

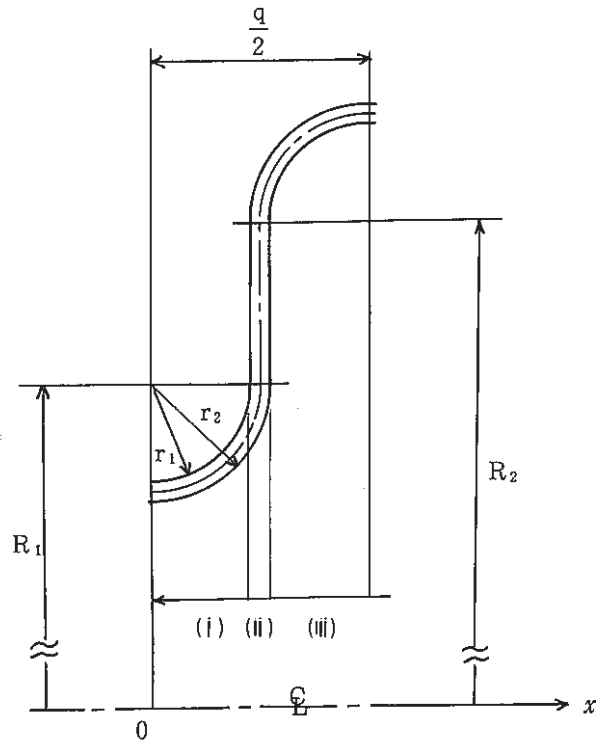
ベローズの形状パラメータ及び座標を右図に示す。

A はベローズ半山の平均値として与える。 A_x を座標 x における真の断面積, 外表面半径を R_o , 内表面半径を R_i とすると,

$$A = \frac{2}{q} \int_0^{\frac{q}{2}} A_x dx$$

$$= \frac{2\pi}{q} \int_0^{\frac{q}{2}} (R_o^2 - R_i^2) dx$$

(3-1)



(i) $0 \leq x \leq r_1$

$$R_o = R_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2}, \quad R_i = R_1 - \sqrt{r_2^2 - x^2} \quad (3-2a, b)$$

$$A_x = \pi \{ 2R_1 (\sqrt{r_2^2 - x^2} - \sqrt{r_1^2 - x^2}) - (r_2^2 - r_1^2) \} \quad (3-3)$$

従って,

$$\int_0^{r_1} A_x dx = 2\pi R_1 \int_0^{r_1} (\sqrt{r_2^2 - x^2} - \sqrt{r_1^2 - x^2}) dx - \pi \int_0^{r_1} (r_2^2 - r_1^2) dx$$

$$= \pi R_1 \left[x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} - x \sqrt{r_1^2 - x^2} - r_1^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_1} \right]_0^{r_1} - \pi r_1 (r_2^2 - r_1^2)$$

$$= \pi R_1 \left(r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - r_1^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \pi r_1 (r_2^2 - r_1^2) \quad (3-4)$$

(ii) $r_1 \leq x \leq r_2$

$$R_o = R_2 + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2}, \quad R_i = R_1 - \sqrt{r_2^2 - x^2} \quad (3-5a, b)$$

$$A_x = \pi \left\{ R_2^2 - R_1^2 + 2R_2 \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} + 2R_1 \sqrt{r_2^2 - x^2} - \frac{q^2}{4} + qx \right\}$$

従って,

$$\int_{r_1}^{r_2} A_x dx = 2\pi R_2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} dx + 2\pi R_1 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{r_2^2 - x^2} dx \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} & + \pi (R_2^2 - R_1^2) (r_2 - r_1) - \frac{\pi q}{4} (q - 2r_1 - 2r_2) (r_2 - r_1) \\ & = \pi R_2 \left[-\left(\frac{q}{2} - x\right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} - r_2^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_2} \right]_{r_1}^{r_2} \\ & + \pi R_1 \left[x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right]_{r_1}^{r_2} + \pi (R_2^2 - R_1^2) (r_2 - r_1) \\ & - \frac{\pi q}{4} (q - 2r_1 - 2r_2) (r_2 - r_1) \\ & = \pi R_2 \left\{ -\left(\frac{q}{2} - r_2\right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - r_2\right)^2} - r_2^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - r_2}{r_2} \right. \\ & \left. + \left(\frac{q}{2} - r_1\right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - r_1\right)^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - r_1}{r_2} \right\} \\ & + \pi R_1 \left(\frac{\pi}{2} r_2^2 - r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} - r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} \right) + \pi (R_2^2 - R_1^2) (r_2 - r_1) \\ & - \frac{\pi q}{4} (q - 2r_2 - 2r_1) (r_2 - r_1) \\ & = -\pi (R_1 + R_2) \left(r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_2^2 \right) + \pi (R_2^2 - R_1^2) (r_2 - r_1) \end{aligned} \quad (3-7)$$

上式の導出に当っては、次の関係を用いている。

$$r_1 + r_2 = \frac{q}{2} \quad (3-8)$$

$$(iii) \quad r_2 \leq x \leq \frac{q}{2}$$

$$R_0 = R_2 + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2}, \quad R_1 = R_2 + \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} \quad (3-9a, b)$$

$$A_x = \pi \left\{ 2R_2 \left(\sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} - \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} + r_2^2 - r_1^2 \right) \right\} \quad (3-10)$$

従って,

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} A_x \, dx &= 2\pi R_2 \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} \left(\sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} - \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} \right) dx + \pi \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} (r_2^2 - r_1^2) dx \\ &= \pi R_2 \left[-\left(\frac{q}{2} - x\right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} - r_2^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q}{2} - x\right) \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} + r_1^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_1} \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} + \pi r_1 (r_2^2 - r_1^2) \\ &= \pi R_2 \left(r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - r_1^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \pi r_1 (r_2^2 - r_1^2) \quad (3-11) \end{aligned}$$

式(3-4), 式(3-7)及び式(3-11)より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{q}{2}} A_x \, dx &= \pi (r_2 - r_1) (R_1 + R_2) \left\{ \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2) + (R_2 - R_1) \right\} \\ &= \pi t d_p \left\{ H + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot \frac{q}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \pi d_p t L_d \quad (3-12)$$

$$\text{但し,} \quad t = r_2 - r_1 \quad (3-13a)$$

$$d_p = R_1 + R_2 \quad (3-13b)$$

$$H - \frac{q}{2} = R_2 - R_1 \quad (3-13c)$$

$$L_d = H + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot \frac{q}{2} \quad (\text{ベローズ半山子午線方向展開長さ}) \quad (3-14)$$

式(3-12)を式(3-1)に用いて

$$A = \frac{2\pi d_p t L_d}{q} \quad (3-15)$$

(b) $\tilde{\rho A}$ の算出

単位長さ当りの質量 $\tilde{\rho A}$ としては、ベローズによるもの $(\tilde{\rho A})_B$ と内部流体によるもの $(\tilde{\rho A})_F$ の和を考える。

即ち、

$$\tilde{\rho A} = (\tilde{\rho A})_B + (\tilde{\rho A})_F \quad (3-16)$$

内部流体による $(\tilde{\rho A})_F$ は横振動に寄与するものとして、右図の斜線部全域を考慮する。

(i) $(\tilde{\rho A})_B$ の算出

ベローズの単位長さ当りの質量としては、ベローズの密度 ρ_B と式 (3-15) の A を用いる。

$$(\rho A)_B = \frac{2 \pi P_B d_p t L_d}{q} \quad (3-17)$$

なお、式 (3-12) は、ベローズ半山の真の体積であるから、式 (3-17) によって得られる半山の質量は一致する。

(ii) $(\tilde{\rho A})_F$ の算出

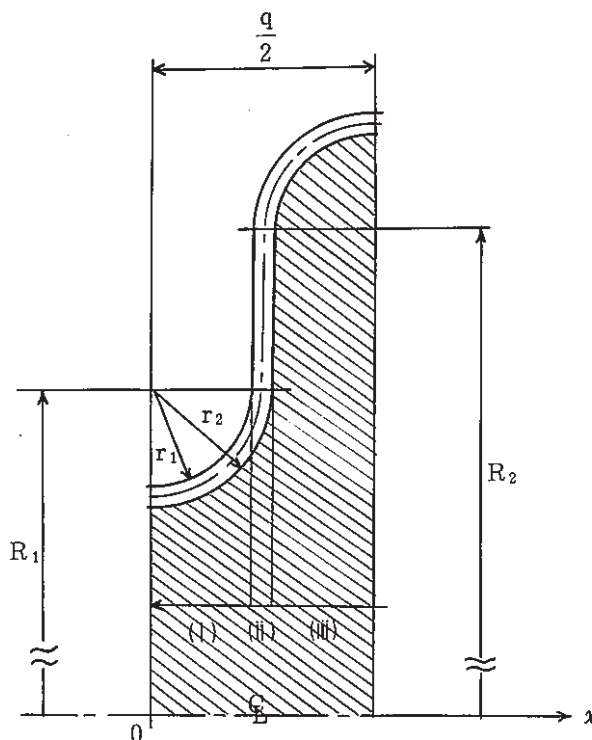
断面積としては、コンボリューション内側の断面積を考える。(a) に倣って、

$$A_F = \frac{2}{q} \int_0^{\frac{q}{2}} A_{Fx} dx = \frac{2\pi}{q} \int_0^{\frac{q}{2}} R_1^2 dx \quad (3-18)$$

◦ $0 \leq x \leq r_2$

式 (3-2b) より

$$A_{Fx} = \pi (R_1 - \sqrt{r_2^2 - x^2})^2 = \pi \{ R_1^2 - 2R_1 \sqrt{r_2^2 - x^2} + (r_2^2 - x^2) \} \quad (3-19)$$



従って,

$$\begin{aligned} \int_0^{r_2} A_{Fx} dx &= \pi \int_0^{r_2} (R_1^2 + r_2^2 - x^2) dx - 2\pi R_1 \int_0^{r_2} \sqrt{r_2^2 - x^2} dx \\ &= \pi \left[(R_1^2 + r_2^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{r_2} - \pi R_1 \left[x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right]_0^{r_2} \\ &= \pi r_2 \left(R_1^2 - \frac{\pi}{2} R_1 r_2 + \frac{2}{3} r_2^2 \right) \end{aligned} \quad (3-20)$$

$$\circ r_2 \leq x \leq \frac{q}{2}$$

式(3-9b)より,

$$\begin{aligned} A_{Fx} &= \pi \left\{ R_2 + \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} \right\}^2 \\ &= \pi \left\{ R_2^2 + 2R_2 \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} + r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3-21)$$

従って,

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} A_{Fx} dx &= \pi \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} \left\{ R_2^2 + r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2 \right\} dx + 2\pi R_2 \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} dx \\ &= \pi \left[(R_2^2 + r_1^2)x + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{2} - x\right)^3 \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \\ &\quad - \pi R_2 \left[\left(\frac{q}{2} - x\right) \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} + r_1^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_1} \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \\ &= \pi r_1 \left(R_2^2 + \frac{\pi}{2} R_2 r_1 + \frac{2}{3} r_1^2 \right) \end{aligned} \quad (3-22)$$

式(3-20), 式(3-22)より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{q}{2}} A_{Fx} dx &= \pi \left\{ r_2 \left(R_1^2 - \frac{\pi}{2} R_1 r_2 + \frac{2}{3} r_2^2 \right) + r_1 \left(R_2^2 + \frac{\pi}{2} R_2 r_1 + \frac{2}{3} r_1^2 \right) \right\} \\ &= \frac{q}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d_p^2 \left\{ 1 + \frac{(H - \frac{q}{2}) L_d}{d_p^2} + \frac{q^2}{6 d_p^2} - \frac{4t L_d}{d_p q} + \frac{2t^2}{d_p^2} + \frac{\pi t^2 (H - \frac{q}{2})}{d_p^2 q} \right\} \end{aligned} \quad (3-23)$$

$$\approx \frac{q}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d_p^2 \left\{ 1 + \frac{(H - \frac{q}{2}) L_d}{d_p^2} + \frac{q^2}{6 d_p^2} - \frac{4t L_d}{d_p q} \right\} \quad (3-24)$$

$$\approx \frac{q}{2} \cdot \frac{\pi}{4} d_p^2 \quad (3-25)$$

近似式(3-25)を式(3-18)に用いると,

$$A_F = \frac{\pi}{4} d_p^2 \quad (3-26)$$

内部流体の密度を ρ_F とすると,

$$(\tilde{\rho A})_F = \frac{\pi}{4} \rho_F d_p^2 \quad (3-27)$$

式(3-17), 式(3-27)から,

$$\tilde{\rho A} = \frac{2\pi\rho_B d_p t L_d}{q} + \frac{\pi}{4} \rho_F d_p^2 \quad (3-28)$$

(c) $\tilde{\rho I}$ の算出

単位長さ当たりの回転慣性としては、ベローズによるもの $(\tilde{\rho I})_B$ と内部流体によるもの $(\tilde{\rho I})_F$ の和を考える。

即ち,

$$\tilde{\rho I} = (\tilde{\rho I})_B + (\tilde{\rho I})_F \quad (3-29)$$

内部流体による $(\tilde{\rho I})_F$ は回転慣性に寄与するものとして、右図の斜線部に示すコンボリューション内部を考慮する。

(i) $(\tilde{\rho I})_B$ の算出

ベローズの断面2次モーメント I_B は、半山の平均値として与える。

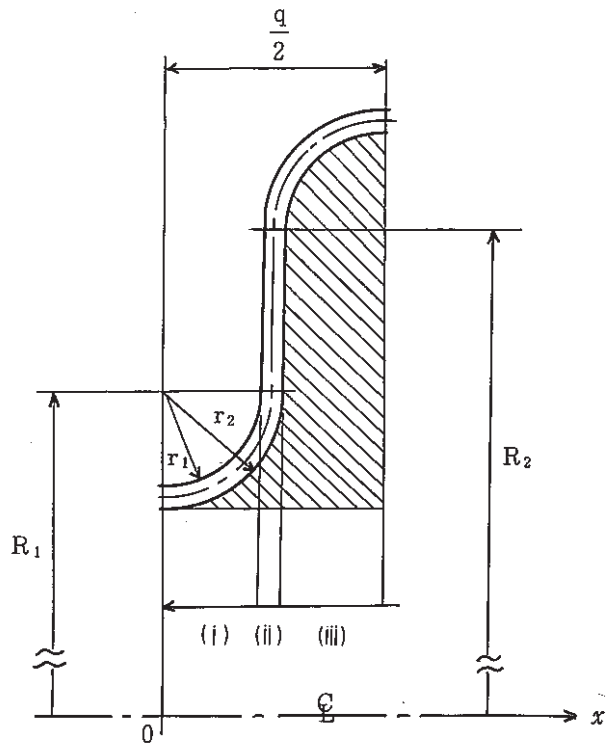
$$I_B = \frac{2}{q} \int_0^{\frac{q}{2}} I_{Bx} dx = \frac{\pi}{2q} \int_0^{\frac{q}{2}} (R_0^4 - R_i^4) dx$$

$$(3-30)$$

○ $0 \leq x \leq r_1$

式(3-2a, b)より,

$$\begin{aligned} I_{Bx} &= \frac{\pi}{4} \{ (R_1 - \sqrt{r_1^2 - x^2})^4 - (R_1 - \sqrt{r_2^2 - x^2})^4 \} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(r_2^2 - r_1^2) \{ 2x^2 - (6R_1^2 + r_2^2 + r_1^2) \} + 4R_1^3 (\sqrt{r_2^2 - x^2} - \sqrt{r_1^2 - x^2}) \right. \\ &\quad \left. + 4R_1 \{ (r_2^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \} \right] \end{aligned} \quad (3-31)$$



従って,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{r_1} I_{Bx} dx &= \frac{\pi}{4} \int_0^{r_1} \left[(r_2^2 - r_1^2) \{ 2x^2 - (6R_1^2 + r_2^2 + r_1^2) \} \right. \\
 &\quad \left. + 4R_1^3 (\sqrt{r_2^2 - x^2} - \sqrt{r_1^2 - x^2}) + 4R_1 \{ (r_2^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - (r_1^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \} \right] dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \left\{ (r_2^2 - r_1^2) \left[\frac{2}{3} x^3 - (6R_1^2 + r_2^2 + r_1^2) x \right]_0^{r_1} \right. \\
 &\quad + 2R_1^3 \left[x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} - x \sqrt{r_1^2 - x^2} - r_1^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_1} \right]_0^{r_1} \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} R_1 \left[x (r_2^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^4 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - x (r_1^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - r_1^2 x \sqrt{r_1^2 - x^2} - r_1^4 \sin^{-1} \frac{x}{r_1} \right]_0^{r_1} \right\} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left[-r_1 (r_2^2 - r_1^2) (6R_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{3} r_1^2) + 2R_1^3 (r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_1^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} R_1 \{ r_1 (r_2^2 - r_1^2)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^4 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_1^4 \} \right] \tag{3-32}
 \end{aligned}$$

○ $r_1 \leq x \leq r_2$

式(3-5 a, b)より,

$$\begin{aligned}
 I_{Bx} &= \frac{\pi}{4} \{ (R_2 + \sqrt{r_2^2 - (\frac{q}{2} - x)^2})^4 - (R_1 - \sqrt{r_2^2 - x^2})^4 \} \\
 &= \frac{\pi}{4} \{ (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2 + 6r_2^2) - 2(3R_2^2 + r_2^2) (\frac{q}{2} - x)^2 \\
 &\quad + 2(3R_1^2 + r_2^2) x^2 + (\frac{q}{2} - x)^4 - x^4 + 4R_2^3 \sqrt{r_2^2 - (\frac{q}{2} - x)^2} \\
 &\quad + 4R_1^3 \sqrt{r_2^2 - x^2} + 4R_2 (r_2^2 - (\frac{q}{2} - x)^2)^{\frac{3}{2}} + 4R_1 (r_2^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \} \tag{3-33}
 \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
 \int_{r_1}^{r_2} I_{Bx} dx &= \frac{\pi}{4} \left\{ \left[(R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2 + 6r_2^2) x + \frac{2}{3} (3R_2^2 + r_2^2) (\frac{q}{2} - x)^3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2}{3} (3R_1^2 + r_2^2) x^3 - \frac{1}{5} (\frac{q}{2} - x)^5 - \frac{1}{5} x^5 \right]_{r_1}^{r_2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 R_2^3 \left[\left(\frac{q}{2} - x \right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_2} \right]_{r_1}^{r_2} \\
& + 2 R_1^3 \left[x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right]_{r_1}^{r_2} \\
& - \frac{4 R_2}{3} \left[\left(\frac{q}{2} - x \right) \left(r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 \left(\frac{q}{2} - x \right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} \right. \\
& \quad \left. + r_2^4 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_2} \right]_{r_1}^{r_2} \\
& + \frac{4 R_1}{3} \left[x \left(r_2^2 - x^2 \right)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^4 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right]_{r_1}^{r_2} \Bigg\} \\
& = \frac{\pi}{4} \left\{ \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \left(R_2^2 + R_1^2 + 6 r_2^2 \right) \left(r_2 - r_1 \right) - 2 \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \left(r_2^3 - r_1^3 \right) \right. \\
& \quad - 2 \left(R_2^3 + R_1^3 \right) \left(r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_2^2 \right) \\
& \quad - \frac{4}{3} \left(R_2 + R_1 \right) \left(r_1 \left(r_2^2 - r_1^2 \right)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \right. \\
& \quad \left. \left. + r_2^4 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_2^4 \right) \right\} \tag{3-34}
\end{aligned}$$

$$\circ \quad r_2 \leq x \leq \frac{q}{2}$$

式(3-9a, b)より,

$$\begin{aligned}
I_{Bx} &= \frac{\pi}{4} \left\{ \left(R_2 + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} \right)^4 - \left(R_1 + \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} \right)^4 \right\} \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\left(r_2^2 - r_1^2 \right) \left(6 R_2^2 + r_2^2 + r_1^2 - 2 \left(\frac{q}{2} - x \right)^2 \right) \right. \\
& \quad + 4 R_2^2 \left\{ \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} - \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} \right\} \\
& \quad \left. + 4 R_2 \left\{ \left(r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \left(r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right] \tag{3-35}
\end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
\int_{r_2}^{\frac{q}{2}} I_{Bx} dx &= \frac{\pi}{4} \left\{ \left(r_2^2 - r_1^2 \right) \left[\left(6 R_2^2 + r_2^2 + r_1^2 \right) x + \frac{2}{3} \left(\frac{q}{2} - x \right)^3 \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \right. \\
& \quad \left. - 2 R_2^3 \left[\left(\frac{q}{2} - x \right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_2} \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{q}{2} - x \right) \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} - r_1^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_1} \Bigg]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \\
 & - \frac{4}{3} R_2 \left[\left(\frac{q}{2} - x \right) \left(r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 \left(\frac{q}{2} - x \right) \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} \right. \\
 & \left. + r_2^4 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_2} - \left(\frac{q}{2} - x \right) \left(r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
 & \left. - r_1^2 \left(\frac{q}{2} - x \right) \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x \right)^2} - r_1^4 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_1} \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \Bigg\} \\
 & = \frac{\pi}{4} \left\{ \left(r_2^2 - r_1^2 \right) \left(6R_2^2 + r_2^2 + \frac{1}{3} r_1^2 \right) r_1 \right. \\
 & \quad \left. + 2R_2^3 \left(r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_1^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4}{3} R_2 \left(r_1 \left(r_2^2 - r_1^2 \right)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 r_1 \sqrt{r_2^2 - r_1^2} + r_2^4 \sin^{-1} \frac{r_1}{r_2} - \frac{\pi}{2} r_1^4 \right) \right\} \quad (3-36)
 \end{aligned}$$

式(3-32), 式(3-34)及び式(3-36)から,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{q}{2}} I_{Bx} dx & = \frac{\pi}{4} (r_2 - r_1) (R_2 + R_1) \left\{ (R_2 - R_1) (R_2^2 + R_1^2 + 4r_1^2 + 4r_1 r_2 + 4r_2^2) \right. \\
 & \quad \left. + \pi (r_1 + r_2) \left(R_2^2 - R_2 R_1 + R_1^2 + \frac{2}{3} r_2^2 + \frac{2}{3} r_1^2 \right) \right\} \\
 & = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{t d_p}{2} \left\{ d_p^2 \left(H + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \frac{q}{2} \right) + \left(H - \frac{q}{2} \right)^2 \left(H + \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right) \frac{q}{2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2} q^2 \left(H + \left(\frac{\pi}{9} - 1 \right) \frac{q}{2} \right) + 2t^2 \left(H + \left(\frac{\pi}{3} - 1 \right) \frac{q}{2} \right) \right\} \\
 & = \frac{\pi t d_p^3 L_d}{8} \left[1 + \frac{1}{d_p^2 L_d} \left\{ \left(H - \frac{q}{2} \right)^2 \left(H + \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right) \frac{q}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{3}{2} q^2 \left(H + \left(\frac{\pi}{9} - 1 \right) \frac{q}{2} \right) + 2t^2 \left(H + \left(\frac{\pi}{3} - 1 \right) \frac{q}{2} \right) \right\} \right] \quad (3-37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \approx \frac{\pi t d_p^3 L_d}{8} \left[1 + \frac{1}{d_p^2 L_d} \left\{ \left(H - \frac{q}{2} \right)^2 \left(H + \left(\frac{3}{2} \pi - 1 \right) \frac{q}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{3}{2} q^2 \left(H + \left(\frac{\pi}{9} - 1 \right) \frac{q}{2} \right) \right\} \right] \quad (3-38)
 \end{aligned}$$

$$\approx \frac{\pi t d_p^3 L_d}{8} \quad (3-39)$$

近似式(3-39)を式(3-30)に用いると,

$$I_{Bx} = \frac{\pi t d_p^3 L_d}{4q} \quad (3-40)$$

ベローズの密度を ρ_B とすると,

$$(\tilde{\rho I})_B = \frac{\pi \rho_B t d_p^3 L_d}{4q} \quad (3-41)$$

(ii) $(\tilde{\rho I})_F$ の算出

コンボリューション内部の流体部分の平均断面2次モーメントは,

$$I_F = \frac{2}{q} \int_0^{\frac{q}{2}} I_{Fx} dx = \frac{\pi}{2q} \int_0^{\frac{q}{2}} \{ R_1^4 - (R_1 - r_2)^4 \} dx \quad (3-42)$$

○ $0 \leq x \leq r_2$

式(3-2b)より,

$$\begin{aligned} I_{Fx} &= \frac{\pi}{4} \{ (R_1 - \sqrt{r_2^2 - x^2})^4 - (R_1 - r_2)^4 \} \\ &= \frac{\pi}{4} \{ (R_1^4 + 6R_1^2 r_2^2 + r_2^4) - 2(3R_1^2 + r_2^2)x^2 + x^4 - 4R_1^3 \sqrt{r_2^2 - x^2} \\ &\quad - 4R_1 (r_2^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - (R_1 - r_2)^4 \} \end{aligned} \quad (3-43)$$

従って,

$$\begin{aligned} \int_0^{r_2} I_{Fx} dx &= \frac{\pi}{4} \left\{ 4R_1 r_2^2 (R_1^2 + r_2^2) - \frac{2}{3} (3R_1^2 + r_2^2) r_2^3 + \frac{1}{5} r_2^5 \right. \\ &\quad \left. - 2R_1^3 \left[x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^2 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right]_0^{r_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} R_1 \left[x (r_2^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + r_2^2 x \sqrt{r_2^2 - x^2} + r_2^4 \sin^{-1} \frac{x}{r_2} \right]_0^{r_2} \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} r_2^2 \left\{ (4 - \pi) R_1^3 - 2R_1^2 r_2 + (4 - \frac{2}{3}\pi) R_1 r_2^2 - \frac{7}{15} r_2^3 \right\} \end{aligned} \quad (3-44)$$

○ $r_2 \leq x \leq \frac{q}{2}$

式(3-9b)より,

$$\begin{aligned} I_{Fx} &= \frac{\pi}{4} \{ (R_2 + \sqrt{R_1^2 - (\frac{q}{2} - x)^2})^4 - (R_1 - r_2)^4 \} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ (R_2 + r_1)^4 - (R_1 - r_2)^4 - 4R_2 r_1 (R_2^2 + r_1^2) - 2(3R_2^2 + r_1^2) (\frac{q}{2} - x)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\frac{q}{2} - x)^4 \right\} \end{aligned}$$

$$+ 4 R_2^3 \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} + 4 R_2 \left(r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \left. \right\} \quad (3-45)$$

従って,

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^{\frac{q}{2}} I_{Fx} dx &= \frac{\pi}{4} \left(\left\{ (R_2 + r_1)^4 - (R_1 - r_2)^4 - 4 R_2 r_1 (R_2^2 + r_1^2) \right\} r_1 \right. \\ &\quad + \frac{2}{3} (3 R_2^2 + r_1^2) \left[\left(\frac{q}{2} - x\right)^3 \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{q}{2} - x\right)^5 \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \\ &\quad + 2 R_2^3 \left[- \left(\frac{q}{2} - x\right) \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} - r_1^2 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_1} \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \\ &\quad - \frac{4}{3} R_2 \left[\left(\frac{q}{2} - x\right) \left(r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + r_1^2 \left(\frac{q}{2} - x\right) \sqrt{r_1^2 - \left(\frac{q}{2} - x\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + r_1^4 \sin^{-1} \frac{\frac{q}{2} - x}{r_1} \right]_{r_2}^{\frac{q}{2}} \Bigg) \\ &= \frac{\pi}{4} r_1 \left\{ (R_2 + r_1)^4 - (R_1 - r_2)^4 - 4 R_2 r_1 (R_2^2 + r_1^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} (3 R_2^2 + r_1^2) r_1^2 + \frac{1}{5} r_1^4 + \pi R_2^3 r_1 + \frac{2}{3} \pi R_2 r_1^3 \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} r_1 \left[(R_2 + r_1)^4 - (R_1 - r_2)^4 - r_1 \left\{ (4 - \pi) R_2^3 + 2 R_2^2 r_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(4 - \frac{2}{3} \pi\right) R_2 r_1^2 + \frac{7}{15} r_1^3 \right\} \right] \quad (3-46) \end{aligned}$$

式(3-44)及び式(3-46)から,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{q}{2}} I_{Fx} dx &= \frac{\pi}{4} \left\{ r_2 (R_1 - r_2)^4 + r_1 (R_2 + r_1)^4 - \frac{q}{2} (R_1 - r_2)^4 \right. \\ &\quad + (4 - \pi) (r_2^2 R_1^3 - r_1^2 R_2^3) - 2 (r_2^3 R_1^2 + r_1^3 R_2^2) \\ &\quad \left. + \left(4 - \frac{2}{3} \pi\right) (r_2^4 R_1 - r_1^4 R_2) - \frac{7}{15} (r_2^4 + r_1^4) \right\} \\ \text{or} &= \frac{\pi}{4} \left[r_1 \{ (R_2 + r_1)^4 - (R_1 - r_2)^4 \} \right. \\ &\quad \left. + r_2^2 \{ (4 - \pi) R_1^3 - 2 R_1^2 r_2 + \left(4 - \frac{2}{3} \pi\right) R_1 r_2^2 - \frac{7}{15} r_2^3 \} \right] \end{aligned}$$

$$-r_1^2 \left\{ (4-\pi) R_2^3 + 2R_2^2 r_1 + \left(4 - \frac{2}{3}\pi\right) R_2 r_1^2 + \frac{7}{15} r_1^3 \right\} \quad (3-47)$$

式(3-13a, b, c)を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{q}{2}} I_{FX} dx &= \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{q}{4} - \frac{t}{2} \right) H(d_p - t) \{ R_2^2 + R_1^2 + 2(R_2 r_1 - R_1 r_2) + r_1^2 + r_2^2 \} \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{q^2}{4} + t^2 \right) \left\{ (4-\pi) (R_1^3 - R_2^3) - 2(R_1^2 r_2 + R_2^2 r_1) \right. \\ &\quad + \left(4 - \frac{2}{3}\pi \right) (R_1 r_2^2 - R_2 r_1^2) - \frac{7}{15} (r_2^3 + r_1^3) \left. \right\} \\ &\quad + \frac{qt}{4} \left\{ (4-\pi) (R_1^3 + R_2^3) - 2(R_1^2 r_2 - R_2^2 r_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(4 - \frac{2}{3}\pi \right) (R_1 r_2^2 + R_2 r_1^2) - \frac{7}{15} (r_2^3 - r_1^3) \right\} \left. \right] \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2} H \left(\frac{q}{4} - \frac{t}{2} \right) (d_p - t) (d_p^2 + H^2 - 2d_p t + t^2) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{q^2}{4} + t^2 \right) \left\{ -d_p^3 \left(\left(3 - \frac{3}{4}\pi \right) H - \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\pi \right) q \right) + t d_p \left(H + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right) q \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \left((4-\pi) H^3 - \frac{1}{2} (10-3\pi) H^2 q + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} \right) H q^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{19}{5} - \pi \right) q^3 \right) \\ &\quad \left. - t^2 \left(\left(1 - \frac{\pi}{6} \right) H - \left(\frac{13}{40} - \frac{\pi}{6} \right) q \right) \right\} \\ &\quad + \frac{qt}{4} \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) d_p^3 - \frac{1}{2} t d_p^2 + \left(\left(3 - \frac{3}{4}\pi \right) H^2 - \frac{1}{2} \left(5 - \frac{3}{2}\pi \right) H q \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(3 - \frac{11}{12}\pi \right) q^2 + \left(1 - \frac{1}{6}\pi \right) t^2 \left. \right\} d_p - \left(\left(1 - \frac{\pi}{6} \right) H q \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{33}{80} - \frac{\pi}{12} \right) q^2 \right) t - \frac{7}{60} t^3 \left. \right\} \quad (3-48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2} H \left(\frac{q}{4} - \frac{t}{2} \right) (d_p - t) (d_p^2 + H^2 - 2d_p t) \right. \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{q^2}{4} + t^2 \right) \left\{ -d_p^3 \left(\left(3 - \frac{3}{4}\pi \right) H - \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\pi \right) q \right) + t d_p \left(H + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} \right) q \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left((4-\pi) H^3 - \frac{1}{2} (10-3\pi) H^2 q + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{3} \right) H q^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{19}{5} - \pi \right) q^3 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{qt}{4} \left\{ \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) d_p^3 - \frac{1}{2} t d_p^2 \right. \\
& + \left(\left(3 - \frac{3}{4}\pi\right) H^2 - \frac{1}{2} \left(5 - \frac{3}{2}\pi\right) Hq + \frac{1}{4} \left(3 - \frac{11}{12}\pi\right) q^2 \right) d_p \\
& \left. - \left(\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) H - \left(\frac{33}{80} - \frac{\pi}{12}\right) q \right) qt \right\} \quad (3-49) \\
& \approx \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{4} H \left(\frac{q}{2} - t \right) d_p^3 - \frac{q^2}{16} \left\{ \left(3 - \frac{3}{4}\pi\right) H - \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{8}\pi\right) q \right\} d_p^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{qt}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) d_p^3 \right] \\
& = \frac{\pi}{32} Hq d_p^3 \left[1 - \frac{2t}{q} \left\{ 1 - \frac{q}{H} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \right\} - \frac{q}{2d_p} \left\{ 3 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{q}{4H} \left(5 - \frac{3}{2}\pi\right) \right\} \right] \\
& = \frac{\pi}{32} Hq d_p^3 (1 - \zeta) \quad (3-50) \\
& \approx \frac{\pi}{32} Hq d_p^3 \quad (3-51)
\end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \zeta = \frac{2t}{q} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{q}{H} \right\} + \frac{q}{2d_p} \left\{ 3 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{q}{4H} \left(5 - \frac{3}{2}\pi\right) \right\} \quad (3-52)$$

近似式(3-50)を式(3-42)に代入すると,

$$I_F = \frac{\pi}{16} H d_p^3 (1 - \zeta) \quad (3-53)$$

内部流体の密度を ρ_F とすると,

$$(\tilde{\rho I})_F = \frac{\pi}{16} \rho_F H d_p^3 (1 - \zeta) \quad (3-54)$$

式(3-54)を式(3-41)と共に式(3-29)に用いると,

$$\tilde{\rho I} = \frac{\pi}{4} \left\{ \rho_B \frac{tL_d}{q} + \rho_F \frac{H(1-\zeta)}{4} \right\} d_p^3 \quad (3-55)$$

(d) \tilde{EI} の算出

ベローズの曲げ剛性 \tilde{EI} は、EJMAスタンダードの1山当りの軸方向ばね定数 f_{iu} をベースに次式で求める。

$$\tilde{EI} = f_{iu} d_p^2 q / 8 \quad (3-56)$$

$$\text{ここで, } f_{iu} = \frac{5}{3} \frac{d_p t_p^3 n E}{H^3 C_f} \quad (3-57)$$

以上、算出したベローズの形状、材質によるパラメータ A 、 $\tilde{\rho}_A$ 、 $\tilde{\rho}_I$ 、及び \tilde{EI} を次頁にまとめると。

ベローズのパラメータの算出式（近似式）

1. 断面積 A

$$A = 2 \pi d_p t L_d / q \quad (3-15)$$

2. 単位長さ当りの質量 $\tilde{\rho}A$

$$\tilde{\rho}A = 2 \pi \left(\rho_B \frac{t L_d}{q} + \rho_F \frac{d_p}{8} \right) d_p \quad (3-28)$$

3. 単位長さ当りの回転慣性 $\tilde{\rho}I$

$$\tilde{\rho}I = \frac{\pi}{4} \left\{ \rho_B \frac{t L_d}{q} + \rho_F \frac{H(1-\zeta)}{4} \right\} d_p^3 \quad (3-55)$$

$$\zeta = \frac{2t}{q} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{q}{H} \right\} + \frac{q}{2d_p} \left\{ 3 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{q}{4H} \left(5 - \frac{3}{2} \pi \right) \right\} \quad (3-52)$$

4. 曲げ剛性 $\tilde{E}I$

$$\tilde{E}I = f_{iu} d_p^2 q / 8 \quad (3-56)$$

※ 式中の記号

- d_p : ベローズピッチ径
- t : " 公称板厚
- q : " ピッチ
- H : " 山高
- L_d : ベローズ半山子午線方向展開長さ
- f_{iu} : 1山当りの軸方向ばね定数 (EJMA スタンダード)

(4) 計算例

計算例として次の仕様のベローズを評価する。

○ ピッチ径 : $d_p = 1155 \text{ mm}$

○ 板厚 : $t = 2.0 \text{ mm}$

○ ピッチ : $q = 56 \text{ mm}$

○ 山高 : $H = 60 \text{ mm}$

○ 半山展開長さ : $L_d = 76.0 \text{ mm}$

○ 1山当りの軸方向ばね定数 : $f_{iu} = \frac{5}{3} \cdot \frac{d_p E t_p^3 n}{H^3 C_f}$

$$t_p = 1.95 \text{ mm}$$

$$C_f = 1.6$$

$$E = 2.0 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$$

$$f_{iu} = 826.0 \text{ kg/mm}$$

○ ベローズ密度 : $\rho_B = \frac{7850 \times 10^{-9}}{9.8 \times 10^3} = 8.01 \times 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^4$

○ 内部流体(水)密度 : $\rho_F = \frac{1000 \times 10^{-9}}{9.8 \times 10^3} = 1.02 \times 10^{-10} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^4$

① 断面積 $A = 2 \pi d_p t L_d / q = 1.97 \times 10^4 \text{ mm}^2$

② 単位長さ当りの質量 $\tilde{\rho} A$

○ 水無し : $\tilde{\rho} A = 1.58 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^2$

○ 水有り : $\tilde{\rho} A = 1.227 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 / \text{mm}^2$

③ 単位長さ当りの回転慣性 $\tilde{\rho} I$

$$\zeta = 0.0711$$

○ 水無し : $\tilde{\rho} I = 2.63 \text{ kg} \cdot \text{s}^2$

○ 水有り : $\tilde{\rho} I = 4.35 \text{ kg} \cdot \text{s}^2$

④ 曲げ剛性 $\tilde{E} I = f_{iu} d_p^2 q / 8 = 7.713 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

⑤ 長さ $L = qN = 56N \text{ mm}$

⑥ 横断係数 : $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7.69 \times 10^3 \text{ kg} / \text{mm}^2 (\nu = 0.3)$

⑦ せん断係数 : $k = \frac{1}{2}$

⑧ $\beta = \frac{\tilde{\rho} A}{\tilde{E} I} = 2.048 \times 10^{-15} \text{ s}^2 / \text{mm}^4$ (水無し)

$$= 1.591 \times 10^{-14} \text{ s}^2 / \text{mm}^4$$
 (水有り)

$$\begin{aligned} \textcircled{9} \quad r &= \frac{\tilde{\rho I}}{kGA} = 3.473 \times 10^{-8} \text{ s}^2 && (\text{水無し}) \\ &= 5.743 \times 10^{-8} \text{ s}^2 && (\text{水有り}) \\ \textcircled{10} \quad \kappa_1 &= \frac{12 \tilde{E I}}{kGAq^2 N^2} = \frac{0.3896}{N^2} \\ \textcircled{11} \quad \tilde{r}^2 &= \frac{\tilde{\rho I}}{\tilde{\rho A}} = 1.665 \times 10^5 \text{ mm}^2 && (\text{水無し}) \\ &= 3.545 \times 10^4 \text{ mm}^2 && (\text{水有り}) \end{aligned}$$

Rayleigh 法による評価

○ 式 (2 - 15)

$$\omega^2 = \frac{2.50 \times 10^{10}}{N^4} \left(1 + \frac{1.948}{N^2} \right) \bigg/ \left(1 + \frac{640.62}{N^2} + \frac{3.188}{N^4} \right) \quad (\text{水無し})$$

$$\omega_0^2 = \frac{2.50 \times 10^{10}}{N^4} \quad (\text{ " })$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = \left(1 + \frac{1.948}{N^2} \right) \bigg/ \left(1 + \frac{640.62}{N^2} + \frac{3.188}{N^4} \right) \quad (\text{ " })$$

第3の式を用いて, Nと $\frac{\omega}{\omega_0}$ の関係を Fig.1 に示す。

同様に内部流体を含む場合は,

$$\omega^2 = \frac{3.22 \times 10^9}{N^4} \left(1 + \frac{1.948}{N^2} \right) \bigg/ \left(1 + \frac{139.16}{N^2} + \frac{3.188}{N^4} \right) \quad (\text{水有り})$$

$$\omega_0^2 = \frac{3.22 \times 10^9}{N^4} \quad (\text{ " })$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = \left(1 + \frac{1.948}{N^2} \right) \bigg/ \left(1 + \frac{139.16}{N^2} + \frac{3.188}{N^4} \right) \quad (\text{ " })$$

第3式を Fig. 1 にオーバープロットする。

N = 12 について, 固有振動数を求めると,

$$\begin{cases} \omega_0 = 1.098 \times 10^3 \text{ rad/s} , & f_0 = 174.8 \text{ Hz} \quad (\approx \text{EJMA st.}) && (\text{水無し}) \\ \omega = 4.736 \times 10^2 \text{ " } , & f = 75.4 \text{ Hz} && (\text{ " }) \\ \omega_0 = 3.941 \times 10^2 \text{ rad/s} , & f_0 = 62.7 \text{ Hz} \quad (\approx \text{EJMA st.}) && (\text{水有り}) \\ \omega = 2.829 \times 10^2 \text{ " } , & f = 45.0 \text{ Hz} && (\text{ " }) \end{cases}$$

因に, 文献3) による解析と試験は, 水無しについて

$$f_{\text{FEM}} = 82.5 \text{ Hz} \quad (\text{NASTRAN. コニカルシエル})$$

$$f_{\text{exp}} = 77.1 \text{ Hz} \quad (\text{ランダムハンマーリング})$$

先の結果と比較すると

$$\frac{f}{f_{\text{FEM}}} = 0.914$$

$$\frac{f}{f_{\text{exp}}} = 0.978$$

$$\frac{f}{f_{\text{EJMA}}} = 0.431$$

EJMA スタンダードでは実際の倍以上の振動数を与えるのに対し、回転慣性、せん断剛性を考慮した簡易法は、試験やFEM解析にかなり一致することがわかる。

参 考 文 献

- 1) Standards of the Expansion Joint Manufacturers Association, Inc., 5 the edition, 1980.
- 2) 例えば, 材料力学と変分法, C. L. ディム・I. H. シャームス著, 砂川恵監訳, プレイン図書, 1977.
- 3) FBR 配管用伸縮管継手開発のための基礎調査(4), 昭和 57 .
(PNC SJ272 82 - 01)

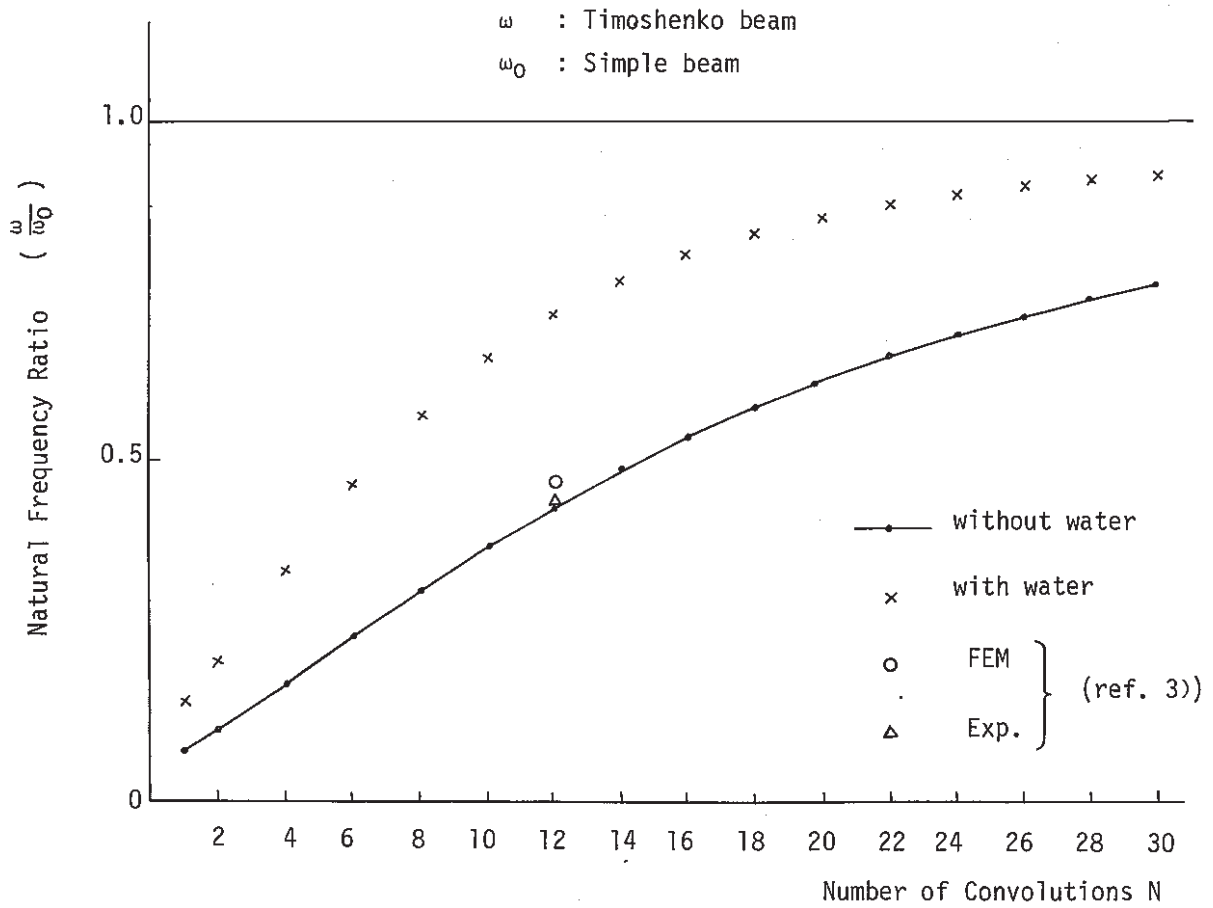


Fig. 1 Number of Convolutions(N) vs Natural Frequency Ratio ($\frac{\omega}{\omega_0}$)

9. あ と が き

昭和 58 年度から始まった FBR 配管用ベローズ継手フィージビリティスタディの中で、提案された 7 つの簡易解析手法を章別に解説した。これらの手法は、ベローズ継手フィージビリティ評価の一助及び、FBR 配管用ベローズ継手設計方針策定の道具として活用することを目的として提案されたが、一部を除いて既に配管用ベローズ継手設計基準ワーキンググループの中で検討、及び設計方針（ドラフト）への取込みの作業が進められている。

（注） 第 4 章～第 7 章の内容は、配管用ベローズ継手設計基準ワーキンググループの中で審議され、昭和 60 年度の成果として取り入れられている。

（配管用ベローズ継手設計基準ワーキンググループ昭和60年度成果報告書）
（PNC SN9420 86-001）

謝 辞

第2章

配管系解析のためのベローズ継手有限要素モデル（二重円筒ファスニングモデル）

数値計算については、岩崎良一氏（大洗工学センター，構造室）の労によるところが大きい。

又，FINAS適用に当っては，大矢哲夫氏（動力炉建設運転本部機械課）の助言を得た。

第3章

コンポリューション板厚分布のモデル化

プログラム作成，計算については後藤文彦氏（日立エンジニアリング（株））の協力を得た。

第6章

コンポリューション毎の寸法のばらつきによって生じるひずみ集中の簡易評価法

評価式の導出に関しては，川崎重工業（株）島川貴司氏の協力を得た。

第7章

ルートバルジと弾性コラム型座屈の中間領域の座屈評価法（弾塑性コラム型座屈の簡易評価法）

数値計算については，岩崎良一氏（大洗工学センター，構造室）の労によるところが大きい。

以上，ここに記して謝意を表します。

附 録

(用語説明)

コンボリューション	ベローズを構成する単位
ハードウェア	ベローズ継手のベローズ以外の構成要素の総称
ジンバル	自在継手タイプの角変位を吸収する構造
ヒンジ	一方向の角変位を吸収する構造
山	ベローズの凸（山状）部。山部の頂点を山頂という。
谷	ベローズの凹（谷状）部。
子午線	ベローズ長手方向にベローズの曲線に沿ったライン。
レプリカベローズ	製品と同一ロットで同一の手順、方法で製作されたベローズ。製品の品質を実証するための各種の試験、検査に供する。