

変形追従型荷重を受けるシェル構造の
大変形・座屈解析のための
対称形荷重補正マトリックス

1988年11月

動力炉・核燃料開発事業団
大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせください。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation)

変形追従型荷重を受けるシェル構造の 大変形・座屈解析のための 対称形荷重補正マトリックス

岩田耕司¹⁾，月森和之¹⁾
久保文男²⁾

要 旨

変形する構造物の表面に常に垂直に作用する圧力荷重は，構造物の変形に依存する荷重としてふるまう。薄肉シェル構造の大変形や座屈解析においては，変形中の荷重方向や作用面積の変化による影響を考慮しなければならないことがある。典型的な例としては，外圧を受ける薄肉リングの弾性座屈が挙げられる。この場合，圧力荷重の変形依存性を考慮しなければ，実際よりも30%程度座屈圧力は高くなり，非保守的な評価となる。

有限要素法解析において，このような問題を解析するためには，従来の線形剛性及び幾何剛性（初期応力）マトリックスに加えて，荷重補正あるいは荷重剛性マトリックスと呼ばれるマトリックスを導入することが必要となる。ところが，荷重補正マトリックスは一般に非対称であり，通常の有限要素法の計算プログラムを用いて実行する場合，障害となる。

本報告書では，圧力荷重が作用する構造に対して有効な対称形の荷重補正マトリックスの簡単な導出手法を示す。これは，一般の荷重補正マトリックスを導出した後，これが，対称マトリックスと反対称マトリックスに分離でき，しかも多くの場合，反対称マトリックスの寄与は無視できることを利用している。

この荷重補正マトリックスは，汎用非線形構造解析システムFINASのはり要素及びシェル要素に適用され，円弧アーチ，単純支持長管及びベローズの圧力荷重による線形座屈解析を通して，その有効性が実証された。

-
- 1) 大洗工学センター 機器構造開発部 構造工学室
 - 2) センチュリリサーチセンタ株式会社

SYMMETRIC LOAD CORRECTION MATRICES FOR LARGE DEFORMATION/
BUCKLING ANALYSIS OF SHELL STRUCTURES SUBJECTED TO
DEFORMATION DEPENDENT LOADS

Koji IWATA¹⁾, Kazuyuki TSUKIMORI¹⁾
and Fumio KUBO²⁾

Abstract

Pressures which are always normal to the deforming surface of the structures behave as deformation dependent loads. In the large deformation and buckling analyses of thin shell structures, the consideration of the effects of the change of loading direction during their deformation is sometimes required. A typical example is the buckling of a thin elastic circular ring under external pressure, where the buckling pressure could be overpredicted by approximately 30% without consideration of deformation dependent load effects.

In the finite element analysis for this type of problems, it is necessary to introduce load correction or load stiffness matrices in addition to the conventional linear and geometrically nonlinear (initial stress) stiffness matrices. The load correction matrices are generally nonsymmetric, which is a major disadvantage when implementing them in the standard finite element computer programs.

In this report, the authors present a simple procedure for deriving effective symmetric load correction matrices for the structures subjected to uniform pressure loads. The general load correction matrices are derived and then symmetrized by taking advantage of that they can be decomposed into symmetric part and skew symmetric part which in many cases has insignificant effects.

The load correction matrices developed for the beam and the shell elements of the general purpose nonlinear structural analysis program FINAS was demonstrated effective through the numerical examples of linear buckling analyses for a circular arch, a simply ends-supported long pipe and bellows under uniform pressure load.

1) Struct. Engng. Sec., Oarai Engng. Cent., PNC
2) Century Research Center Corp.

目 次

1.	緒 言	1
2.	変形追従型圧力荷重による荷重補正マトリックス	2
2.1	一般の荷重補正マトリックス	2
2.2	対称形荷重補正マトリックス	6
2.3	BEAM2要素の荷重補正マトリックス	7
2.4	QFLA4S要素の荷重補正マトリックス	11
2.5	MAXSHEL3要素の荷重補正マトリックス	14
3.	解析による検証	24
3.1	等分布荷重を受ける両端固定円弧アーチの座屈	24
3.2	内／外圧を受ける両端単純支持細長円筒の座屈	33
3.3	内圧によるペローズの座屈	44
4.	結 言	62
	参考文献	64

List of Tables

Table 3.1 - 1	κ and β values	27
Table 3.1 - 2	Discretization of the arch	28
Table 3.1 - 3	Comparison between analytical solutions and numerical results	29
Table 3.2 - 1	Numerical analysis results	37
Table 3.3 - 1	Buckling pressure of bellows	47
Table 3.3 - 2	Comparison of computing time	48

List of Figures

Fig. 2. 1 - 1	Incremental Change of deformation-dependent loads acting on small surface	3
Fig. 2. 3 - 1	BEAM2 element and uniform distributed loads	8
Fig. 2. 4 - 1	QFLA4S element and uniform pressure loads	12
Fig. 2. 5 - 1	MAXSHEL3 element and uniform pressure loads	15
Fig. 3. 1 - 1	Geometry of the circular fixed arch	27
Fig. 3. 1 - 2	The buckling mode of the circular fixed arch	30
Fig. 3. 1 - 3	Effect of load correction on the buckling of the arch	32
Fig. 3. 2 - 1	Geometry of the thin-walled long cylinder simply supported at the both ends	38
Fig. 3. 2 - 2	Lateral distributed force of thin-walled cylinder subjected to internal pressure	39
Fig. 3. 2 - 3	Discretization of the cylinder	40
Fig. 3. 2 - 4	Boundary conditions	40
Fig. 3. 2 - 5	The buckling mode of the long cylinder	41
Fig. 3. 2 - 6	Bending moment generated by configuration independent external pressure	43
Fig. 3. 3 - 1	Geometry of bellows	49
Fig. 3. 3 - 2	Finite element mesh and boundary conditions	50
Fig. 3. 3 - 3	Relation between buckling pressure and number of convolutions	51
Fig. 3. 3 - 4	Buckling mode of 7 convolutions bellows	52
Fig. 3. 3 - 5	Buckling mode of 15 convolutions bellows	55
Fig. 3. 3 - 6	Buckling mode of 30 convolutions bellows	59
Fig. 3. 3 - 7	Buckling modes of actual bellows	61

1. 緒 言

本研究は、汎用非線形構造解析システムFINAS^{1), 2)}において、内圧あるいは外圧を受けるシェル構造物の座屈解析の機能向上をはかるために実施したものである。

物体に圧力荷重が作用する場合、この荷重は常に面に垂直に作用し変形に追従する。このため内圧あるいは外圧が作用する薄肉構造物等の大変形解析や座屈解析では、しばしば変形に伴う荷重の作用方向の変化の影響を考慮する必要があるが生じてくる。例えば、外圧による薄肉円筒の弾性座屈の場合では、圧力の変形追従効果を考慮しなければ、座屈圧力は約30%ほど過大評価されることになる。

有限要素法による解析においてこのような荷重の変形追従効果を表すためには、荷重補正マトリックスあるいは荷重剛性マトリックスとよばれる剛性マトリックスを通常の剛性マトリックスに付加する必要がある。³⁻⁶⁾このマトリックスは一般には非対称マトリックスとなることが知られており、このことが従来、対称マトリックスを基本とする通常の構造解析プログラムで、この種の問題の取扱いを難しくしてきたと考えられる。

本報告書においては、この問題点を克服するために、対称の剛性マトリックスのままでも荷重の変形追従効果を適切に考慮できる簡便かつ実用的な方法を提案する。

この方法は一様な圧力荷重を対象とし、荷重補正マトリックスが対称マトリックスと反対称マトリックスの和になっていること、さらに多くの場合対称マトリックスが支配的であることを利用して、実用上有効な対称形の荷重補正マトリックスを導くものである。本方法によりはり要素、および調和級数円錐台シェル要素に対して荷重補正マトリックスの具体的表示を求め、それらを汎用非線形構造解析システムFINAS^{1), 2)}に組み込んだ。本手法を等分布荷重を受ける円弧アーチ、内/外圧を受ける両端単純支持の細長い円管、内圧を受けるペローズの各弾性座屈問題に適用し、数値解と理論解等との比較により手法の妥当性の検討ならびに荷重の変形追従効果の検討を行なう。

2. 変形追従型圧力荷重による荷重補正マトリックス

2.1 一般の荷重補正マトリックス

変形追従型圧力荷重による荷重補正マトリックスは、仮想仕事の原理における外荷重のなす仮想外部仕事より導かれる。大変形を考慮するため更新ラグランジェ型の増分理論^{3,4)}を用いることにする。増分前の形状を基準にした外力増分のなす仮想外部仕事増分 δW_{ext} は次式で表される。

$$\delta W_{ext} = \int_A \{ \delta u \}^T \{ \Delta T \} dA \quad (2-1)$$

ここで、 A は増分前の外力作用境界面、 $\{ \Delta T \}$ は表面力増分ベクトル、 $\{ \delta u \}$ は仮想変位ベクトルである。また、ベクトルの右肩添字^T は転置を意味する。

外力として変形追従型の一様な圧力 p のみを考えると、表面力 $\{ T \}$ と p は次の関係にある。

$$\{ T \} dA = p \{ n \} dA = p \{ dA \} \quad (2-2)$$

ここで $\{ n \}$ は微小表面要素 dA に立てた単位法線ベクトルであり、 $\{ dA \}$ は dA の直交カーテシアン座標軸 $X_i (i=1, 2, 3)$ に垂直な面への射影を成分とする微小面積ベクトルであり、次式が成り立つ。

$$\{ n \} = \{ dA \} / dA, \quad dA^2 = \{ dA \}^T \{ dA \} \quad (2-3)$$

増分前の形状で定義される表面力増分 (Fig. 2.1-1 参照) は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \{ \Delta T \} &= \Delta p \{ n \} + p \left(\{ \Delta n \} + \frac{\Delta dA}{dA} \{ n \} \right) \\ &= \Delta p \{ n \} + p \{ \Delta dA \} / dA \end{aligned} \quad (2-4)$$

一方、初期形状の微小表面要素 $\{ dA_0 \}$ と現形状の微小表面要素 $\{ dA \}$ との関係は次式で表わされる。⁸⁾

$$\{ dA_0 \} = \frac{\rho}{\rho_0} [J] \{ dA \} \quad (2-5)$$

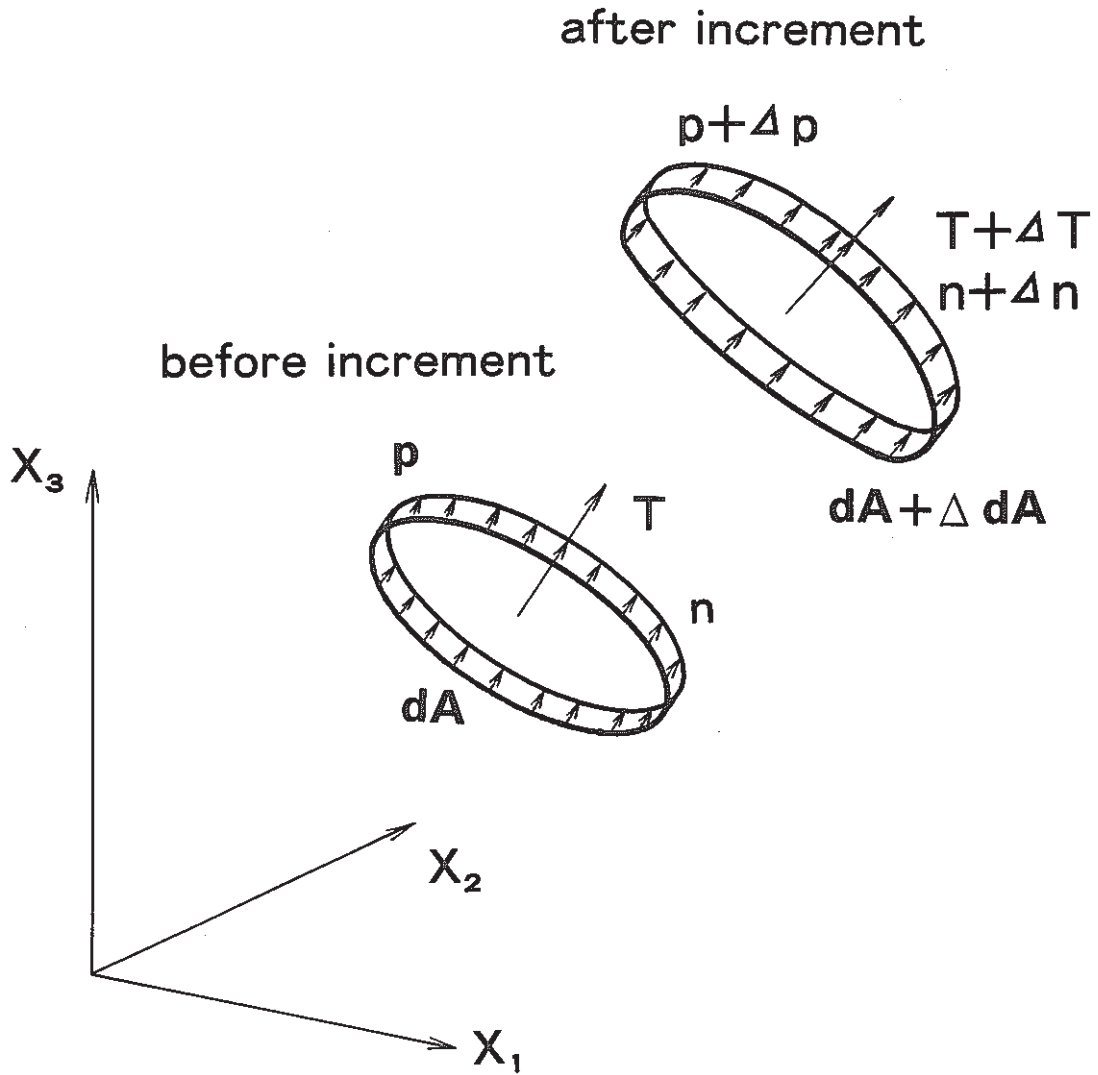


Fig.2.1-1 Incremental change of deformation-dependent loads acting on small surface

ここで、 ρ 、 ρ_0 はそれぞれ初期および現形状に関する密度、 $[J]$ は変形勾配マトリックスである。

現在の形状を基準にするならば、微小表面要素 $\{dA\}$ の増分間の変化は、式 (2-5) より次式で表わされる。

$$\{\Delta dA\} = - \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \{n\} + [\Delta J] \{n\} \right) dA \quad (2-6)$$

ここで $[\Delta J]$ は変位増分勾配 (あるいは変形勾配の増分) マトリックス、 $\Delta \rho$ は密度増分であり、それぞれ次式で表わされる。

$$[\Delta J] = [\Delta e_{ij}] = \left[\frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} \right] \quad (2-7)$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - (\Delta e_{11} + \Delta e_{22} + \Delta e_{33}) \quad (2-8)$$

式 (2-6) を式 (2-4) に代入して次式を得る。

$$\{\Delta T\} = \Delta p \{n\} - p \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \{n\} + [\Delta J] \{n\} \right) \quad (2-9)$$

式 (2-9) を整理すると次のマトリックス表示が得られる。

$$\{\Delta T\} = \Delta p \{n\} - p [D_n] \{\Delta e\} \quad (2-10)$$

ここで

$$\{\Delta e\}^T = \left[\Delta e_{11} \Delta e_{12} \Delta e_{13} \Delta e_{21} \Delta e_{22} \Delta e_{23} \Delta e_{31} \Delta e_{32} \Delta e_{33} \right] \quad (2-11)$$

$$[D_n] = \begin{bmatrix} 0 & n_2 & n_3 & 0 & -n_1 & 0 & 0 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & 0 & 0 & n_1 & 0 & n_3 & 0 & 0 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 & -n_3 & 0 & n_1 & n_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

以上より、変形に追従する圧力荷重による仮想外部仕事増分は次のように表わされる。

$$\delta W_{ext} = \int_A \Delta p \{\delta u\}^T \{n\} dA - \int_A p \{\delta u\}^T [D_n] \{\Delta e\} dA \quad (2-13)$$

式 (2-13) の右辺第 1 項は通常の荷重項、第 2 項は変形に追従する圧力荷重による付

加剛性として寄与する。

次に有限要素に対する変位の補間関数を導入する。

$$\{n\} = [N] \{\bar{u}\} \quad (2-14)$$

ここで $[N]$ は補間関数マトリックス, $\{\bar{u}\}$ は節点変位ベクトルである。

変形勾配増分ベクトルは次のように表わされるものとする。

$$\{\Delta e\} = [B_0] \{\Delta \bar{u}\} \quad (2-15)$$

ここで $[B_0]$ 変形勾配と節点変位を関係づけるマトリックスである。

式(2-12)の右辺第2項に式(2-14), (2-15)を代入すると, 次式のような荷重補正マトリックス(あるいは荷重剛性マトリックス)が得られる。

$$[K_p] = \int_A p [N]^T [D_n] [B_0] dA \quad (2-16)$$

荷重補正マトリックスは, 荷重の方向変化と表面積の変化による剛性の変化を考慮するもので, 幾何剛性的一种と考えられる。上記荷重補正マトリックスの表示は, 以前に筆者の1人が得た成果³⁾に基づくもので文献4にも同様な表示が与えられている。変形追従型圧力荷重が作用する構造物の解析では, 通常の線形剛性マトリックスや幾何剛性(初期応力)マトリックスには式(2-16)の荷重補正マトリックスを付加して解く必要がある。しかしながら, このマトリックスは一般に非対称となるので, 対称マトリックスを基本とする通常の構造解析プログラムとの適合性および計算効率の点からは好ましくない。

2.2 対称形荷重補正マトリックス

変形追従型の圧力荷重に対する荷重補正マトリックスは、従来の文献では式(2-16)と異なる表示式で与えられてきたが、本質的には等価なものであるといえる。

SchweizerhofとRamm⁷⁾は荷重補正マトリックスを1つの対称マトリックスと3つの非対称マトリックスに分解し、それらの性質を調べている。一様な圧力の場合、非対称マトリックスの1つは消失し、残りの2つは反対称マトリックスとなることを示し、いくつかの座屈問題の数値例を通してこの2つの反対称マトリックスの効果を検討している。その中で、彼らは対称形の荷重マトリックスを考慮しさえすれば、実用上十分な精度の数値解が得られることを確認している。そこで本論文では以上の性質を考慮して、次のような簡単な式で対称形の荷重補正マトリックスを求めることを提案する。

$$[K_P]_{\text{sym.}} = \frac{1}{2} ([K_P] + [K_P]^T) \quad (2-17)$$

上式で、 $[K_P]_{\text{sym.}}$ は $[K_P]$ が対称マトリックスと反対称マトリックスに分解できることを利用して対称化した荷重補正マトリックスである。特定の有限要素に対して、式(2-16)、(2-17)から容易に実用的な対称形の荷重補正マトリックスが得られる。

2.3 BEAM2要素の荷重補正マトリックス

FINASのBEAM2要素¹⁾に対する荷重補正マトリックスを導く。BEAM2要素はFig. 2.3-1に示すような2節点はり要素であり、変形追従型の分布荷重としては、y軸方向に作用する P_y 、z軸方向に作用する P_z を考える。

BEAM2要素の中立軸の変位のx軸方向内挿関数は次の通りである。

変位 u : Lagrangeの1次内挿式

変位 v, w : Hermiteの3次内挿式

要素内変位と節点変位の関係は、式(2-14)を再記すると、

$$\{u\} = [N] \{\bar{u}\} \tag{2-14}$$

ここで、BEAM2の場合は、以下のようなになる。

$$\{u\} = \{u, v, w\} \tag{2-18}$$

$$\{\bar{u}\} = \{u_1, v_1, w_1, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1, u_2, v_2, w_2, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2\} \tag{2-19}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{2}H_2 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{2}H_4 \\ 0 & 0 & H_1 & 0 & -\frac{\ell}{2}H_2 & 0 & 0 & 0 & H_3 & 0 & -\frac{\ell}{2}H_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-20}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi), & N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) \\ H_1 &= \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3), & H_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3) \\ H_3 &= \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3), & H_4 &= \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \end{aligned} \right\} \tag{2-21}$$

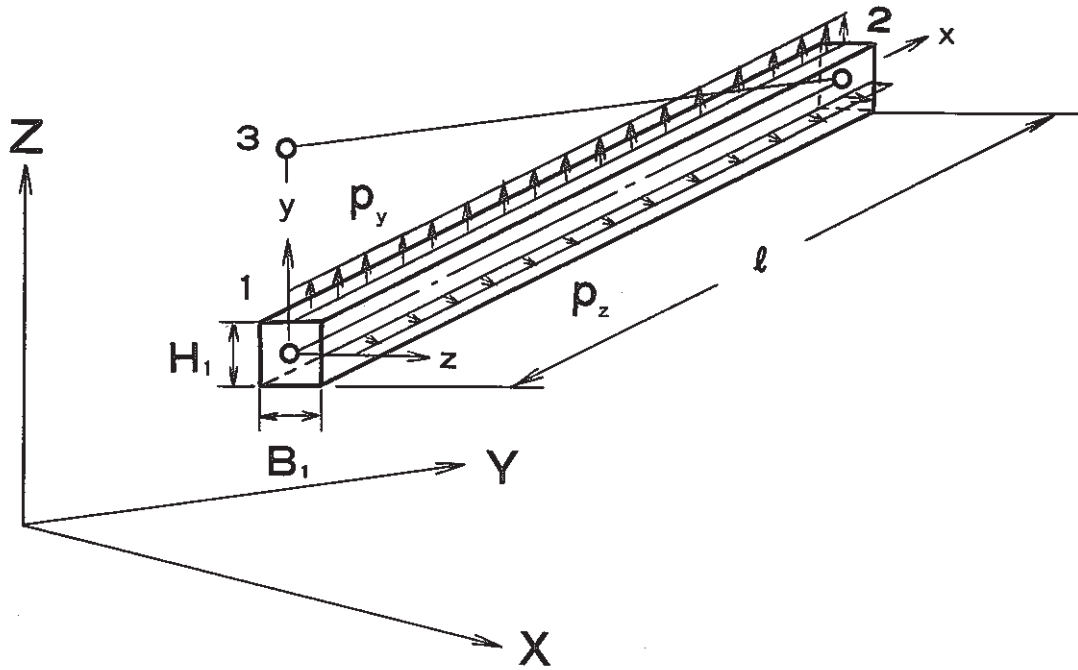


Fig.2.3-1 BEAM2 element and uniform distributed loads

ここで、 ℓ は要素長さ、 ξ は軸方向正規化座標 ($= 2(x - \frac{\ell}{2}) / \ell$) である。また式 (2-19) の下添字 1, 2 はそれぞれ節点 1, 2 の識別添字である。

一方、BEAM2要素中立軸上の変形勾配は次式で表わされる。

$$\{\Delta e\} = [B_e] \{\Delta \bar{u}\} \quad (2-15)$$

ここで、

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} & \frac{\partial \Delta v}{\partial x} & \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\ell} H'_1 & 0 & 0 & 0 & -H'_2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\ell} H'_1 & 0 & -H'_2 & 0 \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\ell} H'_3 & 0 & 0 & 0 & -H'_4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\ell} H'_3 & 0 & -H'_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

ここで、記号' は ξ に関する 1 階微分を表わす。

Fig. 2.3-1 に示す y 軸方向に作用する等分布荷重 p_y に対する $[D_n]$ マトリックス (式 (2-12)) を $[D_y]$ とすると

$$[D_y] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

となる。また、 z 軸方向に作用する等分布荷重 p_z に対する $[D_n]$ マトリックスを $[D_z]$ とすると

$$[D_z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

となる。

以上の各マトリックスを用いると、BEAM2要素に対する対称形の荷重補正マトリックスは次式により計算することができる。

$$\begin{aligned}
 [K_p]_{sym.} = & \frac{p_y \ell}{4} \int_{-1}^1 ([N]^T [D_y] [B_o.] + [B_o.]^T [D_y] [N]) d\xi \\
 & + \frac{p_z \ell}{4} \int_{-1}^1 ([N]^T [D_z] [B_o.] + [B_o.]^T [D_z] [N]) d\xi
 \end{aligned}$$

(2-26)

2.4 QFLA4S要素の荷重補正マトリックス

FINASの4節点四辺形平板シェル要素QFLA4Sに対する荷重補正マトリックスを導く。

QFLA4S要素はFig. 2.4-1に示すような四辺形平板シェル要素であり、要素面に垂直(-z方向)に一様分布荷重が作用するものとする。

QFLA4S要素は、Mindlinの板曲げ理論に基づくもので、中央面の変位の内挿関数は以下の通りである。

変位 u, v, w : Lagrangeの1次内挿式(面内)

勾配 θ_x, θ_y : Lagrangeの1次内挿式(面内)

要素内変位と節点変位の関係は、式(2-14)と同様である。

$$\{\Delta u\} = [N] \{\Delta \bar{u}\} \quad (2-14)$$

ここで、QFLA4Sの場合は、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \llbracket \Delta u \rrbracket = \llbracket \Delta u_1, \Delta v_1, \Delta w_1, \Delta \theta_{x1}, \Delta \theta_{y1}, \Delta \theta_{z1} : \Delta u_2, \dots \\ \Delta \theta_{z2} : \Delta u_3, \dots \Delta \theta_{z3} : \Delta u_4, \dots \Delta \theta_{z4} \rrbracket \end{aligned} \quad (2-27)$$

$$[N] = [N_1 : N_2 : N_3 : N_4] \quad (2-28)$$

ここで

$$[N_i] = \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1 \sim 4 \quad (2-29)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta), & N_4 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

ここで、 ξ, η は2次元の正規化座標を表わす。

一方、QFLA4S要素の中央面上の変形勾配は次式で表わされる。

$$\{\Delta e\} = [B_e] \{\Delta \bar{u}\} \quad (2-15)$$

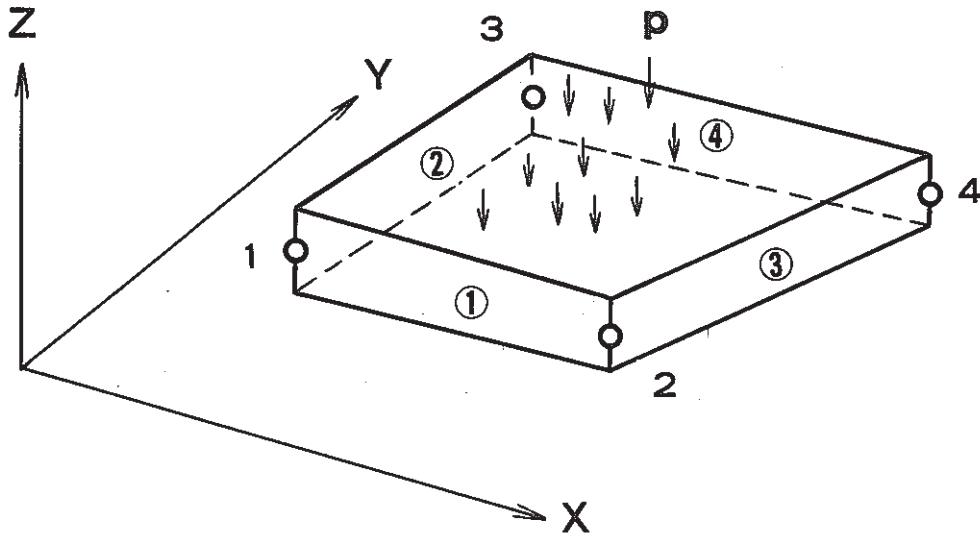


Fig.2.4-1 QFLA4S element and uniform pressure loads

ここで

$$[\Delta e] = \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial x}, \frac{\partial \Delta v}{\partial x}, \frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \frac{\partial \Delta u}{\partial y}, \frac{\partial \Delta v}{\partial y}, \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right] \quad (2-31)$$

$$[B_i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1 \sim 4 \quad (2-32)$$

QFLA4S要素では、式(2-12)の $[D_n]$ マトリックスは次式で表わされる。

$$[D_n] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-33)$$

以上のようにして、QFLA4S要素に対する対称形の荷重補正マトリックスは次式で計算される。

$$[K_p]_{syn.} = \frac{p}{2} \int_A ([N]^T [D_n] [B_0] + [B_0]^T [D_n]^T [N]) dA \quad (2-34)$$

ここでAは要素面積を表わす。

2.5 NAXSHEL3要素の荷重補正マトリックス

FINASの3節点円錐台シェル調和級数要素NAXSHEL3に対する荷重補正マトリックスを導く。変形追従荷重として、軸対称シェルに対する内圧あるいは外圧を取扱うものとする。

NAXSHEL3要素の形状および記号はFig. 2.5-1に示す通りである。変位は周方向のFourier級数により次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \\ w^0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^m \left(\begin{Bmatrix} u^{2i-1} \sin i\theta \\ v^{2i-1} \cos i\theta \\ w^{2i-1} \sin i\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^{2i} \cos i\theta \\ v^{2i} \sin i\theta \\ w^{2i} \cos i\theta \end{Bmatrix} \right) \quad (2-35)$$

ここで、 u は子午線方向、 v は周方向、 w は面外方向の各変位成分を表わし、 θ は周方向座標である。上添字はFourier級数の項番号を意味する。

表示を簡単にするため、式(2-32)を次式で表わす。

$$\{u\} = \{u^0\} + \sum_{i=1}^m \left([SC^i] \{u^{2i-1}\} + [CS^i] \{u^{2i}\} \right) \quad (2-36)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u \quad v \quad w\} \\ \{u^i\} &= \{u^i \quad v^i \quad w^i\} \quad (i=0 \sim 2m) \end{aligned} \quad (2-37)$$

$$[SC^i] = \begin{Bmatrix} \sin i\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos i\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin i\theta \end{Bmatrix} \quad (2-38)$$

$$[CS^i] = \begin{Bmatrix} \cos i\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin i\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos i\theta \end{Bmatrix} \quad (2-39)$$

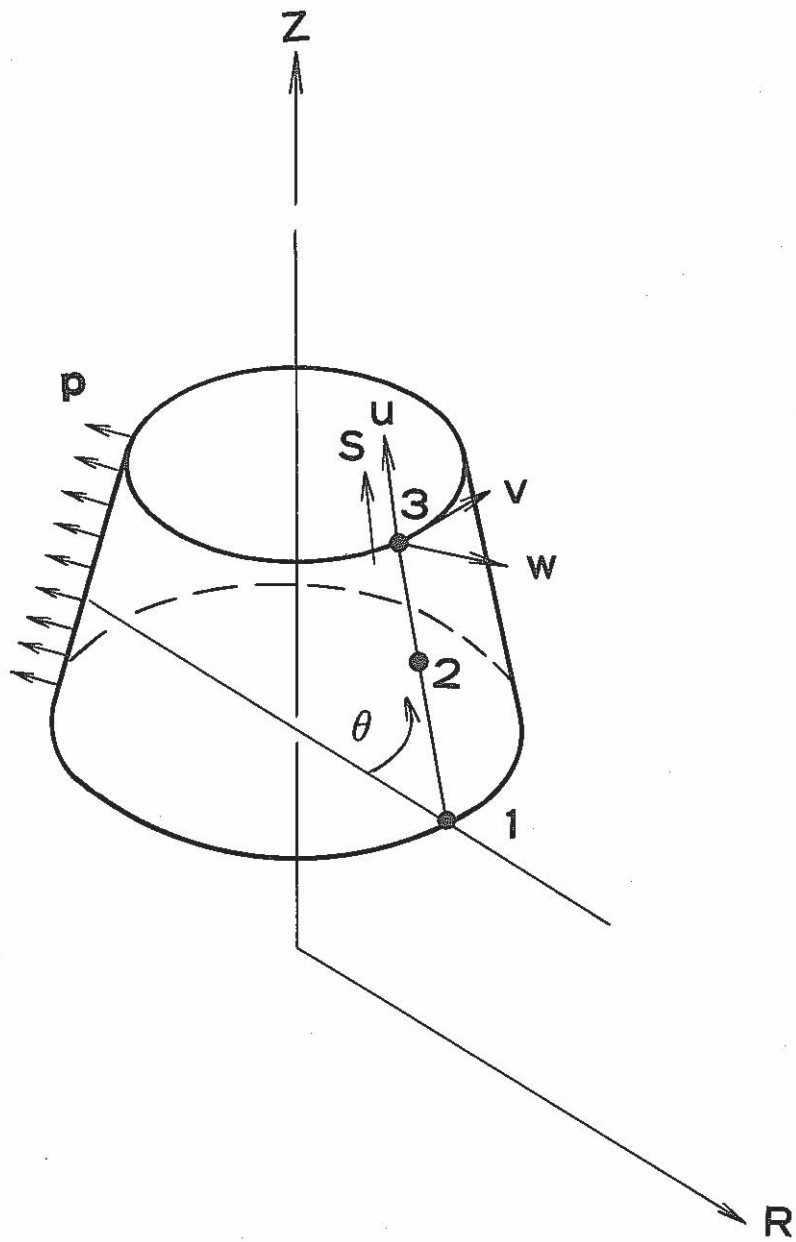


Fig.2.5-1 NAXSHEL3 element and uniform pressure loads

NAXSHBL3要素では要素内の変位の子午線に沿った内挿関数は次の通りである。

変位 u, v : Lagrangeの2次式

変位 w : Hermiteの4次式

このとき、要素内の変位は節点変位を用いて次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \{u\} &= [N]\{\bar{u}^0\} + \sum_{i=1}^m ([SC^i][N]\{\bar{u}^{2i-1}\} + [CS^i][N]\{\bar{u}^{2i}\}) \\ &= [\tilde{N}]\{\tilde{u}\} \end{aligned} \quad (2-40)$$

ここで

$$[u] = [u \quad v \quad w]$$

$$[\bar{u}^I] = \left[\begin{array}{cccc} w_1^I, u_1^I, v_1^I, \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_1^I & ; & w_2^I, u_2^I, v_2^I & ; \\ & & w_3^I, u_3^I, v_3^I, \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_3^I & \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} (2-41) \\ (I=0 \sim 2m) \end{array} \right\}$$

$$[\tilde{u}] = [[\bar{u}^0] [\bar{u}^1] \cdots [\bar{u}^{2m}]]$$

$$[N] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & L_2 \\ H_1 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{2}H_2 & H_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & & & \\ H_4 & 0 & 0 & -\frac{\ell}{2}H_5 & & & \end{array} \right] \quad (2-42a)$$

$$[\tilde{N}] = \left([N]; [SC^1][N]; [CS^1][N]; \cdots; [SC^m][N]; [CS^m][N]; \right) \quad (2-42b)$$

ただし

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2) \\
 L_2 &= 1 - \xi^2 \\
 L_3 &= \frac{1}{2}(\xi + \xi^2)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{aligned}} \right\} (2-43)$$

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{1}{4}(-3\xi + 4\xi^2 + \xi^3 - 2\xi^4) \\
 H_2 &= \frac{1}{4}(-\xi + \xi^2 + \xi^3 - \xi^4) \\
 H_3 &= 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \\
 H_4 &= \frac{1}{4}(3\xi + 4\xi^2 - \xi^3 - 2\xi^4) \\
 H_5 &= \frac{1}{4}(-\xi - \xi^2 + \xi^3 + \xi^4)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} (-1 \leq \xi \leq 1) \\ (2-44) \end{array}$$

ここで、 l は要素長さ、 s は子午線方向座標、 ξ は子午線方向正規化座標である。

一方、非軸対称変形を許容する軸対称殻の変形勾配増分ベクトル $\{\Delta e\}$ は次式で定義される。

$$\{\Delta e\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta v}{\partial s} + \frac{\Delta w}{R} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial s} \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial s} - \frac{\Delta u}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta u}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{R} \Delta v \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta v}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{R} \Delta u + \frac{\sin \phi}{R} \Delta w \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{R} \Delta v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\cos \phi}{R} & 0 \\ \frac{\cos \phi}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\sin \phi}{R} \\ 0 & -\frac{\sin \phi}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \{\Delta u\} \tag{2-45}$$

ここで、 R は Z 軸からの距離、 R_0 は子午線方向の曲率半径である。

変形勾配増分ベクトルを節点変位増分ベクトルで表わすと次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \{\Delta e\} &= [B_{e^0}] \{\Delta \bar{u}^0\} + \sum_{i=1}^m ([B_{e^{2i-1}}] \{\Delta \bar{u}^{2i-1}\} + [B_{e^{2i}}] \{\Delta \bar{u}^{2i}\}) \\
 &= \sum_{i=0}^{2m} [B_{e^i}] \{\Delta \bar{u}^i\} \\
 &= [\tilde{B}_e] \{\Delta \tilde{u}\}
 \end{aligned} \tag{2-46}$$

ここで、 $[\tilde{B}_e] = \left([B_{e^0}] [B_{e^1}] \cdots [B_{e^{2m}}] \right)$

$\{\Delta \tilde{u}\}$ は式 (2-41) に倣う。

ここで

$$[B_e^0] = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} \frac{H_1}{R_s} & \frac{\partial L_1}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{H_3}{R_s} & \frac{\partial L_2}{\partial s} & 0 & 0 & \frac{H_4}{R_s} & \frac{\partial L_3}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial s} & 0 \\ \frac{\partial H_1}{\partial s} & -\frac{L_1}{R_s} & 0 & -\frac{\ell}{2} \frac{\partial H_2}{\partial s} & \frac{\partial H_3}{\partial s} & -\frac{L_2}{R_s} & 0 & 0 & \frac{\partial H_4}{\partial s} & -\frac{L_3}{R_s} & 0 & -\frac{\ell}{2} \frac{\partial H_5}{\partial s} \\ 0 & 0 & -\frac{\cos \phi}{R} L_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \phi}{R} L_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \phi}{R} L_3 & 0 \\ \frac{\sin \phi}{R} H_1 & \frac{\cos \phi}{R} L_1 & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} \frac{\ell}{2} H_2 & \frac{\sin \phi}{R} H_3 & \frac{\cos \phi}{R} L_2 & 0 & 0 & \frac{\sin \phi}{R} H_4 & \frac{\cos \phi}{R} L_3 & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} \frac{\ell}{2} H_5 \\ 0 & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_3 & 0 \end{array} \right]$$

(2-47)

$$[B_e^{2i-1}] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{H_1}{R_*} \sin \theta & \frac{\partial L_1}{\partial s} \sin \theta & 0 & 0 & \frac{H_3}{R_*} \sin \theta & \frac{\partial L_2}{\partial s} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial s} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial s} \cos \theta & 0 \\ \frac{\partial H_1}{\partial s} \sin \theta & -\frac{L_1}{R_*} \sin \theta & 0 & -\frac{\ell}{2} \frac{\partial H_2}{\partial s} \sin \theta & \frac{\partial H_3}{\partial s} \sin \theta & -\frac{L_2}{R_*} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_1}{R} \operatorname{icosi} \theta & -\frac{\cos \phi}{R} L_1 \cos \theta & 0 & 0 & \frac{L_2}{R} \operatorname{icosi} \theta & -\frac{\cos \phi}{R} L_2 \cos \theta & 0 \\ \frac{\sin \phi}{R} H_1 \sin \theta & \frac{\cos \phi}{R} L_1 \sin \theta & -\frac{L_1}{R} \operatorname{isini} \theta & -\frac{\sin \theta}{R} \frac{\ell}{2} H_2 \sin \theta & \frac{\sin \phi}{R} H_3 \sin \theta & \frac{\cos \phi}{R} L_2 \sin \theta & -\frac{L_2}{R} \operatorname{isini} \theta & 0 \\ \frac{H_1}{R} \operatorname{icosi} \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_1 \cos \theta & -\frac{\ell}{2} \frac{H_2}{R} \operatorname{icosi} \theta & \frac{H_3}{R} \operatorname{icosi} \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_2 \cos \theta & 0 \\ \hline \frac{H_4}{R_*} \sin \theta & \frac{\partial L_3}{\partial s} \sin \theta & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial s} \cos \theta & 0 & & & & \\ \frac{\partial H_4}{\partial s} \sin \theta & -\frac{L_3}{R_*} \sin \theta & 0 & -\frac{\ell}{2} \frac{\partial H_5}{\partial s} \sin \theta & & & & \\ 0 & \frac{L_3}{R} \operatorname{icosi} \theta & -\frac{\cos \phi}{R} L_3 \cos \theta & 0 & & & & \\ \frac{\sin \phi}{R} H_4 \sin \theta & \frac{\cos \phi}{R} L_3 \sin \theta & -\frac{L_3}{R} \operatorname{isini} \theta & -\frac{\sin \theta}{R} \frac{\ell}{2} H_5 \sin \theta & & & & \\ \frac{H_4}{R} \operatorname{icosi} \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_3 \cos \theta & -\frac{\ell}{2} \frac{H_5}{R} \operatorname{icosi} \theta & & & & \end{array} \right]$$

$$[B_e^{2i}] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \frac{H_1}{R_*} \cos i \theta & \frac{\partial L_1}{\partial s} \cos i \theta & 0 & 0 & \frac{H_3}{R_*} \cos i \theta & \frac{\partial L_2}{\partial s} \cos i \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_1}{\partial s} \sin i \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial s} \sin i \theta \\ \frac{\partial H_1}{\partial s} \cos i \theta & -\frac{L_1}{R_*} \cos i \theta & 0 & -\frac{\ell}{2} \frac{\partial H_2}{\partial s} \cos i \theta & \frac{\partial H_3}{\partial s} \cos i \theta & -\frac{L_2}{R_*} \cos i \theta & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{R} i \sin i \theta & -\frac{\cos \phi}{R} L_1 \sin i \theta & 0 & 0 & -\frac{L_2}{R} i \sin i \theta & -\frac{\cos \phi}{R} L_2 \sin i \theta \\ \frac{\sin \phi}{R} H_1 \cos i \theta & \frac{\cos \phi}{R} L_1 \cos i \theta & \frac{L_1}{R} i \cos i \theta & -\frac{\sin \phi}{R} \frac{\ell}{2} H_2 \cos i \theta & \frac{\sin \phi}{R} H_3 \cos i \theta & \frac{\cos \phi}{R} L_2 \cos i \theta & \frac{L_2}{R} i \cos i \theta \\ -\frac{H_1}{R} i \sin i \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_1 \sin i \theta & \frac{\ell}{2} \frac{H_2}{R} i \sin i \theta & -\frac{H_3}{R} i \sin i \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_2 \sin i \theta \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{H_4}{R_*} \cos i \theta & \frac{\partial L_3}{\partial s} \cos i \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial s} \sin i \theta & 0 \\ \frac{\partial H_4}{\partial s} \cos i \theta & -\frac{L_3}{R_*} \cos i \theta & 0 & -\frac{\ell}{2} \frac{\partial H_5}{\partial s} \cos i \theta \\ 0 & -\frac{L_3}{R} i \sin i \theta & -\frac{\cos \phi}{R} L_3 \sin i \theta & 0 \\ \frac{\sin \phi}{R} H_4 \cos i \theta & \frac{\cos \phi}{R} L_3 \cos i \theta & \frac{L_3}{R} i \cos i \theta & -\frac{\sin \phi}{R} \frac{\ell}{2} H_5 \cos i \theta \\ -\frac{H_4}{R} i \sin i \theta & 0 & -\frac{\sin \phi}{R} L_3 \sin i \theta & \frac{\ell}{2} \frac{H_5}{R} i \sin i \theta \end{array} \right]$$

(2-49)

NAXSHE3要素では $[D_n]$ マトリックスは次のようになる。

$$[D_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

以上の $[\tilde{B}_e]$, $[\tilde{N}]$, $[D_n]$ マトリックスを用いることにより荷重補正マトリックスは次式で計算することができる。

$$[K_p]_{sym.} = \frac{p}{4} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \ell ([\tilde{N}]^T [D_n] [\tilde{B}_e] + [\tilde{B}_e]^T [D_n]^T [\tilde{N}]) d\theta d\xi \quad (2-51)$$

3. 解析による検証

本章では、円弧アーチ、円筒といった基本的な構造の座屈問題について変形追従型の荷重補正マトリックスを考慮する場合としない場合の比較、検討を数値解析を通して行い、最後に変形追従型荷重によって座屈を生じる典型的な構造例としてペローズの内圧座屈解析を行う。

3.1. 等分布荷重を受ける両端固定円弧アーチの座屈

(1) 問題の解説

Fig. 3.1-1 に示すような開き角 $2\phi_0$ 、曲率半径 R 、肉厚 t 、幅 b の両端固定円弧アーチに曲率中心に向かう等分布荷重 p が作用する。このアーチが座屈する等分布荷重 p を求めるのがこの問題であるが、いくつかの開き角に対して、荷重補正マトリックスを含む場合と含まない場合の固有値解析を行い、その影響を比較、検討する。

この問題については、荷重の作用方向が変化しない場合、変形に追従して常に面に垂直に保つ場合のいずれについても理論式が存在する。⁹⁾ 荷重の作用方向が変化しない場合の座屈荷重を p_c とすると、

$$p_c = \beta^2 \cdot \frac{EI}{R^3} \quad (3.1-1)$$

ここで、 E は弾性定数、 I は断面 2 次モーメントである。 β は、次の 2 式のいずれかの解として与えられる係数であり、非対称の座屈モードに対しては、

$$\begin{aligned} \frac{\beta^3 R}{(\beta^2 - 1)^2} [(\beta^2 - 1)(\phi_0 + \sin \phi_0 \cos \phi_0) \cos \beta \phi_0 \\ - 2(\beta \sin \beta \phi_0 \cos \phi_0 - \cos \beta \phi_0 \sin \phi_0) \cos \phi_0] = 0 \end{aligned} \quad (3.1-2a)$$

対称の座屈モードに対しては、

$$\begin{aligned} \frac{\beta^3 R}{(\beta^2 - 1)^2} [(\beta^2 - 1)(\phi_0 - \sin \phi_0 \cos \phi_0) \sin \beta \phi_0 \\ - 2(\sin \beta \phi_0 \cos \phi_0 - \beta \cos \beta \phi_0 \sin \phi_0) \sin \phi_0] = 0 \end{aligned} \quad (3.1-2b)$$

次に荷重が変形に追従する場合の座屈荷重を p_r とすると、

$$p_r = (k^2 - 1) \frac{E I}{R^3} \quad (3.1-3)$$

k の値は次式を解くことによって得られる。

$$k \tan \phi_0 \cos k \phi_0 = 0 \quad (3.1-4)$$

言うまでもないが、式 (3.1-1) は荷重補正マトリックスを考慮しない場合に、式 (3.1-3) は荷重補正マトリックスを考慮する場合に相当する。

(2) 解析モデル

(a) 形状、寸法

- ・ 曲率半径 $R = 100 \text{ mm}$
 - ・ 肉厚 $t = 1 \text{ mm}$
 - ・ 幅 $b = 10 \text{ mm}$
 - ・ 片側開き角 $\phi_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$ (計6ケース)
- (各開き角 ϕ_0 に対応する β , k の値は Table 3.1-1 の通りである。)

(b) 物性値

- ・ 弾性定数 $E = 2.0105 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$

(c) 使用要素

3次元矩形断面梁要素 "BEAM2"

(d) 要素分割

5° ピッチで等分割 (Table 3.1-2 参照)

(e) 境界条件及び荷重条件

- ・ 境界条件：両端で完全固定 $u_x = u_y = u_z = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$
両端以外で面外 (Z) の動きを拘束 $u_z = \theta_x = \theta_y = 0$
- ・ 荷重条件：曲率中心に向かう (面に垂直な) 等分布荷重

荷重が変形に依存しない (荷重補正マトリックスを含まない) 場合、
変形追従型荷重 (荷重補正マトリックスを含む) 場合

(3) 解析結果

Table 3.1-3 に解析結果と理論解との比較を示す。但し、数値は、 EI/R^3 で除し

た値である。荷重補正を含まない場合の第1モードが理論解の非対称の場合に対応する。荷重が変形に依存しない場合、変形に追従する場合、それぞれ理論と解析は良く一致している。

Fig. 3.1-2に荷重補正マトリックスを考慮した場合の座屈モード図を示す。座屈モードについては荷重補正マトリックスの有無による差は認められない。

(4) 比較, 検討

Fig. 3.3-3は横軸に片側開き角 ϕ_0 、縦軸に理論式(3.1-1)及び解析値を式(3.1-3)で除した値をとって比較した図である。2つの曲線は荷重が変形に依存しない場合の理論値を表わしており、実線が非対称モード、破線が対称モードの解である。荷重補正マトリックスを含まない場合の解析結果の第1、第2モードをそれぞれ○、●で、荷重補正マトリックスを含む場合の第1、第2モードをそれぞれ△、▲でプロットしているが、これを見ても理論と解析は良く一致することがわかる。

Fig. 3.3-3から、特に片側開き角が大きい場合、荷重補正マトリックスの有無によって大きな差異が生じることがわかる。第1モードについては片側開き角 120° までは荷重補正マトリックスを含まない方が座屈荷重はやや高いが、 120° をこえると両者の大小関係は逆転し、荷重補正マトリックスを含まない場合の座屈荷重は荷重補正を含む場合に比べて非常に小さな値となる。

片側開き角が 180° の場合、円管の外圧座屈問題となるが、荷重補正マトリックスを含まないと、厳密解あるいは荷重補正マトリックスを含む解よりも3割余り高い評価となり、注意する必要がある。なお、このとき荷重補正マトリックスを含む場合の解は重根となる。

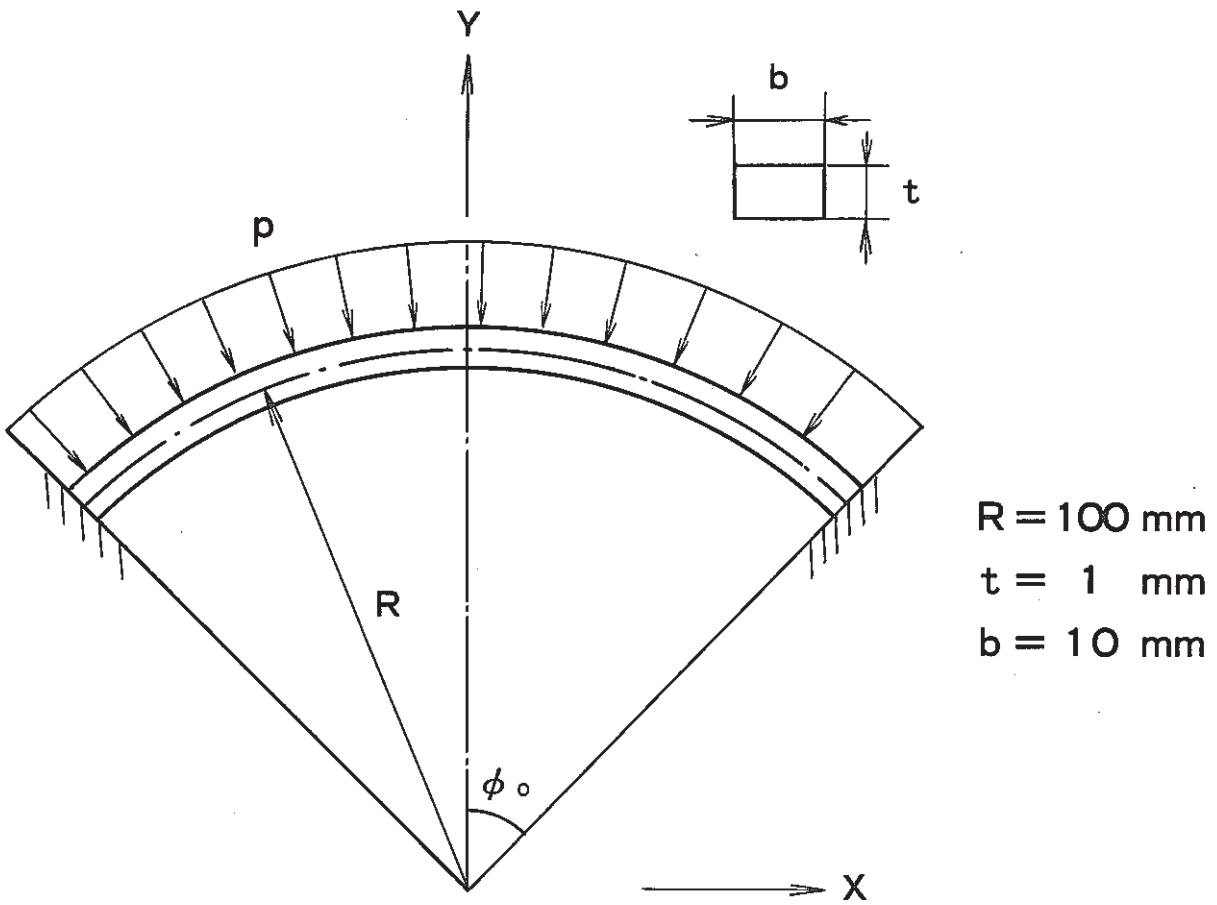
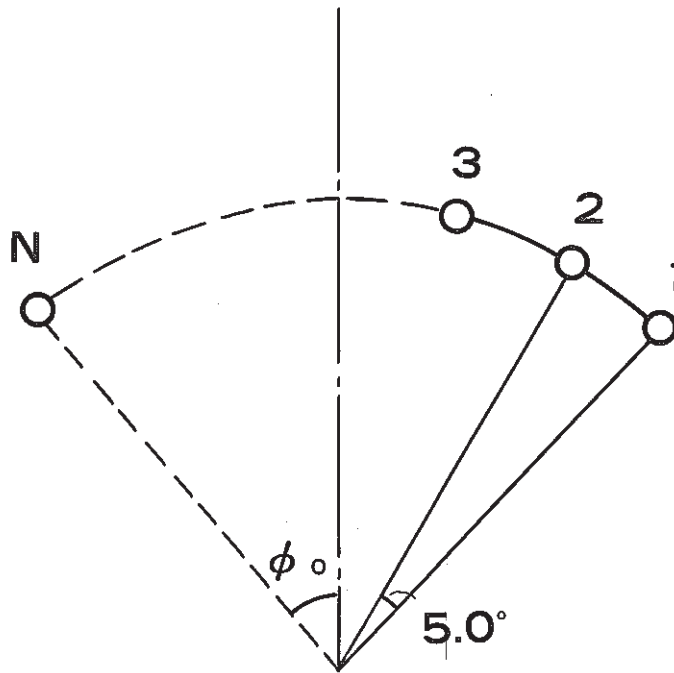


Fig.3.1-1 Geometry of the Circular Fixed Arch

Table 3.1-1 k and β values

ϕ_0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	
k	8.621	4.375	3.000	2.364	2.066	2.000	
β	asymmetric	8.650	4.426	3.000	2.152	1.408	0.837
	symmetric	11.044	5.577	3.779	2.896	2.370	2.000

Table 3.1-2 Discretization of the Arch



	Number of Elements	Number of Nodes N
30°	12	13
60°	24	25
90°	36	37
120°	48	49
150°	60	61
180°	72	73

Table 3.1-3 Comparison between Analytical Solutions and Numerical Results

ϕ_0	Analytical			FEM Solution			
	Constant Force		Follower Force	Constant Force		Follower Force	
	asymmetric	symmetric		1st. Mode	2nd. Mode	1st. Mode	2nd. Mode
30°	74.823	121.970	73.322	75.415	122.538	7.3773 ×10	1.2111 ×10 ²
60°	19.589	31.103	18.141	19.619	31.150	1.8168 ×10	2.9754 ×10
90°	9.000	14.281	8.000	9.013	14.300	8.0118	1.2922 ×10
120°	4.631	8.387	4.588	4.638	8.397	4.5956	7.0622
150°	1.982	5.617	3.268	1.988	5.625	3.2750	4.3917
180°	0.701	4.000	3.000	0.702	4.006	3.0042	3.0045

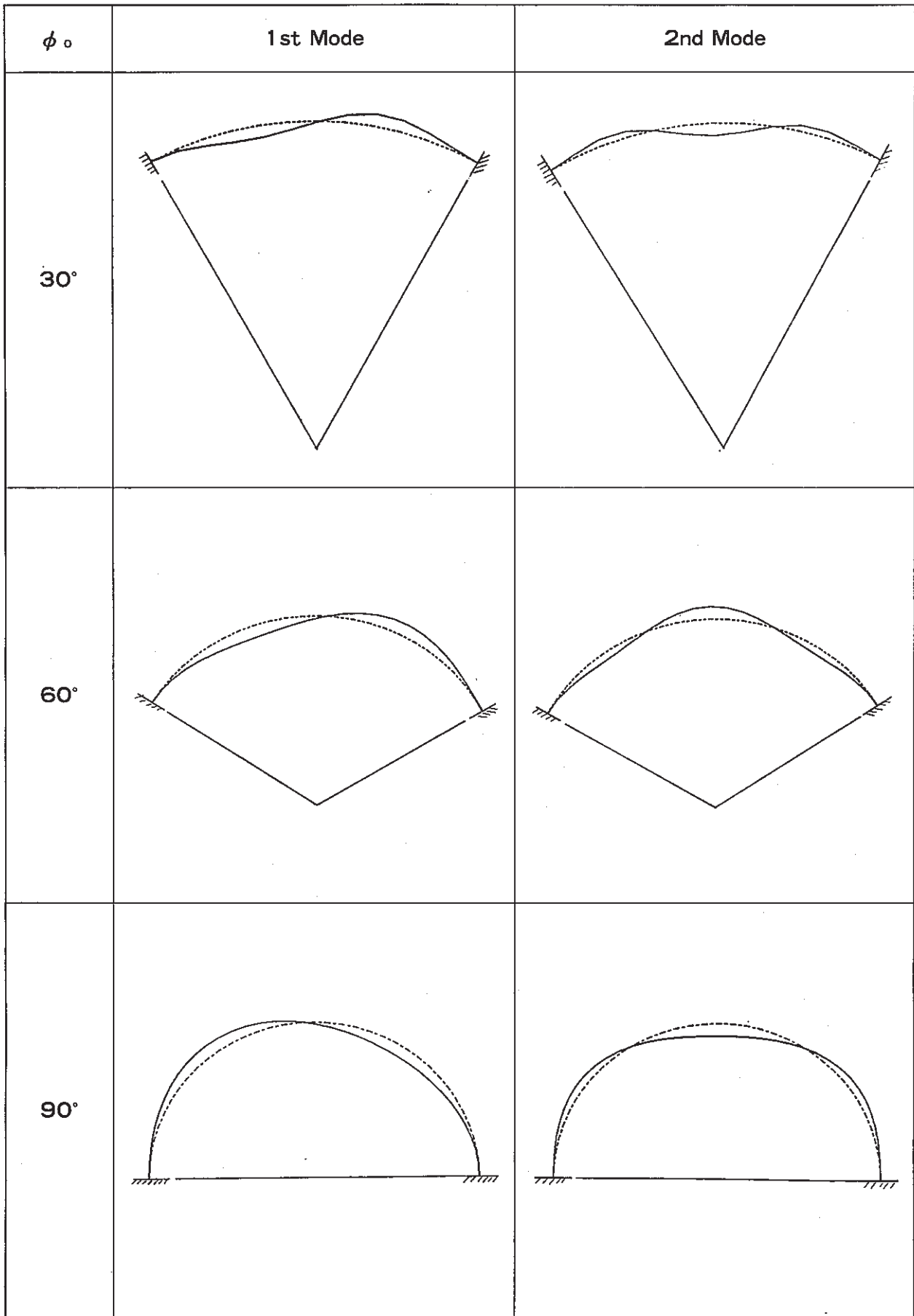


Fig.3.1-2 (1) The Buckling Mode of the Circular Fixed Arches

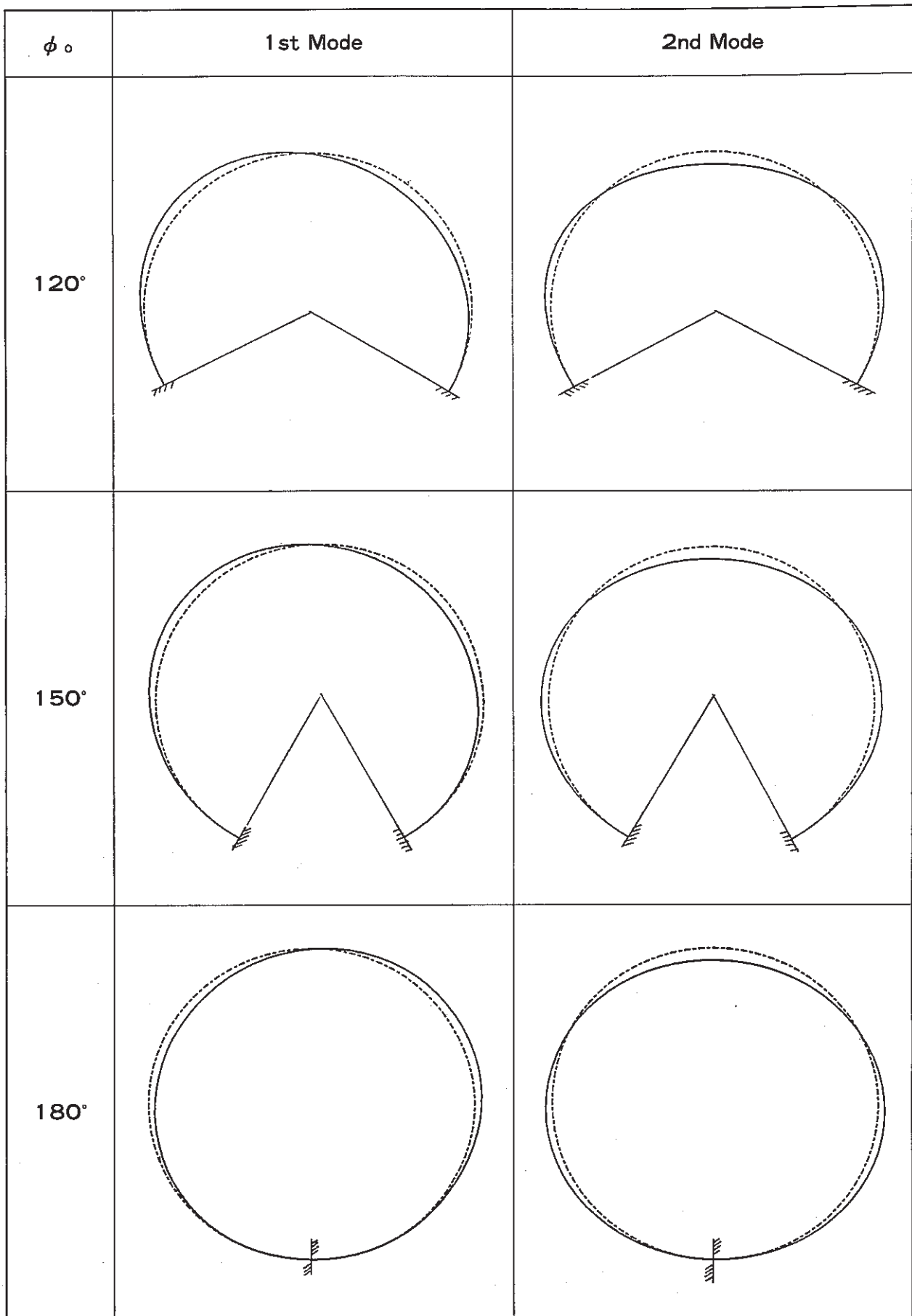


Fig.3.1-2 (2) The Buckling Mode of the Circular Fixed Arches

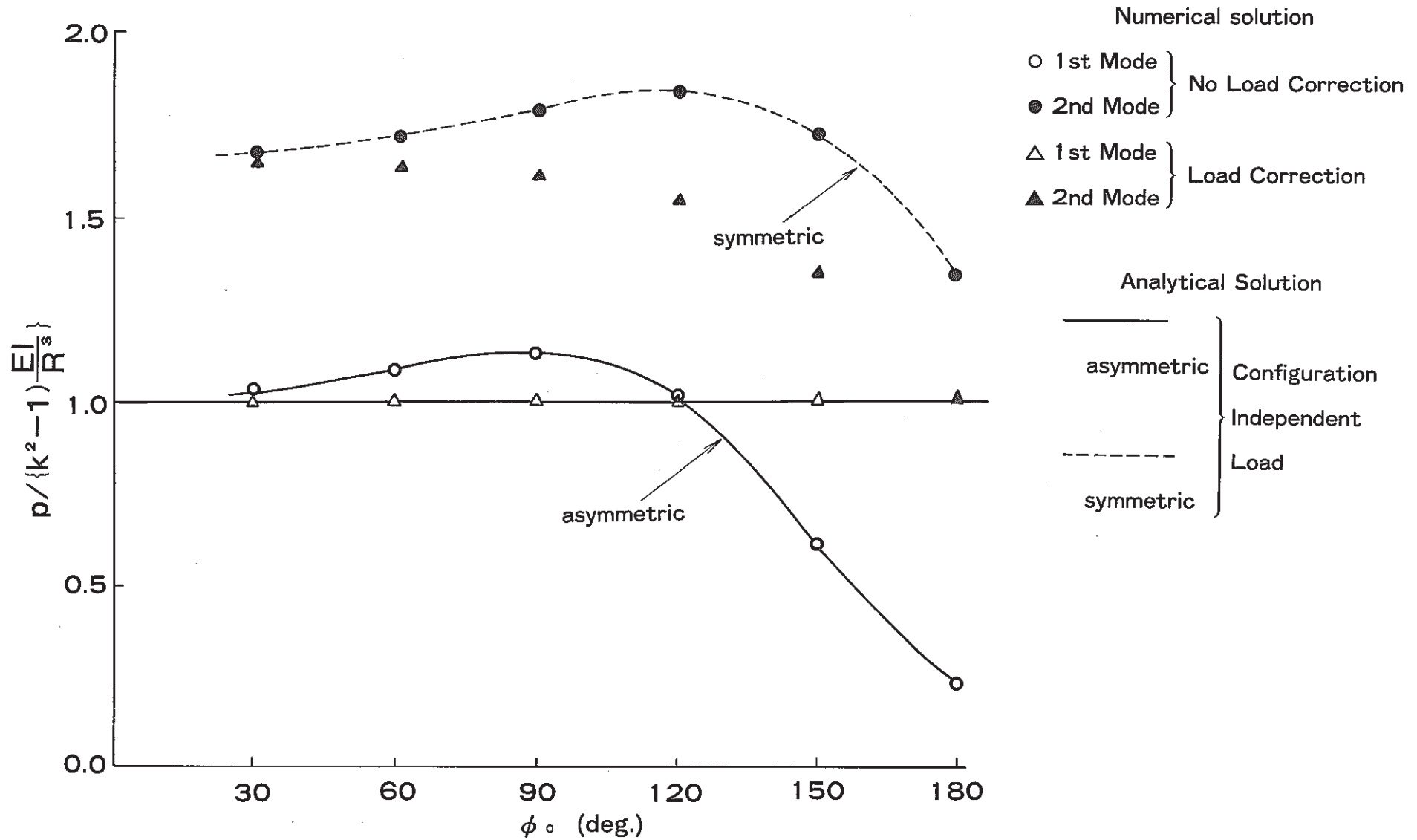


Fig.3.1-3 Effect of Load Correction on the Buckling of the Arch

3.2 内/外圧を受ける両端単純支持細長円筒の座屈

(1) 問題の解説

Fig. 3.2-1 に示すような半径 r 、肉厚 t 、長さ l の薄肉細長円筒の側面に圧力 p が作用する。この円筒の両端の円周は剛円盤に固定され、両端では円形形状を保つ。また、両端は剛円盤を介し、中央でピン支持されており、系全体として単純支持はりと同じ境界条件となっている。このような系での圧力による座屈挙動を解析するのが、この問題であるが、前の問題同様、荷重補正マトリックスを含む場合と含まない場合の固有値解析を行い、その影響を比較、検討する。

この問題については、断面形状が変化する座屈モードと中心軸が撓むはりの座屈モードの2種類が考えられるが、前者については先の問題両端固定円弧アーチの特別な場合として求められる。即ち、荷重補正マトリックスを含まない場合、

$$p_{c1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{t^3}{3r^3} \quad (\text{外圧}) \quad (3.2-1)$$

荷重補正マトリックスを含む場合、

$$p_{r1} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot \frac{t^3}{4r^3} \quad (\text{外圧}) \quad (3.2-2)$$

ここで、 p_{c1} 、 p_{r1} は外圧によって断面が楕円状に変形する座屈モードに対応する座屈圧であり、それぞれ、荷重補正マトリックスを考慮しない場、考慮する場の値である。また、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

一方、はりの座屈モードについては、理論的には内圧によって座屈を生じることが知られている。¹⁰⁾ Fig. 3.2-2 に示すように円筒が撓むことによって圧縮側よりも引張側の受圧面積が増え、内圧によって撓みをより大きくしようとする横荷重が発生する。

$$\int_0^{2\pi} p (r \sin \psi + R) d\theta \cdot r \cdot \sin \psi \cdot d\psi = \frac{\pi r^2}{R} p \cdot dx \quad (3.2-3)$$

この荷重を分布荷重とすると、はりの基礎方程式は、

$$\frac{d^4 w}{d x^4} + \left(\frac{\lambda}{\ell} \right)^2 \frac{d^2 w}{d x^2} = 0 \quad (3.2-4)$$

ここで,

$$\lambda^2 = \frac{\pi r^2 \ell^2}{E I} p \quad (3.2-5)$$

また, w は横方向撓み, x は長手方向座標, I は断面 2 次モーメントである。

式 (3.2-4) を種々の境界条件の下に解くことによって座屈圧力が得られる。

$$p_{cr} = \frac{n^2 \pi E I}{r^2 \ell^2} \quad \begin{cases} n = 1 : \text{両端単純支持} \\ n = 2 : \text{両端固定} \end{cases} \quad (3.2-6)$$

この問題では, 両端単純支持であるので,

$$-p_2 = \frac{\pi^2 E r t}{\ell^2} \quad (\text{内圧}) \quad (3.2-7)$$

$$\text{但し, } I = \pi r^3 t \quad (3.2-8)$$

(2) 解析モデル

① 形状, 寸法

- ・ 長さ $\ell = 2000 \text{ mm}$
- ・ 半径 $r = 10 \text{ mm}$
- ・ 肉厚 $t = 0.3 \text{ mm}$

② 物性値

- ・ 縦弾性定数 $E = 2.0 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
- ・ ポアソン比 $\nu = 0.0$

③ 使用要素

- ・ 4 節点四辺形平板シェル要素 “QFLA4S”

④ 要素分割

対称性から, $\frac{1}{2}\ell$, 180° 分, つまり全体の $\frac{1}{4}$ をモデル化。軸方向 40 分割, 周方向 20 分割 (Fig. 3.2-3 参照)。

⑤ 境界条件及び荷重条件 (Fig. 3.2-4 参照)

- ・ 境界条件: 2 つの対称面に垂直な線素の撓み角を零としながら滑動。端部では

ピン支持を実現するために、軸方向変位 u_z と回転角 θ_y の間に座標 x を介して次の従属関係を与える。

$$u_z = -x \theta_y$$

荷重条件：一様外圧

荷重補正マトリックを含む場合と含まない場合の2ケースについて実施する。

(3) 解析結果

Table 3.2-1 に解析結果と理論解との比較を示す。断面形状が楕円となる座屈モードについては、荷重補正を含まない場合、含む場合とも、それぞれの予測値よりも2%程度高目であるが良く一致している。一方、はり（柱）型の座屈モードについては荷重補正を含む場合、理論上予測される内圧による座屈が生じ、座屈圧も良く一致している。ところが、荷重補正を含まない場合は、同程度の絶対値の外圧で同じモードの座屈を生じる結果となった。同じ圧力による座屈解析を行っても、荷重補正マトリックスの有無によってまったく逆説的な現象が生じる点に注意しなければならない。

Fig. 3.2-5 に荷重補正マトリックスを考慮した場合の座屈モード図を示す。はり（柱）型の座屈モードは6番目の固有値として得られた。第1番目から第5番目までのモードは全て、断面形状が楕円となる座屈モードであり、長手方向に発生する節の数が異なるが、固有値自体は接近している。

(4) 比較、検討

円筒の断面形状が楕円となる座屈に対する荷重補正マトリックスの有無の違いについては、先のアーチの問題の $\phi = 180^\circ$ の場合の議論に含まれるので、ここでははり（柱）型の座屈に絞って考察する。

はり（柱）型の座屈については、荷重補正マトリックスの有無によって全く異った解析結果となることを示したが、この理由は次の様に推察される。圧力を変形追従型の荷重として扱わない場合、即ち荷重補正マトリックスを考慮しない場合、変形後においても荷重の作用方向とは変わらず、また、受圧面積の変化も考慮されない。円筒の任意の円周上に働く圧力に着目すると、Fig. 3.2-6 に示すように、この圧力荷重は変形前は釣合っているが、僅かでも撓むと荷重方向が変化しないがために偶力を発

生ずる。この偶力によって生じる曲げモーメントは、外圧の場合、撓みを助長する方向に作用する。微小長 $d x$ に生じる曲げモーメント $d M$ は、

$$\begin{aligned} d M &= \int_0^{2\pi} p_{\text{ext}} r^2 d \phi \cdot \cos^2 \psi \cdot \sin \theta \cdot d x \\ &= \pi r^2 p_{\text{ext}} \sin \theta \cdot d x \end{aligned} \quad (3.2-9)$$

ここで、 p_{ext} は外圧、 θ は撓み角である。

微小撓みを仮定すると、

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{d w}{d x} \quad (3.2-10)$$

式 (3.2-9) と式 (3.2-10) から、

$$\frac{d M}{d x} = \pi r^2 p_{\text{ext}} \frac{d w}{d x} \quad (3.2-11)$$

従って、基礎方程式は、

$$\frac{d^3 w}{d x^3} + \frac{\pi r^2}{E I} p_{\text{ext}} \frac{d w}{d x} = 0 \quad (3.2-12)$$

この微分方程式は、圧力の正負の定義が逆であることを除けば、式 (3.2-4) と同形である。式 (3.2-12) を適当な境界条件の下で解くことにより、座屈圧力が求められる。両端単純支持の場合、

$$p_{\text{cr}} = \frac{\pi E I}{r^2 \ell^2} = \frac{\pi^2 E r t}{\ell^2} \quad (\text{外圧}) \quad (3.2-13)$$

式 (3.2-7) と絶対値は等しいが、符号は逆となる。

先の円弧アーチの座屈問題では荷重補正マトリックスを考慮しない場合、座屈荷重を過大評価する危険があったが、この問題の場合、定性的に現象を表現できないばかりか、起こり得ない座屈を与える結果になっている。実際の円筒構造でこのような内圧による柱座屈が問題となることは、むしろ特殊と言うべきかもしれないが、次に示すペローズ構造では、このタイプの座屈が設計上考慮すべき重要な破損様式となる。

Table 3.2-1 Numerical Analysis Results

Loading Condition	Buckling Mode	Buckling Pressure (kg/mm ²)	
		Theory	Numerical Analysis
Deformation Independent External Pressure	Oval Type	0.180	(2nd) 0.18378
	Beam (Column) Type	(0.148)	(1st) 0.15136
Deformation Dependent External Pressure	Oval Type	0.135	(1st) 0.13756
	Beam (Column) Type	-0.148 (Internal Pressure)	(6th) -0.14702 (Internal Pressure)

$l = 2000 \text{ mm}$ $E = 2.0 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$
 $r = 10 \text{ mm}$ $\nu = 0.0$
 $t = 0.3 \text{ mm}$

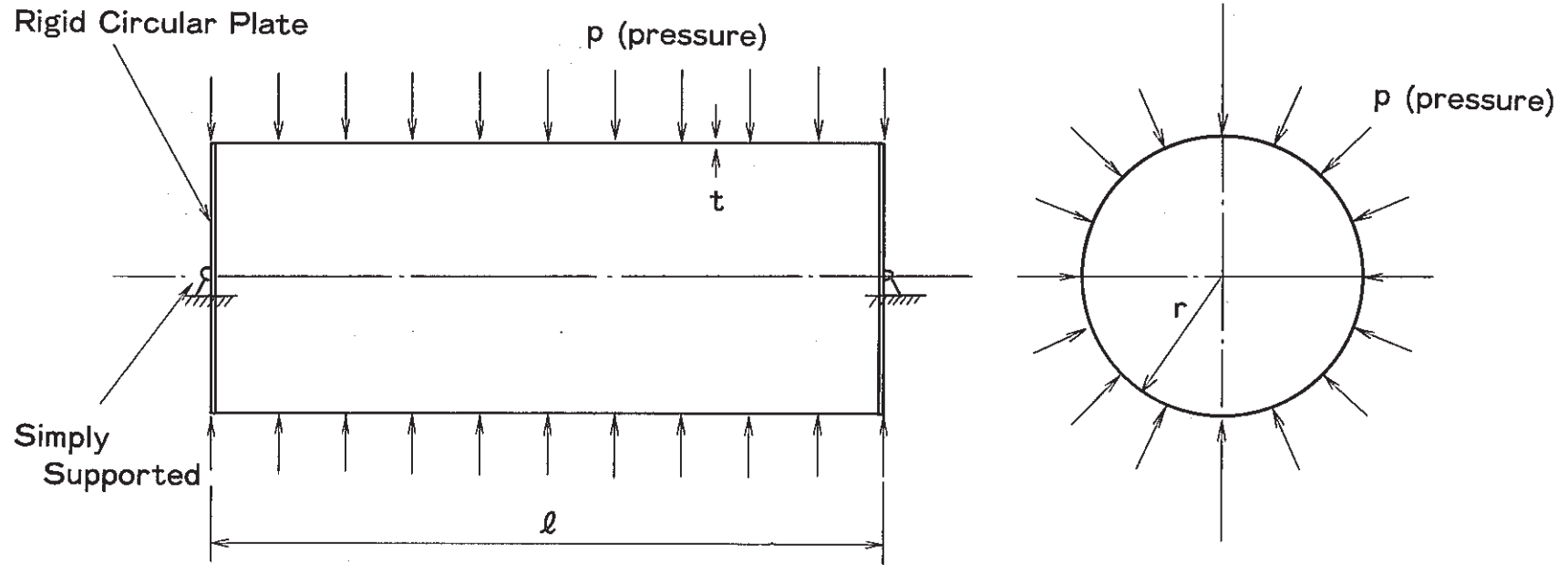


Fig.3.2-1 Geometry of the Thin-walled Long Cylinder Simply Supported at the Both Ends

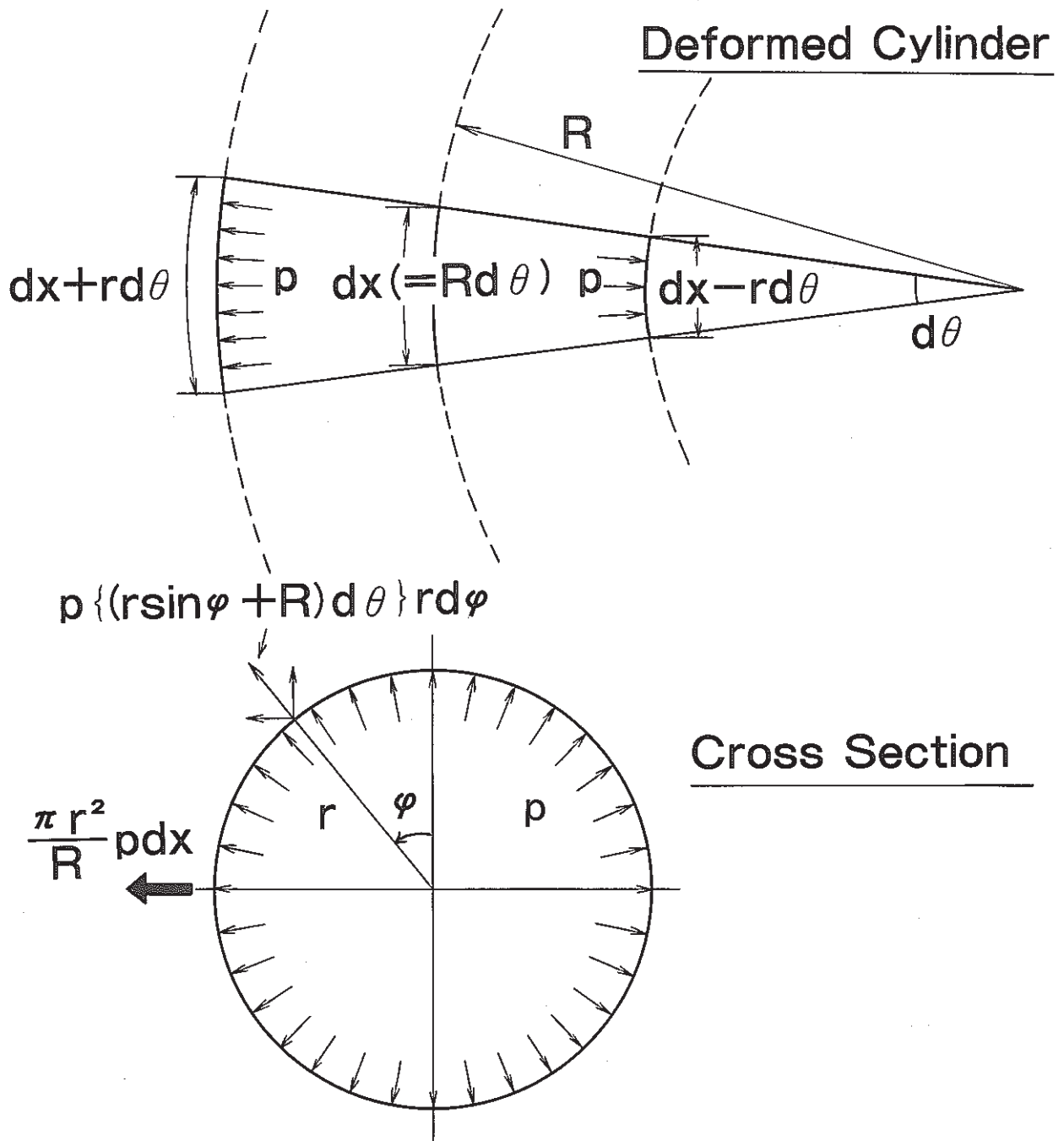


Fig.3.2-2 Lateral Distributed Force of Thin-Walled Cylinder Subjected to Internal Pressure

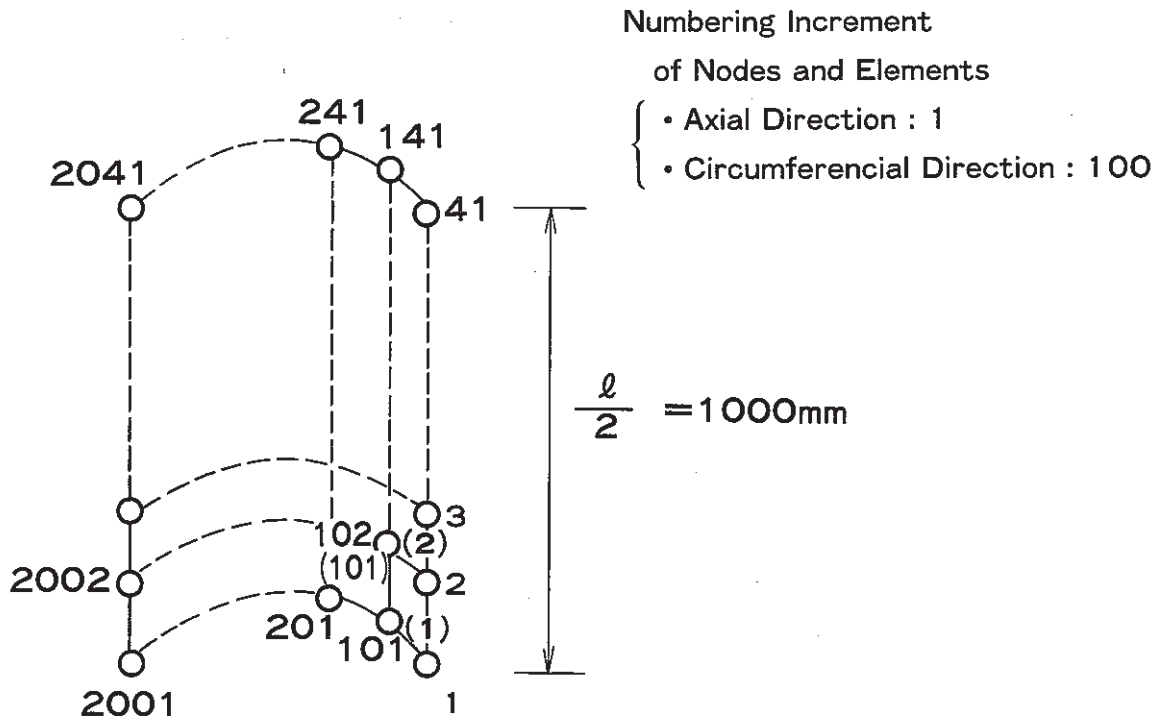


Fig.3.2-3 Discretization of the Cylinder

Relation between u_z and θ_y at the End

$$u_z = -x\theta_y \text{ (FASTENING)}$$

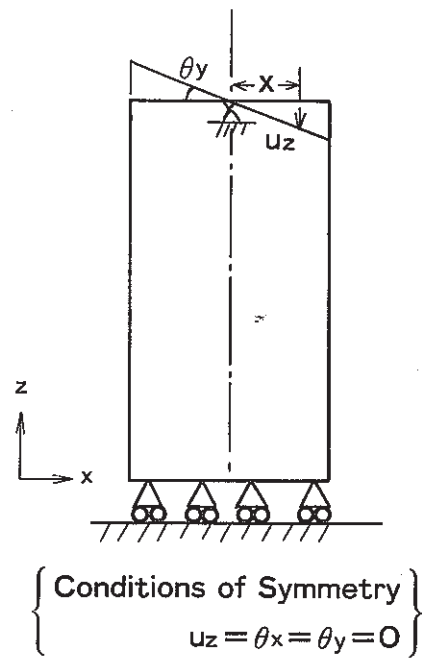
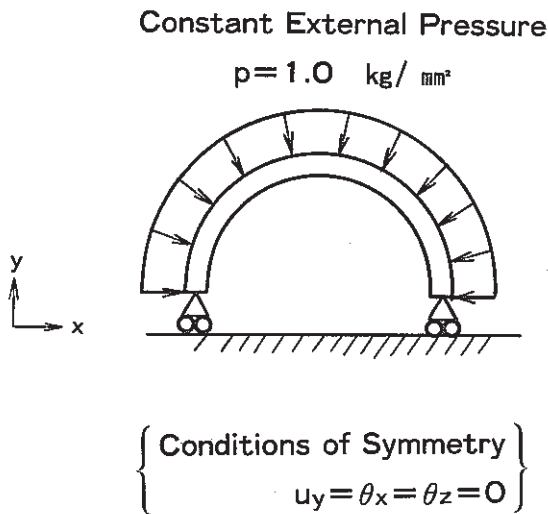


Fig. 3.2-4 Boundary Conditions

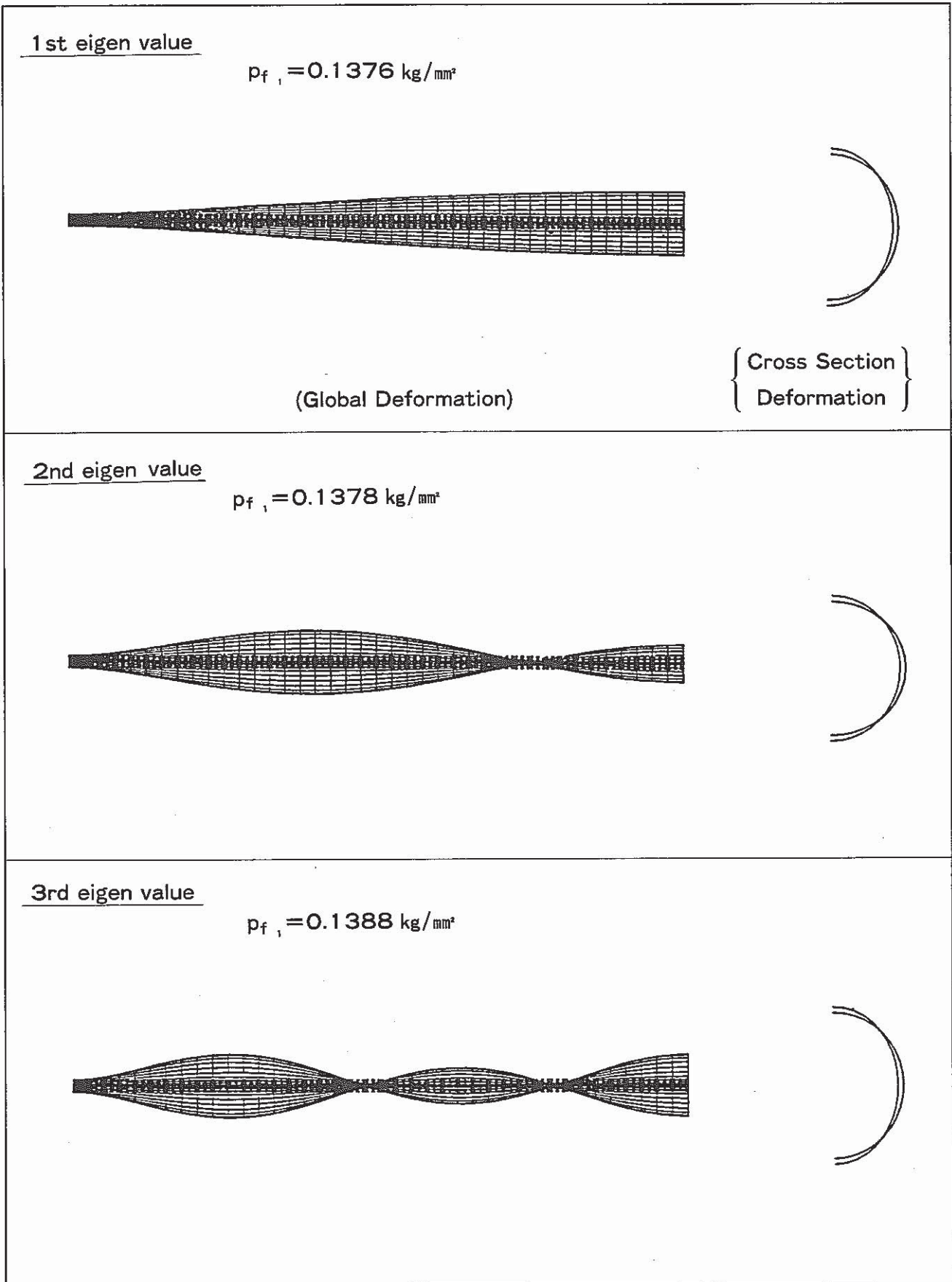


Fig.3.2-5 (1) The Buckling Mode of the Long Cylinder

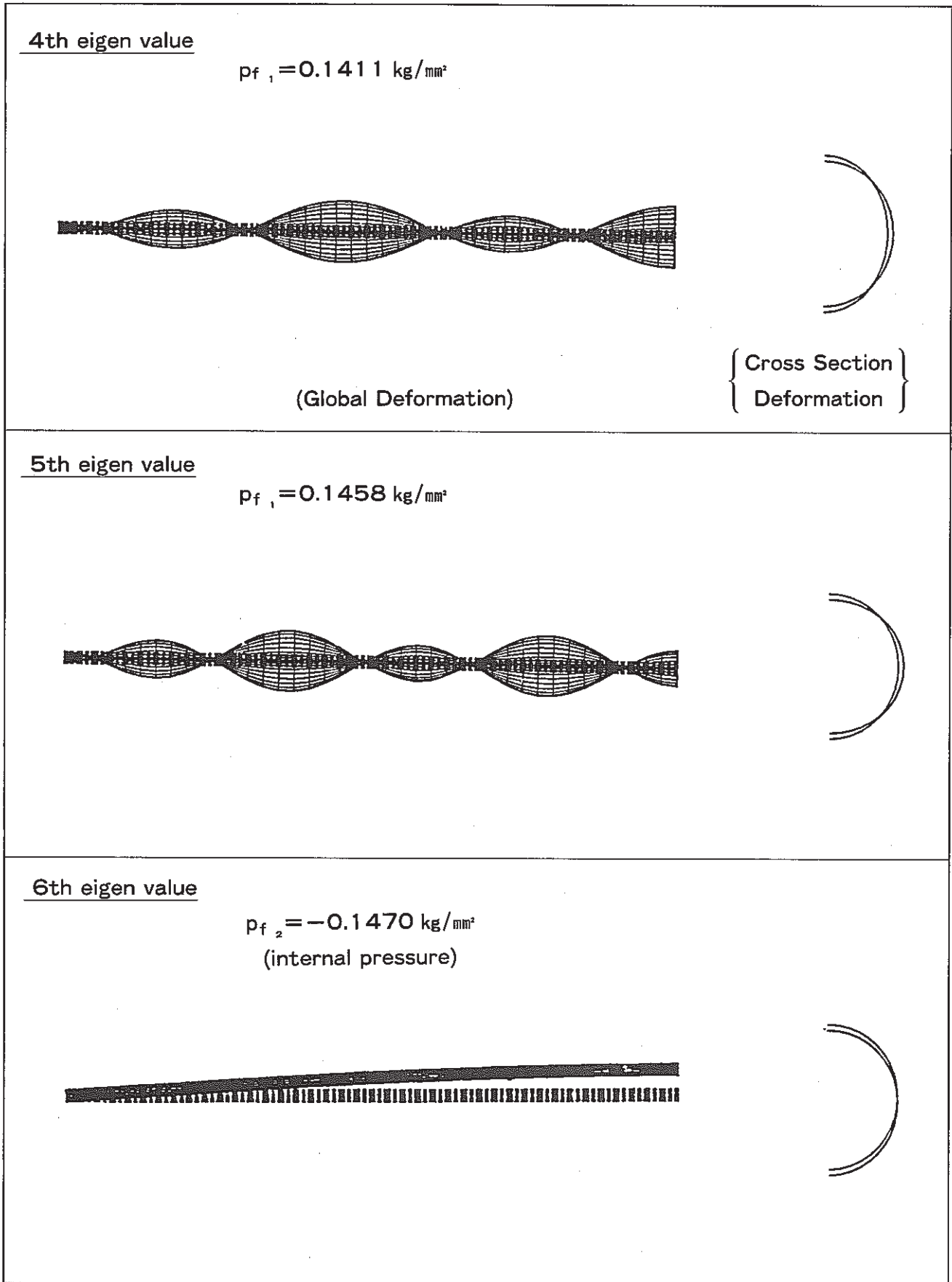


Fig.3.2-5 (2) The Buckling Mode of the Long Cylinder

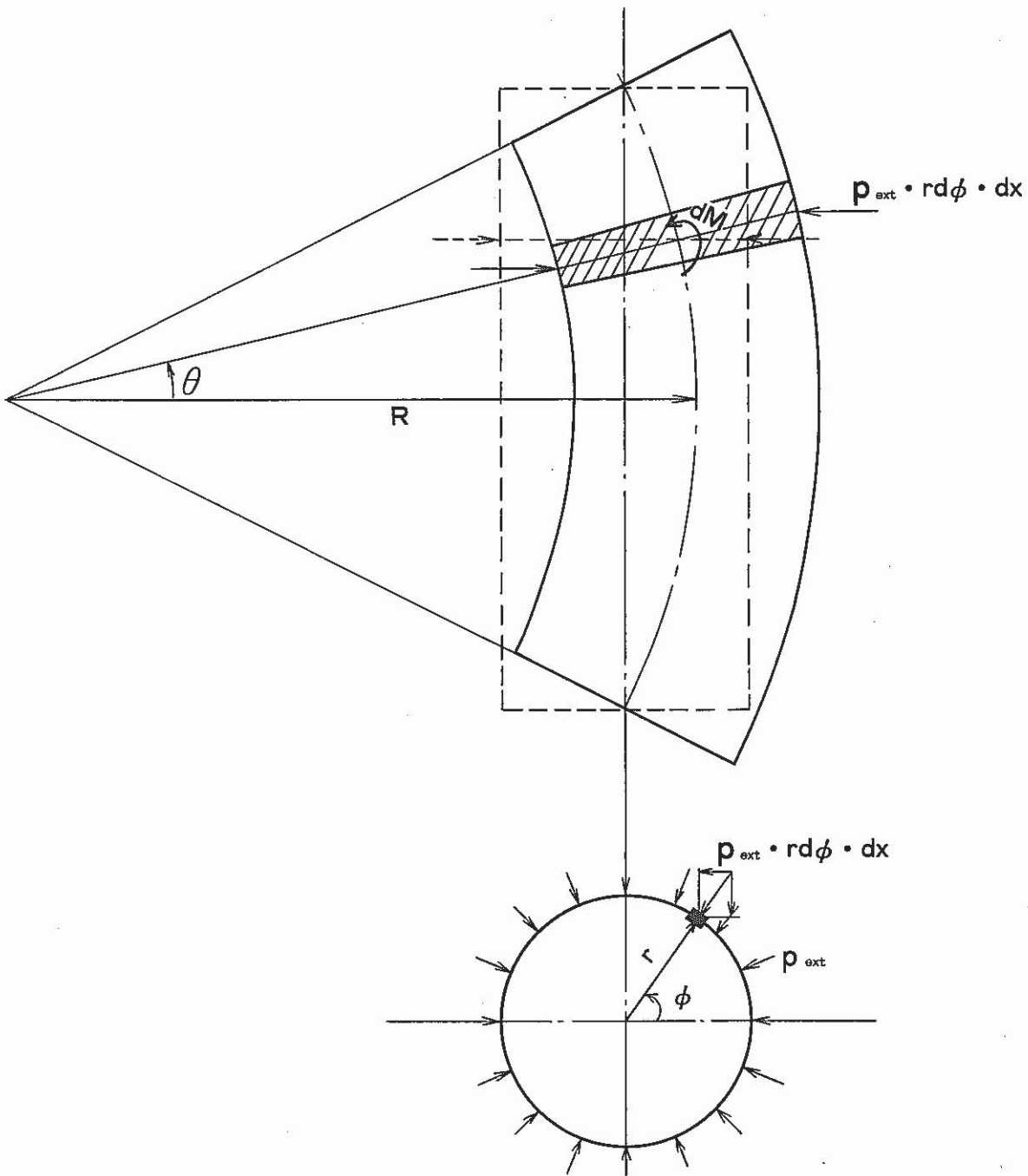


Fig.3.2-6 Bending Moment generated by Configuration Independent External External Pressure

3.3 内圧によるベローズの座屈

(1) 問題の解説

Fig. 3.3-1 に示すような谷径 d ，肉厚 t ，山高 H ，ピッチ q ，山数 N ，端部短管長さ l_t で両端が固定されているベローズの座屈圧力 p を求める。

前述の細長円筒と同じメカニズムで，ベローズは内圧によってコラム型の座屈，いわゆるコラムスクワーム (column squirm) を生じる。コラムスクワームを生じる圧力は次の簡易式で求められる¹¹⁾。

$$p = \frac{2 \pi f_{iu}}{q N^2 (1 + 2 H / d_p)} \quad (3.3-1)$$

ここで， f_{iu} はベローズ 1 山当りの軸方向ばね定数， d_p はピッチ径で，

$$d_p = d + H \quad (3.3-2)$$

(2) 解析モデル

① 形状，寸法

・ベローズ谷直径	d	$= 301.5 \text{ mm}$
・肉厚	t	$= 0.46 \text{ mm}$
・山高	H	$= 18 \text{ mm}$
・ピッチ	q	$= 16 \text{ mm}$
・端部短管長さ	l_t	$= 10 \text{ mm}$
・山数	N	$= 7, 15, 30$ (3 ケース)

② 物性値

・縦弾性係数	E	$= 19900 \text{ kg/mm}^2$
・ポアソン比	ν	$= 0.3$

③ 使用要素

- ・ 4 節点四辺形平板シェル要素 “QFLA4S”
- ・ 3 節点円錐台シェル調和級数要素 “MAXSHEL3” (7 山, 30 山のみ)

④ 要素分割

・ QFLA4S：対称性から、 $\frac{1}{2}$ 長さ、 180° 分、つまり全体の $\frac{1}{4}$ をモデル化。

要素分割は Fig. 3.3-2 に示すように子午線方向に 1 山当り 30、端部の直線部は 5、周方向に 12 分割 (15° ピッチ) とした。

・ NAXSHEL3：子午線方向の要素分割は QFLA4S と同じで 1 山当り 30 とした。

⑤ 境界条件及び荷重条件

・ 境界条件：QFLA4S；2つの対称面に垂直な線素の撓み角を零としながら滑動。

端部では完全固定 (Fig. 3.3-2 参照)。

NAXSHEL3：式 (2-36) において、7 山の場合 $m = 1, 2, 30$ 山の場合、 $m = 1$ 。対称面で傾き零、軸直方向自由。端部完全固定。

・ 荷重条件：一様内圧

(3) 解析結果

Table 3.3-1 に解析結果と式 (3.3-1) による計算結果を示す。7 山ペローズの場合、コラムスクワームは 3 番目の固有値に現われ、座屈圧は理論より 2 割強低い。15 山ペローズの場合、コラムスクワームが最初に現われ、座屈圧は理論値よりも若干高いが比較的良く合っている。30 山の場合、コラムスクワームが最初に現われ、次もコラムスクワームの高次のモードが現われる。座屈圧は理論よりも 1 割程度高い。なお、式 (3.3-1) の中の 1 山当りの軸方向ばね定数 f_{10} は、30 山ペローズ解析モデルと同じ要素分割のモデルを用いて軸荷重負荷解析から得た値を使っている。

Fig. 3.3-3 は、ペローズの山数と座屈圧の関係を示している。変形追従型荷重を考慮した FEM 解析から得られたコラムスクワームの圧力は理論式と比較的に良く一致している。また、山数が 10 山よりも少なくなると、別の座屈モードが卓越してくる傾向が読める。

Fig. 3.3-4 ~ Fig. 3.3-6 は、7 山、15 山、30 山それぞれのペローズの座屈モードを示している。コラムモード以外の座屈モードは唇状の形をしており、隣接するコンボリューションが広がっている位置から周方向に 90° 離れた位置では逆にせばまっているというパターンを呈している。

Table 3.3-2 は、30山モデルについてのQFLA4SとMAXSHEL3の計算時間を比較している。3次元シェル要素QFLA4Sに比べて軸対称シェル要素MAXSHEL3を用いる方が当然計算効率は良い。弾性解析については、10倍程度の差違があることがわかる。

(4) 試験との比較 (参考) ¹⁾

Fig. 3.3-7 にここで行った解析と同じ仕様のペローズについて行った試験結果を示す。実際の試験体ペローズの形状、寸法は公称値と若干異なっており、また、座屈が弾塑性域で起きていることなどから、試験で得られた座屈圧は解析結果とは一致しない。しかしながら、座屈モード形状については、全く一致していることがわかる。

Table 3.3-1 Buckling Pressure of Bellows

(unit : kg/cm²)

	Theory * (column squirm)	FEM Analysis with Load Correction		
		1st	2nd	3rd
7 convolutions	88.06	QFLA4S/NAXSHEL3 46.73 / 41.16	QFLA4S/NAXSHEL3 63.96 / 56.91	QFLA4S/NAXSHEL3 66.52 / 62.65 (column squirm)
15 convolutions	19.18	QFLA4S 20.04 (column squirm)	QFLA4S 33.79	QFLA4S 42.22
30 convolutions	4.79	QFLA4S/NAXSHEL3 5.32 / 5.12 (column squirm)	QFLA4S 20.32 (column squirm)	QFLA4S 30.59

* $f_{iu} = 122.26 \text{ kg/mm}$ (in eg.(3.3-1)) : obtained from Axial Loading FEM Analysis with the 30 convolutions model.

Table 3.3-2 Comparison of Computing Time

Element	Computing Time (CPU sec)
QFLA 4S	2002.41
NAXSHEL3	200.54

Computer : IBM3084Q

Bellows model : 30 convolutions

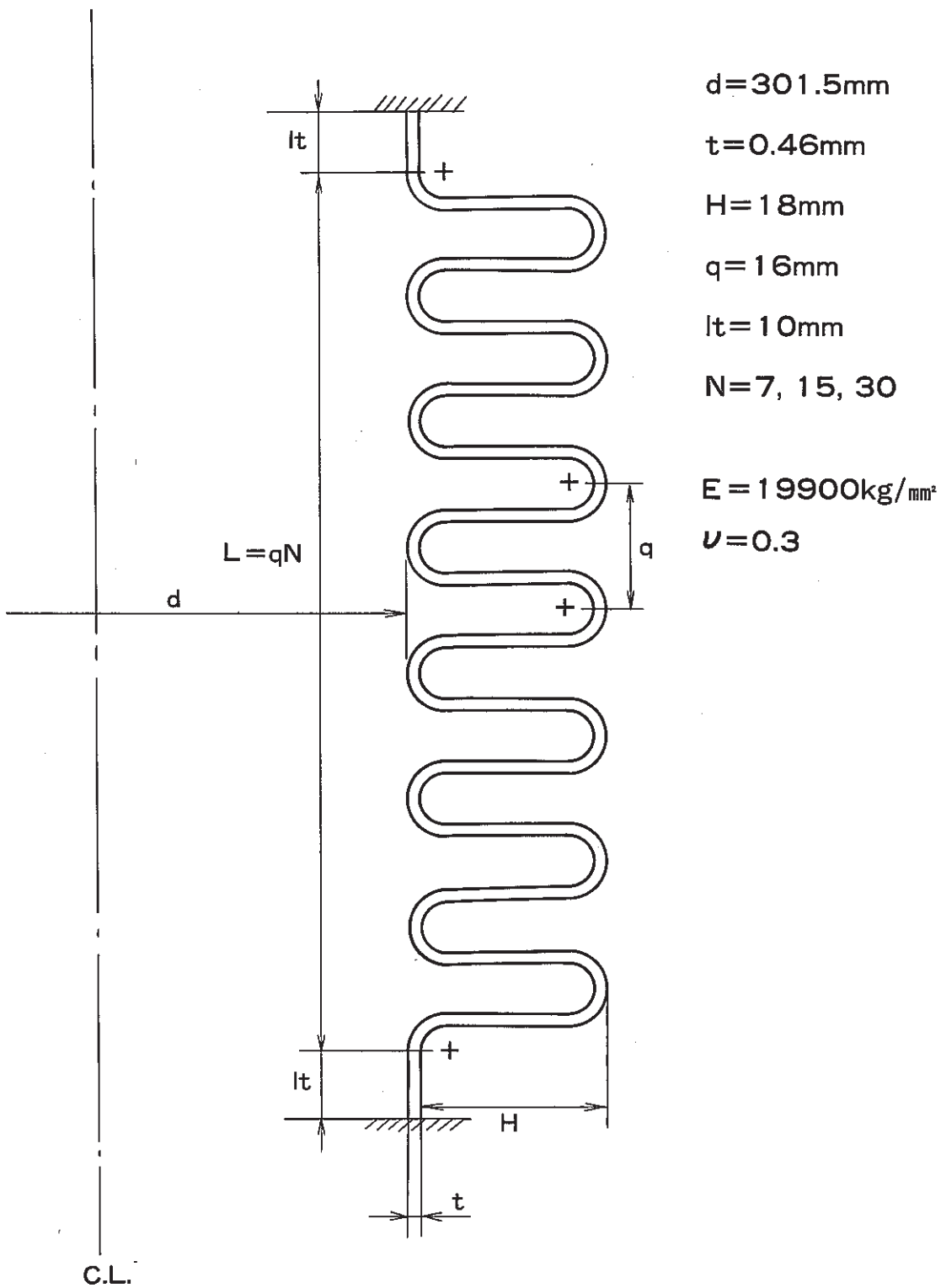


Fig. 3-1 Geometry of Bellows

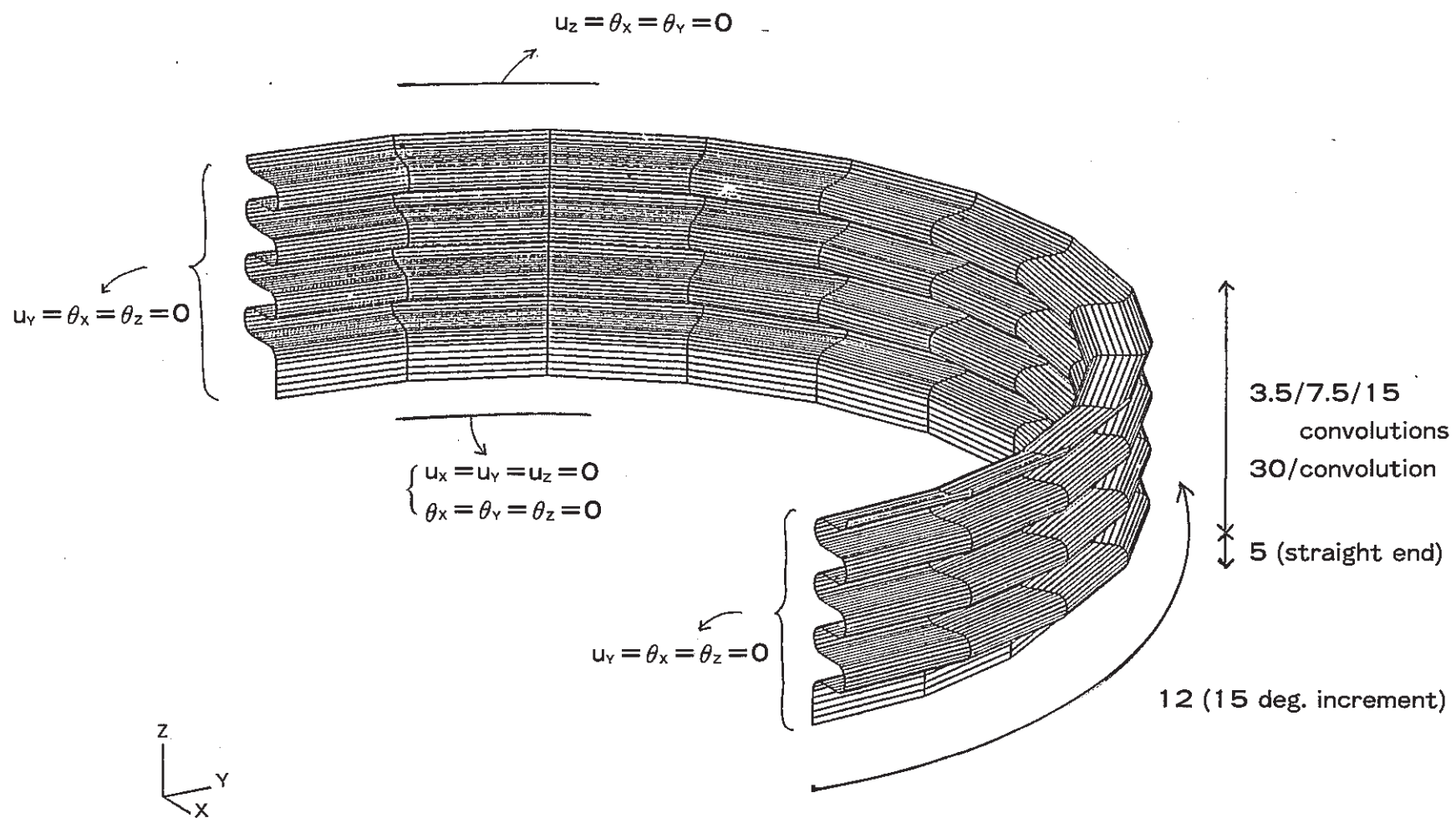


Fig. 3.3-2 Finite Element Mesh and Boundary Conditions

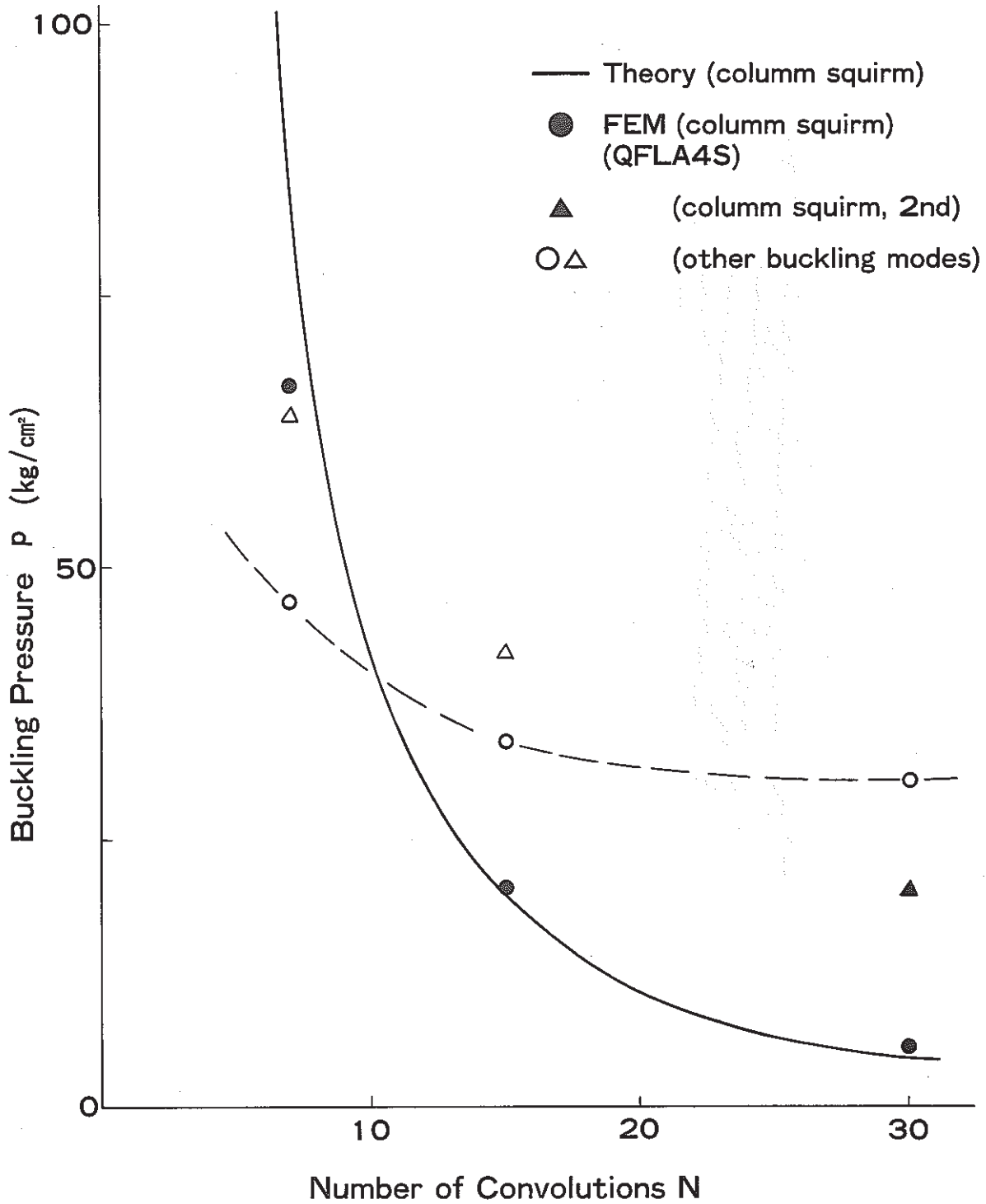
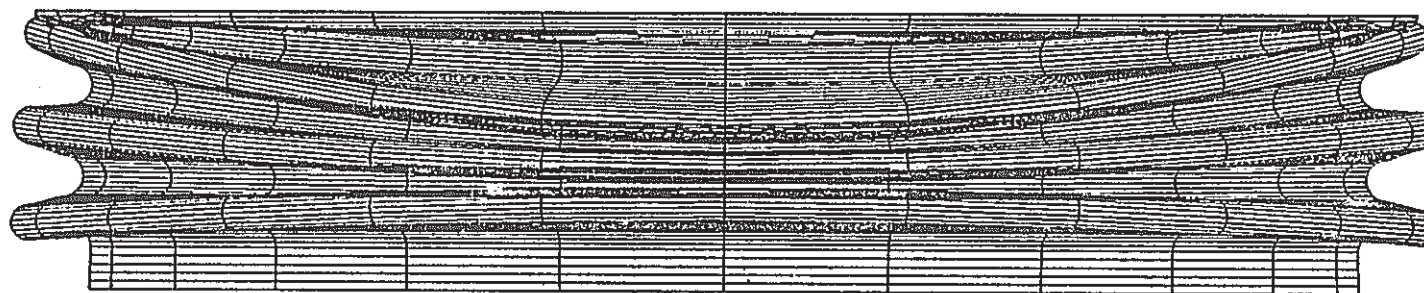


Fig.3.3-3 Relation between Buckling Pressure and Number of Convolutions



1st $p = 46.729 \text{ kg/cm}^2$

(QFLA4S)

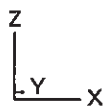
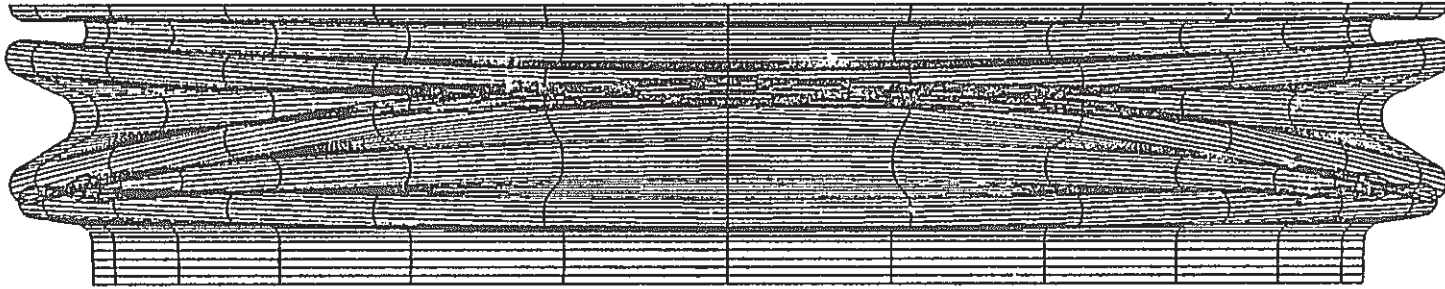


Fig.3.3-4(1) Buckling Mode of 7 convolutions Bellows



2nd $p=63.955 \text{ kg/cm}^2$
(QFLA4S)

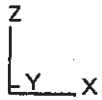
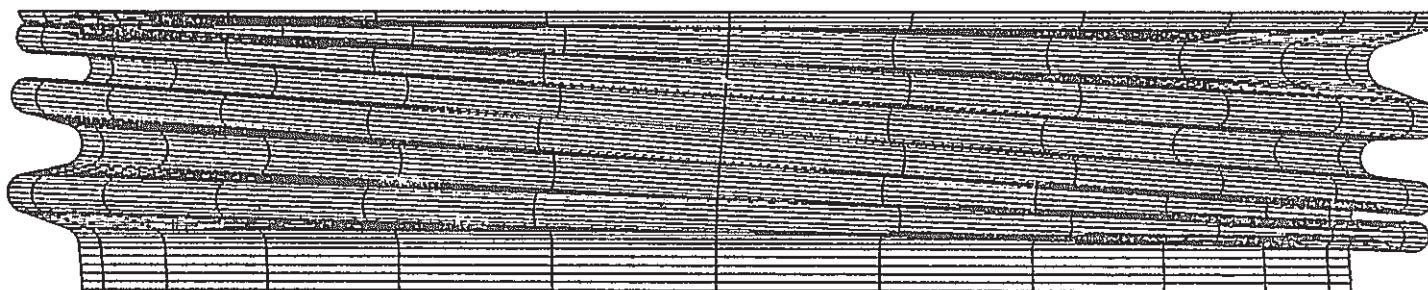


Fig.3.3-4(2) Buckling Mode of 7 convolutions Bellows



3rd $P=66.522 \text{ kg/cm}^2$
(QFLA4S)

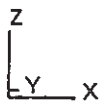
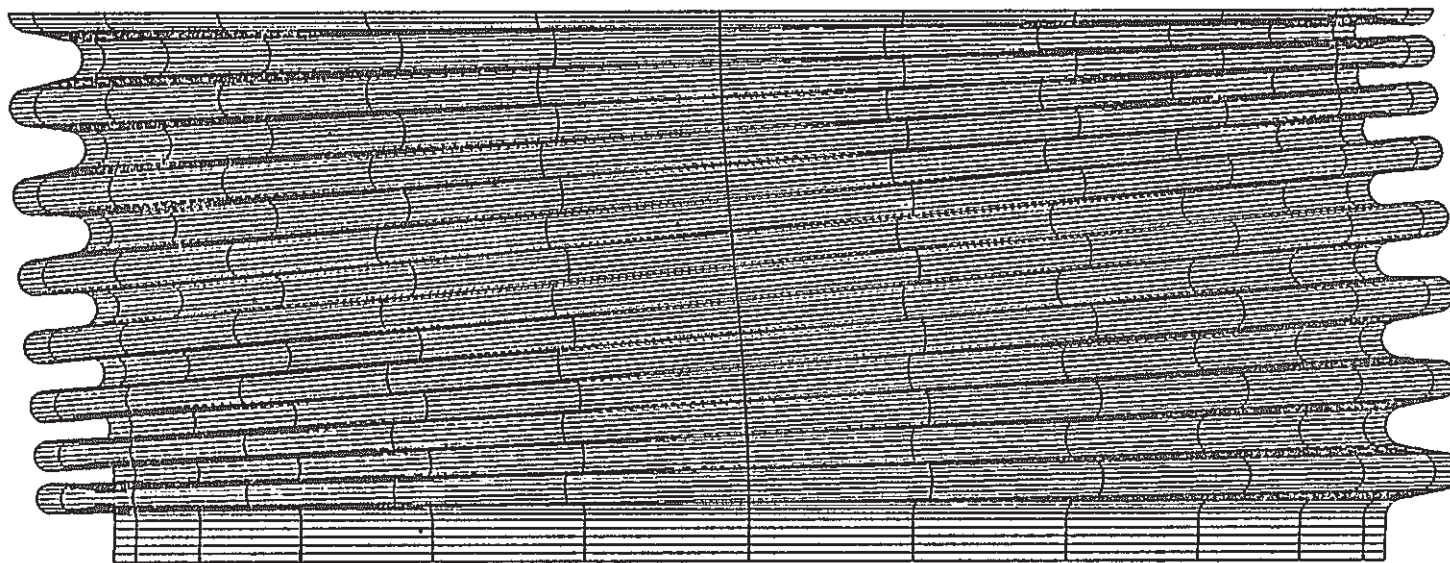


Fig.3.3-4(3) Buckling Mode of 7 convolutions Bellows



1st $p = 20.386 \text{ kg/cm}^2$

(QFLA4S)

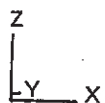
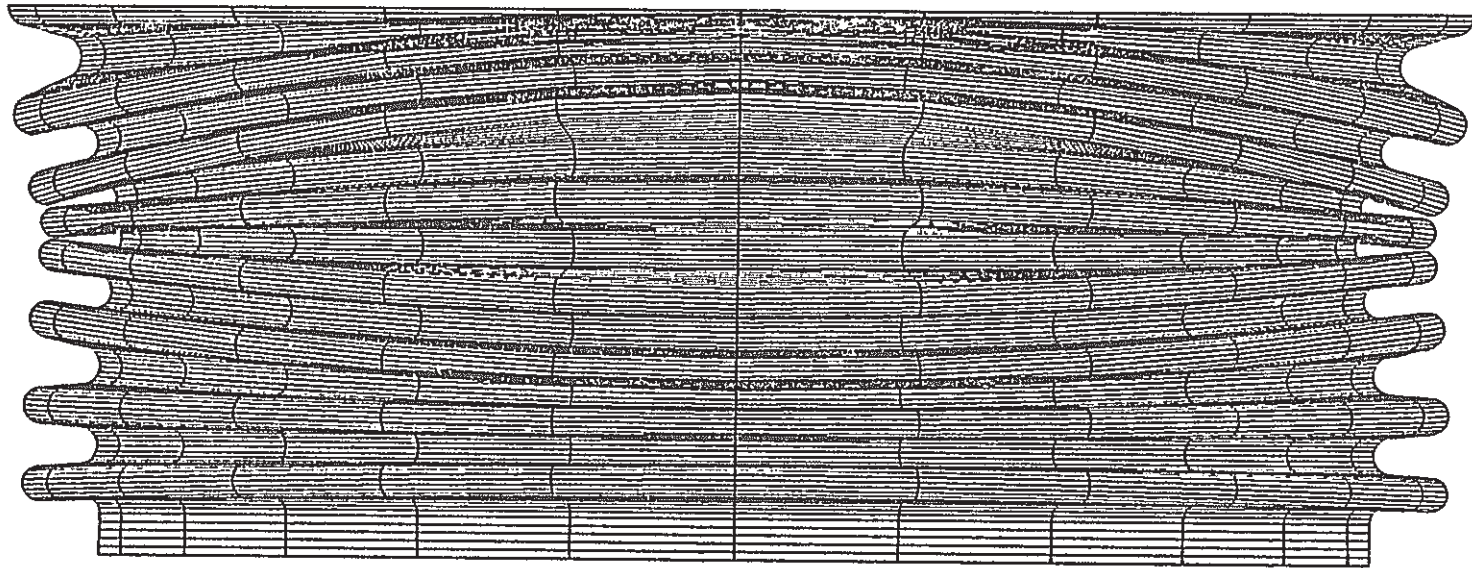


Fig.3.3-5(1) Buckling Mode of 15 convolutions Bellows



2nd $p = 33.791 \text{ kg/cm}^2$

(QFLA4S)

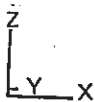
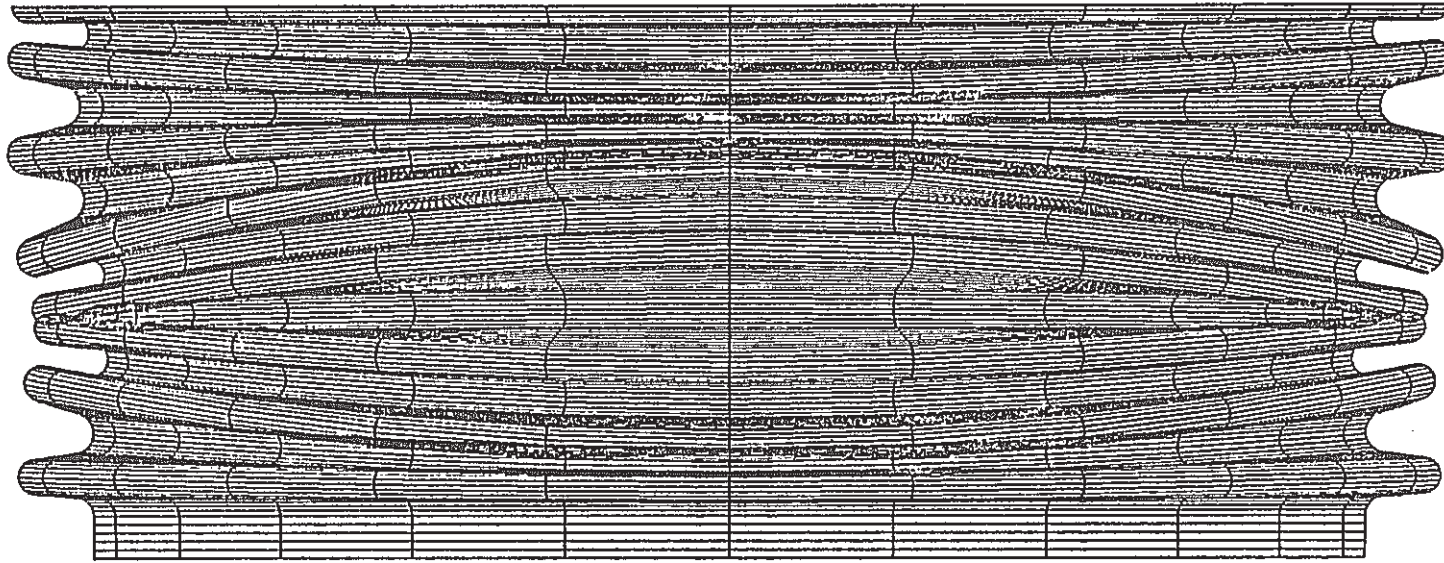


Fig.3.3-5(2) Buckling Mode of 15 convolutions Bellows



3rd $p = 42.220 \text{ kg/cm}^2$

(QFLA4S)

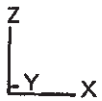
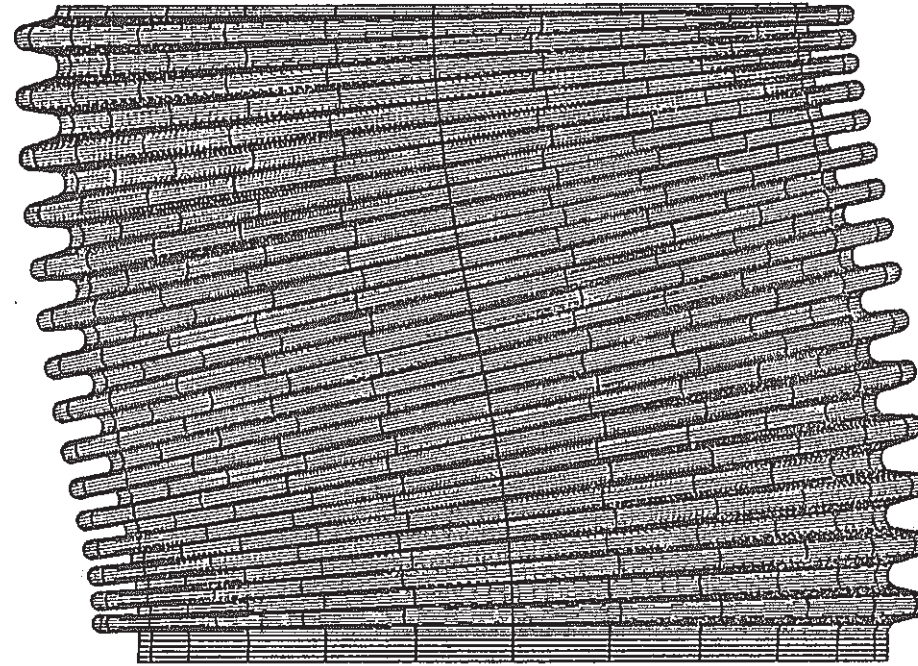


Fig.3.3-5(3) Buckling Mode of 15 convolutions Bellows



1st $p=5.323\text{kg/cm}^2$

(QFLA4S)

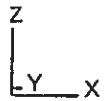
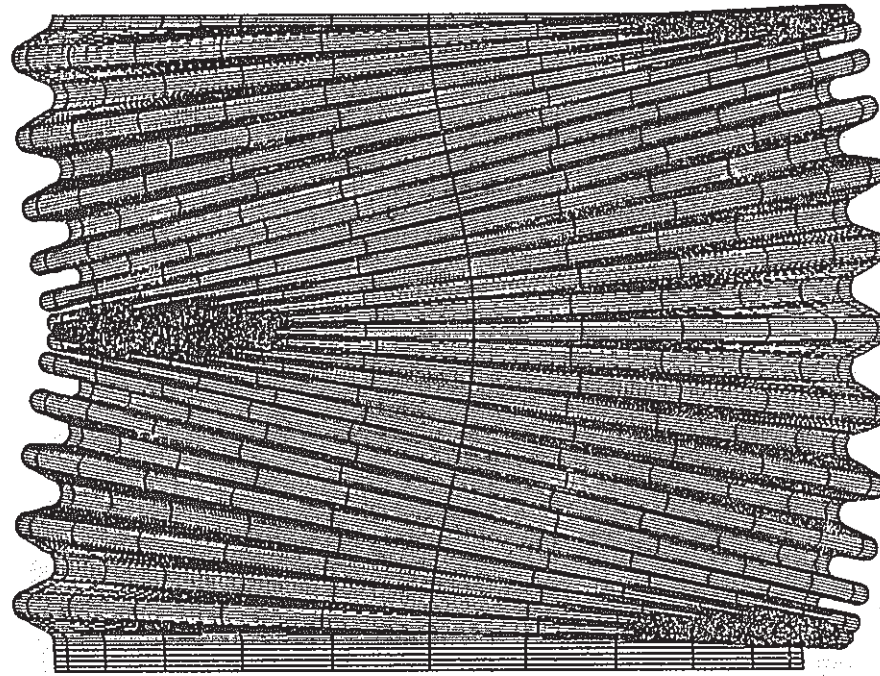


Fig.3.3-6(1) Buckling Mode of 30 convolutions Bellows



2nd $p=20.32\text{kg/cm}^2$

(QFLA4S)

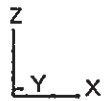
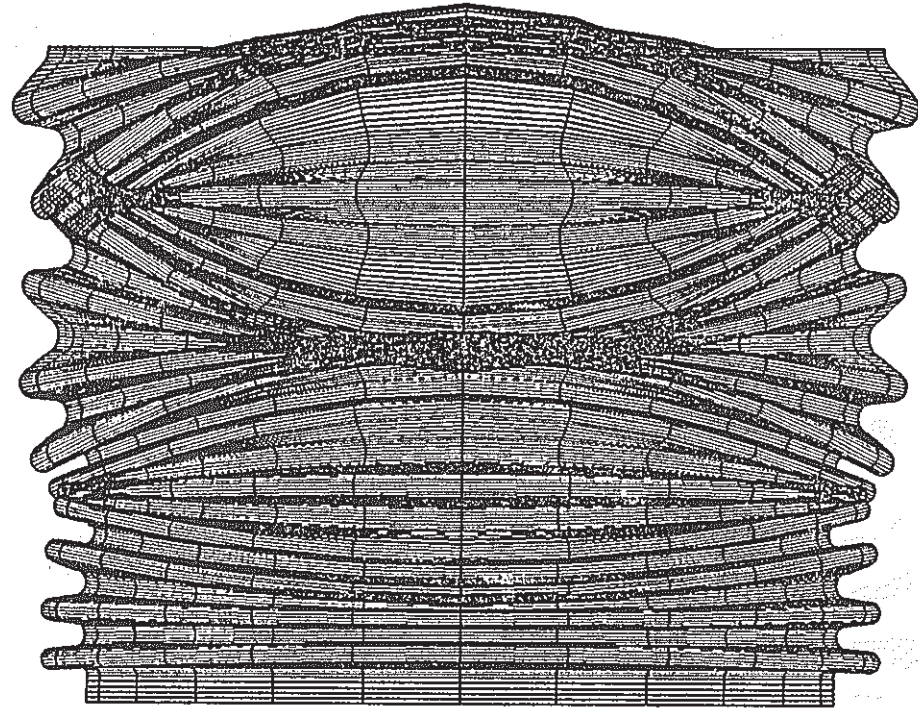


Fig.3.3-6(2) Buckling Mode of 30 convolutions Bellows



3rd $p=30.59\text{kg/cm}^2$

(QFLA4S)

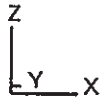
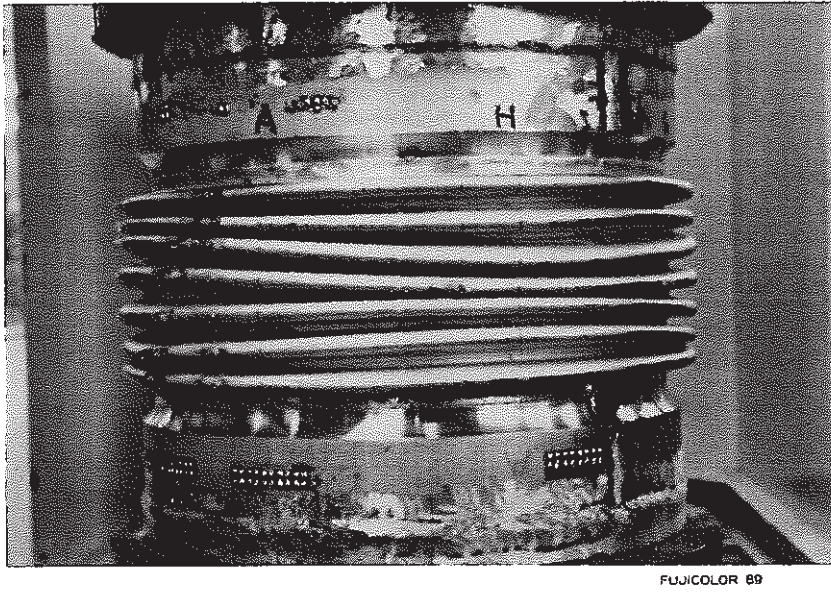
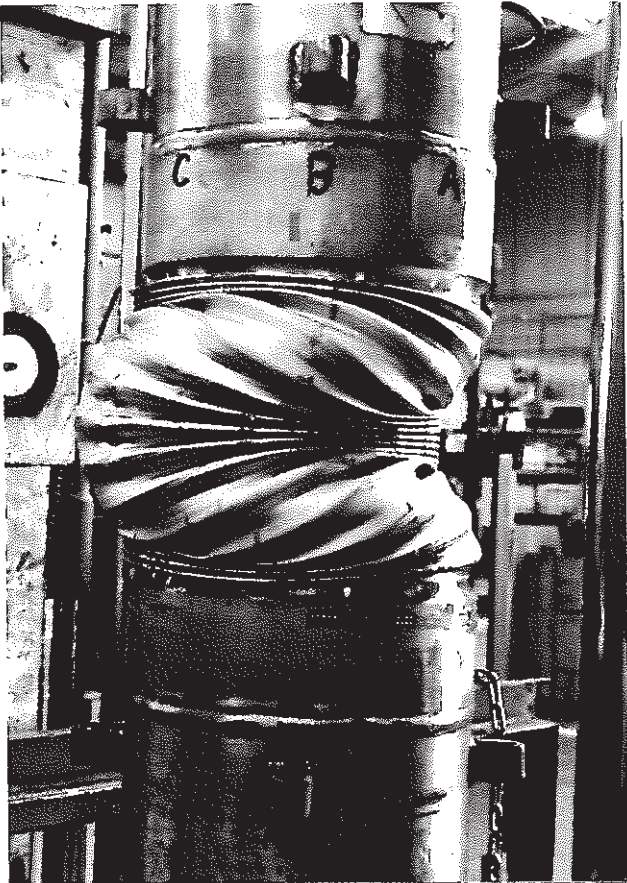


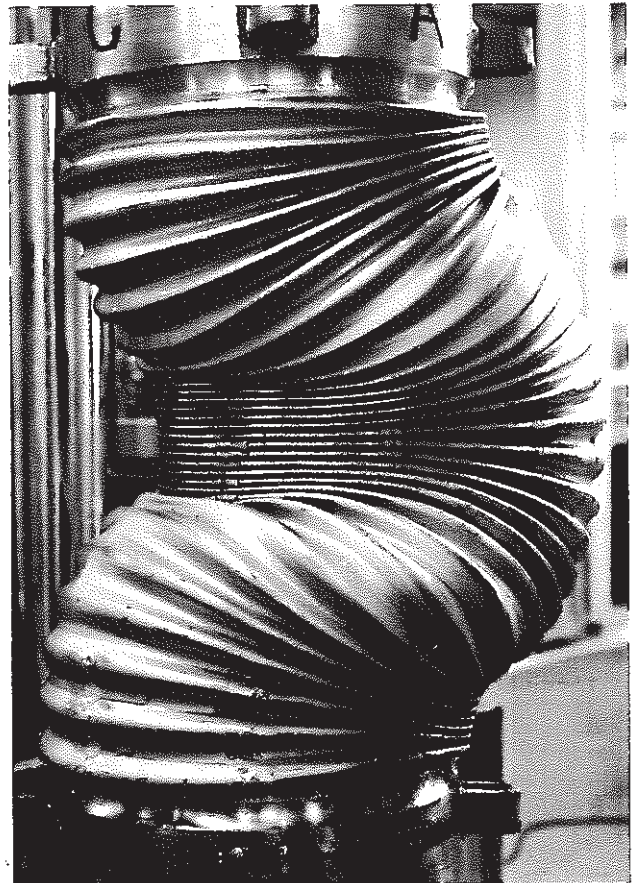
Fig.3.3-6(3) Buckling Mode of 30 convolutions Bellows



(a) 7 convolutions ($p_{cr} = 8.8 \text{ kg/cm}^2$)



(b) 15 convolutions ($p_{cr} = 7.1 \text{ kg/cm}^2$)



(c) 30 convolutions ($p_{cr} = 3.0 \text{ kg/cm}^2$)

Fig.3.3-7 Buckling Modes of Actual Bellows

4. 結 言

圧力を受ける容器等のシェル構造の大変形、座屈挙動を厳密に解析するためには、構造物の変形とともに荷重の作用方向や作用面積が変化する効果を荷重増分間で考慮しなければならない。また、構造によってはこの効果を考慮しなければ挙動を記述できない場合もある。

有限要素法解析において荷重の変形依存性を考慮するためには、いわゆる荷重補正マトリックスを導入しなければならない。しかしながらこのマトリックスは非対称マトリックスとなることが知られており、通常の有限要素法計算プログラムに導入する場合、大幅な改造が必要となるうえ、演算速度の低下が予想される。本報告書では、この荷重補正マトリックスが対称マトリックスと反対称マトリックスに分解できること、及び多くの場合、反対称マトリックスの寄与は無視できることを利用して通常の有限要素法計算プログラムへの導入が容易な対称形荷重補正マトリックスを提案し、はり要素、3次元シェル要素、軸対称シェル要素について具体的な定式化を示した。

更に、汎用非線形構造解析システムFINASにこのマトリックスを導入するとともに、荷重の変形依存性が重要な役割を果たす下記の3つの典型的な弾性座屈固定値問題を解析し、理論解あるいは荷重補正マトリックスを考慮しない場合の解と比較して手法の妥当性及び有効性を示した。

(1) 等分布荷重を受ける両端固定円弧アーチの座屈

理論解と解析結果は非常に良く一致した。ちなみに荷重補正マトリックスを含まない場合、360°円弧（リング）では、座屈荷重を3割程度高目に評価することになる。

(2) 内／外圧を受ける両端単純支持細長円筒の座屈

理論解と解析結果は良く一致した。内圧によるコラム型の座屈は荷重補正マトリックスなしには記述できないことを示した。

(3) 内圧によるペローズの座屈

コラム型の座屈については、特に山数の多い領域で理論解と解析結果は良く対応した。参考のため、解析結果と試験結果との比較を示したが、ほぼ弾性で座屈する領域については両者は比較的良く一致した。本報の解析は弾性を仮定して行っているため、塑性域

が広がった後座屈を生じるものについては、解析は試験結果よりもかなり高目の座屈圧力を与えることになるが、座屈の変形モードについてはコラムスクワームのみならずインプレインスクワームについても良く一致することを確認した。

また、軸対称シェルの弾性座屈固有値解析については、3次元シェル要素（QFLA4S）に比べて軸対称シェル要素（NAXSHEL3）の方が10倍程度計算効率が高いことがわかった。

参 考 文 献

1. FINASユーザーズマニュアル (V.10.0), PNC N9520 87-004, 動力炉・核燃料開発事業団, 1987.
2. Iwata, K., Kano, T., Atsumo, H. and Takada, H. : General purpose nonlinear analysis program FINAS for elevated temperature design of FBR components, PVP-Vol.66, ASME, 1982, pp.119-137.
3. 岩田 : 非線形の連続体力学に関する技術資料 (未発表), 1975.
4. 山田 : 塑性・粘弾性, 培風館, 1980.
5. Hibbitt, H. : Some follower forces and load stiffness, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.14, 1979, pp.937-941.
6. Loganathan, K., Chang, S., Gallagher, R.H. and Abel, J.F. : Finite element representation and pressure stiffness in shell stability analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.14, 1979, pp.1413-1420.
7. Schweizerhof, K. and Ramm, E. : Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analysis, Computers & Structures, Vol.18, No.6, 1984, pp.1099-1114.
8. Malvern, L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc. 1969.
9. Handbook of Structural Stability, C.R.C. Japan (CORONA 1971) pp.2-83.
10. Flügge, W., Stresses in Shells, 2nd ed., Springer-Verlag, 1973.
11. Tsukimori, K., et.al, A Simplified Analysis Method for Buckling of Bellows under Internal Pressure and Its Validation Tests, Pressure Vessel Technology vol.1, Preprints of 6th Int. Conf. 11-16, Sept. 1988, Beijing, pp663-670.