

# 非弾性解析の高精度化に関する検討

——各種高精度非弾性構成モデルと解析アルゴリズムの検討——

1990年12月

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせください。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation)

## 非弾性解析の高精度化に関する検討 —各種高精度非弾性構成モデルと解析アルゴリズムの検討—

柄谷 和輝\* , 岩田 耕司\*

### 要 旨

高精度な非弾性解析を実用化するためには、材料の挙動を正確に表わし得る構成モデルと、安定した解析を効率よく行うための解析アルゴリズムが必要となる。本報告書の第一編では、各種の弾塑性及び統一型構成モデルを取り上げ、非弾性挙動シミュレーションプログラムADMODELを用いた解析によりその特性を評価し、代表的な例についてモデル定数決定方法を検討した。第二編では非弾性解析アルゴリズムとして弾塑性構成方程式の積分法、統一型モデルの積分法および時間増分決定方法について検討した。これにより高精度で効率的な非弾性解析を行なうための構成モデル及び解析アルゴリズムの選定について有用な知見を得た。

以下に本報の主な結果をまとめる。

- (1) 高速炉の主要構造材料であるSUS304鋼の繰返し材料挙動を表現するのに有望な弾塑性構成モデルにはChabocheモデル、非線形繰返し非硬化領域モデル、McDowellモデル、電中研モデルがある。しかしChabocheモデルは精度に、McDowellモデルは構造の複雑さに問題があり、非線形繰返し非硬化領域モデルと電中研モデルが最もこれに適している。
- (2) 統一型構成モデルは今回扱ったいずれのモデルも非線形硬化、応力のひずみ速度依存性、クリープ特性を表現することができる。ただし現状では弾塑性モデルほど効率的な解析を期待することはできない。
- (3) 弾塑性構成方程式の積分法として最も効率と精度がよいのは厳密解を利用する方法であるが、まだ等方硬化がある場合についての解が見出されていない。また最も適用性の広いのはSubstep法である。
- (4) 統一型モデルの積分法としてWalkerの方法は適用性に問題がある。またMillerの方法(NONSS)は大規模な問題でなければその効果を期待できない。
- (5) 統一型モデルの時間増分決定方法としてKumarの方法、Aryaの方法は同様の効果を期待できる。ただし、Aryaの方法は解が発散する可能性を持っている。

---

\* 機器構造開発部・構造工学室

## STUDY FOR IMPROVEMENT OF INELASTIC ANALYSIS METHODS

—Evaluation of Various Constitutive Models and Associated Solution algorithms—

Kazuteru Garatani \* , Koji Iwata \*

### Abstract

Advanced constitutive models which can represent material behavior realistically and sophisticated solution algorithms are key ingredients for accurate and efficient inelastic analyses. The first chapter of this report reviews various kind of elastoplastic and unified constitutive models, and investigate the characteristics of the models, using the multiaxial inelastic behavior simulation program ADMODEL. The procedures of determining model constants are given for representative models. The second chapter deals with the inelastic analysis algorithms, or integration procedures for elastoplastic and unified constitutive equations, and time increment determination procedure for the unified models. The following conclusions were obtained.

- (1) The nonlinear, cyclic, non-hardening region model and the CRIBPI model are most suitable for representing the material behavior of the 304 stainless steel.
- (2) All the unified models treated in this report can represent nonlinear hardening, strain rate dependency and creep behavior.
- (3) The most precise and effective integration procedure for the elasto-plastic model is use of the exact solutions, but which are not developed for the isotropic hardening. The sub-step integration method is the most adaptative one.
- (4) The Walker's integrating method for the unified model is effective, but its applicability is still limited. The Miller's method (NONSS) may not always be effective for small to large scale problems.
- (5) The Kumar's and the Arya's time increment determination procedure are both effective. But the Arya's method may have a possibility of divergence.

---

\* Structural Engineering Section, Oarai engineering Center, PNC

## 目 次

緒言 .....	1
第 I 編 高精度非弾性構成モデル	
1. 高精度非弾性構成モデルの現状 .....	3
2. 弾塑性モデル .....	7
2.1 組合せ硬化モデル .....	7
2.2 フラクションモデル .....	8
2.3 Kriegの二曲面モデル .....	13
2.4 Chabocheモデル (弾塑性) .....	23
2.5 非線形繰返し非硬化領域モデル .....	39
2.6 電中研モデル .....	41
2.7 McDowellモデル .....	45
2.8 Endochronic (渡部) モデル .....	48
2.9 SUS304鋼における繰返し変形への適用性について .....	54
3. 塑性・クリープ統一型モデル .....	55
3.1 Chabocheモデル (粘塑性) .....	56
3.2 Robinsonモデル .....	72
3.3 Bodner-Partomモデル .....	78
3.4 Walkerモデル .....	83
4. モデル定数決定方法 .....	87
4.1 Chabocheモデル (弾塑性) .....	87
4.2 一般的な統一型モデル .....	100

## 第II編 非弾性解析アルゴリズム

1. 弾塑性構成方程式の積分法について .....	105
1.1 Tangent Stiffness法 .....	108
1.2 Tangent Stiffness Radial Return法 .....	110
1.3 Secant Stiffness法 .....	111
1.4 Radial Return法 .....	112
1.5 Substep法 .....	113
1.6 Key, Kriegの厳密解 .....	113
1.7 各手法における計算例とその評価 .....	117
2. 塑性・クリープ統一型モデルの積分アルゴリズムについて .....	121
2.1 Walkerの方法 .....	122
2.2 Millerの方法(NONSS) .....	126
3. 塑性・クリープ統一型モデルの時間増分決定方法について .....	127
3.1 テイラー展開に基づく方法 .....	127
3.2 Kumarの方法 .....	128
3.3 Aryaの方法 .....	128
3.4 Bodner-Partomモデルによる解析例とその評価 .....	132
結言 .....	141
参考文献 .....	142

# List of Figures

## CHAPTER I : INELASTIC CONSTITUTIVE MODELS

Fig.2.2-1 Schematic representation of the fraction model .....	8
Fig.2.2-2 Stress-strain relationship expressed by multi-linear type .....	11
Fig.2.3-1 Schematic representation of limit and loading surfaces .....	13
Fig.2.3-2 Uniaxial stress versus strain curve by the Krieg's two surface model.....	21
Fig.2.3-3 Cyclic stress-strain curve by the Krieg's two surface model .....	22
Fig.2.4-1(a) Stress components of the Chaboche model (monotonic) .....	28
Fig.2.4-1(b) Stress components of the Chaboche model (cyclic) .....	28
Fig.2.4-2 Monotonic curve of the Chaboche model .....	30
Fig.2.4-3 Stress components of the Chaboche model .....	31
Fig.2.4-4 Cyclic curve of the Chaboche model .....	32
Fig.2.4-5 Schematic representation of monotonic curve .....	35
Fig.2.4-6 Schematic representation of back stress .....	36
Fig.2.4-7 Solution of Armstrong type differential equation .....	38
Fig.2.6-1 Cyclic stress-strain relationship of the CRIEPI model .....	44
Fig.3.1-1 Stress components of the Chaboche model .....	57
Fig.3.1-2 Stress relaxation curve of the Chaboche model (Analytical solution) .....	59
Fig.3.1-3 Strain rate sensitivity of the Chaboche model .....	61
Fig.3.1-4 Cyclic response of the Chaboche model .....	62
Fig.3.1-5 Stress relaxation curve of the Chaboche model (Analysis by ADMODEL) .....	63
Fig.3.1-6(a) An example of divergence of the Chaboche model ( $\Delta \epsilon = 1E-4$ ) .....	66
Fig.3.1-6(b) An example of divergence of the Chaboche model ( $\Delta \epsilon = 5E-5$ ) .....	67
Fig.3.1-6(c) An example of divergence of the Chaboche model ( $\Delta \epsilon = 1E-5$ ) .....	68
Fig.3.1-6(d) An example of divergence of the Chaboche model .....	69
Fig.3.1-7 Strain components of the Chaboche model .....	70
Fig.3.1-8 Viscoplastic strain rate versus over stress .....	71
Fig.3.2-1 Loading condition .....	75
Fig.3.2-2 Strain rate sensitivity of the Robinson model .....	76
Fig.3.2-3 Cyclic response of the Robinson model with tensile hold .....	77
Fig.3.3-1 Strain rate sensitivity of the Bodner model .....	80

Fig.3.3-2(a) Cyclic response of the Bodner model ( $\dot{\epsilon}=0.002/\text{min}$ ) ..... 81

Fig.3.3-2(b) Cyclic response of the Bodner model ( $\dot{\epsilon}=0.2/\text{min}$ ) ..... 82

Fig.3.4-1 Stress relaxation by the Walker model ..... 85

Fig.3.4-2(a) loading history..... 86

Fig.3.4-2(b) Cyclic response of the Waker model ..... 86

Fig.4.1-1 Experimental work hardening coefficient of 304 type stainless steel (550°C) .. 93

Fig.4.1-2 Experimental transient non-linear part of stress-strain relationship ..... 94

Fig.4.1-3(a) Stress-strain relationship by the Chaboce model  
( $\Delta \epsilon=2\%$ , model constats type:①) ..... 95

Fig.4.1-3(b) Stress-strain relationship by the Chaboce model  
( $\Delta \epsilon=2\%$ , model constats type:②) ..... 96

Fig.4.1-4(a) Cyclic stress-strain hysteresis loop  
by the Chaboche model (model constats type:①) ..... 97

Fig.4.1-4(b) Cyclic stress-strain hysteresis loop  
by the Chaboche model (model constats type:②) ..... 98

Fig.4.1-4(c) Cyclic stress-strain hysteresis loop  
by the Chaboche model (experiment) ..... 99

Fig.4.2-1 Schematic representation of stain rate sensitivity  
at monotonic curve ..... 101

CHAPTER II:INELASTIC ANALYSIS ALGOLITHMS

Fig.1-1 Schematic representation of stress and strain components  
by elastic perfect plastic model ..... 107

Fig.1.1-1 Schematic representation of the tangent stiffness method ..... 109

Fig.1.2-1 Schematic representation of the tangent stiffness radial return method ..... 110

Fig.1.2-2 Angular error for the tangent stiffness radial return method ..... 110

Fig.1.3-1 Schematic representation of the secant stiffness method ..... 111

Fig.1.3-2 Angular error for the secant stiffness method ..... 111

Fig.1.4-1 Schematic representation of the radial return method ..... 112

Fig.1.4-2 Angular error for the radial return method ..... 112

Fig.1.6-1 Schematic representation of the exact solution ..... 114

Fig.1.6-2 Schematic representation of the integration method ..... 115

Fig.1.7-1 Loading condition of the example calcuration ..... 117

Fig.1.7-2 Result of the example calcuration ..... 118

Fig.3.2-1 Flow chart of the Kumar's strategy ..... 130



Fig. 3.3-1 Flow chart of the Arya's strategy ..... 131  
Fig. 3.4-1 Loading condition of example problem ..... 137  
Fig. 3.4-2 Result of analysis by constant time increment ..... 137  
Fig. 3.4-3 Result of analysis by the Kumar's strategy ..... 138  
Fig. 3.4-4 Result of analysis by the Arya's strategy ..... 139  
Fig. 3.4-5 Result of analysis by Arya's strategy (An example of divergence) ..... 140

## List of Tables

### CHAPTER II : INELASTIC ANALYSIS ALGORITHMS

Table 1.7-1 Feature of each integration method ..... 120  
Table.3.4-1 Result of analysis by constant time increment ..... 134  
Table.3.4-2(a) Result of analysis by Kumar's and Arya's strategies(1) ..... 135  
Table.3.4-2(b) Result of analysis by Kumar's and Arya's strategies(2) ..... 136

## 緒 言

高速増殖炉（以下、高速炉）を実用化していく上で、プラントの大型化ならびに高熱効率化が指向されており、これに伴いより過酷な温度条件下で機器・構造を使用することが求められている。このような構造物の設計を合理的に行うためには信頼性のある非弾性解析手法を確立し、構造部材に発生する応力ひずみ挙動を精度よく、かつ効率的に予測できるようにする必要がある。

一般に、有限要素法による非弾性解析の精度は使用する有限要素の特性、数値計算上の技法の他に変形、損傷等の力学的現象とその境界条件のモデル化に左右される。特に現象のモデル化における精度は材料の力学的特性を記述する構成モデルの妥当性に大きく依存している。また実際に非弾性解析を実施する場合の計算効率は使用する解析アルゴリズムに左右される。従って高精度かつ効率的な非弾性解析を実用化するためには、適切な構成モデルと解析アルゴリズムを選定することが重要となる。

金属材料に対する高精度な非弾性構成モデルは各種提案されているが、これらは大きく二つのカテゴリーに分類することができる。ひとつは時間に依存しない塑性変形と時間に依存するクリープ変形を分けて扱うもので分離型モデルともいわれる。これに対して塑性変形とクリープ変形を区別せずひとつの変形現象として扱う統一型モデルが提案されている。前者は等方硬化や移動硬化等の弾塑性モデルとクリープモデルを単純に組み合わせる（加算する）方法であり、従来からよく使われてきた。後者は塑性とクリープをひとつの構成モデルで表現し、この中では塑性とクリープの相互作用も取り扱えるという優れた特徴を持っているが、まだ研究段階にあり実際の解析に用いられた例は極めて少ない。

本研究ではまず各種の弾塑性構成モデルについて高速炉の主要構造材料であるSUS304鋼の繰返し挙動への適用性について評価・検討を行なう一方、統一型モデルについてもその代表的なものについて非線形硬化、ひずみ速度依存性、クリープ等の基本的特性を評価・検討する。ここでの評価計算は非弾性挙動シミュレーションプログラムADMODEL (Inelastic Behavior Simulation Program Using Advanced Material Models) を用いた。

次に非弾性解析アルゴリズムについては解の安定化・効率化をはかるために、近年各種方法が提案されている弾塑性構成方程式の積分法をまず取り上げる。これは少ない解析ステップで精度のよい解を期待することができる。また統一型モデルは微分方程式が非常に剛な(stiff)な特性を持っているため、通常行なわれている初期ひずみ法による解析では弾塑性モデルほど安定した解を得ることが難しいことがある。従って実用的な解析を行なうためには解析アルゴリズムを工夫する必要が生じる。これについては統一型モデルの積分法および時間増分自動決定機能について、効率的で安定した解析を可能にするアルゴリズムを検討し、さらに簡単なベンチマーク計算によってその効率を評価する。

なお、繰返し塑性モデルに関しては、本報告書で取り上げた種々のモデルの問題点を改善すべく、別途動燃独自の新しいモデルを開発しており、近々報告書が発行される予定である。また改良9Cr-1Mo鋼に対する統一型モデルの研究も名古屋大学への委託により進めている。

## 第 I 編

# 高精度非弾性構成モデル

## 1. 高精度非弾性構成モデルの現状

金属材料に対する構成モデルを作成する場合、金属を構成する微視的な各単結晶の力学的特性から、実際の多結晶体である金属の特性を記述する場合がある。しかし、このような構成モデルは扱うべき変数の数が膨大となり実際の解析において著しく不利となる。従ってここでは金属の結晶にまで立ち入らず巨視力学的な構成モデルのみを扱う。さてこのような構成モデルを構築するとき以下の二つの考え方がある。

- 1) 物質の現在の力学的状態が全ひずみ、温度等の観測可能な外部変数と観測不可能な内部状態変数の現在の値とその履歴に依存するとしたもの。
- 2) 物質の現在の力学的状態が外部変数と内部状態変数の現在の値のみに依存するとしたもの。

今回扱っている構成モデルのなかで1)の立場をとるのはEndochronicモデル<sup>1,4)</sup>のみであり、変数の履歴を考慮するために構成モデルが積分形で表記されている。このことは実際の解析を行なう場合、記憶容量および計算量の面から不利となる。また、これを増分形に変換するならば2)に同一の表記が可能であることが文献<sup>1,3)</sup>に示されている。従って現在は、主に2)の立場より各種の内部状態変数を用いた実用的で高精度なモデルが多数提案されている。

また非弾性変形の扱い方に関しては以下の二つの考え方が存在する。

- 7) 塑性変形とクリープ変形を分離して扱うもの。
- 1) 塑性変形とクリープ変形を同種のものとして扱うもの。

前者は塑性クリープ分離型モデルとも呼ばれ、塑性変形については古典的な塑性流れ理論を基礎とする弾塑性構成モデルを用いるため、効率的で安定した解析を行なうことができる。これに対して後者は塑性クリープ統一型モデルとも呼ばれ、同一の構成モデルにおいて塑性とクリープの両者を記述し、その相互作用を簡単に取扱えるので特に高温における材料の挙動を記述するのに適している。しかし統一型モデルはまだ開発段階にあり、実際の解析において弾塑性モデルほど効率よくかつ安定した解析を行なうことができない。またモデル定数の決定にもその適用性が広いが故に困難が伴う。従って現状で統一型モデルが使用されるのは高温において塑性とクリープの相互作用が問題となり、7)の立場では取扱いが難しい場合に限られ、塑性変形が支配的な場合や塑性とクリープを分離しても特に問題がない場合は7)の分離型モデルが依然として用いられている。ここでもこのような立場に立ち、まず弾塑性モデルについて検討する。

弾塑性型の構成モデルとして基礎的なものは負荷面の等方的な拡大を仮定する等方硬化モデルと負荷面の剛体的移動を仮定する移動硬化モデルあるいはこれらの組合せとして表される組合せ硬化モデルが挙げられる。通常の移動硬化モデルでは硬化係数を定数とし、応力-ひずみ関係は2直線で表される。

このためモデルの構造が簡単で、かつ材料定数の決定も容易なので実際の非弾性解析において広く用いられてきた。しかし応力-ひずみ関係を2直線にて近似しているためSUS304鋼のように塑性初期において滑らかな剛性変化がある場合は、得られる応力の精度が期待できない。

このような問題を解決するために、構成モデルにおいて実際の応力-ひずみ関係に近い非線形硬化を表現できるモデルが提案された。この最も初期のものが2.1節にて扱っているフラクションモデル<sup>1)</sup>であり、材料の非線形硬化を特性の異なる多数の部分要素の集まりと見ることによって表現している。これは前述の等方硬化あるいは移動硬化モデルにおいて硬化係数を相当塑性ひずみの関数とすることによっても可能であるが、これらは主に単調の応力-ひずみ関係を表現することを目的としている。従って繰返し負荷を受ける場合や負荷の途中で除荷が起こり再び負荷状態となった場合、硬化係数をどのように定めるかという問題が発生する。これに対してMrozは多曲面理論を提案し、降伏曲面の外にこれを取り囲む超曲面を設け、この問題の解決を図った。このような超曲面はいわゆる硬化の記憶面として働くことから前述の再負荷が生じる場合の硬化係数の変化を矛盾なく表現することができる。しかし多曲面理論は実際の解析において扱うべき内部状態変数が多くなる。Krieg<sup>3)</sup>及びDafalias-Popov<sup>4)</sup>はこの点を改良し、降伏曲面の他に限界曲面のみを考え塑性域における硬化係数をこれら曲面間の距離の関数とする2曲面モデルを提案した。このモデルは少ない内部状態変数によって非線形硬化を効率よくかつ高精度に表現することができる。このような2曲面モデルによる非線形硬化の表現は後に非線形繰返し非硬化領域モデル<sup>8)</sup>、電中研モデル<sup>11)</sup>、McDowellモデル<sup>12)</sup>等多くのモデルに採用されている。

これに対して背応力の非線形移動硬化によって非線形硬化を表現するChabocheら<sup>5)</sup>のモデルがある。これは背応力の発展式をArmstrongとFrederickによる微分方程式とし、非線形硬化を表すが4.1節にて示すように繰返し応力-ひずみヒステリシスにおける非線形硬化量が単調の高々2倍にしかならないという欠点をもつ。

さて、FBRの主要構造部材であるSUS304鋼に一定ひずみ範囲の繰返し変形を与えると繰返し数の増加に伴って硬化が進行するがその硬化量は次第に小さくなり、ある一定の繰返し数によって硬化が飽和し、最終的には安定した応力-ひずみループが得られる。また硬化が飽和するまでの繰返し数と硬化量はひずみ範囲に依存している。このような繰返し硬化特性の表現はKriegの2曲面モデルにおいても適用されているが<sup>3)</sup>、繰返し硬化量のひずみ範囲依存性や一度硬化が飽和した後、ひずみ範囲が増大したときの再硬化等を表現することができなかつた。これに対して大野らは、2曲面モデルにおいて塑性ひずみ空間に降伏曲面と同様に移動と拡大を伴う繰返し非硬化領域面を設けた非線形繰返し非硬化領域モデル<sup>8)</sup>を提案した。このモデルは前述の繰返し硬化をひずみ範囲変動下においても表現でき、さらに再硬化も取り扱えることから注目されている。また同様の概念はChabocheら<sup>6)</sup>によってもひずみ記憶面として提案されている。これらの概念は電中研モデル、McDowellモデルによっても利用されており、今のところ繰返し硬化の表現方法としては最も有望なものとなっている。さらに現在はSUS304鋼

の繰返し硬化における温度依存性及び非比例負荷の影響を扱うために構成モデルの高精度化が進められている。

次に塑性クリープ統一型構成モデルであるが、このモデルはひとつの構成式によって塑性とクリープおよびその相互作用を表現でき、また弾塑性モデルのように除荷、負荷の判定をする必要がないことから将来的には非常に有望なモデルである。しかし今回扱っている統一型構成モデルは降伏曲面の概念はあるものの、応力点はこの外に飛び出ることができ、これを超過応力としてこの巾乗または指数を非弾性ひずみと関係づけている。従って弾塑性モデルと異なり応力が常に降伏面上にあるという適応条件式を用いることができず、応力-ひずみの接線剛性を陽に定めることが不可能となる。また非弾性ひずみを超過応力の巾乗としているために応力の変化に対して非弾性ひずみの発生が急激であり、いわゆるこの微分方程式が剛な (stiff) 特性をもっているために、弾塑性モデルほど安定した解析を行なうことができない場合がある。さらにモデルの適用範囲が広いが故にモデル定数の決定に困難が伴う。従って現状で統一型構成モデルを用いるのはクリープと塑性の分離が困難で、弾塑性構成モデルが適用できない場合のみに限られている。実際の解析についても、そのモデルの提案者および協力者によって材料試験レベルで行なわれている程度であり、実用的な問題に対する解析例は極めて少ない。また現状では前述の繰返し塑性等の弾塑性問題の高精度化に関しては統一型モデルより弾塑性モデルの方が進んでいる。よって統一型モデルの解法あるいは計算能力に飛躍的な進歩が無ければ、統一型モデルが全面的に分離型モデルにとってかわることは現状ではまだ考えにくいといえる。

以上主に本報告書で取り上げる構成モデルについてその発展の経緯と特性を概説してきたが実際に構成モデルを選んで高精度な解析を効率よく行なうためには以下の点に留意してモデルを選ぶ必要があると考える。

- ① 対象となる材料の力学的特性を精度よく表し得ること
- ② 解析において効率がよいこと
- ③ モデル定数の決定が容易であること

①の条件は最も重要であるがその基準は絶対的ではなく、構成モデルに要求すべき力学的特性は解析目的により異なる。従って解析目的に応じた力学的特性と精度を持ったモデルの中から②、③の条件を備えたモデルを選択することになる。②の条件は使用する内部状態変数の個数やその更新のための演算量を意味し、前者は計算機上での記憶容量、後者は計算時間に直接影響する。これらは一般にモデルが複雑になるほど不利であり、実際に非弾性解析を行なう場合の効率に大きく影響する。③の条件は既にモデル定数が与えられている場合には考慮する必要はないが、あらたにモデル定数を決定する場合は非常に重要となる。またこの他にも第2編にて示すように使用すべき構成モデルに合った解析アルゴリズムを採用することが重要と考える。

以上述べたように現在、多くの高精度な非弾性構成モデルが提案されており、これらを用いることに

よって非弾性解析の精度は確実に向上すると予想される。また、近年における計算機ハードウェアの進歩によってその解析も難しいものではなくなってきている。しかし現状ではこれらの構成モデルを用いた解析例はまだ少数に留まっている。従って今後は実用問題について高精度非弾性構成モデルを用いた解析を実施し、その実績を積み重ねていくと同時に、問題点の解決をはかっていくことが重要と考える。

## 2. 弾塑性モデル

### 2.1 組合せ硬化モデル

組合せ硬化モデルは文字通り等方硬化モデルと移動硬化モデルを組み合わせたもので、抗応力 (Drag Stress) :  $\kappa$  と背応力 (Back Stress) :  $\alpha$  を持ち、降伏面が応力空間上を移動あるいは拡大、縮小することができる。これは以降に示す高精度非弾性構成モデルにおいて最も基本的な特性となっている。

等方硬化については降伏面半径 (抗応力) の増分を塑性変形量の関数とするものでここでは相当塑性ひずみと関係づけている。また移動硬化については降伏面の移動方向を塑性ひずみ増分方向とする Prager 則、あるいはこれを降伏面の原点から現在の応力点方向にとる Ziegler 則が用いられる。ただし一般の金属材料に用いられるように降伏関数として偏差応力テンソルの二次不変量 (Mises の降伏関数) をとり、これを塑性ポテンシャルとする塑性流れ理論に従うなら Prager 則と Ziegler 則で示される方向は常に同方向であり両者に差はない。

ここでは以下の式における硬化定数  $H'$ 、 $H''$  を定数とし、応力-ひずみ関係が 2 直線で近似される場合を想定しているが、これらを例えば相当塑性ひずみの関数とすることによって非線形硬化を表現することも可能である。しかしこの場合、除荷が発生した後の再負荷時に硬化定数をどのように定義するか問題があり、この方法は単調問題でしか意味を持たない。

以下に組合せ硬化モデルの基礎式を掲げる。

・降伏面

$$f = \frac{3}{2} (\mathcal{S} - \alpha) : (\mathcal{S} - \alpha) - \kappa^2 = 0 \quad (2.1-1)$$

・抗応力の発展則

$$\dot{\kappa} = H' \dot{e}^p \quad (2.1-2)$$

・背応力の発展則

$$\dot{\alpha} = c \dot{e}^p \quad (2.1-3)$$

上式の  $c$  は  $H''$  で表す場合もある。このとき  $H'' = 1.5c$  の関係がある。



## 2.2 フラクションモデル

フラクションモデルは材料の非弾性挙動を特性の異なる複数の部分要素（フラクション）の並列結合で表わす方法である。ここではBesselingにより提案された部分要素が非硬化性のモデル<sup>1)</sup>についてその概要を述べる。

体積  $d v$  を持つ材料の体積要素はFig. 2.2-1に示すような  $n$  個の平行した部分要素の集合体であるとする。ここで各部分要素  $N$  は同一の全ひずみを持ち、異なる降伏応力  $\sigma_y^N$  を有するものと仮定する。また各部分要素  $N$  の重みすなわち体積率を  $\Psi^N$  とすると、 $\Psi^N$  は式 (2.2-1) を満足する。

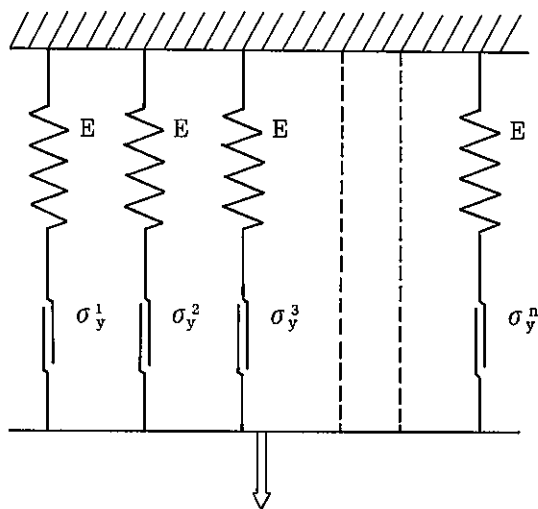


Fig. 2.2-1 Schematic representation of the fraction model

$$\sum_{N=1}^n \Psi^N = 1 \tag{2.2-1}$$

体積要素  $d v$  の塑性ひずみ増分  $d \varepsilon_{ij}^P$  と応力増分  $d \sigma_{ij}$  は  $\Psi^N$  を用いて次式で表わすことができる。

$$d \varepsilon_{ij}^P = \sum_{N=1}^n \Psi^N d \varepsilon_{N,ij}^P \tag{2.2-2}$$

$$d \sigma_{ij} = \sum_{N=1}^n \Psi^N d \sigma_{ij}^N = \sum_{N=1}^n \Psi^N E_{ijkl}^e (d \varepsilon_{kl} - d \varepsilon_{N,kl}^P) \tag{2.2-3}$$

ここで  $d \varepsilon_{kl}$  と  $d \varepsilon_{N,kl}^P$  は全ひずみ増分と部分要素  $N$  の塑性ひずみ増分であり、 $E_{ijkl}^e$  は弾性応力・ひずみマトリックスである。

$$E_{ijkl}^e = 2G \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \tag{2.2-4}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & : i \neq j \\ 1 & : i = j \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

一方、部分要素Nのせん断弾性ポテンシャルエネルギー $\phi_d^N$ は次式で表わすことができる。

$$\phi_d^N = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{N,ij}^P) E_{ijkl}^d (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{N,kl}^P) \quad (2.2-5)$$

$$E_{ijkl}^d = 2G \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (2.2-6)$$

単軸引張の降伏応力を $\sigma_y^N$ とするとMisesの降伏条件は次式で定義できる。

$$\phi_d^N - \frac{1}{6} \frac{(\sigma_y^N)^2}{G} = 0 \quad (2.2-7)$$

式(2.2-7)を満足している弾完全塑性部分要素Nの塑性ひずみ増分は式(2.2-8)で表わすことができる。

$$E_{ijkl}^d d\varepsilon_{N,kl}^P = \lambda \frac{\partial \phi_d^N}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.2-8)$$

式(2.2-5)、(2.2-6)より全ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ と塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{N,ij}^P$ に対して次式が成立する。

$$d\phi_d^N = \frac{\partial \phi_d^N}{\partial \varepsilon_{ij}} (d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{N,ij}^P) = 0 \quad (2.2-9)$$

式(2.2-8)の両辺に $(\partial \phi_d^N / \partial \varepsilon_{ij}) (E_{ijkl}^d)^{-1}$ を乗じ、式(2.2-9)を使用すると、式(2.2-8)の $\lambda$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\frac{\partial \phi_d^N}{\partial \varepsilon_{mn}} d\varepsilon_{mn}}{\frac{\partial \phi_d^N}{\partial \varepsilon_{ij}} (E_{ijkl}^d)^{-1} \frac{\partial \phi_d^N}{\partial \varepsilon_{kl}}} \\ &= \frac{(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{N,ij}^P) E_{ijkl}^d d\varepsilon_{kl}}{(\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{N,mn}^P) E_{mnop}^d (E_{pqrs}^d)^{-1} E_{qrst}^d (\varepsilon_{st} - \varepsilon_{N,st}^P)} \end{aligned} \quad (2.2-10)$$

式(2.2-10)を式(2.2-8)に代入すると次式を導くことができる。

$$d\varepsilon_{N,ij}^P = (E_{ijkl}^d)^{-1} E_{N,klmn}^P d\varepsilon_{mn} \quad (2.2-11)$$

ここで

$$E_{N,ijkl}^P = \frac{E_{d,ijop}^d (\varepsilon_{op} - \varepsilon_{N,op}^P) (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{N,mn}^P) E_{d,mnki}^d}{(\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{N,mn}^P) E_{d,mnop}^d (E_{opqr}^0)^{-1} E_{d,qrst}^d (\varepsilon_{st} - \varepsilon_{N,st}^P)} \quad (2.2-12)$$

式 (2.2-11) を式 (2.2-3) に代入すると  $d\sigma_{ij}$  は次式で表わすことができる。

$$d\sigma_{ij} = \sum_{N=1}^n \Psi^N (E_{ijkl}^0 - E_{ijkl}^P) d\varepsilon_{kl} \quad (2.2-13)$$

式 (2.2-13) は全部分要素が塑性状態にある場合の応力・ひずみ関係の増分形による表示であるが、弾性状態にある部分要素を含めて次式に書き換えることができる。

$$d\sigma_{ij} = \sum_{N=1}^n \{ \Psi^N [\gamma^N E_{ijkl}^0 + (1 - \gamma^N) E_{ijkl}^P] \} d\varepsilon_{kl} = E_{ijkl}^P d\varepsilon_{kl} \quad (2.2-14)$$

$$\gamma^N = \begin{cases} 1 : \text{弾性} \\ 0 : \text{塑性} \end{cases}$$

ここで  $E_{ijkl}^P$  は式 (2.2-15) で与えられる。

$$E_{ijkl}^P = E_{ijkl}^0 - E_{ijkl}^P \quad (2.2-15)$$

次に塑性状態にある部分要素 N の除荷判定について述べる。式 (2.2-5)、(2.2-7) を考慮して  $\phi^{*N}$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \phi^{*N} &= \phi_d^N - \frac{(\delta \Psi^N)^2}{6G} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{N,ij}^0 E_{d,ijkl}^d \varepsilon_{N,kl}^0 - \frac{(\delta \Psi^N)^2}{6G} \end{aligned} \quad (2.2-16)$$

ここで

$$\varepsilon_{N,ij}^0 = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{N,ij}^P \quad (2.2-17)$$

式 (2.2-16) より  $\phi^{*N}$  の増分は次式で表わすことができる。

$$\phi^{*N} = \frac{\partial \phi^{*N}}{\partial \varepsilon_{N,ij}^0} d\varepsilon_{N,ij}^0 = \varepsilon_{N,ij}^0 E_{d,ijkl}^d \quad (2.2-18)$$

式 (2.2-7) より塑性状態では  $\phi^{*N} = 0$  であり、塑性状態では次式が成立する。

$$\phi^{*N} < 0, \quad d \varepsilon_{N,ij}^P = 0 \tag{2.2-19}$$

したがって除荷条件として次式を用いる。

$$d \phi^{*N} = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{N,ij}^P) E_{i,j,k,l}^d \quad \varepsilon_{kl} > 0 \quad d \varepsilon_{N,ij}^P \neq 0 \quad : \text{負荷} \tag{2.2-20}$$

$$d \phi^{*N} = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{N,ij}^P) E_{i,j,k,l}^d \quad \varepsilon_{kl} = 0 \quad d \varepsilon_{N,ij}^P = 0 \quad : \text{中立負荷} \tag{2.2-21}$$

$$d \phi^{*N} = (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{N,ij}^P) E_{i,j,k,l}^d \quad \varepsilon_{kl} < 0 \quad d \varepsilon_{N,ij}^P = 0 \quad : \text{除荷} \tag{2.2-22}$$

材料パラメータの決定法

部分要素が非硬化性の弾完全塑性材料の場合、単軸引張試験で得られた応力・ひずみ関係の多直線近似を用いて、各フラクションの重み  $\Psi^N$  と降伏応力  $\sigma_N^y$  は次の手順で推定することができる。<sup>2)</sup>

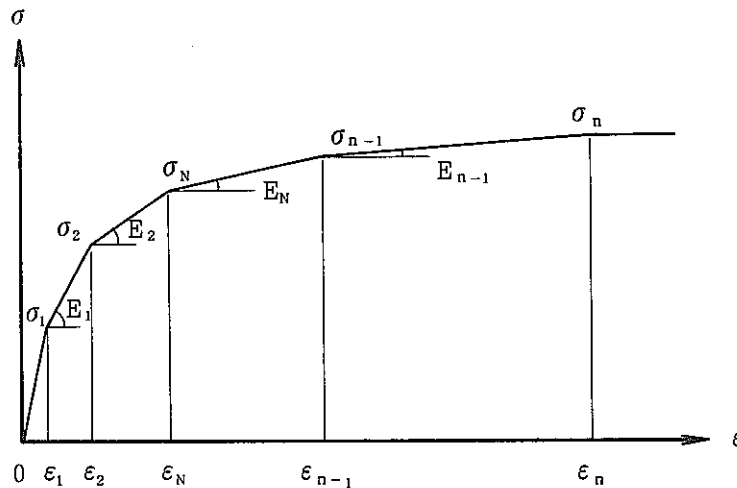


Fig. 2.2-2 Stress - Strain Relationship expressed by multi-linear type

$$E = \sigma_1 / \varepsilon_1, \quad E_N = \frac{\sigma_{N+1} - \sigma_N}{\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N} \quad (N = 1, n-1) \tag{2.2-23}$$

$$\Psi^1 = \frac{E - E_1}{E - \frac{1}{3} (1 - 2\nu) E_1} \tag{2.2-24}$$

$$\Psi^N = \frac{E - E_N}{E - \frac{1}{3} (1 - 2\nu) E_N} - \sum_{i=1}^{N-1} \Psi^i \quad (N = 2, n-1) \tag{2.2-25}$$

$$\Psi^n = 1.0 - \sum_{N=1}^{n-1} \Psi^N \quad (2.2-26)$$

$$\sigma_{\Psi}^{\downarrow} = E \varepsilon_1 \quad (2.2-27)$$

$$\sigma_{\Psi}^N = \sigma_{\Psi}^{N-1} + \frac{3E - (1 - 2\nu) E_{N-1}}{2(1 + \nu)} (\varepsilon_N - \varepsilon_{N-1}) \quad (N=2, n) \quad (2.2-28)$$

### 2.3 Kriegの2曲面モデル

Kriegの2曲面モデル<sup>3), 4)</sup>は、応力空間の中に一般に用いられている降伏面 (loading surface) と、さらにその外側に限界面 (limit surface) を考え、非線形硬化材料の弾塑性挙動を表現するものである。

これら2つの曲面は、塑性域において、各々が等方硬化による曲面の拡大、移動硬化による原点移動を伴い、その剛性は各々の曲面上の応力点の差の関数となる。これによって、このモデルは弾性域から塑性域へのなだらかな剛性変化を表現することができる。

つまり、このモデルでは可逆過程である弾性域と、塑性変形がかなり進行し、その剛性が限界面に左右される領域、またその間で剛性が変化していく領域を各々表現することができる。

また文献<sup>3)</sup>によると構成式はすべて増分形で表現されており、このモデルを支配する  $P$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $\gamma$  の各々を各種の関数とすることによって、かなり自由に応力・ひずみ関係を作ることができる。

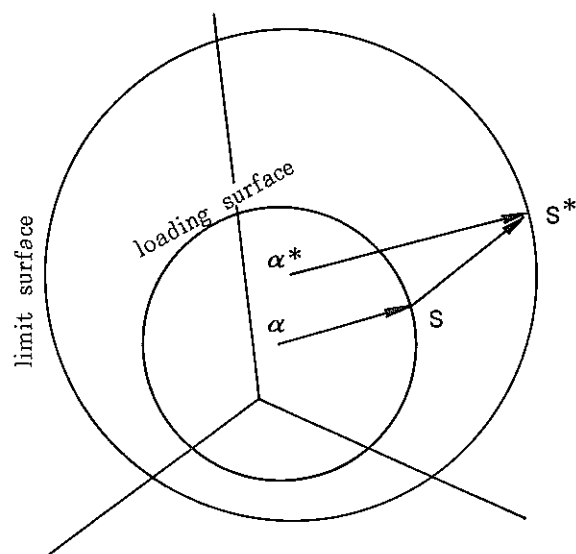


Fig. 2.3-1 Schematic representation of limit and loading surfaces

○Kriegの二曲面モデルの基礎式

・降伏面とその発展式

$$\phi = (\$ - \alpha) : (\$ - \alpha) - R^2 = 0 \tag{2.3-1}$$

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta p G \dot{\bar{e}}^p}{R R_0} (\$^* - \$) : (\$ - \alpha) \tag{2.3-2}$$

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(1 - \beta) p G \dot{\bar{e}}^p}{R_0} (\$^* - \$) \tag{2.3-3}$$

・限界面とその発展式

$$\phi = (\$^* - \alpha^*) : (\$^* - \alpha^*) - R^{*2} = 0 \tag{2.3-4}$$

$$\dot{R}^* = \sqrt{\frac{2}{3}} G k \gamma \dot{\bar{e}}^p \tag{2.3-5}$$

$$\dot{\alpha}^* = G k (1 - \gamma) \dot{\bar{e}}^p / 1.5 \tag{2.3-6}$$

また限界応力 \$ \\$^\* \$ は、 $\partial f^* / \partial \$^* $ と  $\partial f / \partial \$ $ が同方向になるようにとる。$$

$$\$^* = \alpha^* + (\$ - \alpha) R^* / R \tag{2.3-7}$$

材料定数  $R_0, p, k, \beta, \gamma $ は以下の意味を持つ$

$$R_0 : \text{初期状態における降伏面の大きさ} \left( R_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_y \right)$$

$p $ : 弾性から塑性への過渡域における硬化を表す。$

$k $ : 塑性変形が進行した状態での硬化を表す。$

$\beta $ : 降伏面において等方硬化量と移動硬化量の比率を表す。$

$\gamma $ : 限界面において等方硬化量と移動硬化量の比率を表す。$

○構成方程式の導出

次にこのモデルの塑性域における構成方程式を導く。基礎式を以下に再記すると、

$$\text{降伏曲面} \quad : \phi = (S_{ij} - \alpha_{ij}) (S_{ij} - \alpha_{ij}) - R^2 \quad (2.3-1)$$

$$\text{応力増分} \quad : d\sigma_{ij} = E_{ijkl}^* (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (2.3-8)$$

$$\text{塑性ひずみ増分} : d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial S_{ij}} \quad (2.3-9)$$

$$\text{負荷条件} \quad : \phi = 0, \quad d\phi = 0 \quad (2.3-10)$$

$$\text{移動硬化量} \quad : d\alpha_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(1-\beta) p G d\bar{\varepsilon}^p}{R_0} \eta_{ij} \quad (2.3-3)$$

$$\left( \begin{array}{l} d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \end{array} \right. \quad (2.3-11)$$

$$\left( \begin{array}{l} \eta_{ij} = S_{ij}^* - S_{ij} \\ \eta_{ij} = (R^*/R - 1) (S_{ij} - \alpha_{ij}) + \alpha_{ij}^* - \alpha_{ij} \end{array} \right. \quad (2.3-12)$$

$$\text{等方硬化量} \quad : dR = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta p G d\bar{\varepsilon}^p}{R R_0} \eta_{ij} (S_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (2.3-2)$$

以上9つの式より  $d\varepsilon_{ij}^p$ 、 $d\bar{\varepsilon}^p$  を消去することによって構成式を求める。

さて、(2.3-8, 9, 10, 11) より  $d\varepsilon_{ij}^p$  を消去すると、

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}^* \left\{ d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3}{2}} d\bar{\varepsilon}^p (S_{ij} - \alpha_{ij}) \right\} \quad (2.3-13)$$

(2.3-10) を用いると

$$(S_{ij} - \alpha_{ij}) \left( d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} d\sigma_{aa} \delta_{ij} \right) = (S_{ij} - \alpha_{ij}) d\alpha_{ij} + R dR \quad (2.3-14)$$

ただし上式において (3.3-4) を用いると



$$(S_{ij} - \alpha_{ij}) d\sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} = \frac{1}{2\lambda} \frac{(d\varepsilon_{p11} + d\varepsilon_{p22} + d\varepsilon_{p33}) d\sigma_{\alpha\alpha}}{\text{非圧縮性によって } 0}$$

$$= 0$$

(2.3-14) に (2.3-3, 11, 12, 2) を代入し、(2.3-12) より  $d\sigma_{ij}$  を消去すると、

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} (S_{ij} - \alpha_{ij}) E_{ijkl}^* d\varepsilon_{kl}}{(S_{mn} - \alpha_{mn}) \left[ \frac{3}{2R} E_{mnop}^* (S_{op} - \alpha_{op}) + \frac{pG}{R_0} \left\{ \frac{R^* - R}{R} (S_{mn} - \alpha_{mn}) - (\alpha_{mn} - \alpha_{mn}^*) \right\} \right]}$$

(2.3-15)

(2.3-15) を (2.3-12) に代入すると、以下の塑性域における構成方程式が得られる。

$$d\sigma_{ij} = (E_{ijkl}^* - E_{ijkl}^p) d\varepsilon_{kl}$$

$$E_{ijkl}^p = \frac{E_{ijop}^* (S_{op} - \alpha_{op})(S_{mn} - \alpha_{mn}) E_{mnkl}^*}{(S_{mn} - \alpha_{mn}) E_{mnop}^* (S_{op} - \alpha_{op}) + \frac{2}{3} \frac{pG}{R_0} (S_{mn} - \alpha_{mn}) \left\{ (R^* - R)(S_{mn} - \alpha_{mn}) - R(\alpha_{mn} - \alpha_{mn}^*) \right\}}$$

(2.3-16)

○単軸応力状態への適用と硬化特性

次にこの理論を単軸応力状態に適応させることによって、その塑性域における非線形硬化特性を示す。

今  $\sigma_{11} \neq 0$  でその他の応力成分はすべて 0 である単軸応力状態を考える。

$\sigma_{11} = \sigma$ ,  $\alpha_{11} = \alpha$ ,  $\eta_{11} = \eta$  とおくと、

$$S_{11} = \frac{2}{3} \sigma, \quad S_{22} = S_{33} = -\sigma/3 \quad (S_{ij} = 0, i \neq j)$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{3} \alpha, \quad \alpha_{22} = \alpha_{33} = -\alpha/3 \quad (\alpha_{ij} = 0, i \neq j) \tag{2.3-17}$$

$$\eta_{11} = \frac{2}{3} \eta, \quad \eta_{22} = \eta_{33} = -\eta/3 \quad (\eta_{ij} = 0, i \neq j)$$

また全ひずみ増分： $d\varepsilon_{11}$ と偏差ひずみ増分： $d\varepsilon_{11}$ 間には

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= d\varepsilon_{11} + (d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33}) / 3 \\ &= d\varepsilon_{11} + d\sigma_{11} / K \end{aligned} \quad (2.3-18)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

偏差成分で表わした構成方程式に (3.3-17, 3.3-18) を代入して、

$$dS_{11} = 2Gd\varepsilon_{11} \left[ 1 - \frac{1.5(S_{11} - \alpha_{11})^2}{R^2(1+f/3)} \right] \quad (2.3-19)$$

ただし

$$f = \frac{p\eta_{11}(S_{11} - \alpha_{11})}{RR_0} \quad (2.3-20)$$

また、(2.3-1) より、

$$(S_{11} - \alpha_{11})^2 = R^2 / 1.5 \quad (2.3-21)$$

(2.3-17, 19, 21) より、

$$d\sigma = \frac{fEd\varepsilon}{2(1+\nu) + f} \quad (2.3-22)$$

また (2.3-22) の右辺の分子、分母に  $E/2(1+\nu)$  を乗ずることによって、

$$d\sigma = \frac{E \cdot G f}{E + G f} d\varepsilon \quad (2.3-23)$$

上式を脚注\*1の式と比べることによって、

$$H' = G f \quad \left( H' = \frac{G p \eta_{11} (S_{11} - \alpha_{11})}{R R_0} \right)$$

よってこのモデルは、硬化係数  $H'$  に上記の関数関係をもたせ、非線形硬化を表わしていることが解る。

また、(2.3-23) 式は  $f$  が非常に大きいときは、剛性が  $E$  に近く、 $f$  の減少に従って剛性が低下していくことを示している。これによって、弾性から塑性へのなだらかな剛性の変化を表わすことができる。

○材料定数  $p$ ,  $k$  の決定方法

さて、ここで初期降伏状態と塑性変形が十分進行したときの剛性を考えることによって、材料定数  $p$ ,  $k$  の決定方法\*2について述べる。

初期降伏が起った瞬間には、

$$R = R_0, \quad \alpha_{ij} = 0, \quad R_0^* = 0, \quad \alpha_{ij}^* = 0$$

よって (2.3-20) において初期降伏時の  $f$  を  $f_i$  とおくと、

$$\lim_{e^p \rightarrow 0} f = \frac{3}{2} \frac{p (R_0^* - R_0)}{R_0} = f_i$$

接線剛性  $E_t = d\sigma / d\varepsilon$  は (2.3-22) より、

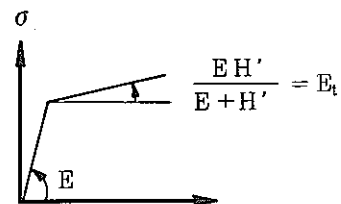
$$\lim_{e^p \rightarrow 0} E_t = \frac{E \cdot G f_i}{E + G f_i}$$

よって  $p$  値は、 $\lim_{e^p \rightarrow 0} E_t = E_{ti}$  とおくと

$$P = \frac{2 R_0 E \cdot E_{ti}}{3 G (R_0^* - R_0) (E - E_{ti})} \quad \text{で求まる。}$$

\*1 等方硬化を示す弾塑性材料では、単軸応力状態における塑性域での応力-ひずみ関係（剛性）が下式で表わされる。

$$d\sigma = \frac{E H'}{E + H'} d\varepsilon \quad \left( H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon^p} \right)$$



\*2 ただし、この方法によって決定できるのは、 $p$ ,  $k$  が定数の場合に限られる。

また、 $\beta$ ,  $\gamma$  の決定方法についてはさらに検討が必要と考える。

次に (2.3-12) 式の両辺に  $(S_{11} - \alpha_{11}) / R$  を乗じ、単軸状態にすると、以下の微分方程式が得られる。

$$\frac{\sigma_{y0}}{pG} \cdot \frac{df}{d\bar{e}^p} = k - f$$

$$\sigma_{y0} = \sqrt{1.5 R_0}$$

これをといて、

$$f = k + (f_a - k) e^{[-pG(\bar{e}^p - \bar{e}^p_a) / \sigma_{y0}]}$$

$f_a, \bar{e}^p_a$  は初期値

さて、上式は塑性変形の進行に伴って  $\bar{e}^p$  が大きくなっていくと  $k$  に近づく。

$$\lim_{\bar{e}^p \rightarrow \infty} f = k$$

接線剛性  $E_t$  は、

$$\lim_{\bar{e}^p \rightarrow \infty} E_t = \frac{E \cdot G k}{E + G k}$$

よって  $k$  値は  $\lim_{\bar{e}^p \rightarrow \infty} E_t = E_{t,\infty}$  とおくと、

$$k = \frac{E_{t,\infty}}{G(E - E_{t,\infty})} \quad \text{となる。}$$

○ kriegの二曲面モデルの解析例

1. 単軸引張、圧縮問題<sup>3)</sup>

解析ではひずみ制御： $\Delta \epsilon = 0.01$

材料データ (6061-0Aluminum)

$$E = 68889\text{MPa}$$

$$\nu = 0.3299$$

$$R_0 = 37.6\text{MPa}$$

$$R_0^* = 57.8\text{MPa}$$

$$P = 3.04$$

$$k = 0.108$$

$$\beta = -0.10$$

$$\gamma = 0.54$$

これらの材料データより前述の式を用いて以下の値が得られる。

$$\left( \begin{array}{ll} \text{初期降伏応力} & : \sigma_{y0} = \sqrt{\frac{3}{2}} R_0 = 46.05\text{Ma} \\ \text{初期降伏後の剛性} & : E_{t1} = 33029\text{MPa} \\ \text{塑性変形の十分発展した後の剛性} & : E_{t\infty} = 2688\text{MPa} \end{array} \right.$$

ADMODELによる解析例をFig2.3-2 に示す。

この例の場合、 $\beta$ が $-0.1$ と負であるから塑性変形の進行に従って、降伏曲面が縮少していることが解る。

○ kriegの二曲面モデルにおける繰り返し塑性変形

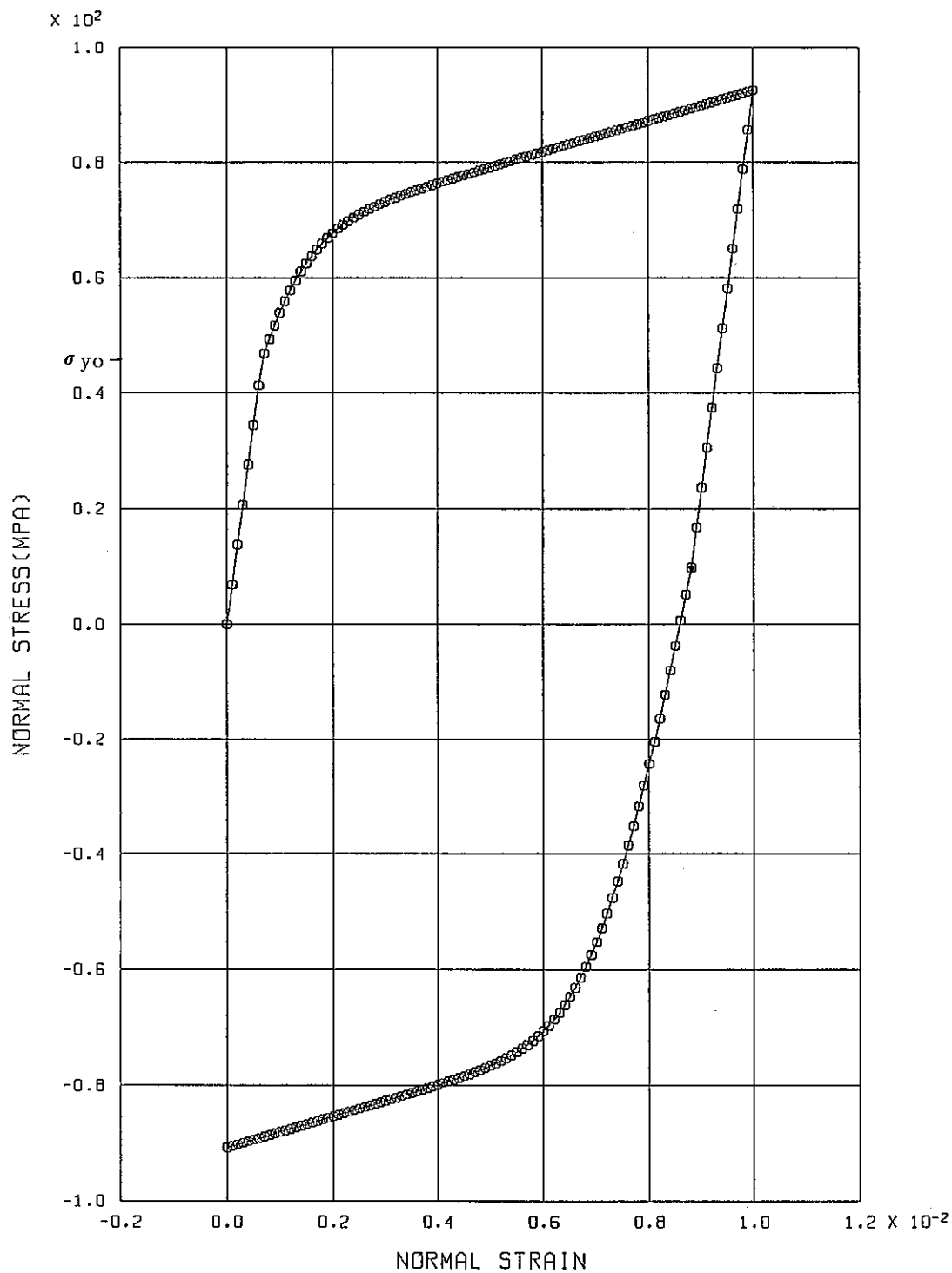
‘ADMODEL’を用いてkriegの2曲面モデルにおいて、繰り返し塑性変形を行った。用いた材料定数は、文献<sup>3)</sup>によるものである。(ただし $\beta = 0$ )

この材料定数を用いて、 $\Delta \epsilon = 2\%$ の範囲において繰り返し塑性変形を行ったものを、Fig.2.3-3に示す。

このモデルは、大野、村上モデルのように繰り返し硬化が飽和するという概念をもたないために塑性変形量に比例して、硬化が進行し、応力がどんどん上っていく。ただし、応力の増大に伴って、弾性ひずみが増大するため、ひずみ範囲( $\Delta \epsilon$ )に占める塑性ひずみの割合が低下していき、

1 Cycleあたりの硬化量も減少している。よって、このモデルで繰り返し塑性変形を無限に行えば、応力・ひずみ関係は直線に漸近していくと考えられる。

FINAS

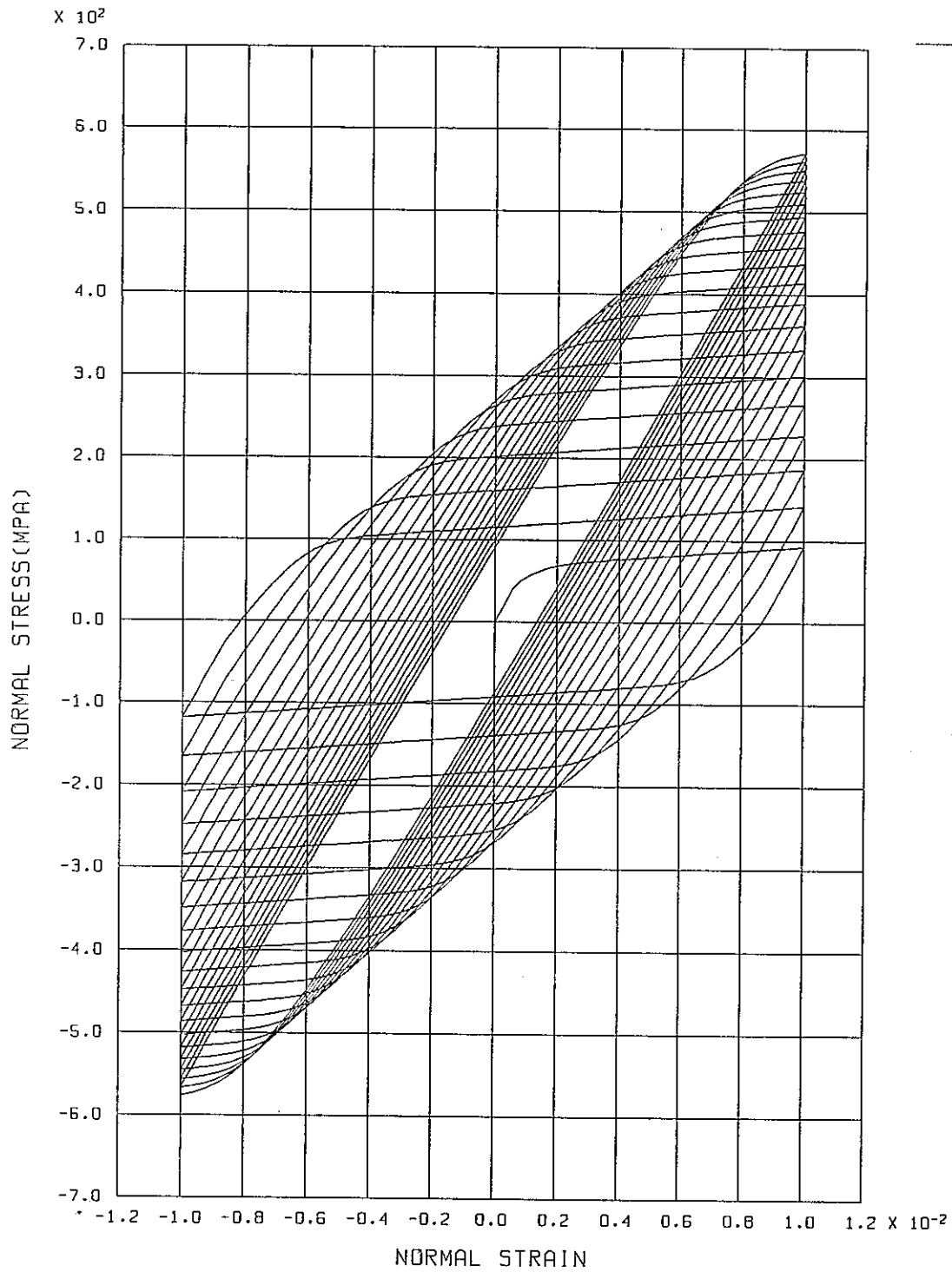


KRIEG'S TWO SURFACE MODEL (EPS = 0.01 )

Fig. 2.3 - 2 Uniaxial Stress-versus Strain curve by Krieg's two surface model.

— ADMODEL Solution —

FINAS



KRIEG'S TWO SURFACE MODEL (BETA=0.0)

$\Delta \epsilon = 2\%$ , 200 Steps/cycle, 20 cycles. 'ADMODEL'

Fig. 2.3 - 3 Cyclic Stress Strain Curve by Krieg's two Surface model. ( $\Delta \epsilon = 2\%$ )

## 2.4 Chabocheモデル (弾塑性)

弾塑性Chabocheモデル<sup>5)</sup>は、背応力・抗応力とも微分方程式型の発展則を採用した非線形硬化モデルである。このモデルも、Kriegの2曲面型のモデルと同じ、非線形硬化挙動を示すが、各成分の分解が容易なうえに、各々が塑性ひずみの関数として独立なので、より扱いは簡単である。ただ問題となるのは、このままでは繰り返し硬化量のひずみ範囲依存性がないことであるが、これについては、ひずみ記憶面の概念をとり入れることによって改良が可能であり後に述べる。

### ○弾塑性Chabocheモデルの基礎式

材料がMisesの降伏条件に従う等方性材料であるなら、基礎式は以下のようになる。

#### ・降伏面

$$f = J (\sigma - \Sigma \alpha_j) - R - k \leq 0$$

$$J (\sigma - \Sigma \alpha_j) = \left[ \frac{3}{2} (\mathcal{S} - \Sigma \alpha_j) : (\mathcal{S} - \Sigma \alpha_j) \right]^{1/2} \quad (2.4-1)$$

#### ・等方硬化

$$\dot{R} = b (Q - R) \dot{\epsilon}^p \quad (2.4-2)$$

#### ・移動硬化

$$\dot{\alpha}_j = C_j \left( \frac{2}{3} \alpha_j \dot{\epsilon}^p - \alpha_j \dot{\epsilon}^p \right) \quad (2.4-3)$$

ここに、

$\mathcal{S}$  : 偏差応力テンソル

$\alpha_j$  : 降伏面の原点移動量  $j$  番成分テンソル

$R$  : 等方硬化量 (降伏面の拡大量)

$\dot{\epsilon}^p$  : 相当塑性ひずみ増分  $\left( = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \right)$

$k$  : 初期降伏面の大きさ

$b$  : 等方硬化の非線形性を表わす定数

$Q$  : 定常状態における等方硬化量



$C_j$  : 移動硬化の非線形性を表わす定数の  $j$  成分

$a_j$  : 定数状態における移動硬化量

$k, b, Q, C_j, a_j$  は、材料定数。

○ 弾塑性Chabocheモデルの構成方程式

・ 偏差応力テンソルによる表示

$$\lambda = \frac{\frac{1}{3} (\mathcal{S} - \sum \alpha_j) \dot{\epsilon}}{\frac{2}{3} (R+k)^2 \left(1 + \frac{H'}{3G}\right)}$$

$$\dot{\mathcal{S}} = 2G \dot{\epsilon} - \frac{(\mathcal{S} - \sum \alpha_j) \dot{\epsilon} (\mathcal{S} - \sum \alpha_j)}{\frac{2}{3} (R+k)^2 \left(1 + \frac{H'}{3G}\right)}$$

・ 応力テンソルによる表示

$$\lambda = \frac{3 (\mathcal{S} - \sum \alpha_j) E^o \dot{\epsilon}}{(\mathcal{S} - \sum \alpha_j) E^o (\mathcal{S} - \sum \alpha_j) + \left[\frac{2}{3} (R+k)\right]^2 H'}$$

$$\dot{\sigma} = \left[ E^o - \frac{E^o (\mathcal{S} - \sum \alpha_j) (\mathcal{S} - \sum \alpha) E^o}{(\mathcal{S} - \sum \alpha_j) E^o (\mathcal{S} - \sum \alpha_j) + \left[\frac{2}{3} (R+k)\right]^2 H'} \right] \dot{\epsilon}$$

ただし

$$H' = \sum C_j \left[ a_j - \frac{(\mathcal{S} - \sum \alpha_j) \alpha_j}{\frac{2}{3} (R+k)} \right] + b (Q - R)$$

## ○単軸問題における応力・ひずみ関係の解析的表現

弾塑性Chabocheモデルの単軸問題において移動硬化を表わす $\Sigma \alpha_i$ が1項のみである最も簡単なケースを考える。このとき、 $\sigma$ 、 $S$ 、 $\alpha$ 、 $\varepsilon^p$ と基礎式は、以下のようなになる。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & -S/2 & 0 \\ 0 & 0 & -S/2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha/2 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^p = \begin{bmatrix} \varepsilon^p & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon^p/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon^p/2 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{2}{3} \sigma, \quad \dot{\varepsilon}^p = |\dot{\varepsilon}^p|$$

$$f = \frac{3}{2} |S - \alpha| - R - k \leq 0 \quad (2.4-4)$$

$$\dot{R} = b (Q - R) |\dot{\varepsilon}^p| \quad (2.4-5)$$

$$\dot{\alpha} = C \left( \frac{2}{3} a \dot{\varepsilon}^p - \alpha |\dot{\varepsilon}^p| \right) \quad (2.4-6)$$

さて、以下塑性状態のみを考えるなら、(3.4-4)において、 $f = 0$ であるから、

$$\sigma = \frac{2}{3} \alpha + \nu R + \nu k \quad (2.4-7)$$

$$\text{ただし、} \nu \begin{cases} = 1 : S - \alpha > 0 \\ = -1 : S - \alpha < 0 \end{cases}$$

このように応力は、移動硬化量 $\frac{3}{2} \alpha$ と等方硬化量 $\nu R$ 及び初期降伏応力 $\nu k$ の和として、陽に表わすことができ、これらは各々塑性ひずみの関数として独立である。

## ○単調引張問題

単調引張問題における等方硬化量は (2.4-5) より、

$$\dot{R} = b (Q - R) \dot{\epsilon}^p$$

これを解いて、 $\epsilon^p = 0$  にて  $R = 0$  とすれば、

$$R = Q (1 - e^{-b\epsilon^p})$$

同様に移動硬化量は、

$$\dot{\alpha} = C \left( \frac{2}{3} a - \alpha \right) \dot{\epsilon}^p$$

上式をといて、 $\epsilon^p = 0$  にて、 $\alpha = 0$  とすれば、

$$\alpha = \frac{2}{3} a (1 - e^{-c\epsilon^p})$$

よって、単調応力、塑性ひずみ関係は (2.4-7) より、

$$\sigma = Q (-e^{-b\epsilon^p}) + a (1 - e^{-c\epsilon^p}) + k$$

## ○繰り返し変形問題

次に平均ひずみが 0 である  $-\frac{\Delta \epsilon^p}{2} \sim \frac{\Delta \epsilon^p}{2}$  の範囲の繰り返し変形を考える。

等方硬化量は (3.4-5) より

$$R = Q (1 - e^{-b\bar{\epsilon}^p})$$

$$\bar{\epsilon}^p = \int \dot{\epsilon}^p$$

移動硬化量については、簡単なために  $\Delta \epsilon^p$  が十分大きく、 $e^{-c\Delta \epsilon^p} \ll 1$  であると仮定すると

(3.4-5) より、 $\epsilon^p = \pm \frac{\Delta \epsilon^p}{2}$  にて、 $\alpha = \pm \frac{2}{3} a$  に漸近する。

$\dot{\varepsilon}^p > 0$  のとき

$$\alpha = \frac{2}{3} a \left\{ 1 - 2 e^{-c \left( \frac{\Delta \varepsilon^p}{2} + \varepsilon^p \right)} \right\}$$

$\dot{\varepsilon}^p < 0$  のとき

$$\alpha = \frac{2}{3} a \left\{ 1 - 2 e^{-c \left( \frac{\Delta \varepsilon^p}{2} - \varepsilon^p \right)} \right\}$$

よって  $\alpha$  は、 $\varepsilon^p$  に関して原点对称なループを描く。

さて、 $\dot{\varepsilon}^p > 0$  の部分のみ考えれば、 $\left( \varepsilon^p \text{ は } -\frac{\Delta \varepsilon^p}{2} \rightarrow \frac{\Delta \varepsilon^p}{2} \right)$

$$\sigma = Q (1 - e^{-b \bar{\varepsilon}^p}) + a \left\{ 1 - 2 e^{-c \left( \frac{\Delta \varepsilon^p}{2} + \varepsilon^p \right)} \right\} + k$$

また、繰り返し硬化が進行し、 $\bar{\varepsilon}^p$  が十分大きくなければ、応力・塑性ひずみ、ヒステリシスループは、

$$\sigma = Q + a \left\{ 1 - 2 e^{-c (\Delta \varepsilon^p / 2 + \varepsilon^p)} \right\} + k$$

さらに繰り返し応力・ひずみ関係は、上式において  $\varepsilon^p = \Delta \varepsilon^p / 2$  を代入し、

$$\sigma = Q + a + k$$

このように  $\sigma$  は一定値をとる。よってこのモデルは、(2.4-5) 式より容易に推定できるように繰り返し硬化のひずみ範囲依存性がない。ただし例えば  $Q$  をひずみ記憶面の関数と置くことによって、この依存性を表現することは可能である。

以上をまとめて、さらに移動硬化量の ' $\Sigma$ ' を考慮すれば弾塑性Chabocheモデルの単軸問題における各応力・塑性ひずみ関係は次のように簡単な形となる。

- ・単調応力・塑性ひずみ関係

$$\sigma = Q (1 - e^{-b \epsilon^p}) + \sum a_j (1 - e^{-c_j \epsilon^p}) + k$$

- ・繰り返し応力・塑性ひずみ関係

$$\sigma = Q + \sum a_j + k$$

- ・繰り返し応力・塑性ひずみヒステリシスループ (繰り返し塑性ひずみ範囲  $-\Delta \epsilon^p / 2 \sim \Delta \epsilon^p / 2$ )

$$\sigma = Q + \sum a_j \{1 - 2 e^{-c_j (\Delta \epsilon^p / 2 + \epsilon^p)}\} + k$$

ただし、繰り返し応力・ひずみ関係、繰り返し応力ひずみヒステリシスループについては、 $\Delta \epsilon^p$  が十分大きく、 $e^{-c_j \Delta \epsilon^p} \ll 1$  が成り立つときの式である。

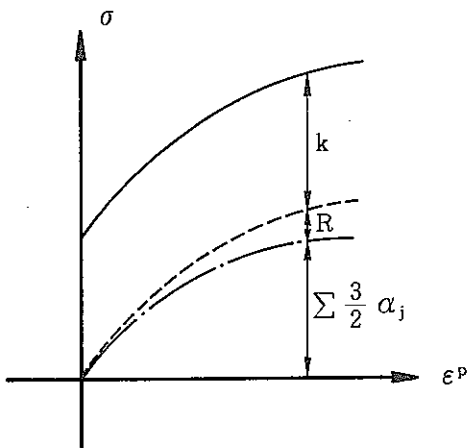


Fig. 2.4-1(a) Stress Components of the Chaboche model (Monotonic)

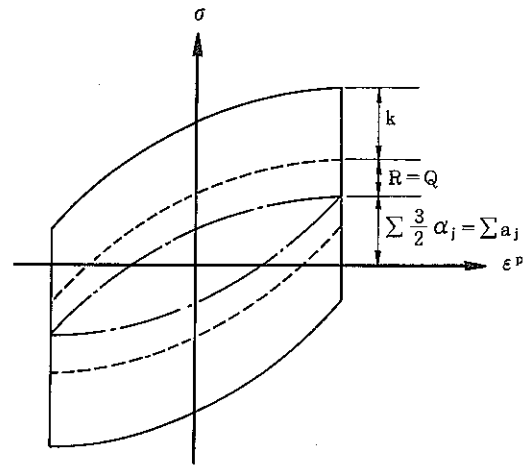


Fig. 2.4-1(b) Stress Components of the Chaboche model

## ○ADMODELによる弾塑性Chabocheモデルの解析例

ADMODELを用いて弾塑性Chabocheモデルの解析を行った。用いた材料定数は、参考文献<sup>(5)</sup>による316L鋼の室温における粘塑性Chabocheモデルの値である。用いた値を以下に示す。

$$\left( \begin{array}{l} E = 185000 \text{ MPa} , \nu = 0 \\ k = 82 \text{ MPa} , b = 8 , Q = 60 \text{ MPa} \\ C_1 = 2800 , a_1 = 58 \text{ MPa} , C_2 = 25 , a_2 = 270 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

## 1. 単調引張変形

まず、0.5%までの単調引張問題の解析を行った。使用した増分の大きさは、 $\delta \varepsilon = 10^{-4} < 1/2 C_1 = 1.8 \times 10^{-4}$ とした。

この結果をFig. 2.4-2に、さらに、これを各成分に分解したものをFig. 2.4-3に示す。

このようにChabocheモデルは、各成分が容易に分解でき、さらに各々が簡単な式によって表現でき、かつ独立であるので、容易に応力ひずみ関係の形状を変化させることができる。図より明かなように、 $\varepsilon = 0.5\%$ においては、 $a_1$ は十分に飽和しているが、 $a_2$ は飽和していない。また、この程度の引張問題では等方硬化量が微少であることがわかる。

## 2. 繰り返し変形

$\Delta \varepsilon = 1\%$ の一定ひずみ範囲繰り返し変形の解析結果をFig. 2.4-4に示す。このように、このモデルは繰り返し硬化の飽和を表現することはできるが、その大きさはひずみ範囲に無関係に常に $Q = 60\text{MPa}$ となる。また、飽和に達するまでの繰り返し数は塑性ひずみ範囲が0.8%とすると39回(サイクル)である。この数は、ひずみ範囲に反比例する。

さらに、Fig. 2.4-2に予測される繰り返し応力・ひずみ関係を示す。これは、繰り返し硬化量が $Q$ で一定であることにより、単調応力・ひずみ関係に塑性ひずみをベースに $Q$ をたすことによって得られる。ただし、実際には、単調引張においても等方硬化が発生しているため繰り返し応力・ひずみ関係は、いくぶん小さくなる。

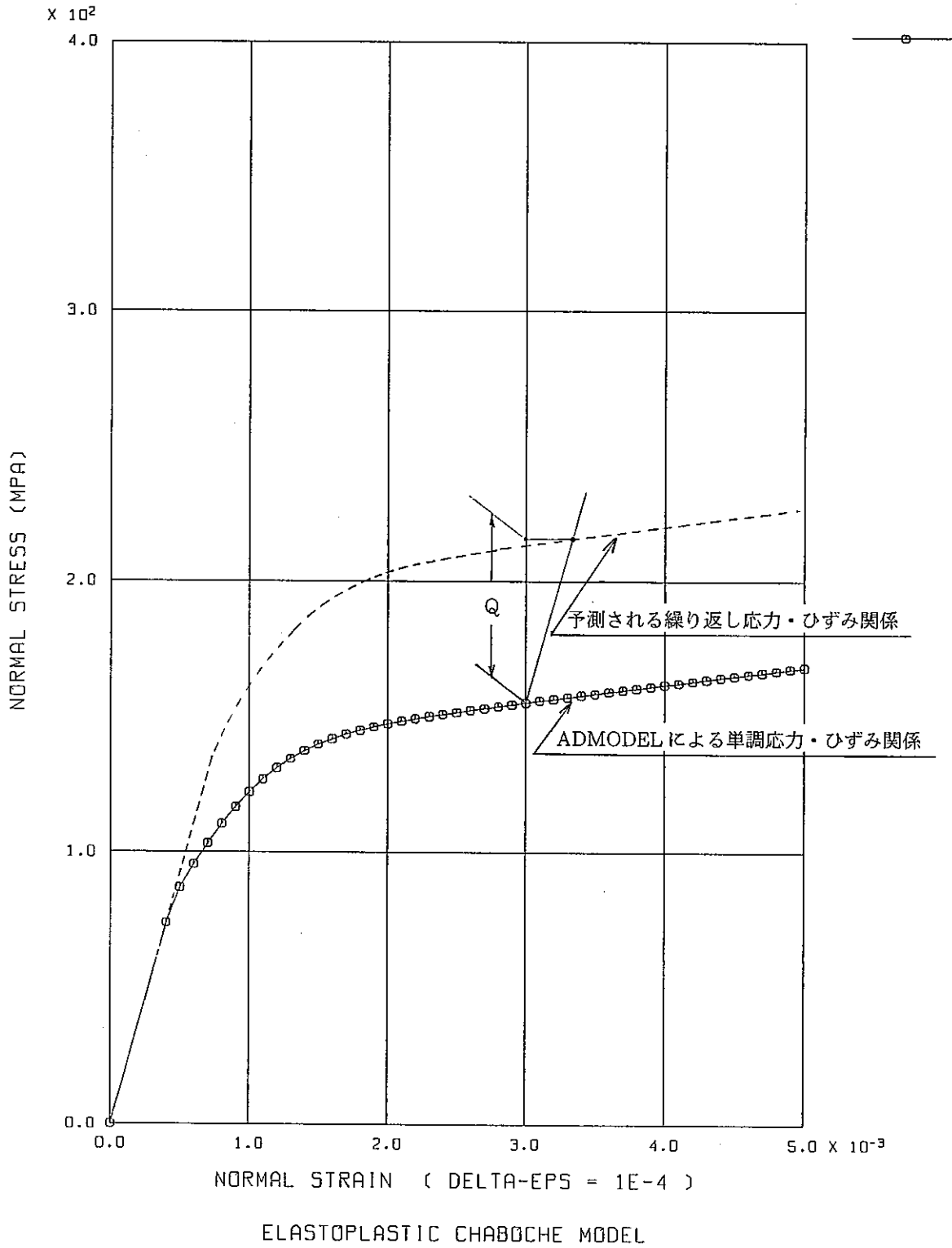


Fig.2.4 - 2 Monotonic Curve of the Chaboche model.

○弾塑性Chabocheモデルにおける単調引張応力・塑性ひずみ関係 (ADMODELによる)

定数は316L粘塑性用のものを使用<sup>5)</sup>

$C_1 = 2800$  ,  $a_1 = 58 \text{ MPa}$

$C_2 = 25$  ,  $a_2 = 270 \text{ MPa}$

$b = 8$  ,  $Q = 60 \text{ MPa}$

$k = 82 \text{ MPa}$  ,

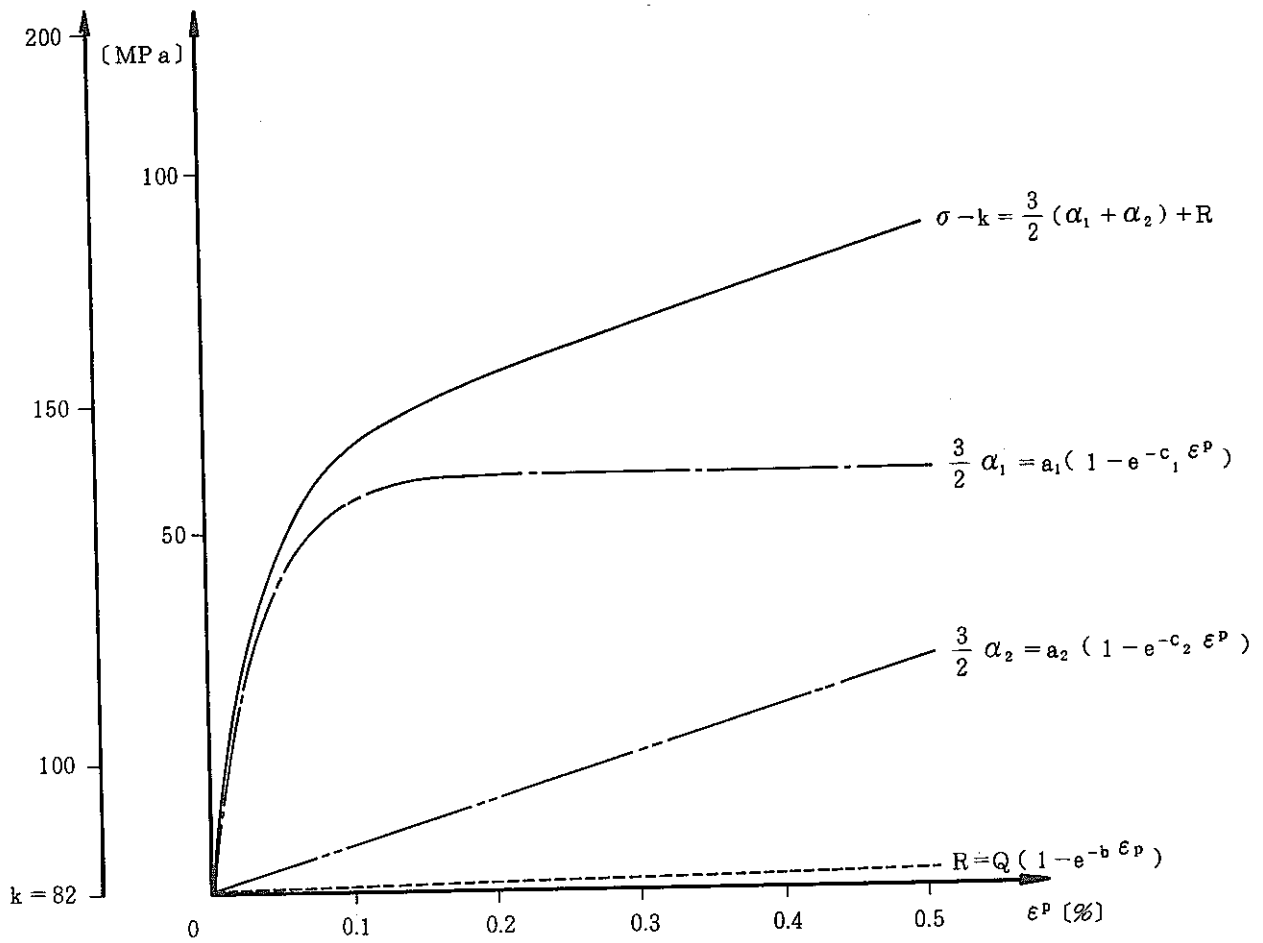
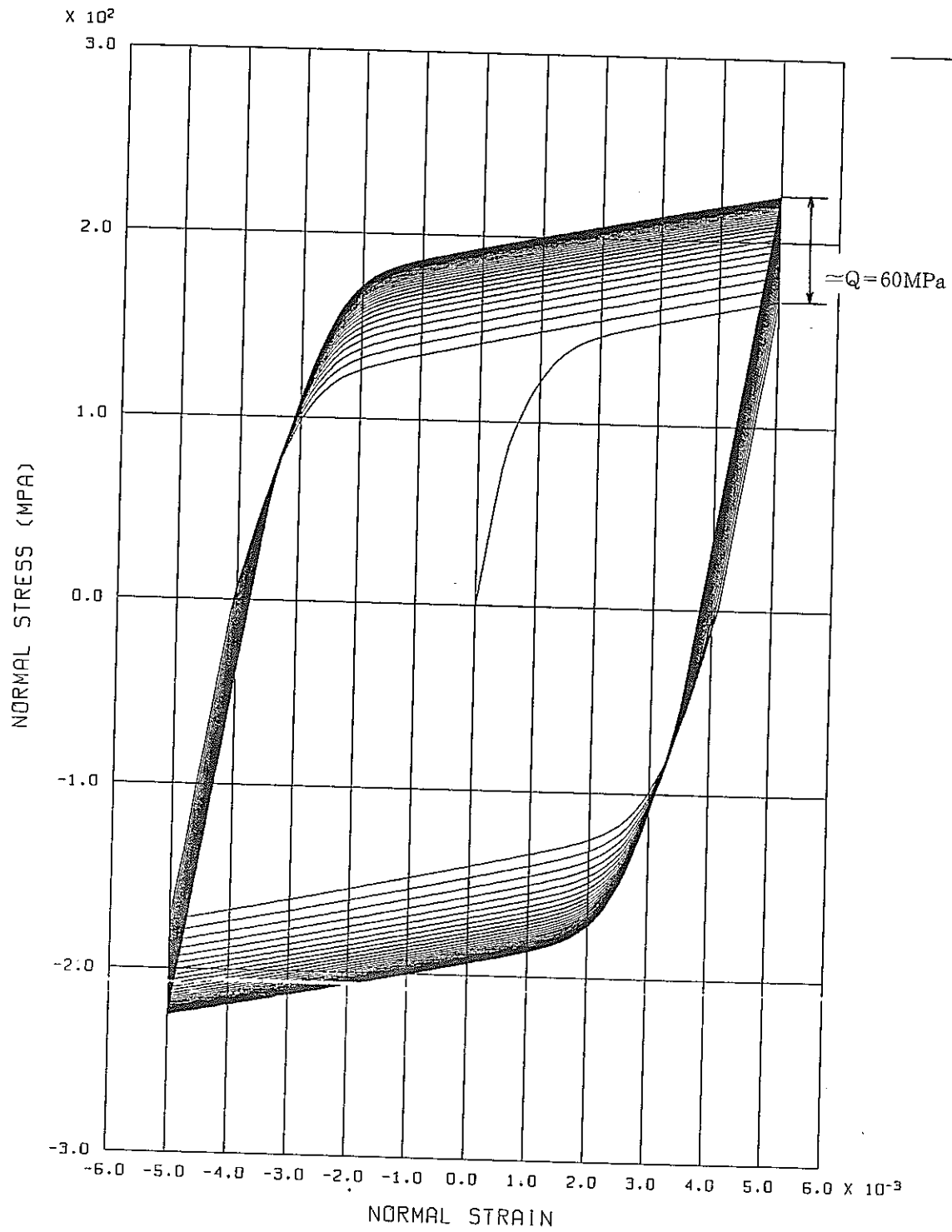


Fig. 2.4-3 Stress Components of the Chaboche Model





ELASTO-PLASTIC CHABOCHE MODEL

'ADMODEL' による繰り返し変形

$\Delta \epsilon = 1\%$ , 200 Steps/Cycle, 40 Cycles

Fig. 2.4 - 4 Cyclic curve of the Chaboche model.

## ○Chabocheによるひずみ記憶面の概念

Chabocheによるひずみ記憶面は(2.4-11~13)、非線形繰返し非硬化領域モデル(2.8節)と全く同一の式となる。しかし、この式中の $\eta$ が初期の論文で $\frac{1}{2}$ と定数で表わされていたように、この面は単に最大塑性ひずみ範囲を記憶する目的にて導入されたものである。つまりChabocheモデルでは、繰返し硬化のひずみ範囲依存性を表現するために、(2.4-9)式における応力の漸近値 $Q$ をひずみ記憶面 $\rho$ の関数とした。(この $\rho$ は平均ひずみが0である一定(塑性)ひずみ変形の場合、 $\Delta \epsilon^p/2$ に等しくなる。)さて、この $Q(\rho)$ 又は $Q(\Delta \epsilon^p/2)$ は、近似的に、単調応力ひずみ関係と繰返し応力・ひずみ関係の差、つまり繰返し硬化量を表わすことになるが、Chabocheは例として以下の形を与えている。

$$Q(\rho) = Q_M + (Q_0 - Q_M) e^{-2b\rho}$$

例えば平均ひずみが0である一定ひずみ範囲繰返し変形の場合、応力 $R$ は(2.4-9)式によって $Q$ へ漸近し、さらにこの $Q$ は $\rho$ が $\Delta \epsilon^p/2$ へ漸近することによって、 $Q(\Delta \epsilon^p/2)$ へ漸近するという、2重の漸近関係によって表現されることになる。しかし、各々の漸近の速度を表わす定数 $b$ 、 $\eta$ について明確な記述がなく、その決定方法も不明である。ただし後に示すように単調引張で等方硬化をもたせるために $Q$ はある程度の初期値 $Q_0$ をもつことが要求される。

○ひずみ記憶面の概念を取り入れたChabocheモデルの基礎式

・降伏面とその発展式

$$f = \left[ \frac{3}{2} (\mathcal{S} - \Sigma \alpha_i) : (\mathcal{S} - \Sigma \alpha_i) \right]^{0.5} - \kappa = 0 \quad (2.4-7)$$

$$\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 \quad (2.4-8)$$

$$\dot{\kappa}_1 = b \{ Q(\rho) - \kappa_1 \} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (2.4-9)$$

$$\alpha_i = c_i \left( \frac{3}{2} a_i \dot{\bar{\epsilon}}^p - \alpha_i \dot{\bar{\epsilon}}^p \right) \quad (2.4-10)$$

・ひずみ記憶面とその発展式

$$g = \frac{2}{3} (\bar{\epsilon}^p - \alpha^p) : (\bar{\epsilon}^p - \alpha^p) - \rho^2 = 0 \quad (2.4-11)$$

$$\dot{\rho} = c \Gamma \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (2.4-12)$$

$$\dot{\alpha}^p = \sqrt{\frac{3}{2}} (1-c) \Gamma \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathfrak{m}^* \quad (2.4-13)$$

ただし

$$\Gamma = H(g) \langle \mathfrak{m} : \mathfrak{m}^* \rangle \quad (2.4-14)$$

$$\mathfrak{m} = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{S}} \Big/ \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathcal{S}} \right\|, \quad \mathfrak{m}^* = \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^p} \Big/ \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{\epsilon}^p} \right\| \quad (2.4-15)$$

・背応力： $\alpha_i$ は、2～3項程度

・(2.4-9) 式の $Q(\rho)$ は、例えば次のような形とする。

$$Q(\rho) = Q_M + (Q_0 - Q_M) \exp(-2\mu\rho)$$

・材料定数は、 $\kappa_0, b, a_i, c_i, c, (Q_M, Q_0, \mu)$

○単調引張問題における抗応力の解析的表現

ここでは先に同様、ひずみ記憶面の概念をとり入れた弾塑性Chabocheモデルにおける各種応力-ひずみ関係の解析的表現式を導く。

$$\dot{R} = b [Q(\rho) - R] \dot{\epsilon}^p$$

$$\dot{\rho} = \eta \dot{\epsilon}^p$$

単軸引張問題において  $\rho$  の初期値を 0 とすると常に  $\eta = 1$  であり上式より

$$\rho = \eta \epsilon^p$$

また、 $Q(\rho)$  は  $\rho = 0$  において Taylor 展開して第 2 項までとり、以下のように近似する。

$$Q(\rho) \simeq Q_0 + H\rho \qquad Q_0 = Q(0), \quad H = \left. \frac{dQ}{d\rho} \right|_{\rho=0}$$

よって  $\dot{R}$  式は

$$\dot{R} = b [Q_0 + H\eta \epsilon^p - R] \dot{\epsilon}^p$$

これをといて、初期条件  $\epsilon^p = 0$  にて  $R = 0$  を用いると

$$R = (Q_0 - H\eta/b) (1 - e^{-b\epsilon^p}) + H\eta \epsilon^p$$

また、変形の初期値では、抗応力が線形に変化すると仮定し、上式を再び Taylor 展開して 2 項までとると、

$$R = Q_0 + b \epsilon^p$$

このように  $Q(\rho)$  の関数は、初期値  $Q_0$  が 0 でない方が望ましく、もし 0 であるなら初期の等方硬化係数が曖昧なものになる。

さて塑性ひずみ範囲が  $\Delta \epsilon^p$  である単軸繰り返し変形を考える。(2.4-10) は単軸問題で

$$\dot{\alpha} = C (A \dot{\epsilon}^p - \alpha |\dot{\epsilon}^p|)$$

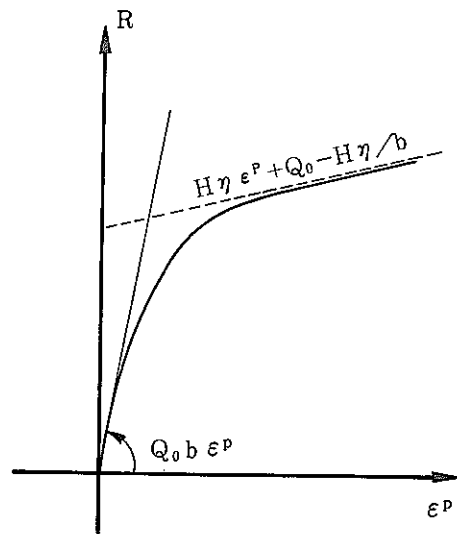


Fig. 2.4-5 Schematic Representation of Monotonic curve

$$\text{ただし } A = \frac{2}{3} a$$

上式を積分し、初期条件  $\alpha_i^- (-\Delta \epsilon^p / 2)$ 、 $\alpha_i^+$  ( $\Delta \epsilon^p / 2$ ) を用いると、

$\dot{\epsilon}^p > 0$  のとき

$$\alpha = A + (\alpha_i^- - A) e^{-c(\Delta \epsilon^p / 2 + \epsilon^p)}$$

$\dot{\epsilon}^p < 0$  のとき

$$\alpha = -A + (\alpha_i^+ + A) e^{-c(\epsilon^p - \Delta \epsilon^p / 2)}$$

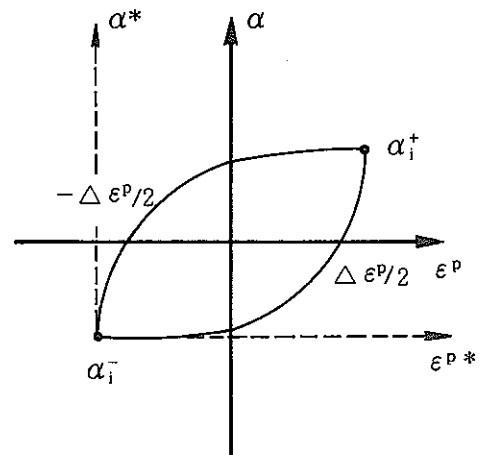


Fig.2.4-6 Schematic Representation of Back Stress

よって、以下の漸化式が得られる。

$$\alpha_{i+1}^- = A (-1 + e^{-c\Delta \epsilon^p} - e^{-2c\Delta \epsilon^p}) + \alpha_i^- e^{-2c\Delta \epsilon^p}$$

さて、 $\alpha_0$  を仮定して  $e^{-c\Delta \epsilon^p} = X$  とおくと ( $X < 1$ )

$$\begin{aligned} \alpha_n^- &= A (-1 + 2X - 2X^2 + 2X^3 - 2X^4 + \dots + 2X^{2n-1} - X^{2n}) + \alpha_0 X^{2n} \\ &= -A + 2XA(1-X)(1+X^2+X^4+\dots+X^{2(n-1)}) + \alpha_0 X^{2n} \\ &= -A + 2XA(1-X) \frac{1-X^{2n}}{1-X^2} + \alpha_0 X^{2n} \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ 、 $X^{2n} \rightarrow 0$  (繰り返し数が十分大きければ  $\alpha_0$  の項は無視できる。)

$$\therefore \alpha_\infty^- = A \left( 1 - \frac{2}{1+X} \right)$$

よって

$$\alpha^- = \frac{2}{3} a \left[ 1 - \frac{2}{1 + e^{-c\Delta \epsilon^p}} e^{-c(\Delta \epsilon^p / 2 + \epsilon^p)} \right]$$

または

$$\alpha^* = 2 \frac{2}{3} a \left[ \frac{1 - e^{-c\epsilon^{p*}}}{1 + e^{-c\Delta \epsilon^p}} \right]$$

ひずみ記憶面の概念をとり入れた弾塑性Chabocheモデルの単軸問題においてその応力・ひずみ関係の解析的表現を以下に記す。

・単調応力・ひずみ関係

$$\sigma(\varepsilon^p) = \sum a_j (1 - e^{-c_j \varepsilon^p}) + R + k \quad (2.4-16)$$

・繰り返し応力・ひずみ関係

$$\frac{\Delta \sigma(\Delta \varepsilon^p)}{2} = \sum a_j \left[ \frac{2}{1 + e^{-2c_j \Delta \varepsilon^p / 2}} - 1 \right] + Q(\Delta \varepsilon^p / 2) + k \quad (2.4-17)$$

・繰り返し応力・ひずみヒステリシスループ

$$\sigma^*(\Delta \varepsilon^p, \varepsilon^{p*}) = \sum 2 a_j \left[ \frac{1 - e^{-c_j \varepsilon^{p*}}}{1 + e^{-c_j \Delta \varepsilon^p}} \right] + 2 \cdot Q(\Delta \varepsilon^p / 2) + 2 k \quad (2.4-18)$$

---

この形式で上記3つの式は厳密なものである。

ただし、(2.4-16)はRの近似を行うと

$$R \simeq (Q_0 - H \eta / b) (1 - e^{-b \varepsilon^p}) + H \eta \varepsilon^p$$

さらに、

$$R \simeq Q_0 - b \varepsilon^p$$

と表わされる。

○弾塑性Chabocheモデルの応力・ひずみ関係について

- ・単調応力・ひずみ関係と繰り返し応力・ひずみヒステリシスループの形状について

単調応力・ひずみ関係について、抗応力；Rの影響が小さいと仮定すれば、(2.4-16)、(2.4-18)の非線形性は  $(1 - e^{-c_j \epsilon^p})$  の式に支配され、両者が相似であることになる。これはArmstrong型の微分方程式の解についての本質的な特性であり、繰り返し応力・ひずみヒステリシスループの非線形部分は、単調応力・ひずみ関係とその範囲は同じであるが、各成分が最大2倍に拡大されているにすぎない。

- ・繰り返し応力・ひずみ関係  $\Delta \sigma / 2$  と単調応力・ひずみ関係  $\sigma$  の差を  $\Delta \sigma_h$  とおくと

$$\Delta \sigma_h (\Delta \epsilon^p / 2) = \sum a_j \left[ \frac{2}{1 + e^{-2c_j \Delta \epsilon^p / 2}} + e^{-c_j \Delta \epsilon^p / 2} - 2 \right] + Q (\Delta \epsilon^p / 2) - R$$

また、大カッコの中は、Fig. 2.4-7に示すように高々13.5%であり、かつ局部的に分布しているので

$$\Delta \sigma_h \simeq Q (\Delta \epsilon^p / 2) - R$$

Rは単調問題の等方硬化量であるから、 $Q(\rho)$ が繰り返し硬化量を表わすという結論が得られる。

Armstrong型微分方程式の解の特性

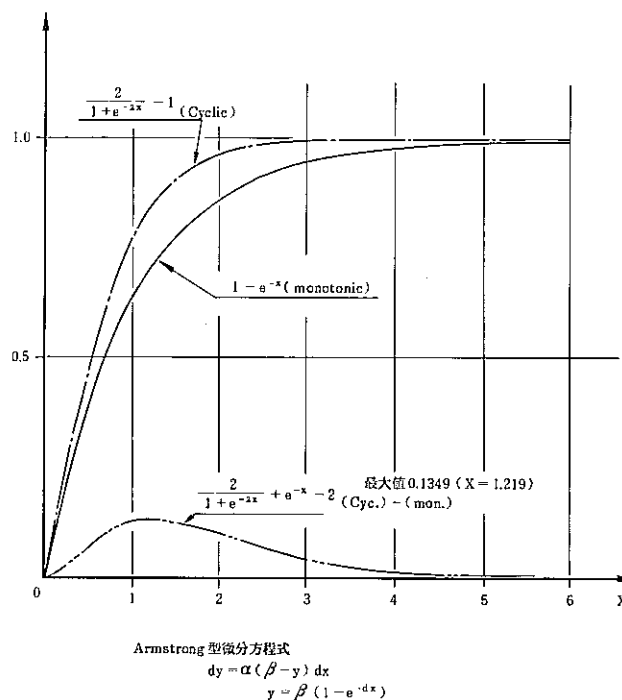


Fig. 2.4 - 7 Solution of Armstrong type differential Equation

## 2.5 非線形繰返し非硬化領域モデル

大野らによって提案された非線形繰返し非硬化領域モデル<sup>8)</sup>・<sup>9)</sup>はKrieg<sup>3)</sup>あるいはDafaliasとPopov<sup>4)</sup>による二曲面モデルに繰返し非硬化ひずみ領域の概念を<sup>7)</sup>を組み入れたものとして捉えることができる。従ってこのモデルではKriegの二曲面モデルと同様な非線形硬化を表現することができる。また、繰返し非硬化ひずみ領域は塑性ひずみ空間上の曲面であり、塑性ひずみがこの内部を動くときには繰返し硬化が進行せず、塑性ひずみがこの曲面上にあり曲面の外向きに動く場合のみ硬化が起こると仮定する。そして硬化に寄与した塑性ひずみの一定割合だけこの領域が膨張し、最終的に一定となるため、繰返し硬化の進行から飽和に至る過程を表現することができる。さらに繰返し硬化量が硬化変数の関数となっているので繰返し硬化量のひずみ範囲依存性を表現する。このように非線形繰返し非硬化領域モデルは繰返し変形下で、SUS304鋼の応力-ひずみ関係をかなり正確に表すことができるがモデル定数決定の難しさと繰返し硬化が飽和するまでの繰返し数がひずみ範囲によらず一定になるという問題点<sup>10)</sup>がある。

このモデルに関する材料定数決定方法及び解析例は文献<sup>10)</sup>に詳しいのでここでは基礎式のみを掲げる。

### ○非線形繰返し非効果領域モデルの基礎式

#### ・降伏曲面とその発展式

$$f = \frac{3}{2} (\mathcal{S} - \alpha) : (\mathcal{S} - \alpha) - \kappa_0^2 = 0 \quad (2.5-1)$$

$$\dot{\alpha} = A (\mathcal{S}^* - \mathcal{S}) \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} + \frac{\partial \kappa^* / \partial T - \partial \kappa_0 / \partial T}{\kappa^* - \kappa_0} \dot{T} (\alpha - \alpha^*) \quad (2.5-2)$$

#### ・限界曲面とその発展式

$$f^* = \frac{3}{2} (\mathcal{S}^* - \alpha^*) : (\mathcal{S}^* - \alpha^*) - \kappa^{*2} = 0 \quad (2.5-3)$$

$$\kappa^* = \kappa^* (q), \quad \dot{q} = \Gamma \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \quad (2.5-4)$$

$$\dot{\alpha}^* = \frac{3}{2} \{H_1 + (1 - \Gamma) H_2\} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon} \quad (2.5-5)$$



・非硬化ひずみ領域とその発展式

$$g = \frac{2}{3} (\varepsilon^p - \alpha^p) ; (\varepsilon^p - \alpha^p) - \rho^2 = 0 \quad (2.5-6)$$

$$\dot{\rho} = c \Gamma \dot{\varepsilon}^p \quad (2.5-7)$$

$$\dot{\alpha}^p = (3/2)^{0.5} (1 - c) \Gamma \dot{\varepsilon}^p \eta^* \quad (2.5-8)$$

ただし

$$\Gamma = H(g) \langle \eta : \eta^* \rangle \quad (2.5-9)$$

$$\eta = \frac{\partial f}{\partial S} / \left\| \frac{\partial f}{\partial S} \right\|, \eta^* = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon^p} / \left\| \frac{\partial g}{\partial \varepsilon^p} \right\| \quad (2.5-10)$$

(解説)

- ・ (2-2) 式右辺第二項は温度依存項を表す。
- ・ 限界応力  $S^*$  は、 $f^* / S^*$  と  $f / S$  が同方向になるようにとる。

$$S^* = \alpha^* + (S - \alpha) \kappa^* / \kappa_0 \quad (2.5-11)$$

- ・ 実際問題への適用において (2-4) 式は以下のような関数形を用いる。

$$\kappa^*(q) = \kappa_0^* \left( 1 + \frac{Lq}{m\kappa_0^*} \right)^m \quad (2.5-12)$$

- ・ モデル定数は、 $\kappa_0, \kappa_0^*, A, H_1, H_2, c, \{L (=H_2), m\}$

## 2.6 電中研モデル

以下に示す電中研モデル<sup>11)</sup>の基礎式において時間依存の効果を除けば(2.6-4, 5, 6)式以外は非線形繰返し非硬化領域モデルに同一であり、(2.6-4, 5)式もChabocheモデル(弾塑性)における応力の式と同様である。また繰返し硬化曲面に関する式は、3モデルとも共通となる。つまり電中研モデルは、非線形繰返し非硬化領域モデルにおいて限界曲面の発展式をChabocheモデルの式に換えたもの、あるいはChabocheモデルにおいてそのArmstrong-frederickによる非線形硬化モデルを2曲面型モデルに置き換えたものとして捉えることが出来る。この組合せにより電中研モデルは非線形繰返し非硬化領域モデルにおける材料常数決定の困難さと、Chabocheモデルにおける応力ひずみ関係の形状自由度の少なさ(脚注-2参照)の両者を改善することをねらっている。事実、電中研モデルのこのような目的は参考文献<sup>11)</sup>によると十分達成されているようであり実用的な材料定数の決定方法や実験と計算のよい一致が示されている。

しかし、非線形繰返し非硬化領域モデルの本質的な問題点は、材料常数決定方法にあるのではなく、どのような材料定数を用いても実用的なひずみ範囲における応力-ひずみ関係を精度よく表現することができない点にあった。<sup>10)</sup>

この様な観点から電中研モデルを検討すると繰返し硬化量を表す:  $Q$ が繰返し硬化曲面  $\rho$  の関数として自由に選ぶことができるため、ある程度この問題を解決する可能性を持っている。(脚注参照)しかし、論文の例題に示すように  $Q(\rho) = k \rho^m$  と与えたのでは、実質的に非線形繰返し非硬化領域モデルと同様となり、同じ問題点は依然として残る。

とはいえこのモデルは非線形繰返し非硬化領域モデルより材料定数が決め易く、より実用的なモデルと考える。

・非線形繰返し非硬化領域モデルにおける“非硬化ひずみ領域”は、高橋により“繰返し硬化曲面”<sup>11)</sup>、Chabocheにより“ひずみ記憶面”<sup>6)</sup>とよばれている。これらは3つとも塑性ひずみ空間の曲面でありその定義式及び発展式は全く同一であるが、その考え方は呼び名が示すように各モデルによって微妙に異なる。

・ChabocheモデルではArmstrong-Frederickによる微分方程式型の背応力発展式を用いて塑性期の過渡的非線形硬化を表現している。しかし、このモデル化では繰返し応力ひずみ関係の過渡的非線形量は、単調の高々2倍までとなり、いわゆる“Rounding Effect”を表現できない。

・非線形繰返し非硬化領域モデルでは同様な意味を持つ限界面半径  $\kappa^*$  の関数が実質的には自由に選べなかった。

○電中研モデルの基礎式

・降伏曲面とその発展式

$$f = \frac{3}{2} (S - \alpha) : (S - \alpha) - \kappa_0^2 = 0 \quad (2.6-1)$$

$$\dot{\alpha} = A_p \left\{ \frac{2}{3} (\kappa^* - \kappa_0) \dot{\varepsilon}^p - (\alpha - \alpha^*) \right\} \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon^p} \\ + A_c \left\{ \frac{2}{3} (\kappa^* - \kappa_0) \dot{\varepsilon}^c - (\alpha - \alpha^*) \right\} \frac{\dot{\varepsilon}^c}{\varepsilon^c}$$

・限界曲面とその発展式

$$f^* = \frac{3}{2} (S^* - \alpha^*) : (S^* - \alpha^*) - \kappa^{*2} = 0 \quad (2.6-3)$$

$$\kappa^* = \kappa_0^* + \kappa_1^* \quad (2.6-4)$$

$$\dot{\kappa}_1^* = B (Q(\rho, T) - \kappa_1^*) \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon^p} - D \kappa_1^* \quad (2.6-5)$$

$$\dot{\alpha}^* = \frac{2}{3} K \dot{\varepsilon}^p - G \alpha^* \quad (2.6-6)$$

・繰り返し硬化ひずみ曲面とその発展式

$$g = \frac{2}{3} (\varepsilon^p - \alpha^p) : (\varepsilon^p - \alpha^p) - \rho^2 = 0 \quad (2.6-7)$$

$$\dot{\rho} = c \Gamma \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon^p} \quad (2.6-8)$$

$$\alpha^p = (3/2)^{0.5} (1 - c) \Gamma \frac{\dot{\varepsilon}^p}{\varepsilon^p} \eta^* \quad (2.6-9)$$

ただし

$$\Gamma = H(g) \langle \eta : \eta^* \rangle \quad (2.6-10)$$

$$\eta = \frac{\partial f}{\partial S} / \left\| \frac{\partial f}{\partial S} \right\|, \quad \eta^* = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} / \left\| \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \right\| \quad (2.6-11)$$

・電中研モデル解析例

電中研モデルの解析例として等温での一定ひずみ範囲繰り返し変形問題の解析をADMODELにて行った。使用した材料定数を以下に示すが、これはSUS304鋼の550°C等温疲労試験条件を想定している。ひずみ範囲は、 $\Delta \varepsilon = 1.47\%$ であり、ADMODELでは100Step/Cycle, 100Cycleの解析を行っている。この問題は、参考文献<sup>1)</sup> 2.3節においてすでに解析が行われているものである。

Fig. 2.6-1に解析結果を示す。文献<sup>1)</sup>とADMODELによる解析値は、応力-ひずみ関係の形状においては、よく一致しているものの、応力の飽和値においては若干の差が生じている。

解析に使用した材料定数

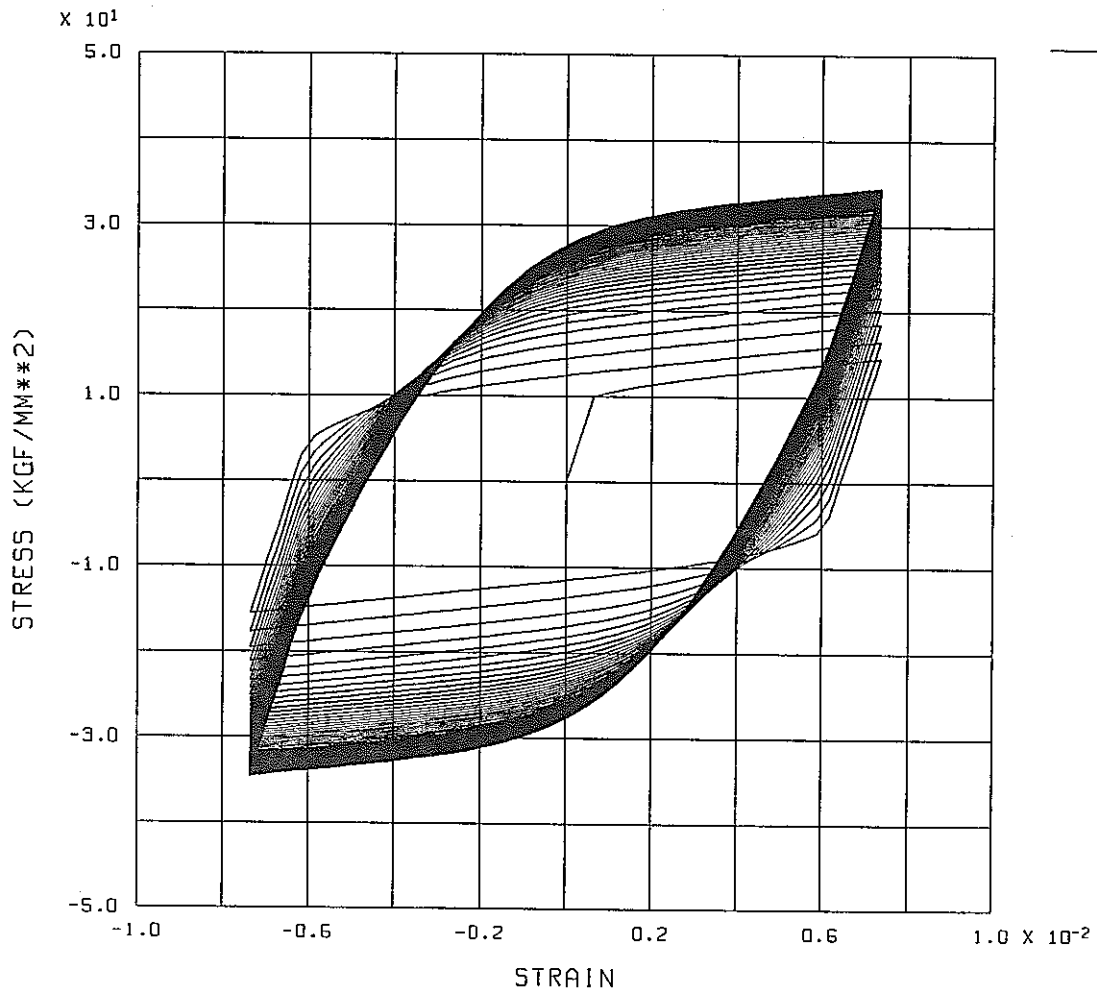
$$\begin{aligned}
 E &= 15700 \text{ kgf/mm}^2, & K &= 480 \text{ kgf/mm}^2 \\
 \nu &= 0.306, & B &= 30 \\
 \kappa_0 &= 10 \text{ kgf/mm}^2, & c &= 0.011 \\
 \kappa_0^* &= 12 \text{ kgf/mm}^2, & k &= 290 \text{ kgf/mm}^2 \\
 A_0 &= 700 \text{ kgf/mm}^2 & m &= 0.5 \\
 \text{ただし } Q &= k \rho^m
 \end{aligned}$$

---

・(2.6-7) 式の  $Q(\rho, T)$  は、 $Q$  が、繰り返し硬化ひずみ曲面の半径： $\rho$  と温度： $T$  の関数であることを示す。ただし論文における解析例とADMODELは以下の式による。

$$Q = k \rho^m \quad (2.6-12)$$

・材料定数は、 $\kappa_0$ ,  $\kappa_0^*$ ,  $A_0$ ,  $B$ ,  $K$ ,  $c$ ,  $(k, m)$ ,  $(A_c, D, G)$



DENCYUKEN MODEL T = 550 , DELTA-EPS = 1.47%

100 Step/Cycle, 100 Cycle.

Fig.2.6 - 1 Cyclic stress-strain relationship of the CRIEPI model.

## 2.7 McDowell モデル

以下に示す基礎式によると、McDowellモデル<sup>12)</sup>は、非常に複雑な構造をもっている。しかし、概念的には、Dafaliasの2曲面理論<sup>4)</sup>に非比例負荷の効果： $\phi$ とChabocheらによる<sup>6)</sup>ひずみ記憶面を取り入れ、非線形、非比例負荷時の繰り返し硬化を表現したものととらえることができる。

このモデルは、硬化定数： $\kappa$ 、降伏面、限界面の半径 $R$ 、 $R^*$ が、各々繰り返し硬化の進行に伴って $\bar{\kappa}$ 、 $\bar{R}$ 、 $\bar{R}^*$ に漸近していく値として表わされている。ここに、 $\bar{\kappa}$ 、 $\bar{R}$ 、 $\bar{R}^*$ は各々繰り返し硬化が飽和したときの値であり、 $q$ と $\phi$ の関数として表現される。 $\phi$ は、非比例負荷の履歴を表わし、 $q$ は記憶面の半径であり、繰り返しひずみ範囲の関数である。よって、このモデルでは繰り返し硬化のひずみ範囲依存性と非比例負荷の影響を表現することができる。

---

非線形繰り返し硬化飽和モデルにおける非硬化ひずみ領域（面）は、文字どおり“等方硬化の生じない塑性ひずみ空間上の領域”としてとらえることができた。これに対して、McDowellによるひずみ記憶面は、ひずみ範囲を記憶するために用いられているので、非線形繰り返し非硬化領域モデルのような概念はもたない。また、その半径の発展則は、

$$\dot{q} = \left( \frac{1}{2} H(F) \Gamma \sqrt{\frac{2}{3}} - \Lambda(q) \right) \dot{\eta}$$

ここに第2項は、fading memory効果を表わすのでこれを除くと、

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Gamma \dot{e}^p$$

つまり、非線形繰り返し非硬化領域モデルにて $c = 1/2$ とおいた場合に等しい

○ McDowellモデルの基礎式  
 ・降伏面

$$f = \frac{3}{2} (\mathcal{S} - \alpha) : (\mathcal{S} - \alpha) - R^2$$

$$\dot{R} = \mu (\bar{R}(\phi, q) - R) \phi \dot{\eta}$$

$\mu$  : 材料定数

$\bar{R}(\phi, q)$  :  $\phi, q$ において繰り返し硬化が飽和するときのR値

$\phi$  : 材料に依存する関数

$\dot{\eta}$  :  $\dot{\epsilon}^p$  :  $\dot{\epsilon}^p$

$$\dot{\alpha} = \frac{\left( (\mathcal{S} - \alpha) : \dot{\mathcal{S}} - \frac{2}{3} R \dot{R} \right) (\mathcal{S}^* - \mathcal{S})}{(\mathcal{S} - \alpha) : (\mathcal{S}^* - \mathcal{S})}$$

・限界面

$$f = \frac{3}{2} (\mathcal{S}^* - \alpha^*) : (\mathcal{S}^* - \alpha^*) - R^{*2}$$

$$\dot{R}^* = \mu (\bar{R}^*(\phi, q) - R^*) \phi^* \dot{\eta}$$

$$\dot{\alpha} = \kappa \dot{\eta} \mathfrak{h}$$

$$\mathfrak{h} = \frac{(\mathcal{S} - \alpha)}{|\mathcal{S} - \alpha|}$$

$$\mathcal{S}^* = \alpha^* + (\mathcal{S} - \alpha) \frac{R^*}{R}$$

・硬化則

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{h} (\dot{\mathcal{S}} : \mathfrak{h}) \mathfrak{h}$$

$$h = \kappa \left[ 1 + \frac{91960}{\kappa} \left\{ \sinh \left( \frac{\|\mathcal{S}^* - \mathcal{S}\|}{\|\mathcal{S}_0^* - \mathcal{S}_0\|} \right) \right\}^{1.1} \right]$$

$$\dot{\kappa} = \mu (\bar{\kappa}(\phi, q) - \kappa) \phi \dot{\eta}$$

・ひずみ記憶面 (Strain Memory Surface)

$$F = \frac{2}{3} (\varepsilon^p - \alpha^p) : (\varepsilon^p - \alpha^p) - q^2 = 0$$

$$\dot{q} = \left( \frac{1}{2} H(F) \Gamma \sqrt{\frac{2}{3}} - \Lambda(q) \right) \dot{\eta}$$

$H(F) : F = 0 \rightarrow H(F) = 1, F < 0, H(F) = 0$

$\Gamma$  : スカラー関数

$\Lambda(q)$  : 実験により決る定数

$$\dot{\alpha}^p = \frac{H(F)}{2} (\varepsilon^p : \eta^*) \eta^*$$

・ $\phi$

$$\dot{\phi} = \mu^*(1 - J - \phi) \dot{\eta} u(1 - J - \phi_{limit})$$

$$J = \left| \frac{\frac{d}{dt} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{g((\dot{\varepsilon})_1 - (\dot{\varepsilon})_3)} \right|$$



## 2.8 Endochronic (渡部) モデル

Endochronic (渡部) モデル<sup>13), 14)</sup>は、Valanisによる内部時間理論 (Endochronic Theory) を繰り返し塑性問題に適用したものであり、構成方程式は積分形で表わされている。文献<sup>13)</sup>によるとこの理論によって、SUS304が示すような非線形硬化や繰り返し硬化を精度よく表現でき、さらに“方程式が積分形であるために材料の記憶則や弾性・塑性の判定に特別の配慮をする事なく計算が可能である”とされている。

今回の調査では、このモデルについて増分形の定式化を行っていないため、構成式が積分形であるが故の長所や短所を検討していない。しかし、その理論式を検討することによりこのモデルにおいて予想される問題点について若干の考察を行った。

まず、おおまかな言い方をすれば、このモデルによって表現される応力とひずみの関係は、弾塑性Chabocheモデルと同様なものになるようである。(ただしひずみ記憶面の概念は持たない)つまり、表現形式は違うもののこのモデルより降伏面や背応力の概念を導入ことができ、さらに背応力の式については、ArmstrongとFrederickによる式の積分形となる。よって当然、弾塑性Chabocheモデルの悪い点も持っており、いわゆる“Rounding Effect”を表現する事ができずモデルの自由度は低い。(2.4節参照)

また繰り返し硬化の表現は、内部時間の関数として降伏応力と同様な  $f$  関数を定義することに依っている。この考えは、相当塑性ひずみの関数として降伏応力を表現することに等価であり、変動ひずみ振幅のもとでの履歴依存性を表わすことができない。(脚注1参照)

このような面から、いままで検討してきた他の繰り返し塑性構成モデルに比べて、構成方程式が積分形となること以外では、このモデルが特に優れている点はないのではないかと考える。また文献15), 16)は、この理論を発展させているが主眼となっているのは、降伏曲面の変形による塑性異方硬化則の表現にあり上記の問題に対する改良はみられない。

---

Chabocheモデルによるひずみ記憶面や非線形繰返し非硬化領域モデルにおける非硬化ひずみ領域の概念を用いると、あるひずみ範囲で繰返し硬化が飽和した後、再びより大きなひずみ範囲の変形が加えられた場合の再硬化を表現することができる。

## ○Endochronic (渡部) モデルの理論

ここでは、文献<sup>13)</sup>にしたがって内部時間理論の概要を述べる。

材料内部の固有の時間を計る尺度： $d\zeta$ は、塑性ひずみ成分： $d\varepsilon^p_{ij}$ を用いて次のように表現する。

$$d\zeta^2 = d\varepsilon^p_{ij} d\varepsilon^p_{ij} \quad (2.8-1)$$

この $d\zeta$ は相当塑性ひずみ増分 $d\bar{\varepsilon}^p$ に同様な概念である。

$$d\zeta = \sqrt{\frac{3}{2}} d\bar{\varepsilon}^p \quad (2.8-1)'$$

内部時間増分： $dz$ は上式の $d\zeta$ とその関数 $f(\zeta)$ を用い以下のように仮定する。

$$dz = \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \quad (2.8-2)$$

ここに関数 $f(\zeta)$ は降伏関数であり、 $f(\zeta) > 0$ 、 $f(0) = 1$ である。

この時、偏差応力： $s_{ij}$ と塑性ひずみ： $\varepsilon^p_{ij}$ が次の積分方程式で表されるとする。

$$s_{ij} = 2\mu_0 \int_0^z \rho(z-z') \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz'} dz' \quad (2.8-3)$$

ここに $\mu_0$ は、せん断係数である。

Valanisは、上式に基づいて積分形の構成方程式導いているが渡辺は、(2.8-5)式を得るために核関数 $\rho(z)$ を以下のように分解している。

$$\rho(z) = \rho_0 \delta(z) + \rho_1(z) \quad (2.8-4)$$

ただし $\delta(z)$ は、Diracのデルタ関数、 $\rho_1(z)$ は、非特異関数である。

(2.8-4)式を(2.8-3)式に代入すれば、(2.8-5)式が得られる。

$$s_{ij} = 2\mu_0 \rho_0 \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz} + 2\mu_0 \int_0^z \rho_1(z-z') \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz'} dz' \quad (2.8-5)$$

または、置き換えて

$$s_{ij} = s_y^0 \frac{d \varepsilon^p_{ij}}{dz} + \alpha_{ij}(z) \quad (2.8-5)'$$

(2.8-5)'式の $\alpha_{ij}(z)$ は、降伏曲面の移動を、 $f(\zeta)$ はその膨張と収縮を表わし、後に示すようにこれらは、背応力、抗応力に同様なものである。

$\alpha_{ij}(z)$ を支配する核関数 $\rho_1(z)$ は、以下のような指数形式に定義する。

$$\rho_1(z) = \sum \rho_{1j} \exp(-\alpha_j z) \quad (2.8-6)$$

核関数 $\rho_1(z)$ をこの様にとることに依って、後に示すように $\alpha_{ij}(z)$ は、Chaboche型の非線形硬化則を用いたのと同様となる。

さて、実際問題の適用では、核関数 $\rho_1(z)$ を次のように3項に展開している。

$$\rho_1(z) = \rho_{11} + \rho_{12} \exp(-\alpha_2 z) + \rho_{13} \exp(-\alpha_3 z) \quad (2.8-7)$$

また、降伏関数 $f(\zeta)$ は、微少の単調負荷に対して線形近似、繰り返し塑性のような内部時間尺度 $\zeta$ の大きい場合は、飽和形を仮定する。

$$f(\zeta) = 1 + \beta \zeta \quad (\text{線形})$$

$$f(\zeta) = f(\infty) + (1 - f(\infty)) \exp(-\gamma \zeta) \quad (\text{飽和形})$$

ここで、 $\beta$ 、 $\gamma$ は定数、 $f(\infty)$ は飽和時の降伏曲面の大きさを表わす。

○ Endochronicモデルに関する考察

Endochronicモデルの構成関係を表わすのは、(2.8-5)又は(2.8-5)'式である。再記すると、

$$s_{ij} = 2\mu_0 \rho_0 \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz} + 2\mu_0 \int_0^z \rho_1(z-z') \frac{d\varepsilon^p}{dz'} dz' \quad (2.8-8)$$

$$s_{ij} = s_0^p \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz} + \alpha_{ij}(z) \quad (2.8-8)'$$

(2.8-8)'式より降伏曲面の概念を導く。(2.8-8)'を移項して、両辺の大きさをとると、

$$(s_{ij} - \alpha_{ij}(z)) : (s_{ij} - \alpha_{ij}(z)) = s_0^{p2} \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz} : \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz}$$

よって、

$$(s_{ij} - \alpha_{ij}) : (s_{ij} - \alpha_{ij}) = s_0^{p2} f(\zeta^2) \quad (2.8-9)$$

よって単軸の降伏応力： $\kappa = \sqrt{\frac{3}{2}} s_0^p f(\zeta)$ とおくなら、(2.8-9)は降伏曲面を表わす。

( $\alpha_{ij}(z)$ は、背応力であり、 $\sqrt{\frac{3}{2}} s_0^p f(\zeta)$ は抗応力となる。)

このような認識の基に、(2.8-8)'を再び移項して、

$$s_{ij} - \alpha_{ij} = s_0^p \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{dz}$$

整理すると、

$$\frac{s_{ij} - \alpha_{ij}}{\|s_{ij} - \alpha_{ij}\|} = \frac{d\varepsilon^p_{ij}}{\|d\varepsilon^p_{ij}\|} \quad (2.8-10)$$

この式は、塑性ひずみ増分方向が降伏曲面に対する外向き法線方向を向くこと、いわゆる塑性流れ側に等価である。

さて、次に背応力が、Chabocheモデルに同様であることを示す。ただし、問題を簡単にするために単軸問題とし、降伏面の拡大はない( $f(\zeta) = 1$ )とする。

(2.8-8, 8')より背応力は、以下のように書ける。

$$\alpha_{11} = 2 \mu_0 \int_0^{\epsilon_{11}} \rho_1(z-z') \frac{d \epsilon_{11}}{d z'} d z'$$

降伏面の拡大はなく ( $d z = d \zeta$ ) 単軸問題であるから、( $d \epsilon_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} d z$ )、11成分に注目して、

$$\alpha_{11} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \mu_0 \int_0^{\epsilon_{11}} \rho_1(z-z') d z'$$

核関数  $\rho_1(z)$  として (11) 式を用い上式の積分を実行すると、

$$\alpha_{11} = 2 \mu_0 \left[ \rho_{11} \epsilon_{11} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho_{12}}{\alpha_2} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_2 \epsilon_{11}} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\rho_{13}}{\alpha_3} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_3 \epsilon_{11}} \right) \right] \quad (2.8-11)$$

(2.8-11)式右辺第一項は、線形の移動硬化を表わし、二、三項は、Armstrong-Frederickによる微分方程式形の背応力項の積分形に等しい。このことは、背応力がChabocheモデルに同様であることを示す。(脚注参照)

(ただし実際には、降伏面の拡大があるため、もう少し複雑で完全に同じわけではない。)

2.4節で述べたように、Chabocheモデルの最も大きな問題点は繰り返し応力・ひずみ関係における塑性初期の過渡的非線形硬化の大きさが、単調応力・ひずみ関係の高々2倍にしかならず、モデルの形状に対する自由度が小さいことであった。ここではChabocheモデルと同様の背応力を持つ Endochronicモデルも同様の問題を持っていることを示す。

先に述べた背応力の非線形項を調べるには、 $\rho e^{-\alpha z}$  型の核関数に対する応力・ひずみ関係を用いればよい。文献<sup>14)</sup>においてこれは $\sigma_{11}^{(1)}$ として扱われている。 $\sigma_{11}^{(1)}$ は単軸問題で $\rho(z) = \rho_{11} e^{-\alpha_1 z}$ を(3)式に代入し、積分して得られる応力であり、非線形硬化の項を表わす。

単軸問題での $\sigma_{11}^{(1)}$ は、単軸問題であるので、 $f(\zeta) = 1$ と近似すれば、

$$\sigma_{11}^{(1)} \simeq \sqrt{6} \mu_0 \frac{\rho_{11}}{\alpha_1} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} \alpha_1 \epsilon_{11}} \right) \quad \text{--- (単調)} \quad (2.8-12)$$

繰返し硬化が飽和したときの応力・ひずみ関係は、論文<sup>14)</sup> (32. c)式である。ここでひずみ範囲  $\Delta \varepsilon^p$  が十分大きければ分母の指数部は 0 となり、

$$\bar{\sigma}_{11}^{(i)} \simeq 2 \sqrt{6} \mu_0 \frac{\rho_{11} f^\infty}{\alpha_1} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha_1}{f^\infty} \varepsilon_{11}^p} \right) \quad \text{--- (繰返し)} \quad (2.8-13)$$

ここに  $f^\infty$  は  $f(\xi)$  の飽和値である。

$f^\infty = 1$  なら、Chabocheモデルに全く同じで繰返し応力・ひずみ関係の非線形部分は単調の高々2倍である。 $f^\infty > 1$  なら2倍以上にはなり得るが、やはり自由度はひくい。

ChabocheモデルにおけるArmstrongとFrederickの背応力発展式は、一項のみとると

$$\dot{\alpha}_{11} = c \left( \frac{2}{3} a \dot{\varepsilon}_{11}^p - \alpha_{11} \dot{\varepsilon}_{11}^p \right)$$

単軸問題のとき上式を積分して、

$$\alpha_{11} = \frac{2}{3} a (1 - e^{-c \varepsilon_{11}^p})$$

これは (2.8-11) の2,3項に同様な形をしている。

## 2.9 SUS304鋼における繰返し変形への適用性について

以上各種の高精度な弾塑性構成モデルを示してきたが、これらをSUS304鋼の繰返し変形問題へ適用するには以下の条件を満足する必要がある。

### 1) 非線形硬化特性

実験結果による単軸の単調および繰返し応力-ひずみ関係を精度よく表現できること。

### 2) 繰返し硬化特性

SUS304鋼に一定ひずみ範囲の繰返し変形を与えると繰返し数の増加に伴って硬化が進行するがその硬化量は次第に小さくなり、ある一定の繰返し数を経ると硬化が飽和し、安定した応力-ひずみループが得られる。また硬化が飽和するまでの繰返し数と硬化量はひずみ範囲に依存しており、この特性を表現できること。

ただし、より詳細にはこの硬化量が非比例負荷、温度変動の影響も受ける。

このような観点から今回調査した弾塑性構成モデルを検討すると上記1)の非線形硬化は組合せ硬化モデル以外の全てのモデルで表現可能である。(組合せ硬化モデルにおいても等方、移動硬化係数を関数とすれば非線形硬化を表し得る)しかし2)の繰返し硬化特性についてはひずみ記憶面の概念を考慮したChabocheモデル、非線形繰返し非硬化領域モデル、電中研モデル、McDowellモデルがこれを表現できる。これらのモデルは全て降伏曲面と同様、移動と拡大を伴う塑性ひずみ空間上の曲面によって繰返し硬化特性を表現している。この曲面のはChabocheモデル、McDowellモデルにおいてひずみ記憶面、非線形繰返し非硬化領域モデルにおいて繰返し非硬化領域、電中研モデルにおいて繰返し硬化ひずみ曲面と呼ばれるが、概念的には同一のもので、塑性ひずみがこの曲面の内部を動くときは繰返し硬化が進行せず、塑性ひずみがこの曲面上にありかつこれが曲面の外向きに動くときのみ繰返し硬化が進行するとしている。

この四つのモデルのうち、Chabocheモデルは2.4節において検討を行なっているように繰返し応力-ひずみ関係の過渡的非線形領域の大きさが高々単調の2倍までにしかなれないという大きな欠点を持つ。またMcDowellモデルは他のモデルでは扱っていない非比例負荷の影響を考慮しているが、モデルの構造が複雑なため取扱いには非常な困難が伴う。従って現状においてSUS304鋼の繰返し変形挙動を表現するためには非線形繰返し非硬化領域モデルまたは電中研モデルが最も適していると考えられる。

### 3. 塑性・クリープ統一型モデル

時間非依存型の構成モデルでは、非弾性変形を時間に依存しない塑性変形と時間に依存するクリープ変形に分離して扱っている。しかし高温において金属が塑性変形とクリープ変形を同時に受ける場合、これらの変形が互いに影響を及ぼし合い、従来の塑性クリープ分離型モデルではこの現象を説明することができなかった。これに対し、金属の非弾性変形が主に転位に基づく時間依存過程であることに注目して塑性変形とクリープ変形を同種のものとして扱う塑性クリープ統一型モデル(統一型モデルまたは粘塑性モデル)が提案されている。このような統一型モデルは塑性とクリープの相互作用を記述し得るので特に高温における材料の挙動を記述するのに適している。

ただし統一型モデルはまだ開発段階にあり、多くのモデルが提案されているもののそれらは単軸の材料挙動を確認しているにすぎず、実際の問題に適用された例は極めて少ない。このため、統一型の構成モデルを実際に適用するためにはその材料挙動に適した構成モデルを選定し、モデル定数を決定する必要がある。ここではその第一段階として代表的な統一型構成モデル：Chabocheモデル、Robinsonモデル、Bodner-Partomモデル、Walkerモデルを取り上げ、その基本的な特性を考察し、さらに非弾性挙動シュミレーションプログラムADMODELを用い簡単な解析を行う。

Chabocheモデル<sup>17)</sup>は弾塑性モデル<sup>5)</sup>の拡張であり、弾塑性モデルと同様の基礎式を持つ。これはモデル構造は単純であるが筆者が316L鋼に適用した例では安定性に問題があった。また長期間にわたるクリープ特性についても疑問があり、これらの点に関して3.1節において検討を加えた。

Robinsonモデル<sup>18)</sup>は他の統一型モデルと異なり、非弾性ひずみについて弾塑性モデル同様の負荷、除荷条件が存在する。

Bodner-Partomモデル<sup>20)</sup>は統一型モデルとしては最も初期のものであり、背応力を含まない簡単な構造をもっているが、その後の発展によって背応力と同様なDirectional Hardening項を付加し初期の簡潔さが失われつつある。

Walkerモデルは内部状態変数として背、抗応力を持つ最も基本的な統一型モデルのひとつである。

このように統一型モデルは各種の材料について各種のモデルが提案されているが、以下に示すように非線形硬化、応力のひずみ速度依存性、クリープによるリラクゼーション等の基本的な特性はどのモデルでも表現可能である。従って実際に適用する場合にはどのモデルが対象とする材料の特性に合うのか検討が必要となる。



### 3.1 Chabocheモデル（粘塑性）

粘塑性Chabocheモデル<sup>17)</sup>は、多くの統一型構成式にみられるように、流れ則として超過応力のべき乗則を用い、背応力、抗応力の発展則については、弾塑性モデル同様のものを採用している。式の形としては、弾塑性モデル同様簡単で扱いやすく、材料定数の決定も、4.1項に示した方法で行うことができる。しかし、Chabocheが示した316L鋼についての適用<sup>17)</sup>では、べき乗の指数として、24という異常に大きな値を採用しているため、数値計算上かなりの問題が生じている。また、かなり長期間のクリープ問題にも適用可能であるがその実用性には疑問があり、モデルの適用範囲についても十分な配慮が必要なものとする。

#### ○弾塑性Chabocheモデルの基礎式

弾塑性モデル同様、材料がMisesの降伏条件に従う、等方性材料であるなら、基礎式は、以下のようになる。

・流れ則

$$\dot{\epsilon}^I = \frac{3}{2} \left\langle \frac{J(\sigma - \sum \alpha_j) - R - k}{K} \right\rangle^n \frac{S - \sum \alpha_j}{J(\sigma - \sum \alpha_j)} \quad (3.1-1)$$

$$J(\sigma - \sum \alpha_j) = \left[ \frac{3}{2} (S - \sum \alpha_j) : (S - \sum \alpha_j) \right]^{1/2}$$

・抗応力の発展則

$$\dot{R} = b(Q - R) \dot{\epsilon}^I \quad (3.1-2)$$

・背応力の発展則

$$\dot{\alpha}_j = C_j \left( \frac{2}{3} a_j \dot{\epsilon}^I - \alpha_j \dot{\epsilon}^I \right) \quad (3.1-3)$$

$\epsilon^I$  : 非弾性ひずみテンソル

$\dot{\epsilon}^I$  : 相当非弾性ひずみ増分 ( $= \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^I : \dot{\epsilon}^I}$ )

$S$  : 偏差応力テンソル

$\alpha_j$  : 背応力 (Back Stress)  $j$  番成分テンソル

$R$  : 抗応力 (Drag Stress)

$k$  : 初期降伏面の大きさ

$K, n, k, b, Q, c_j, a_j$  は、材料定数

○単軸問題における応力・ひずみ関係の解析的表現

粘塑性Chabocheモデルの基礎式 (3.1-1) ~ (3.1-3) は、単軸問題で以下のようになる。

$$\dot{\epsilon}^I = \left\langle \frac{\frac{3}{2} |S - \sum \alpha_j| - R - k}{K} \right\rangle^n \cdot \frac{S - \sum \alpha_j}{|S - \sum \alpha_j|} \quad (3.1-1)'$$

$$\dot{\alpha}_j = C_j \left( \frac{2}{3} a_j \dot{\epsilon}^I - \alpha_j |\dot{\epsilon}^I| \right) \quad (3.1-2)'$$

$$\dot{R} = b (Q - R) |\dot{\epsilon}^I| \quad (3.1-3)'$$

さて、(3.1-1)'より、

$$\sigma = \frac{3}{2} \sum \alpha_j \pm R \pm k \pm K |\dot{\epsilon}^I|^{1/n} \quad (3.1-4)$$

(3.1-4) のように、粘塑性モデルも弾塑性モデル同様、応力が背応力、抗応力及び粘塑性ひずみのべき乗の粘性応力の和として与えられる。これより、応力・ひずみ関係を求めると以下のようになる。

・単調応力・非弾性ひずみ関係

$$\sigma = Q (1 - e^{-b\epsilon^I}) + \sum a_j (1 - e^{-c_j \epsilon^I}) + k + K (\dot{\epsilon}^I)^{1/n} \quad (3.1-5)$$

・繰り返し応力・非弾性ひずみ関係

$$\sigma = Q + \sum a_j + k + K (\dot{\epsilon}^I)^{1/n} \quad (3.1-6)$$

・繰り返し応力・非弾性ひずみヒステリシスループ

$$\sigma = Q + \sum a_j \{1 - 2 e^{-c_j (\Delta \epsilon^I / 2 + \epsilon^I)}\} + k + K (\dot{\epsilon}^I)^{1/n} \quad (3.1-7)$$

このように弾塑性モデルに粘塑性応力  $\sigma_{vp} = K (\dot{\epsilon}^I)^{1/n}$  が付加される。

次に粘塑性変形による応力の緩和について考える。左図に示すように、 $\dot{\epsilon}$  が一定である単軸引張変形を行いその後ひずみを一定に保って粘塑性変形を行うことを考える。

ただし、このとき式展開を簡単にするた

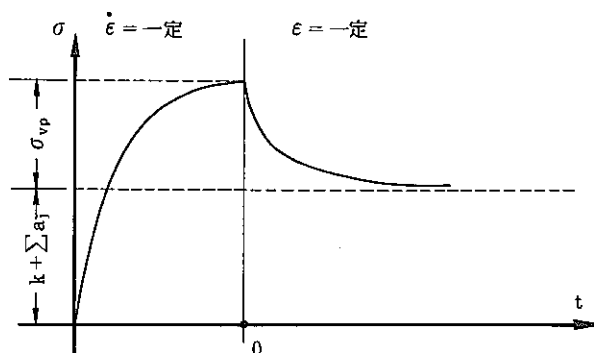


Fig. 3.1-1 Stress Components of the Chaboche Model

めに以下の仮定を設ける。

1. この例では、抗応力の発展は、あまり影響しないと考えられ、 $\dot{R} = 0$ とする。
2. 単軸引張変形において背応力は、十分飽和しているとする。 $(e^{-\alpha \dot{\epsilon} t} \ll 1)$

このとき、単軸引張変形において生じる応力は、次のようになる。

$$\sigma = \sum a_j + k + K (\dot{\epsilon})^{1/n} \tag{3.1-8}$$

さて、この状態でひずみを一定に保ち粘塑性変形を生じさせる。ひずみの定義より

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^0 + \dot{\epsilon}^1$$

$\dot{\epsilon}^0 = \dot{\sigma} / E$ , (3.1-1)'より

$$\dot{\sigma} / E = - \left[ \frac{\sigma - \sum a_j + k}{K} \right]^n \tag{3.1-9}$$

上式をといて初期条件  $t = 0$  にて (3.1-8) とすれば、

$$\sigma = \sum a_j + k + \left[ (n-1) E \cdot \frac{t}{K^n} + (\sigma_{vp})^{1-n} \right]^{\frac{1}{1-n}} \tag{3.1-10}$$

$$\sigma_{vp} = K (\dot{\epsilon}^1)^{1/n}$$

(3.1-10) 式によって表わされる  $\sigma_{vp}$  の緩和を図3.1-2に示す。このモデルでは、 $\sigma_{vp}$  の緩和が異常なまでに長期にわたって起ることがわかる。

$$\left[ (n-1) E \frac{t}{K^n} + (\sigma_{vp})^{1-n} \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

“粘塑性変形による応力の緩和 (Chabocheモデル)”

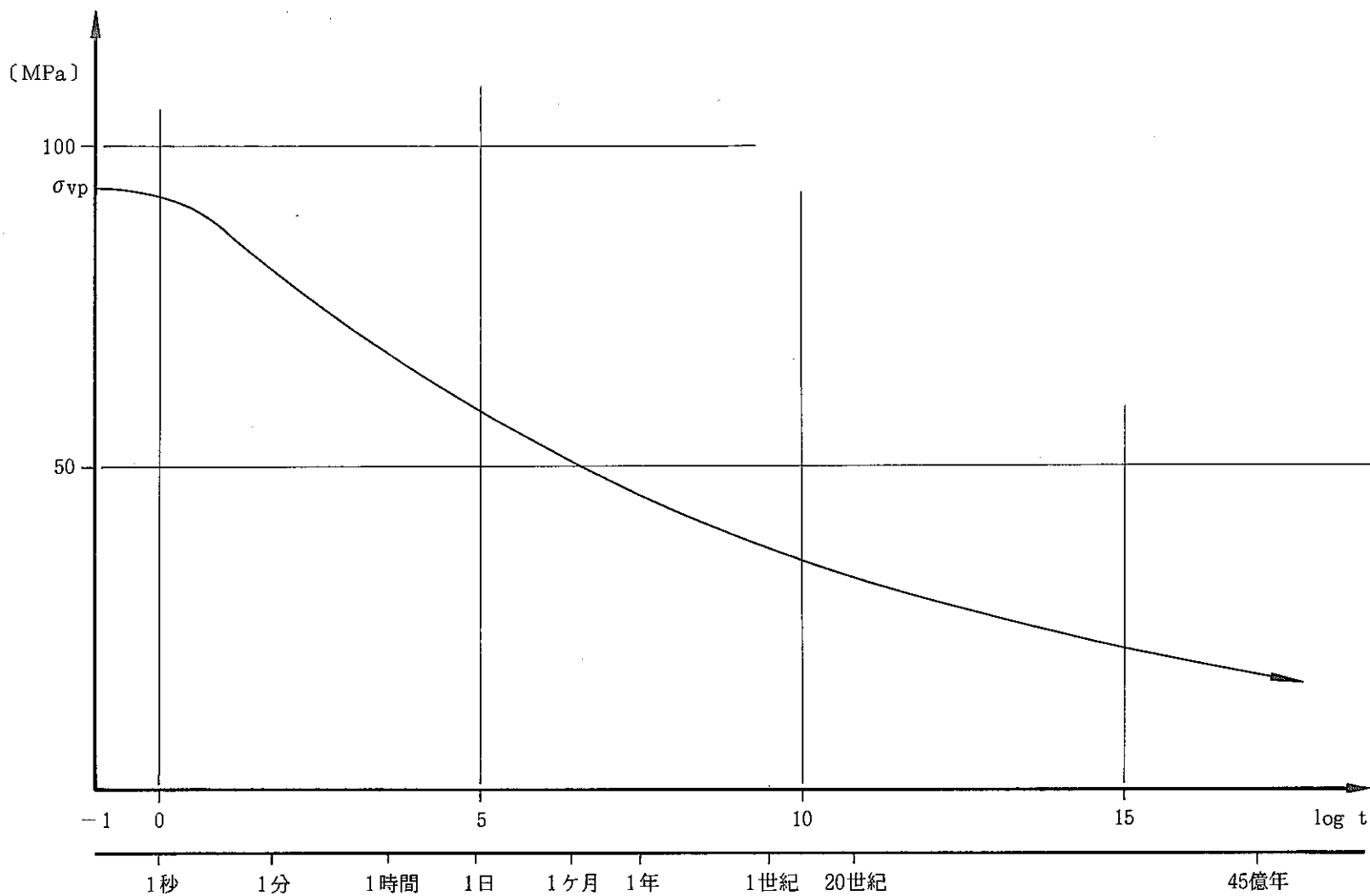


Fig. 3.1-2 Stress Relaxation Curve by the Chaboche model

○ ‘ADMODEL’ による粘塑性Chabocheモデルの解析例

‘ADMODEL’ を用いて、粘塑性Chabocheモデルの解析を行った。用いた材料定数は、文献<sup>17)</sup> の316L鋼の室温におけるものである。これを以下に示す。

$$\left( \begin{array}{l} E = 185000 \text{MPa}, \nu = 0 \\ k = 82 \text{MPa}, b = 8, Q = 60 \text{MPa} \\ c_1 = 2800, a_1 = 58 \text{MPa}, c_2 = 25, a_2 = 270 \text{MPa} \\ K = 151 \text{MPa}, n = 24 \end{array} \right.$$

1. 各種ひずみ速度による軸単引張変形

これは、Chabocheの論文<sup>17)</sup> と同じ解析を行ったものであり、この結果をFig. 3.1-3に示す。用いた増分の大きさは、後に述べる発散を防ぐために  $\delta \varepsilon = 2 \times 10^{-5}$  とかなり小さくとっている。得られた結果は文献<sup>17)</sup> とよく一致し、この計算が正しいことを示している。

また、これらの関係は (3.1-5) に示したように弾塑性Chabocheモデル (または  $\dot{\varepsilon} = 1/\infty$ ) の値に  $K (\dot{\varepsilon})^{1/n}$  を付加したものになり、 $\dot{\varepsilon}$  が一定であれば相似形となる。

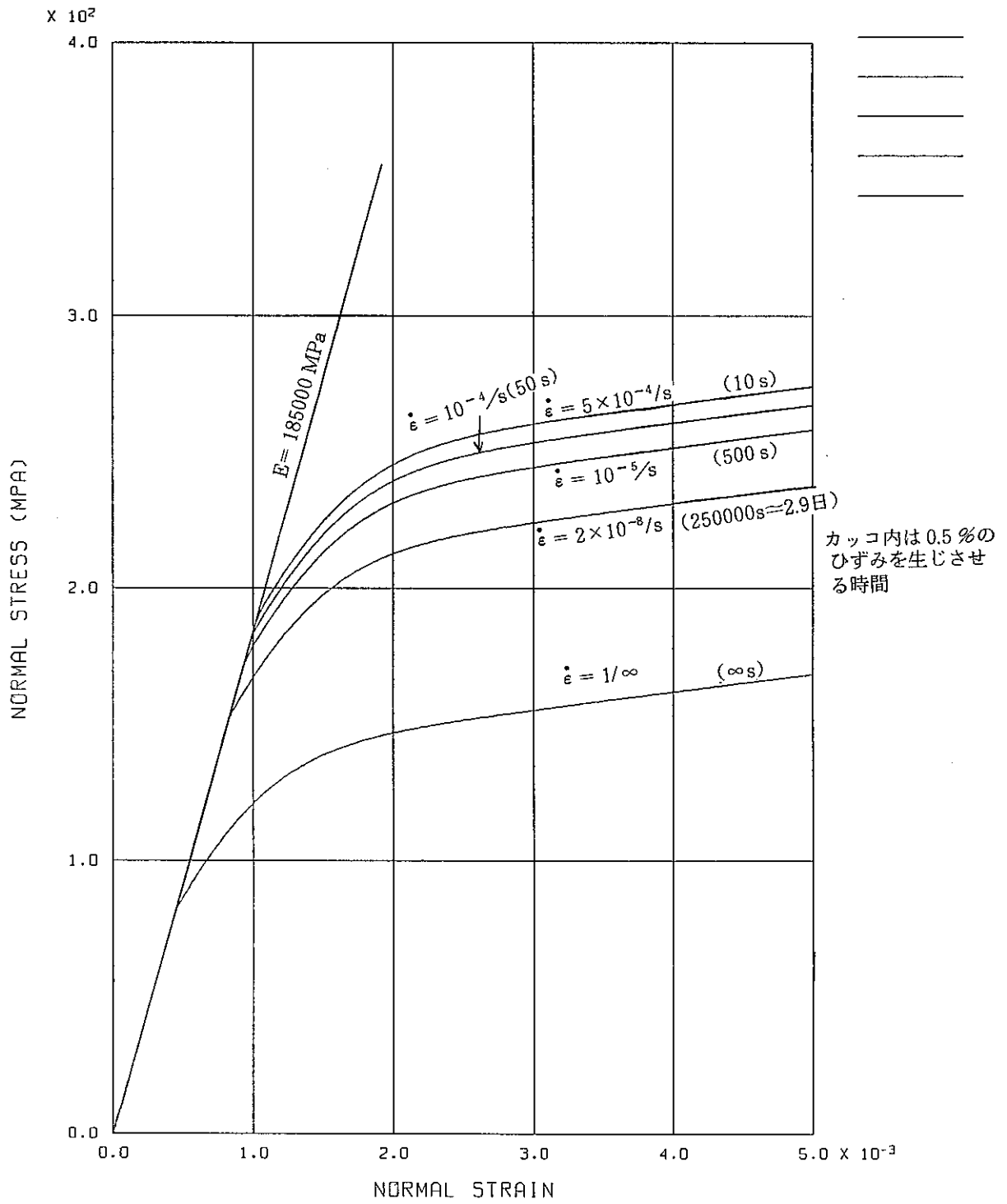
このように粘塑性応力は、広い範囲で粘塑性ひずみ速度に依存する。よって、このモデルではひずみ速度が  $1/\infty$  であればその挙動は弾塑性Chabocheモデルに一致し、ひずみ速度が大きくなれば、応力もそれにつれて大きくなっていく。

2. 繰り返し変形

弾塑性モデル同様  $\Delta \varepsilon = 1\%$  の一定ひずみ範囲繰り返し変形を行った結果をFig. 3.1-4に示す。ただし  $\dot{\varepsilon} = 10^{-5} / \text{s}$  であり、増分の大きさは、単軸引張に同じである。解析はステップ数の関係で4サイクルまでしか行っていないが、これも (3.1-6,7) 式より想像されるように、弾塑性問題の繰り返し変形に  $K (\dot{\varepsilon})^{1/n}$  を付加したものになる。

3. 粘塑性変形による応力の緩和

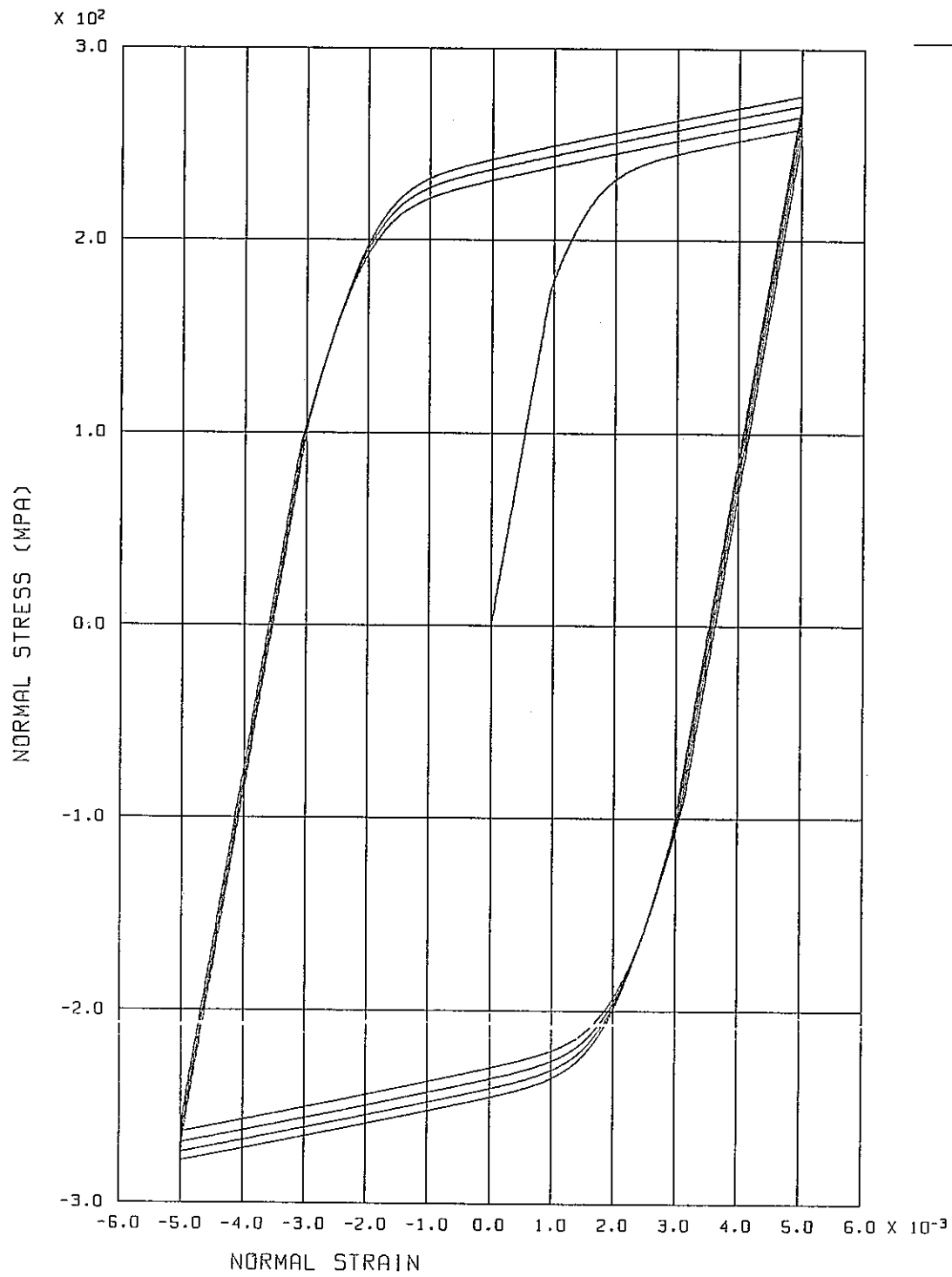
次に  $\dot{\varepsilon} = 10^{-5} / \text{s}$  にて、0.5%のひずみを発生させた後、ひずみ値を一定に保って粘塑性変形による応力緩和を解析した結果をFig. 3.1-5に示す。この例では、解析的表現で用いた仮定が成り立っていない。よって応力緩和に伴う非弾性ひずみの増加に伴って、背応力及び抗応力が増加するために、応力緩和は示したものより小さくなるが ( $t = 10^{20}$  で高々4%)、ほとんど差はない。



VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL ON 316L AT R.T. < ADMODEL >

ADMODELによる各種ひずみ速度単調引張変形  
 ( $\delta \epsilon = 10^{-5}$ )

Fig.3.1 - 3 Strain Rate Sencitivity of the Chaboche model.

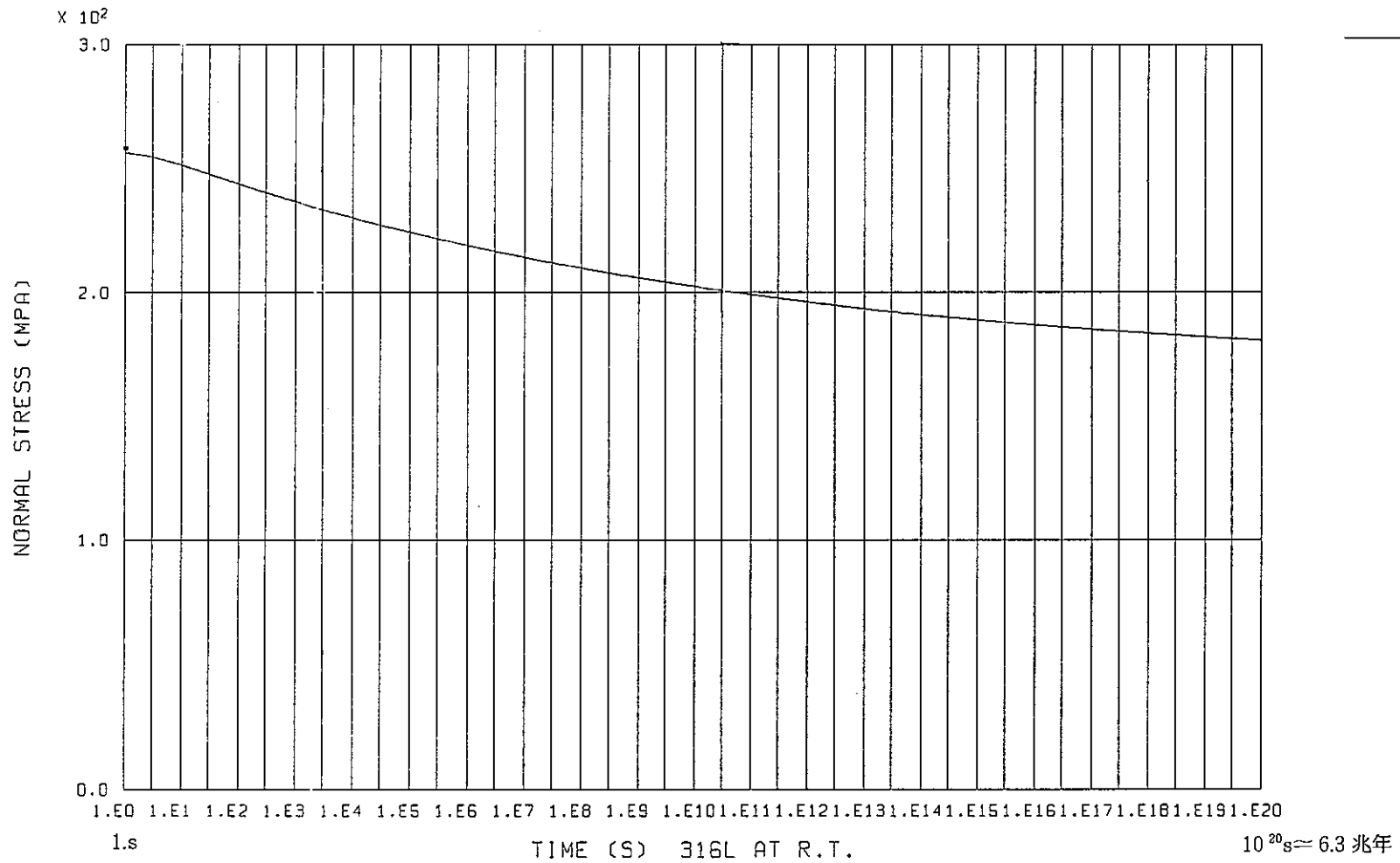


VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL ( STRAIN RATE =  $1E-5$  /S )

'ADMODEL' による繰り返し変形 ( $\dot{\epsilon} = 10^{-5}/s$ )

$\Delta \epsilon = 1\%$ , 1000 Steps/Cycle, 4 Cycles

Fig. 3.1 - 4 Cyclic Responce of the Chaboche model.



VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL STRESS RELAXATION TEST

'ADMODEL' による応力緩和

Fig.3.1-5 Stress Relaxation Curve of the Chaboche model.



## ○粘塑性Chabocheモデルの数値的不安定について

文献<sup>17)</sup>による316L鋼の追解析をADMODELを用いて行くと、増分が大きいときに発散が観察された。この発散は、従来、非線形繰返し非硬化領域モデルにおいてオーバーシュートを防ぐ目的にて、採用された増分より小さい場合でも発生し (Fig. 3.1-6)、これはまた別の機構によっていると考えられる。これは後に明らかになるように、流れ則として、べき乗則を採用していることに起因しており、多くの統一型構成式に共通の問題と考えらる。

Fig. 3.1-7に  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} / \text{s}$  ひずみ増分  $2 \times 10^{-5}$  のケースについて、ひずみ増分を各々弾性と非弾性に分解したものを示す。このグラフよりあきらかなように、このモデルでは、弾性状態から粘塑性状態に移った後も、しばらくは、非弾性ひずみがほとんど発生せず、弾性的な挙動を示す。しかし、ある程度応力が大きくなると、非弾性ひずみが急激に発生してくる。この領域は非常にせまく、これが数値的不安定を招く一因と考えられる。

しかし、Fig. 3.1-(b) に示すように、このような領域のみ増分を細くしても、結局は発散が起っていることから、他にも原因があると考えられる。

このことを検討するために、単軸引張問題において、以下のような無次元化した超過応力:  $\gamma$  を考える。(概念的には、降伏面を飛出した応力を降伏応力で除したもの)

$$\gamma = \frac{\sigma - \frac{3}{2} \sum \alpha_i - R - k}{R + k} \quad (3.1-11)$$

さて、このとき単軸問題における流れ則 (3.1-1)' は、

$$\dot{\epsilon}^I = \left[ \frac{(R+k)}{K} \gamma \right]^n \quad (3.1-12)$$

この例では、Rはちいさく、以下のように近似できる。(R ≪ 1)

$$\dot{\epsilon}^I = \left[ \frac{k}{K} \gamma \right]^n \quad (3.1-13)$$

またひずみ定義より、

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^I \quad (3.1-14)$$

よって  $\dot{\epsilon}$  : 一定の変形の場合応力増分は以下のように書ける。

$$\dot{\sigma}/E = \dot{\epsilon} - \left[ \frac{k}{K} \gamma \right]^n \quad (3.1-15)$$

上式における右辺第2項を $\dot{\epsilon} = 10^{-5}/s$ を基準にプロットしたものをFig. 3.1-8に示す。この図にはRobinsonモデルの値を同時にプロットしてあるが、これよりこのモデルがいかに不安定であるかが解る。

さて、これをより明らかにするため(3.1-15)を $\gamma = \gamma_0$ にてテイラー展開し、第1項のみとる。ただし $\gamma_0$ は、 $\dot{\sigma} = 0$ と(3.1-15)より定められている。

$$\gamma = \gamma_0 + \Delta \gamma \text{ とおく}$$

ただし

$$\dot{\epsilon} = \left[ \frac{k}{K} \gamma_0 \right]^n$$

(3.1-15) はテイラー展開によって、

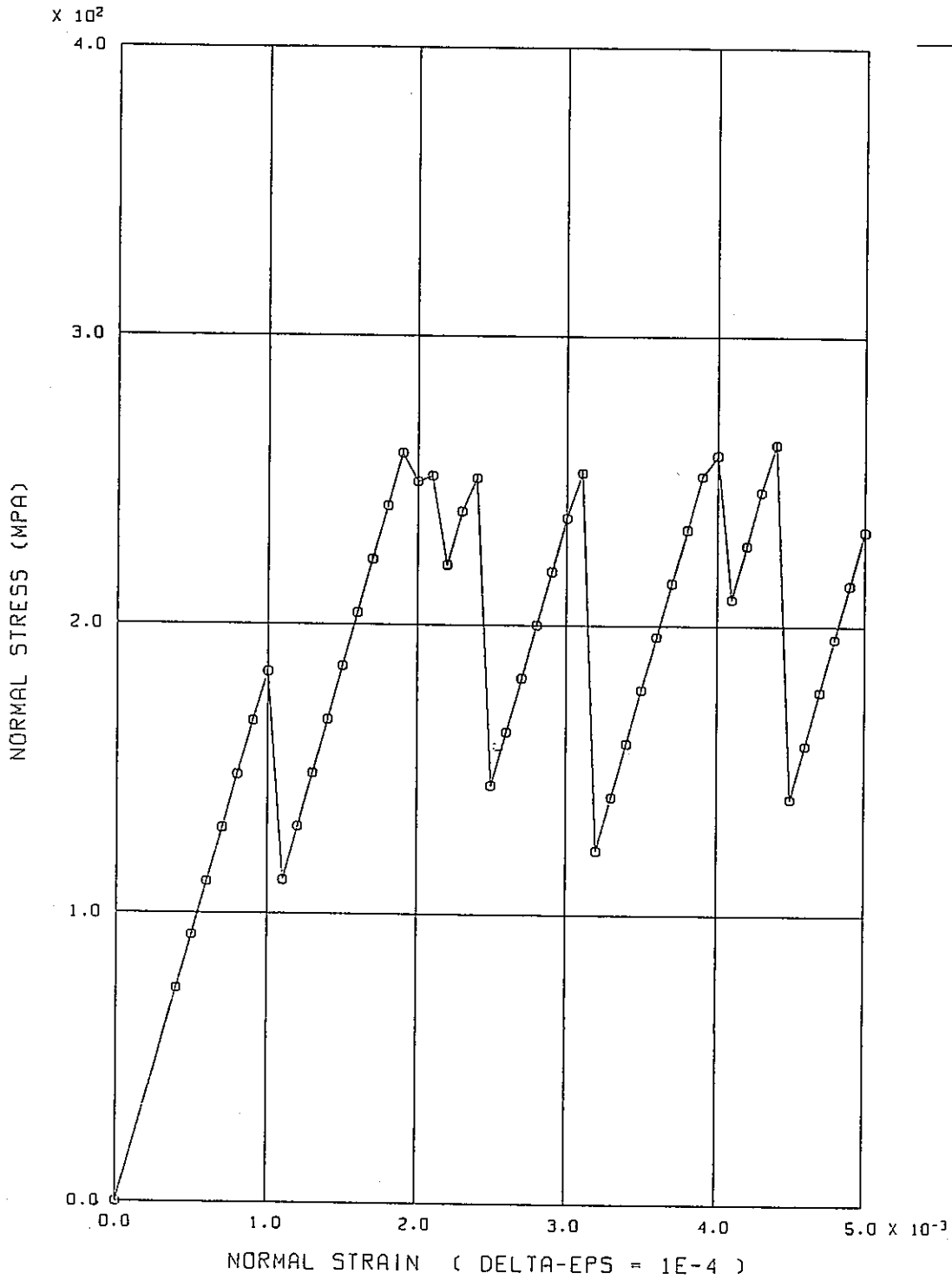
$$\dot{\sigma}/E = \dot{\epsilon} - \left[ \frac{k}{K} \gamma_0 \right]^n - n \left[ \frac{k}{K} \gamma_0 \right]^{n-1} \Delta \gamma$$

$$\dot{\sigma}/E = \frac{n}{\gamma_0} \Delta \gamma \dot{\epsilon} \quad (3.1-16)$$

上式よりあきらかなように、応力の誤差： $\Delta \gamma$ は与えられた $\dot{\epsilon}$ の $\frac{n}{\gamma_0}$ 倍に拡大されて $\dot{\sigma}$ に作用することがわかる。

以上このモデルの基礎的不安定の原因は2つあり、1つは非弾性ひずみが急激に立ちあがることであり、もう1つは非弾性ひずみが超過応力に対して非常に敏感なことである。ただし、これら2つもその根本的な原因は、流れ則において24という異常に大きなべき乗指数を採用していることに依る。

この不安定を避けるための有効な方法としては、今のところ増分をちいさくする以外にないが、その基準については第II編の3節において検討する。

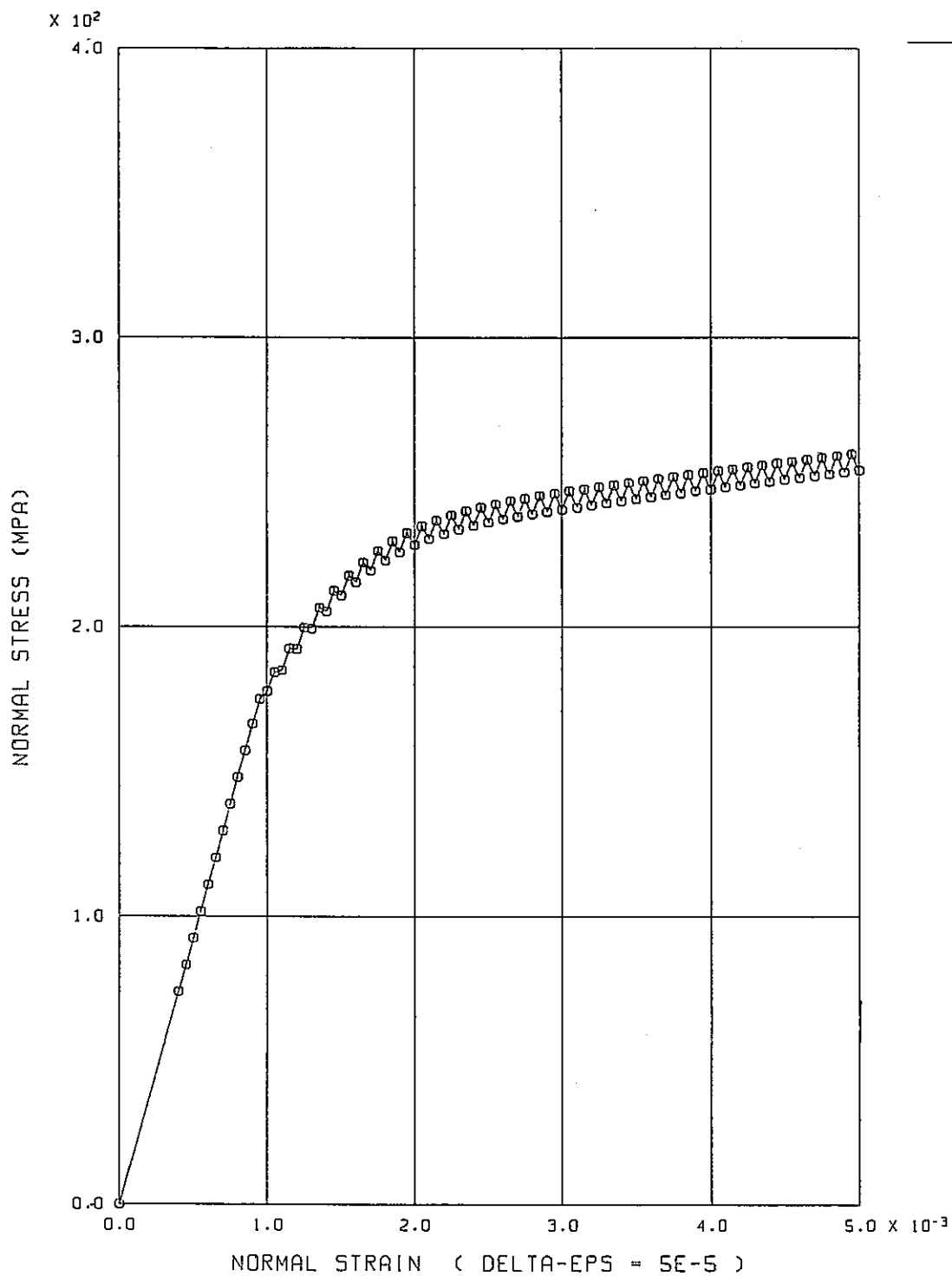


VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL STRAIN RATE = 1E-5 ( 316L )

ADMODELによる発散例①

(  $\delta \epsilon = 10^{-4}$ , これは1/2Cより小さい, 弾塑性モデルでは  
この増分の大きさを十分な解が得られる。 )

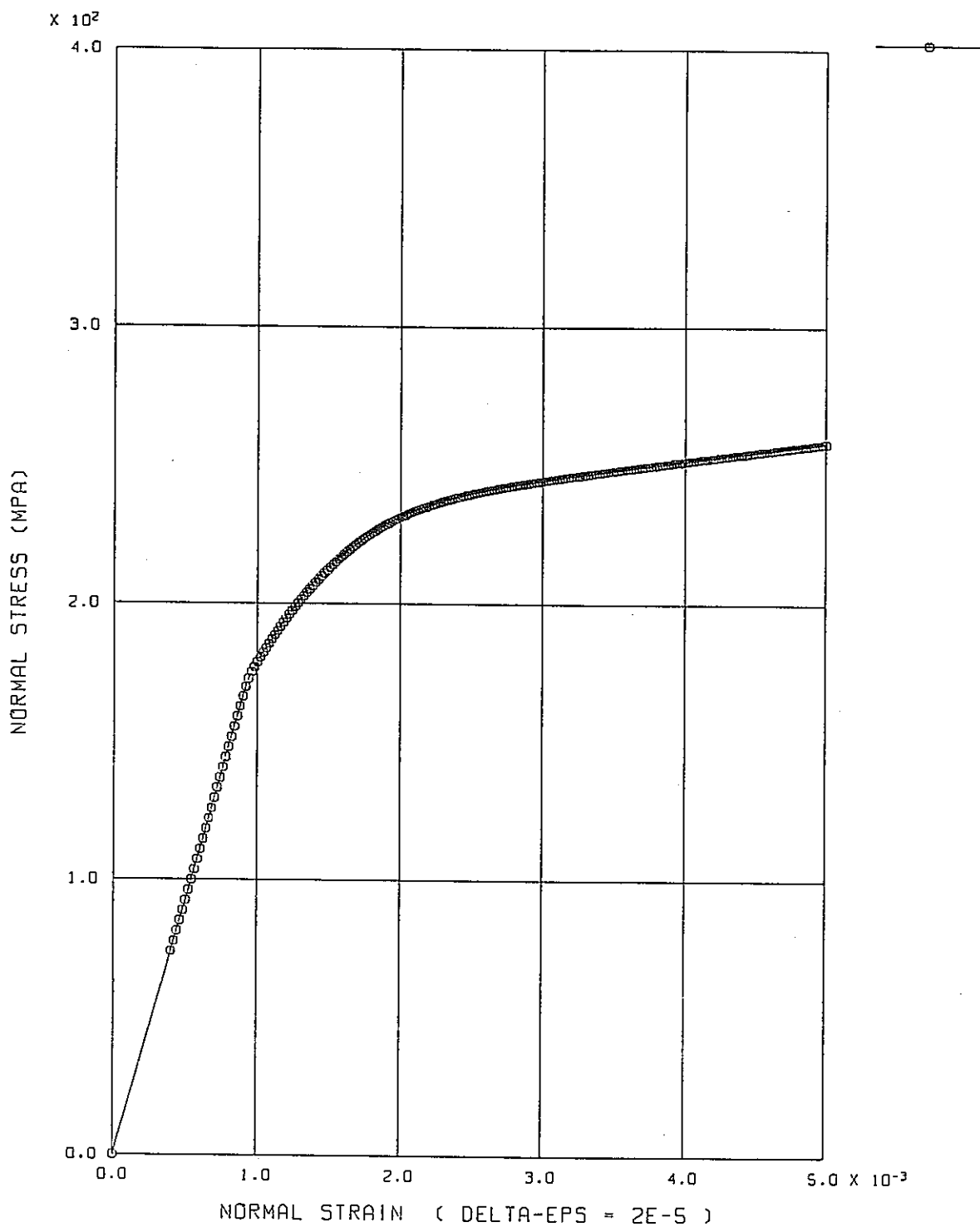
Fig.3.1 - 6(a) An example of divergence of the Chaboche model.



VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL STRAIN RATE = 1E-5 ( 316L )

ADMODELによる発散例②  
 $\delta \epsilon = 5 \times 10^{-5}$

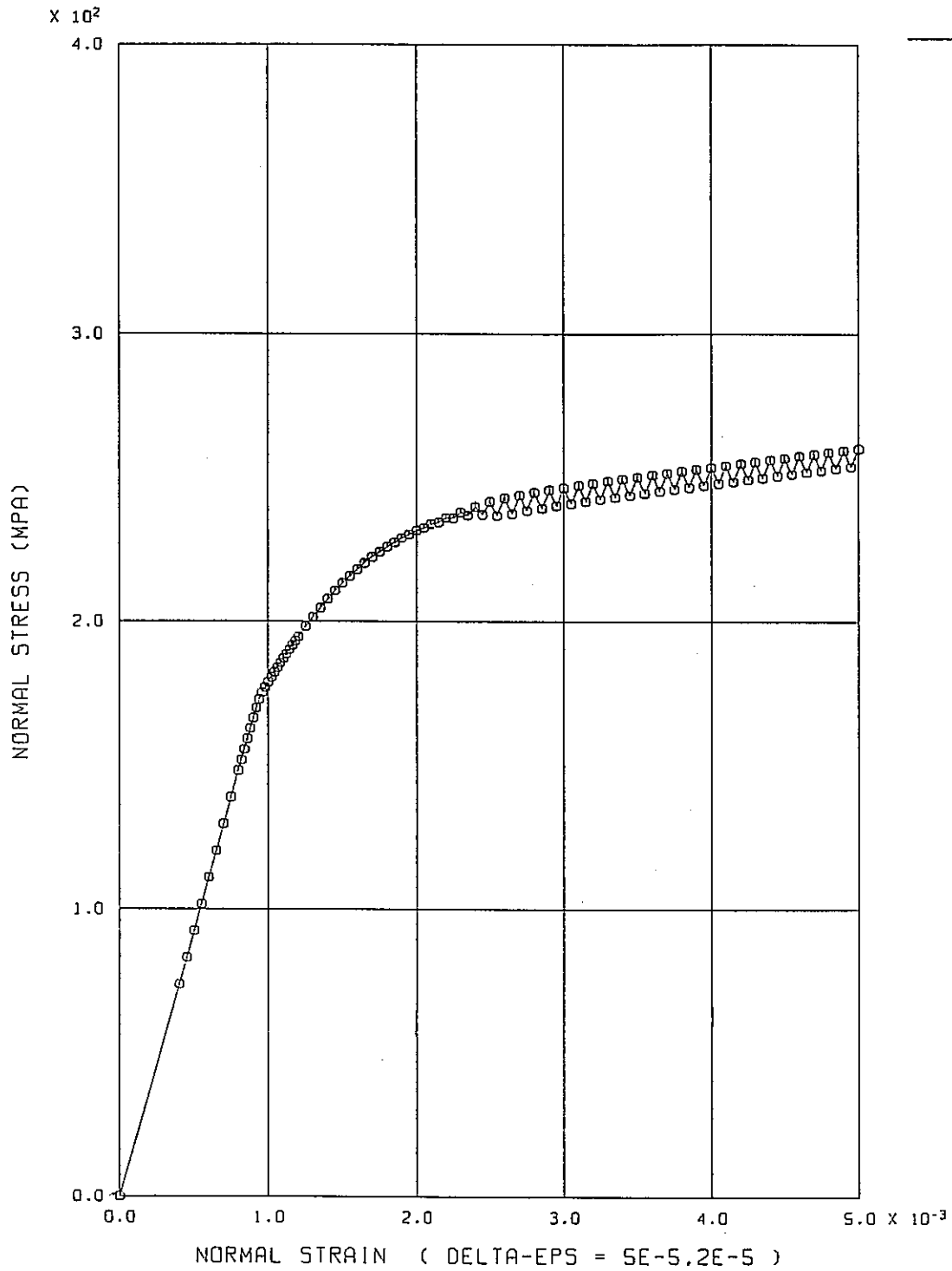
Fig.3.1 - 6(b) An example of divergence of the Chaboche model.



VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL STRAIN RATE = 1E-5 ( 316L )

ADMODELによる発散例③—ただしこれは発散しない例  
 (  $\delta \epsilon = 2 \times 10^{-5}$ , ステップをここまで細くするとよい解が得られる )  
 (他の計算もすべての増分の大きさを基準にしている。)

Fig.3.1 - 6(c) An example of divergence of the Chaboche model.



VISCOPLASTIC CHABOCHE MODEL STRAIN RATE =  $1E-5$  ( 316L )

ADMODELによる発散例④

(非弾性ひずみの発生する近傍のみ細かい増分を採用した例。  
しかしそれでも結局発散が生じている。)

Fig.3.1 - 6(d) An example of divergence of the Chaboche model.

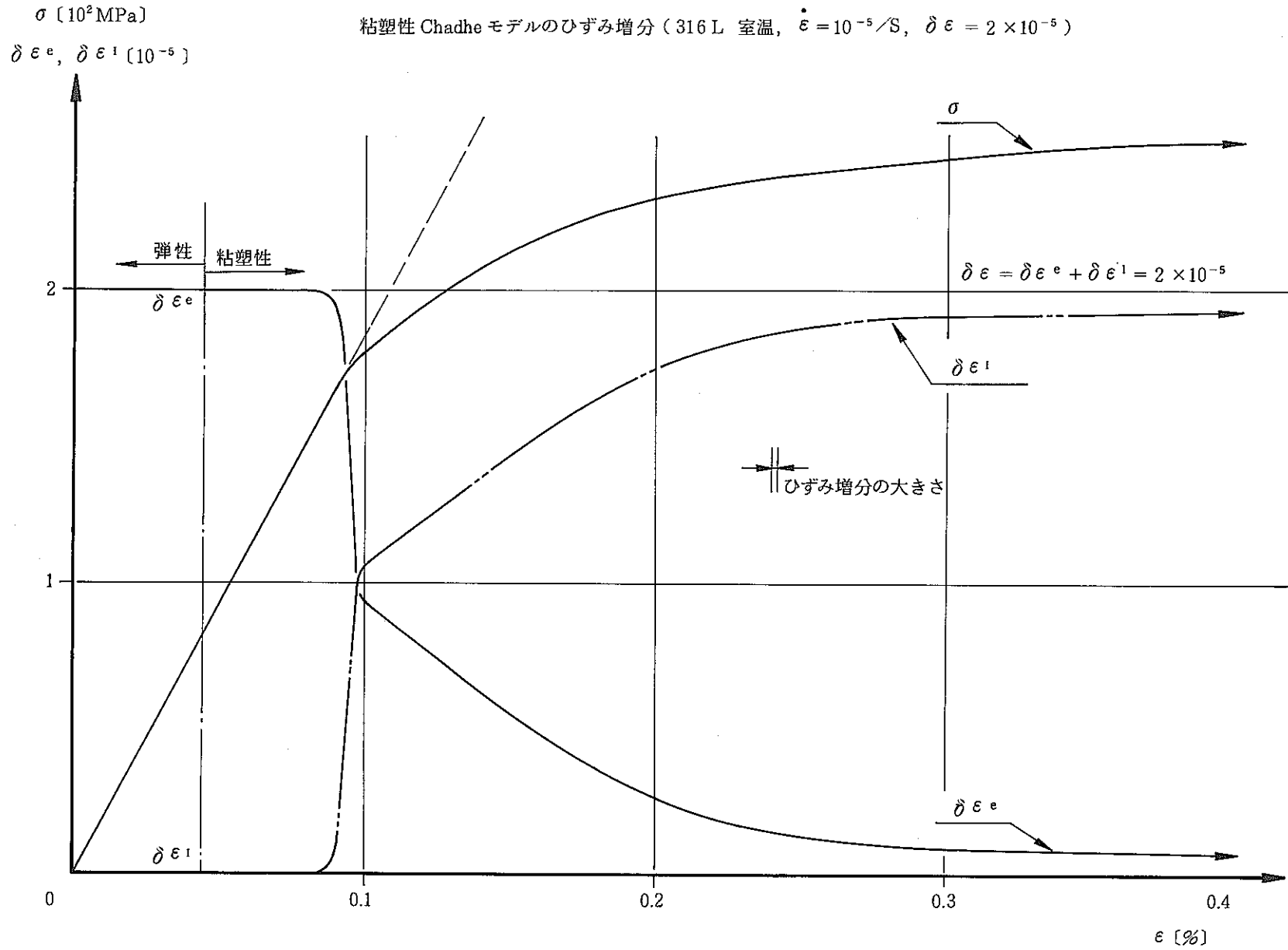


Fig. 3.1-7 Strain Components of the Chaboche model

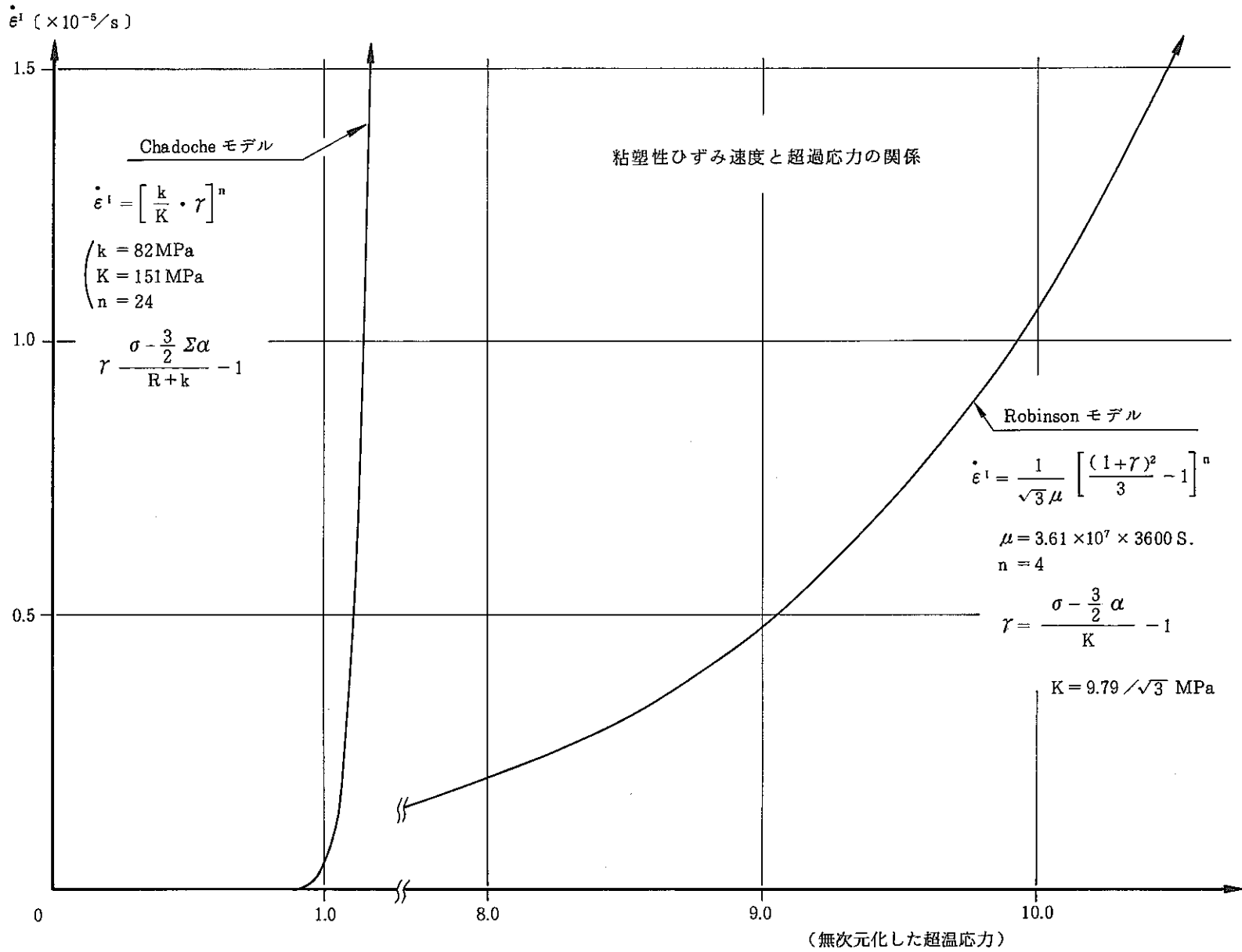


Fig. 3.1-8 Viscoplastic Strain Rate verses over stress



### 3.2 Robinsonモデル

Robinsonモデル<sup>18)</sup> は、各種の統一型モデルの中でもなかり初期に開発されたもので、流れ則、背応力の発展則が以下に示すようなポテンシャル関数より導かれる。

ポテンシャル関数として、外部応力 $\sigma_{ij}$ および内部応力 $\alpha_{ij}$ からなるものを考える。

$$\dot{\Omega} = \Omega(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) \quad (3.2-1)$$

静水圧応力は非弾性挙動に全く影響を与えないので、応力の依存性は下式で示される $\sigma_{ij}$ ,  $\alpha_{ij}$ の偏差成分により考慮される。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3.2-2)$$

$$a_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk} \quad (3.2-3)$$

ここで、 $\delta_{ij}$ はKroneckerのデルタを表わす。

ポテンシャル関数を用いて、流れ則および発展式は次式で表わされる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.2-4)$$

$$-\frac{\dot{\alpha}_{ij}}{h} = \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{ij}} \quad (3.2-5)$$

ここで、 $(\dot{\quad})$ は時間微分を意味し、 $\dot{\epsilon}_{ij}$ は非弾性ひずみ速度を表わし、 $h$ は内部応力のスカラー関数である。

Robinsonモデルのポテンシャル関数は次式で表わすことができる。

$$\Omega = K^2 \left( \int \frac{1}{2\mu} f(F) dF + \int \frac{R}{H} g(G) dG \right) \quad (3.2-6)$$

上式のスカラー関数 $F$ ;  $G$ は応力に依存したものとして考慮される。

$$F = F(\Sigma_{ij}), \quad G = G(\alpha_{ij}) \quad (3.2-7)$$

ここで、 $\Sigma_{ij}$ は次式で表わされる。

$$\Sigma_{ij} = S_{ij} - \alpha_{ij} \quad (3.2-8)$$

また、関数  $f$ 、 $g$  および材料パラメータ  $K$ 、 $\mu$ 、 $R$ 、 $H$  は状態に応じて仮定される。

完全な等方性モデルにおいて、(3.2-7) の関数  $F$ 、 $G$  は (3.2-8) および (3.2-9) で与えられる主応力の不変量に依存して表わされる。

$$J_2 = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \Sigma_{ij}, \quad J_3 = \frac{1}{3} \Sigma_{ij} \Sigma_{jk} \Sigma_{ki} \quad (3.2-9)$$

$$j_2 = \frac{1}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ij}, \quad j_3 = \frac{1}{3} \alpha_{ij} \alpha_{jk} \alpha_{ki} \quad (3.2-10)$$

いま、Misesタイプを考慮すれば、第2次不変量  $J_2$ 、 $j_2$  だけが残り、関数  $F$  と  $G$  は、次式で表わされる。

$$F = \frac{J^2}{K^2} - 1 \quad (3.2-11)$$

$$G = \frac{j^2}{K^2} - 1 \quad (3.2-12)$$

ここで、上式の  $K$  は Bingham の降伏条件である。 $K$  は一般的にスカラー状態変数として考慮されるが、定数として取り扱う。

$F > 0$  の場合に非弾性ひずみが生じ、(3.2-6) から (3.2-12) を考慮することにより、式 (3.2-4) の流れ則および式 (3.2-5) の発展則は、下式で表わすことができる。

$$2\mu \dot{\epsilon}_{ij} = f(F) \Sigma_{ij} \quad (3.2-13)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{H}{g_h(G)} \dot{\epsilon}_{ij} - R g_r(G) \alpha_{ij} \quad (3.2-14)$$

なお、式 (3.2-5) の  $h$  は次式のように表わされる。

$$h = \frac{H}{g_h(G)} \quad (3.2-15)$$

式 (3.2-14) の  $g_r(G)$  は次式で表わされる。

$$g_r(G) = \frac{g(G)}{g_h(G)} \quad (3.2-16)$$

以上が、等方性材料および等温条件に対するRobinson統一型モデルの定式である。

この理論の適用例として  $f$  は、Mitra, Mclean等の実験結果から次式らが仮定される。

$$f(F) = F^n \text{ あるいは } f(F) = (\sinh F)^n \quad (3.2-17)$$

また、 $g$  および  $g_h$  は次式らを仮定する。

$$g(G) = G^m \quad (3.2-18)$$

$$g_h(G) = \frac{1}{G^\beta} \quad (3.2-19)$$

したがって、式(3.2-16)から  $g_r$  は次式のように表わされる。

$$g_r(G) = G^{m-\beta} \quad (3.2-20)$$

上式での  $n$ ,  $m$ ,  $\beta$  は定数である。

最後にまとめてRobinsonモデルの具体的表示を示す。式(3.2-13)の流れ則および式(3.2-14)の発展則は次式で与えられる。

$$2\mu \dot{\epsilon}_{ij} = \begin{cases} F^n \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{J_2}} & ; F > 0 \text{ および } S_{ij} \Sigma_{ij} > 0 \\ 0 & ; F \leq 0 \text{ あるいは } S_{ij} \Sigma_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (3.2-21)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = \begin{cases} 2\mu h \dot{\epsilon}_{ij} - \gamma \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{I_2}} & ; G > G_0 \text{ および } S_{ij} \alpha_{ij} > 0 \\ 2\mu h_0 \dot{\epsilon}_{ij} - \gamma_0 \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{I_2}} & ; G \leq G_0 \text{ および } S_{ij} \alpha_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (3.2-22)$$

ここで、

$$\dot{F} = \frac{J_2}{K^2} - 1 \quad (3.2-23)$$

$$G = \left( \frac{I_2}{K^2} \right)^{1/2} \quad (3.2-24)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Sigma_{ij} \Sigma_{ij} \tag{3.2-25}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \tag{3.2-26}$$

$$h = \frac{H}{G^\beta} , \quad h_0 = \frac{H}{G_0^\beta} \tag{3.2-27}$$

$$\gamma = R G^{m-\beta} , \quad \gamma_0 = R G_0^{m-\beta} \tag{3.2-28}$$

上式らにおける  $\mu$  ,  $n$  ,  $m$  ,  $\beta$  ,  $R$  ,  $H$  ,  $G_0$  ,  $K$  は材料パラメータである。

○解析例

Robinsonモデルの計算例として、Robinsonにより与えられる 2 ¼Cr-1Mo鋼の温度538°Cの材料定数および材料パラメータ<sup>10)</sup> を用いた計算例を示す。

・材料定数

弾性係数  $E = 22467.6$  (ksi)

降伏応力  $K = 0.82$  (ksi)

・材料パラメータ

$\mu = 3.61 \times 10^7$  (h) ,  $n = 4$  ,  $m = 7.73$  ,  $\beta = 1.5$  ,

$R = 9.0 \times 10^{-3}$  (ksi) ,  $H = 1.37 \times 10^{-3}$  (ksi/h) ,  $G_0 = 0.14$  (ksi)

・負荷条件

ひずみ速度  $\dot{\epsilon} = 4\% / \text{min}$  以下の負荷履歴を与える。

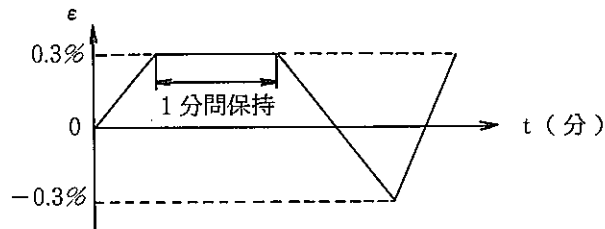


Fig. 3.2 -- 1 Loading Condition

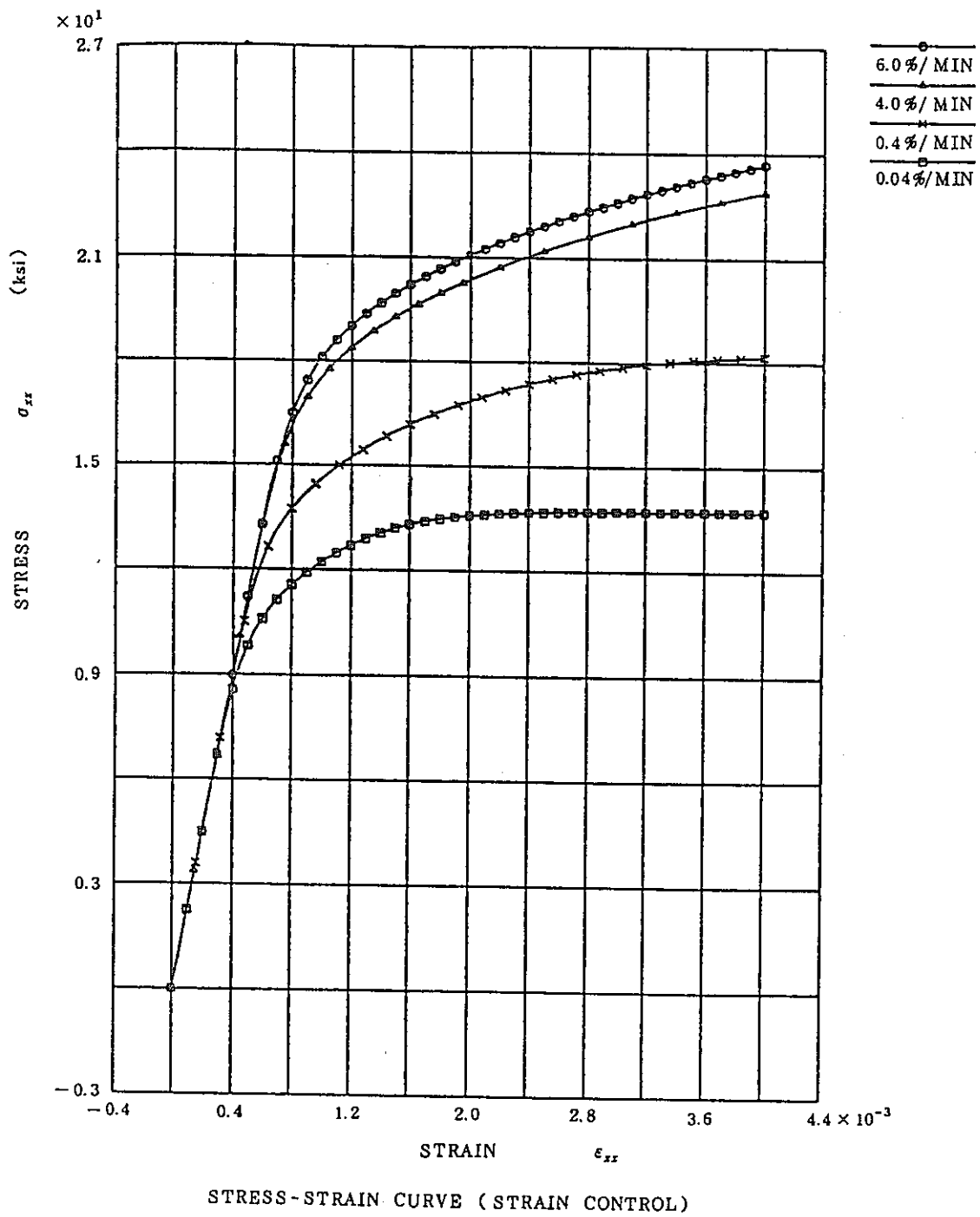


Fig. 3.2 - 2 Strain Rate sensitivity of the Robinson model.

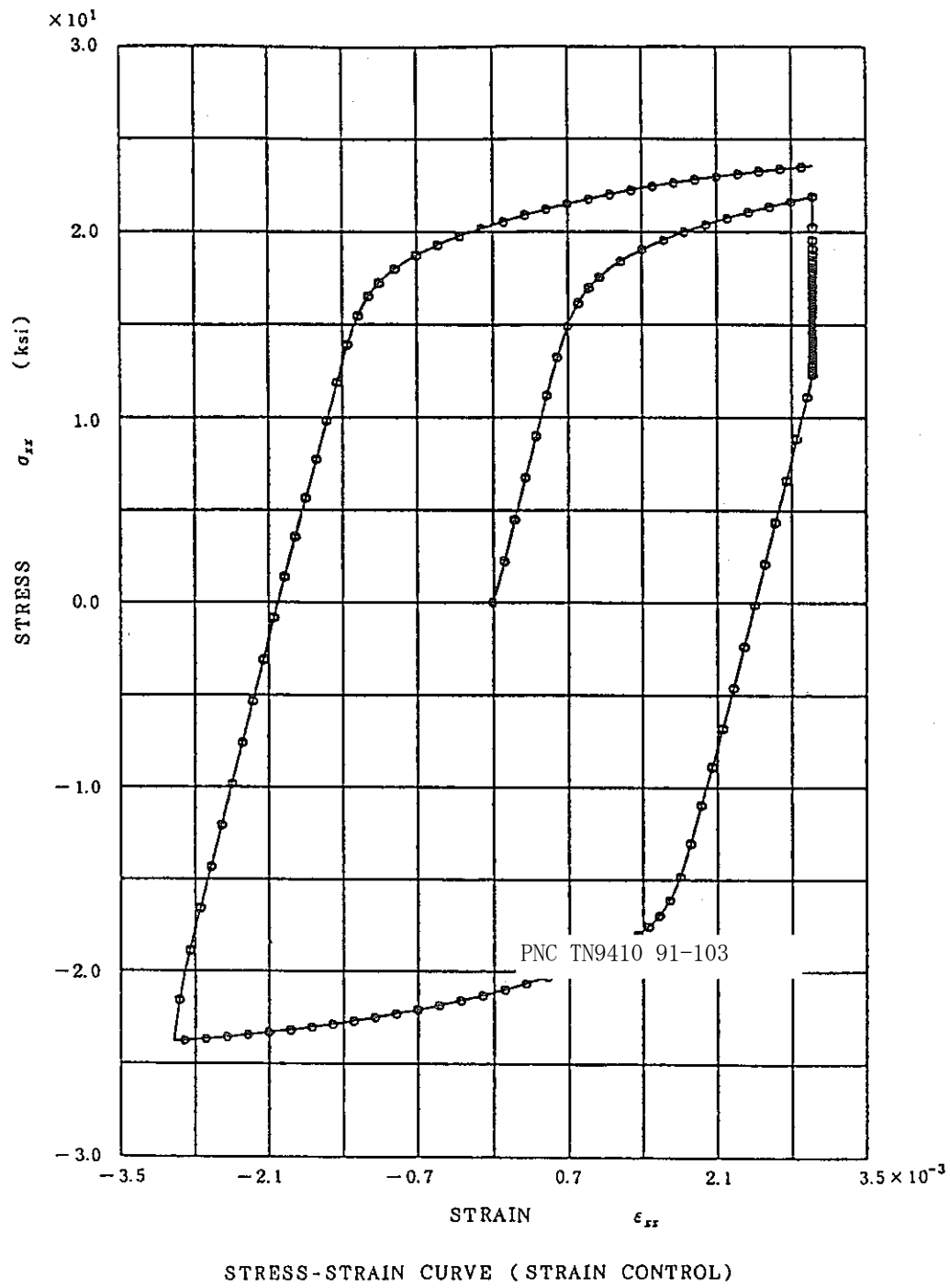


Fig.3.2 - 3 Cyclic Response of the Robinson model with tensile hold.

### 3.3 Bodner-Partomモデル

Bodner-Partomモデル<sup>20)</sup> は文献<sup>19)</sup> によると、降伏や除荷、負荷の判定を行なわない最初の統一型構成モデルとされている。このため、このモデルは内部状態変数として等方硬化変数： $Z$ 一つのみを持つ非常に簡単な形をしている。以下にBodner-Partomモデルの基礎式を示す。

- ・流れ則

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda S_{ij} \quad (3.3-1)$$

- ・運動式

$$D\dot{\epsilon} = D_0 \exp \left\{ - \frac{n+1}{n} \left( \frac{Z^2}{3J_2} \right)^n \right\} \quad (3.3-2)$$

$$J_2 = 0.5 * S_{ij} S_{ij} \quad (3.3-3)$$

$$\lambda^2 = D\dot{\epsilon} / J_2 \quad (3.3-4)$$

- ・等方硬化の発展式

$$\dot{Z} = m_1 (Z_1 - Z) \dot{W}^p - A_1 Z_1 \left( \frac{Z - Z_2}{Z_1} \right)^{r_1} \quad (3.3-5)$$

- ・材料定数

$$D_0, Z_0, Z_1, Z_2, m_1, A_1, r_1, n$$

- 解析例

ここでは文献<sup>19)</sup> の解析をADMODELにより行う。

- ・各ひずみ速度における単軸単調引張り問題

ひずみ速度 $1.5E-3$ ,  $1.67E-4$ ,  $1.67E-5$  [SEC]<sup>-1</sup>において単軸単調引張りの解析を行いその応力-ひずみ特性を調べた。この結果をFig. 3.3-1に、解析に使用した材料定数(RENE' 95 649°C<sup>19)</sup>)を以下に示す。

$$\begin{aligned} D_0 &= 10^4 [\text{sec}]^{-1}, & Z_0 &= 1600 [\text{MPa}], & Z_1 &= 2200 [\text{MPa}] \\ Z_2 &= 2200 [\text{MPa}], & m_1 &= 0.4 [\text{MPa}]^{-1}, & A_1 &= 4E-4 [\text{sec}]^{-1} \\ r_1 &= 1.5, & n &= 3.2, & E &= 1.772E5 [\text{MPa}] \end{aligned}$$

・単軸繰返し変形問題

RENE' 80 982°Cにおいてひずみ速度が各々0.002, 0.2/分, ひずみ範囲0.9%での引張り、圧縮繰返し変形の解析をおこないその応力-ひずみ特性を調べ PNC TN9410 91-103

解析結果を各々図3.3-2(a), (b)に、解析に使用した材

・解析に使用した材料定数(その2)RENE' 80982°Cを想定

$$D_0 = 10^4 [\text{sec}]^{-1}, \quad Z_0 = 8613 [\text{MPa}]$$

$$Z_2 = 12158 [\text{MPa}], \quad m_1 = 0.6154 [\text{MPa}]^{-1}$$

$$r_1 = 3.563, \quad n = 0.2853$$

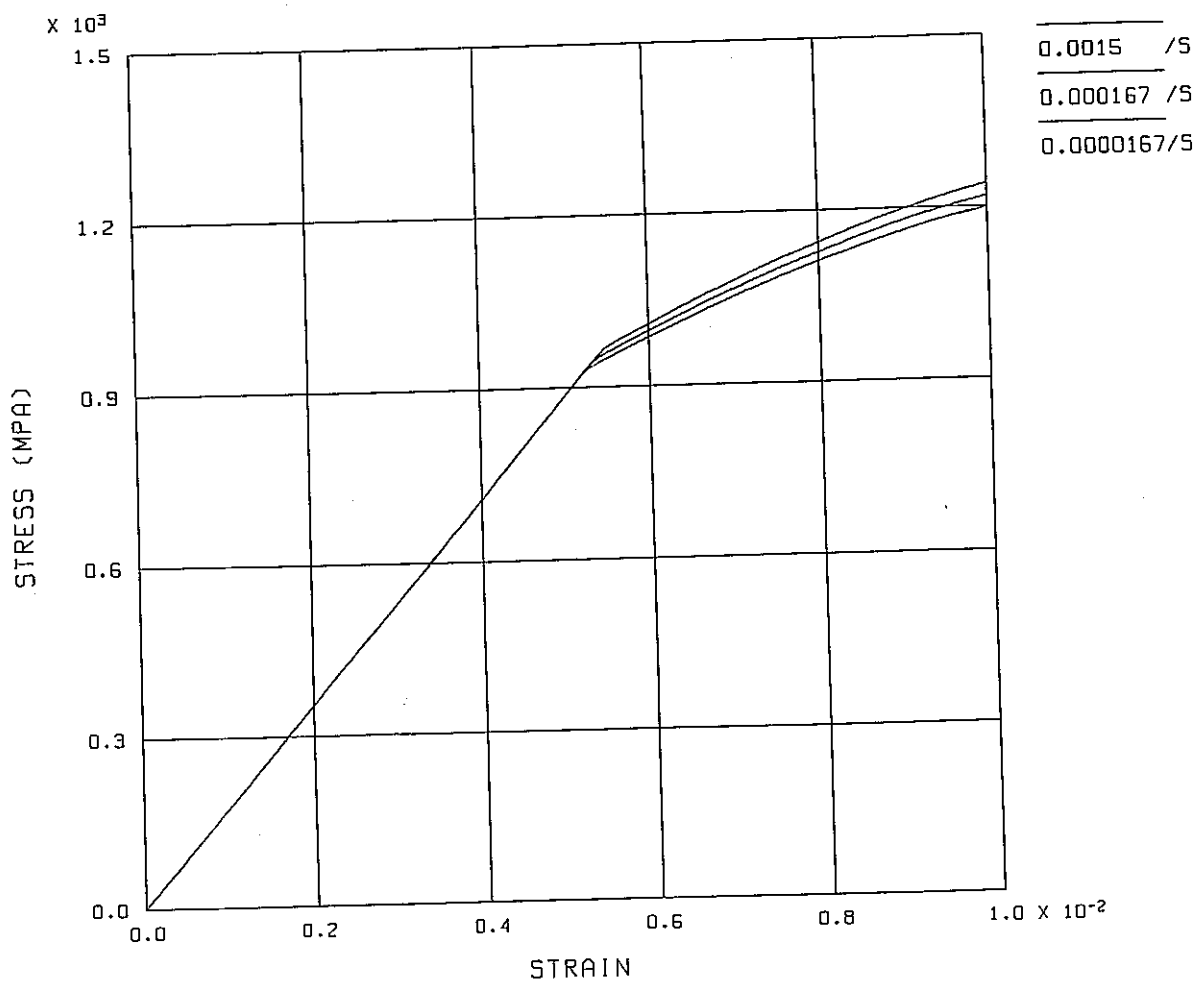
各ひずみ速度における単軸単調引張り問題の解析結果速度依存性をもっていることが明かである。

単軸繰返し変形問題の解析結果Fig. 3.3-2(a), (b)にも依存性をもっており、また繰返し変形に伴う塑性ひずみエ

モデルがひずみ

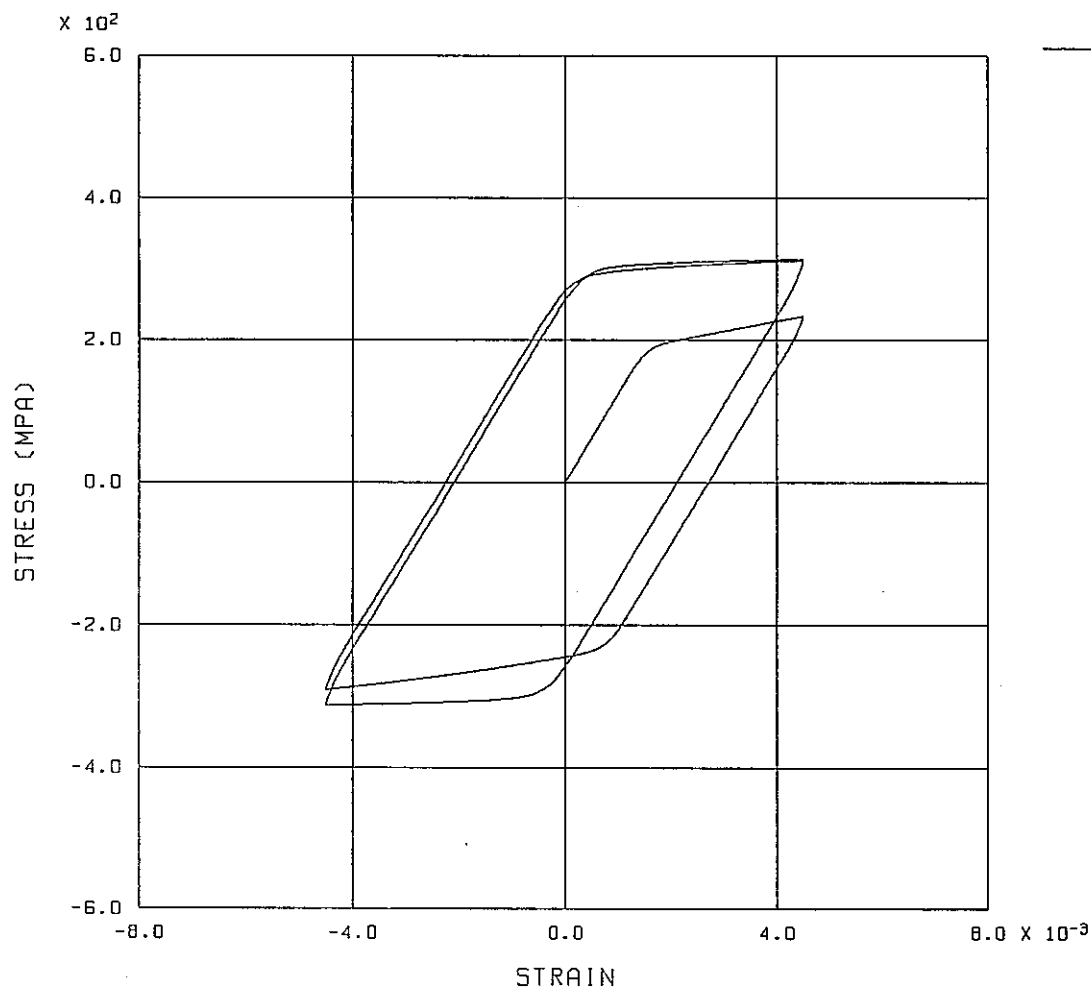
ひずみ速度依  
が進行している。





BODNER-PARTOM MODEL (TYPE-2)  
 各ひずみ速度における単軸単調引張問題

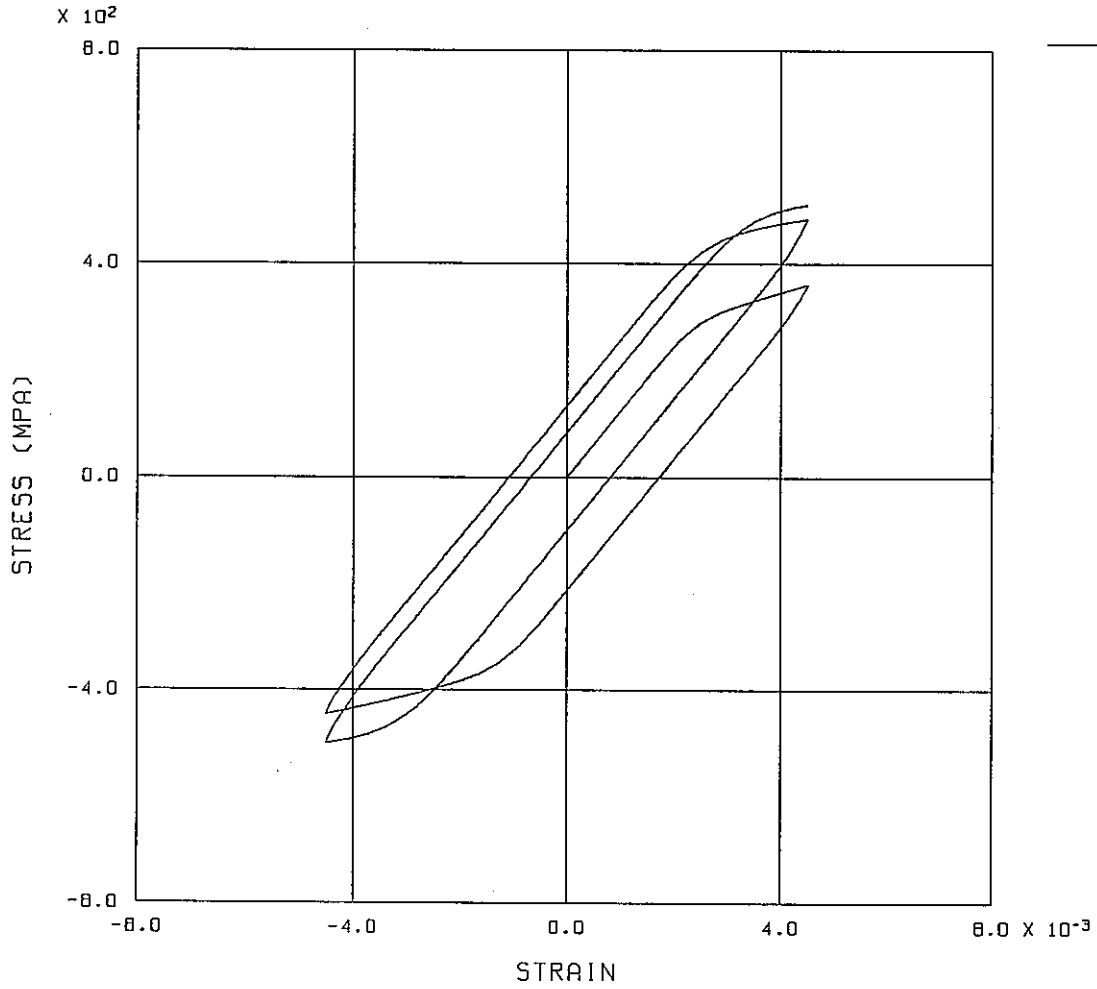
Fig. 3.3 - 1 Strain Rate Sensitivity of the Bodner model.



BODNER-PARTOM MODEL (TYPE-2) 0.002/M T=982

単軸繰り返し変形問題(1) 900 Step/Cycle. 2026 Steps

Fig. 3.3 - 2(a) Cyclic Response of the Bodner model. ( $\dot{\epsilon} = 0.002 / \text{min}$ )



BODNER-PARTOM MODEL (TYPE-2) 0.2/M T=982

単軸繰り返し変形問題(2)

Fig. 3.3 - 2(b) Cyclic Responce of the Bodner model. ( $\dot{\epsilon} = 0.2 / \text{min}$ )

## 3.4 walkerモデル

Walkerモデルは状態変数として抗応力・背応力を持ち、流れ則として超過応力の巾乗則を採用した典型的な統一型構成モデルである。このモデルにおける最も特徴的な点は背応力の発展式にあり、この中に材料定数の温度微分項や動的・静的な回復項を持っている。またこのモデルもBodner-Partomモデル同様、降伏や除荷・負荷の判定を行なわない。以下に文献<sup>10)</sup>によるWalkerモデルの基礎式を示す。

・流れ則

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_j \left[ \frac{X}{K} \right]^n \frac{\frac{3}{2} S_{ij} - \alpha_{ij}}{X} \quad (3.4-1)$$

ただし

$$X^2 = \frac{2}{3} \left[ \frac{3}{2} S_{ij} - \alpha_{ij} \right] : \left[ \frac{3}{2} S_{ij} - \alpha_{ij} \right] \quad (3.4-2)$$

・背応力の発展式

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{ij} = & (n_1 + n_2) \dot{\epsilon}_{ij} + \epsilon_{ij} \frac{n_1}{T} \dot{T} \\ & - (\alpha_{ij} - \alpha_{ij}^0 - n_1 \dot{\epsilon}_{ij}) \left( G - \frac{1}{n_2} \frac{n_1}{T} \dot{T} \right) \end{aligned} \quad (3.4-3)$$

ただし

$$\dot{G} = (n_3 + n_4 \exp(-n_5 R)) \dot{R} + n_6 \left( \frac{2}{3} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \right)^{(m-1)/2} \quad (3.4-4)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (3.4-5)$$

・抗応力の発展式

$$K = K_1 - K_2 \exp(-n_7 R) \quad (3.4-6)$$

・材料定数

$$K_1, K_2, n, m, \alpha_{ij}^0, n_1 \sim n_7$$

## ○Walkerモデル解析例

文献<sup>10)</sup>に従いWalkerモデルの解析をADMODELによって行った。ただしWalkerモデルの流れ則は両辺の単位が一致していない。よって解析において単位を自由に選ぶことはできず、この解析では応力として[MPa]、時間として[分]の単位を採用している。

・解析に使用した材料定数(Haltelloy-X, 649°Cを想定)

$$K_1=659.35[\text{MPa}], \quad K_2=0.0 \quad [\text{MPa}], \quad \alpha^0=-13.79[\text{MPa}]$$

$$n = 12.658, \quad m = 1.16,$$

$$n_1=0.0, \quad n_2=1.034E5[\text{MPa}], \quad n_3=781$$

$$n_4=n_5=n_6=n_7=0, \quad E=1.62E5[\text{MPa}]$$

## ① 単軸応力リラクセーション問題

ひずみ速度:  $5.8E-4/\text{min}$ にて10分間引張り、その後変位を一定に保って50分間のリラクセーションを行う。

解析結果をFig. 3.4-1に示す。

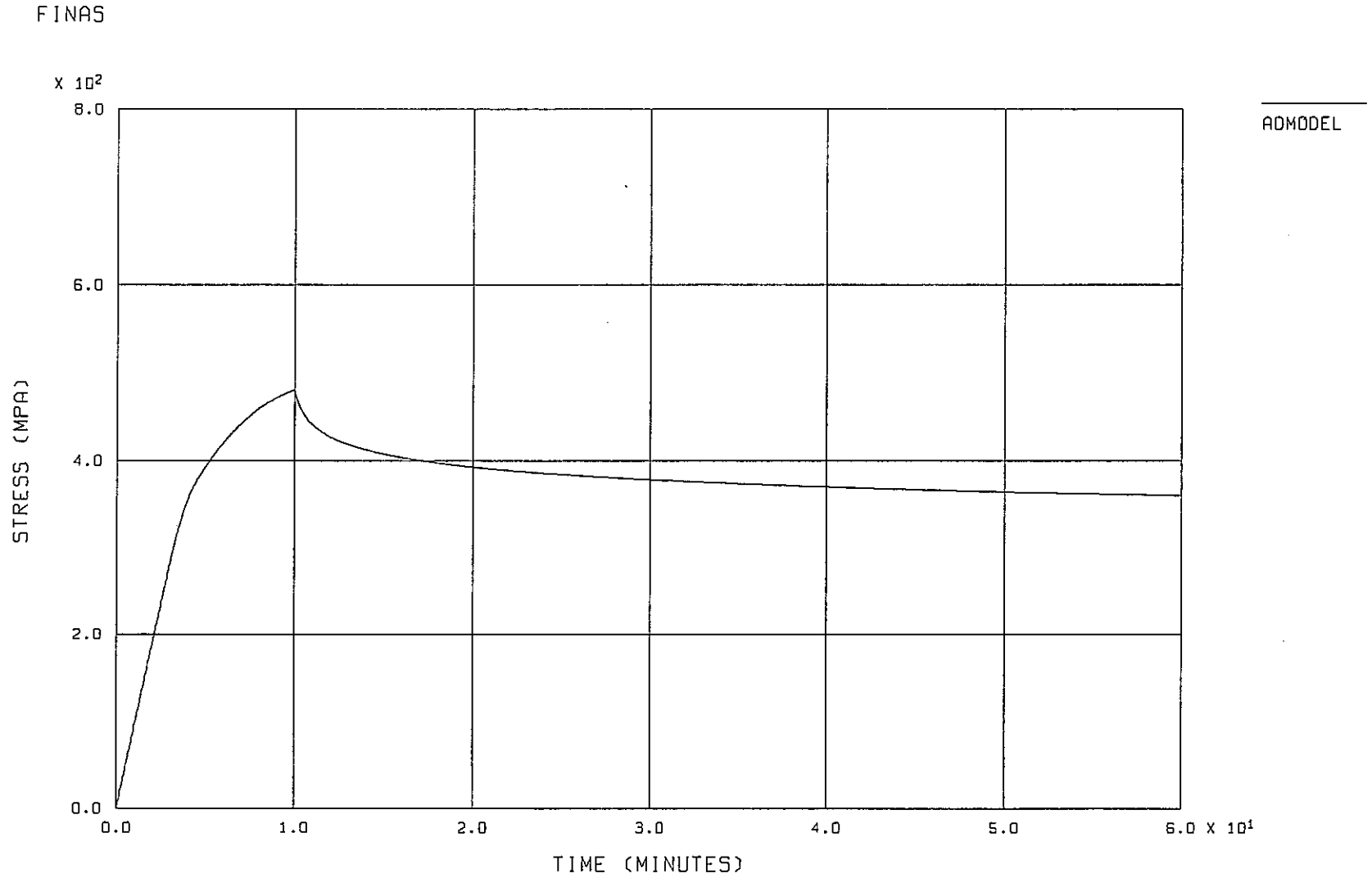
## ② 変動ひずみ範囲におけるヒステリシスループ

ひずみ速度:  $3.876E-3/\text{min}$ にてfig3.4-2(a)に示すひずみを与えそのヒステリシスループを調べる。

解析結果をFig. 3.4-2(b)に示す。

単軸リラクセーションの解析結果 (Fig. 3.4-1) より明かなように、このモデルは統一型であるが故に一つの構成式によって弾塑性挙動とクリープ挙動を表現することができる。

また変動ひずみ範囲の解析結果 (Fig. 3.4-2) によれば負荷の反転時に応力がなだらかに下降しているのが観察される。これはWalkerモデルが一般の弾塑性モデルのように除荷、負荷の判定を行わないため、負荷が反転しても超過応力によって粘塑性ひずみが発生する。



STRESS RELAXATION BY WALKER MODEL (HASTELLOY-X, T=649)  $\dot{\epsilon} = 5.8 \times 10^{-4}/\text{min}$

Fig. 3.4 - 1 Stress Relaxation by the Walker model.

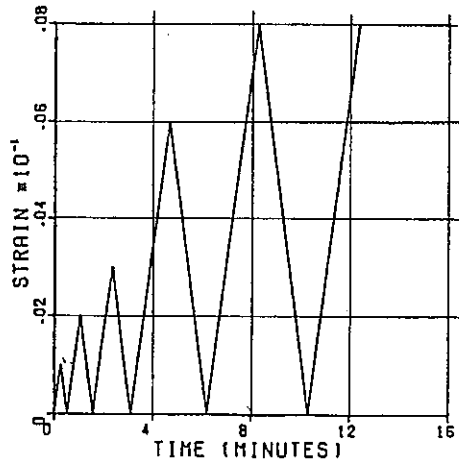
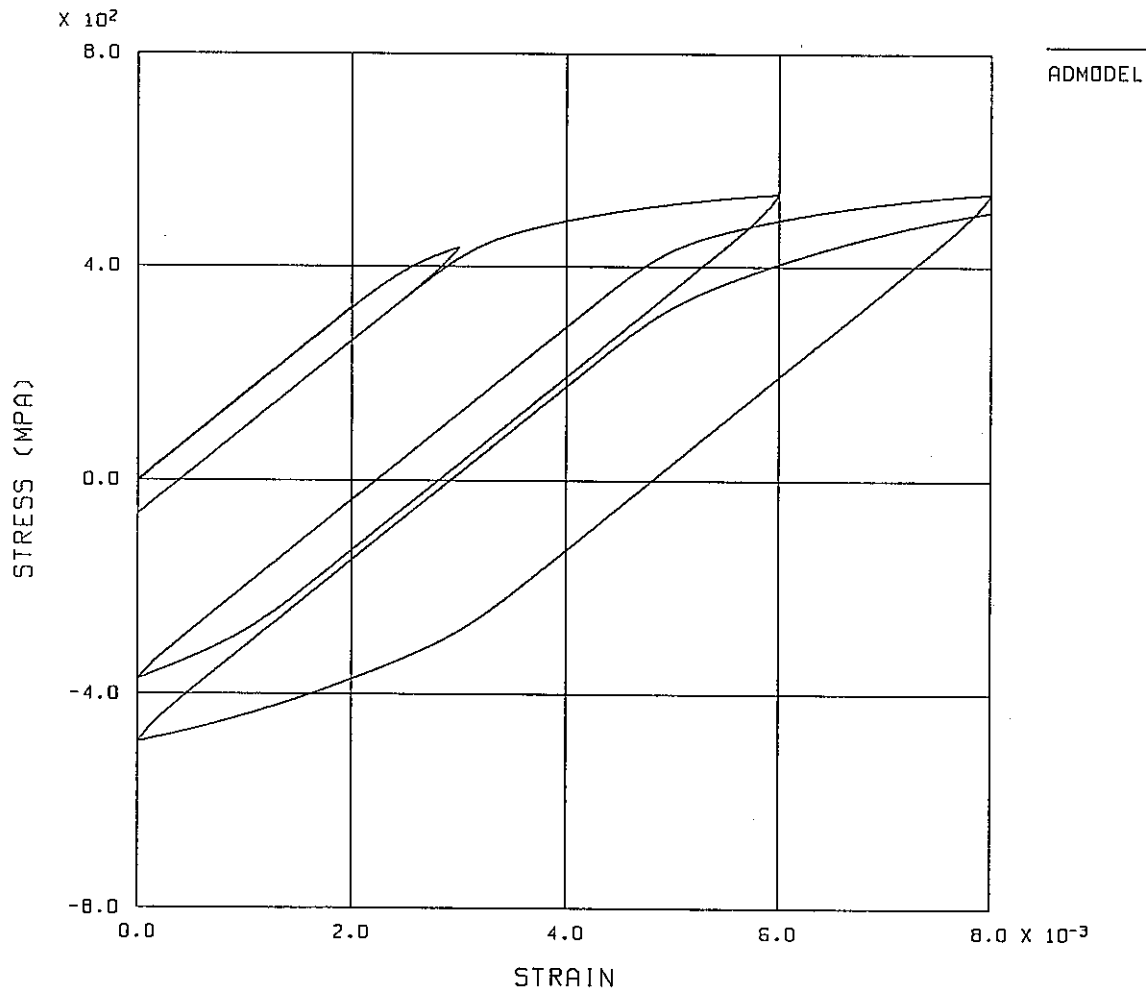


Fig. 3.4 - 2(a) Loading History.<sup>19)</sup>

FINAS



HYSTERESIS LOOP BY WALKER MODEL (HASTELLOX-X, T=649)

$$\dot{\epsilon} = 3.876 \times 10^{-3} / \text{min}$$

Fig. 3.4 - 2(b) Cyclic Response of the Walker model.

## 4. モデル定数決定方法

### 4.1 Chabocheモデル (弾塑性)

ここでは、ひずみ記憶面の概念を取り入れたChabocheモデル (弾塑性) のモデル定数を事業団で得られたSUS304鋼の平均的な材料特性式より定め、この問題点を検討する。

2.4節にて示したひずみ記憶面の概念を取り入れたChabocheモデルの基礎式は背応力：Q関数について一般的な形をとっているため、まずこれらの形を明確なものにする。

#### ① 背応力について

背応力については、Armstrong型の微分方程式による第一項と、線型硬化を表わす第二項の和として表わす。

$$\Sigma \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\dot{\alpha}_1 = C_1 \left( \frac{2}{3} a_1 \dot{\epsilon}^P - \dot{\alpha}_1 \frac{\dot{\epsilon}^P}{\epsilon^P} \right)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{a_2 c_2}{3} \dot{\epsilon}^P *1$$

この考え方によると  $\alpha_2 \epsilon^P$  が比例するので非常に実用的である。

#### ② Q関数について

文献<sup>6)</sup>によると、 $Q(\rho) = Q_M + (Q_0 - Q_M)e^{-2\rho}$ と表わされているがSUS304鋼の材料特性の場合、この関数はあまりよい近似とならないので、従来同様べき乗形を採用する。ただし初期値  $Q_0$  をもたせるために\*2シフト量  $\rho_s$  を付加する。

$$Q(\rho) = L \cdot (\rho + \rho_s)^m$$

以上の定式化により弾塑性Chabocheモデルは以下のようになる。

\*1  $\alpha_2$  項の  $a_2 c_2$  は、慣例に従って2項の積の形にしているが独立量は1つである。

よって、 $a_2 c_2$  で1つの材料定数と考えている。

\*2  $Q_0$  をもたせる理由は初期の等方硬化量を明確にするためである。



・降伏面

$$f = \left[ \frac{3}{2} \left( S - \sum_{j=1}^2 \alpha_j \right) : \left( S - \sum_{j=1}^2 \alpha_j \right) \right]^{1/2} - R - k \leq 0$$

$$\begin{cases} \dot{R} = b [Q(\rho) - R] \dot{\epsilon}^P, & Q(\rho) = L(\rho + \rho_s)^m \\ \dot{\alpha}_1 = c_1 \left( \frac{2}{3} a_1 \dot{\epsilon}^P - \alpha \dot{\epsilon}^P \right) \\ \dot{\alpha}_2 = \frac{2}{3} a_1 c_1 \dot{\epsilon}^P \end{cases}$$

・ひずみ記憶面については2.4節に同じ

また単軸問題における応力-ひずみ関係の解析的表現 (2.4-16~18) は以下のようにになる。

・単調応力・ひずみ関係

$$\sigma_M(\epsilon^P) = a_1(1 - e^{-c_1 \epsilon^P}) + a_2 c_2 \epsilon^P + R + k \tag{4.1-1}$$

・繰り返し応力・ひずみ関係

$$\frac{\Delta \sigma_M(\Delta \epsilon^P)}{2} = a_1 \left[ \frac{2}{1 + e^{-2c_1 \frac{\Delta \epsilon^P}{2}}} - 1 \right] + a_2 c_2 \frac{\Delta \epsilon^P}{2} + Q \left( \frac{\Delta \epsilon^P}{2} \right) + k \tag{4.1-2}$$

・繰り返し応力・ひずみヒステリシスループ

$$\begin{aligned} \sigma_M^*(\Delta \epsilon^P, \epsilon^{P*}) &= 2 a_1 \left[ \frac{1 - e^{-c_1 \epsilon^{P*}}}{1 + e^{-c_1 \Delta \epsilon^P}} \right] + a_2 c_2 (\epsilon^{P*} - \Delta \epsilon^P / 2) \\ &\quad + 2 Q(\Delta \epsilon^P / 2) + 2 k \end{aligned} \tag{4.1-3}$$

ただし

$$Q(\rho) = L(\rho + \rho_s)^m$$

よって、このモデルにおいて定めるべき材料定数は、 $a_1, c_1, a_2 c_2, b, L, m, \rho_s, k, \eta$  の9個である。

$\sigma$  のサフィックス 'M' はモデルを表わす。これに対して実験式は 'ex' を用いる。

## ○モデルの適用性について

前述のChabocheモデルについてSUS304鋼の材料特性式の適用性について考察する。

## i) 単調引張の傾きは、繰り返しヒステリシスループの傾きより大きい。

前ページ(4.1-1)、(4.1-3)式において、ひずみ範囲が十分大きければ各々の傾きが

$$a_2 c_2 + \frac{dR}{d\varepsilon^P}, \quad a_2 c_2 \text{ へ漸近する。よって各々の勾配は、一定値 } a_2 c_2 \text{ へ漸近し、}$$

その傾きは、単調の方が初期等方硬化の分だけ大きい。これに対し、実験値では、Fig. 4.1-1に示すようにこの傾きがひずみ範囲に大きく依存し、かつ、単調の方が大きくなるのは $\Delta\varepsilon$ が2.3%以上である。

ii) 繰り返しヒステリシスループにおける弾性より塑性への過渡的非線形部分の大きさは、単調の2倍となる。(4.1-1)、(4.1-3)において、 $R$ の $\varepsilon^P$ に対する線形性を仮定し、 $\Delta\varepsilon^P$ が十分大きければ各々の非線形項は、 $a_1(1 - e^{-c_1\varepsilon^P})$ 、 $2a_1(1 - e^{-c_1\varepsilon^P*})$ となり、後者が前者の2倍となる。Fig. 4.1-2に実験値より推定される $a_1$ の値を示しているが、これによると繰り返しヒステリシスループの値が単調よりなかり大きいことがわかる。

iii) Q関数が初期値 $Q_0$ をもち単調引張の等方硬化係数は $Q_0/b$ である。

$Q(\rho)$ の値は、繰り返し硬化量を表わすから、 $Q$ が初期値を持つことは、繰り返し応力・ひずみ関係が単調応力・ひずみ関係よりシフト量を持つことを意味する。さて一般に実験結果では、このような傾向はなく、むしろ繰り返し硬化の発生しない領域が存在する場合もある。

以上より得られる結論は、このモデルにおいてすべての実験結果を満足させることは不可能であることが解る。特に問題となるのは、ii)の非線形部分の大きさであり、単調と繰り返しヒステリシスループの両方を実験値にあわせることはできない。よってここでは従来通りに繰り返しヒステリシスループを重視した手順-①と、単調を重視した手順-②を示す。用いる実験式は、事業団により定められたSUS304鋼に対する平均的な材料特性式で550°Cの値とする。ただし、 $b$ 、 $\eta$ の決定方法については不明なので、 $a_1$ 、 $c_1$ 、 $a_2 c_2$ 、 $b$ 、 $L$ 、 $m$ 、 $\rho_s$ 、 $k$ の7個の定数を定める。

## ○材料定数決定手順-①(繰り返し応力・ひずみヒステリシスループより求めるもの)

## 0) 繰り返しひずみ範囲の決定

$\Delta\varepsilon = 0.02$ を基準に材料定数の決定を行う。ただし式は塑性ひずみベースに表わされているので、右図のように、 $\Delta\varepsilon$ に対応する単調、繰り返し塑性ひずみ範囲 $\Delta\varepsilon^{P_1}$ 、 $\Delta\varepsilon^{P_2}$ を実験値により数値的に求めた。

$$\Delta\varepsilon^{P_1} = 0.00892, \quad \Delta\varepsilon^{P_2} = 0.01548$$

i) 初期降伏応力：kの決定

kの値は、非線形繰返し非硬化領域モデル同様<sup>10)</sup>、 $\epsilon^P = 0.00005$ に対応する単調応力ひずみ関係の実験値とした。(0.00005 =  $\epsilon^{P_0}$ とおく)

$$k = 10.81 \text{Kg/mm}^2$$

ii) 背応力第2項の定数  $a_2, c_2$  の決定

$a_2, c_2$ の値は $\Delta \epsilon = 0.02$ のときの繰返し応力・塑性ひずみヒステリシスループの実験値において $\Delta \epsilon^{P_{c/2}} \sim \Delta \epsilon^P$ 間のデータを最小自乗法によって直線回帰することによって定めた。

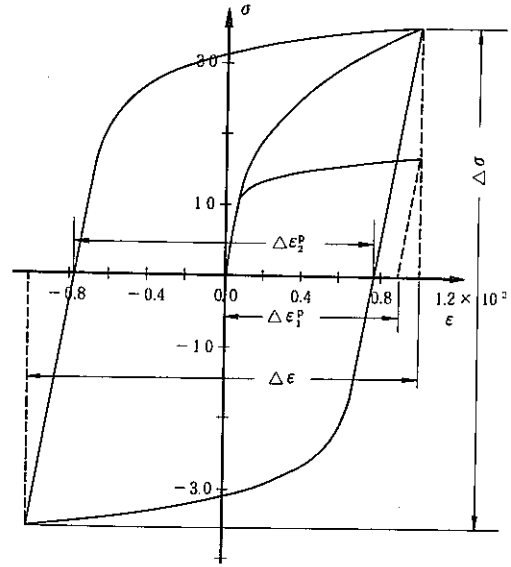


Fig. 4.1-3 Schematic representation of stress-strain relationship.

iii) 背応力第一項の定数  $a_1, c_1$  の最決定 (繰返し応力・ひずみヒステリシスループの形状より)

$\Delta \epsilon = 0.02$ の繰返し応力・ひずみヒステリシスループにおいて、降伏応力  $\epsilon^{P_0}$  (=0.00005) のときの応力とする。

$$\sigma_{ox}^* (\Delta \epsilon^{P_2}, \epsilon^{P*}) = 2 (Q (\Delta \epsilon^{P_2}/2) + k)$$

さて、 $a_2, c_2$  は、ii) によって定っており、(4.1-3) 式は、 $a_1, c_1$  のみの関数となる。 $a_1, c_1$  は以下の関数の最小値問題を解くことによって数値的に求める。

$$\phi_3 = \int_0^{\Delta \epsilon^{P_2}} \left[ \sigma_M^* (\Delta \epsilon^{P_c}, \epsilon^{P*}) - \sigma_{ox}^* (\Delta \epsilon^{P_2}, \epsilon^{P*}) \right] d \epsilon^{P*}$$

iv) Q関数の定数決定 (繰返し応力・ひずみ関係より)

まず  $\rho_0$  については簡単のために、 $\rho_0 = \epsilon^{P_0}$  とする。L, m については、繰返し応力・ひずみ関係より以下の最小値問題として求める。

$$\phi_4 = \int_0^{\Delta \epsilon^{P_2}} \left[ \sigma_M (\epsilon^P) - \Delta \sigma_{ox} (\epsilon^P) \right]^2 d \epsilon^P$$

ただしこのとき iii) の条件を用いる

$$\sigma_{ox}^* (\Delta \epsilon^{P_2}, \epsilon^{P*}) = 2 [L (\Delta \epsilon^{P_2}/2 + \epsilon^{P_0})^m + k]$$

以上の手順によって、 $a_1, c_1, a_2, c_2, L, m, k, \rho_0$  が決まる。

○材料定数決定の手順-②

0) ~ ii) については、①の手順に同様

iii) 単調引張における等方硬化量の見積り

単調引張変形においては等方硬化量を塑性ひずみに関して線形であると仮定する。このときの等方硬化係数  $H_i$  は、右図のように初期降伏応力  $\sigma_1$  とそれに続く  $\sigma_2$  より、以下のようにして求まる。

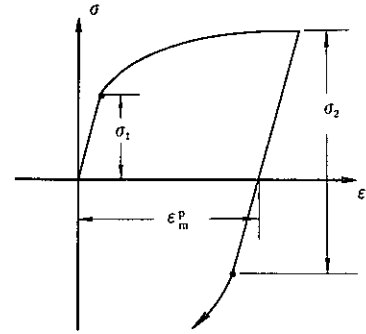


Fig. 4.1-2 Schematic Representation of isotropic hardening

$$H_i = \frac{\sigma_2/2 - \sigma_1}{\epsilon^P_m}$$

ただし、今回このような実験結果はないので、非線形繰返し非硬化領域モデルにおける  $c=0.01$  のときの  $L$  値 ( $133.9 \text{ Kg/mm}^2$ ) をこの値とする。

iv) 背応力第一項  $a_1$ ,  $c_1$  の決定 (単調応力のひずみ関係の形状より)

$a_1$ ,  $c_1$  は以下の関数の最小値問題を解くことによって定める。

$$\phi_1 = \int_0^{\epsilon^P_m} \left[ \sigma_M(\epsilon^P) - \sigma_{ex}(\epsilon^P) \right]^2 d\epsilon^P$$

v)  $Q$  関数の決定 (繰返し応力・ひずみ関係より)

$\rho_s$  については、①の手順同様  $\epsilon^P_0$  とする。また、 $L$ ,  $m$  については、以下の関数の最小値問題として求める。

$$\phi_5 = \int_0^{\Delta \epsilon^P_2} \left[ \sigma_M(\epsilon^P) - \Delta \sigma_{ex}(\epsilon^P) \right]^2 d\epsilon^P$$

以上の手順①、②にて求まった材料定数を以下に記す。

	$a_1$ [Kg/mm <sup>2</sup> ]	$c_1$	$a_2$ $c_2$ [Kg/mm <sup>2</sup> ]	$L$ [Kg/mm <sup>2</sup> ]	$m$	$\rho_s$	$k$ [Kg/mm <sup>2</sup> ]	$b$	$\eta$
手順①	8.656	1141	392.06	706.28	0.8031	0.00005	10.81	—	—
手順②	2.049	2140	392.06	287.75	0.5350	0.00005	10.81	—	—

$b$ ,  $\eta$  については今のところ明確な記述がないため、不明である。ただし、電中研モデル<sup>11)</sup> においては、同様の意味をもつ定数として、 $b=30$ ,  $\eta=0.011$  を与えている。また、これらの定数を

用いた応力・ひずみ関係を以下に載せる。結論としていえることは、Chabocheモデルは、簡単で明快なモデルではあるが背応力の発展式として、Armstrong型の微分方程式を採用しているために、単調と繰り返し応力・ひずみヒステリシスループが相似になり、モデルの適用性はよくない。また、ひずみ記憶面の概念を用いることによって、繰り返し硬化量のひずみ範囲依存性を持たせることが可能であるが、材料定数 $b$ 、 $\eta$ の物理的意味が不明確であり、初期等方硬化量がはっきりしない。

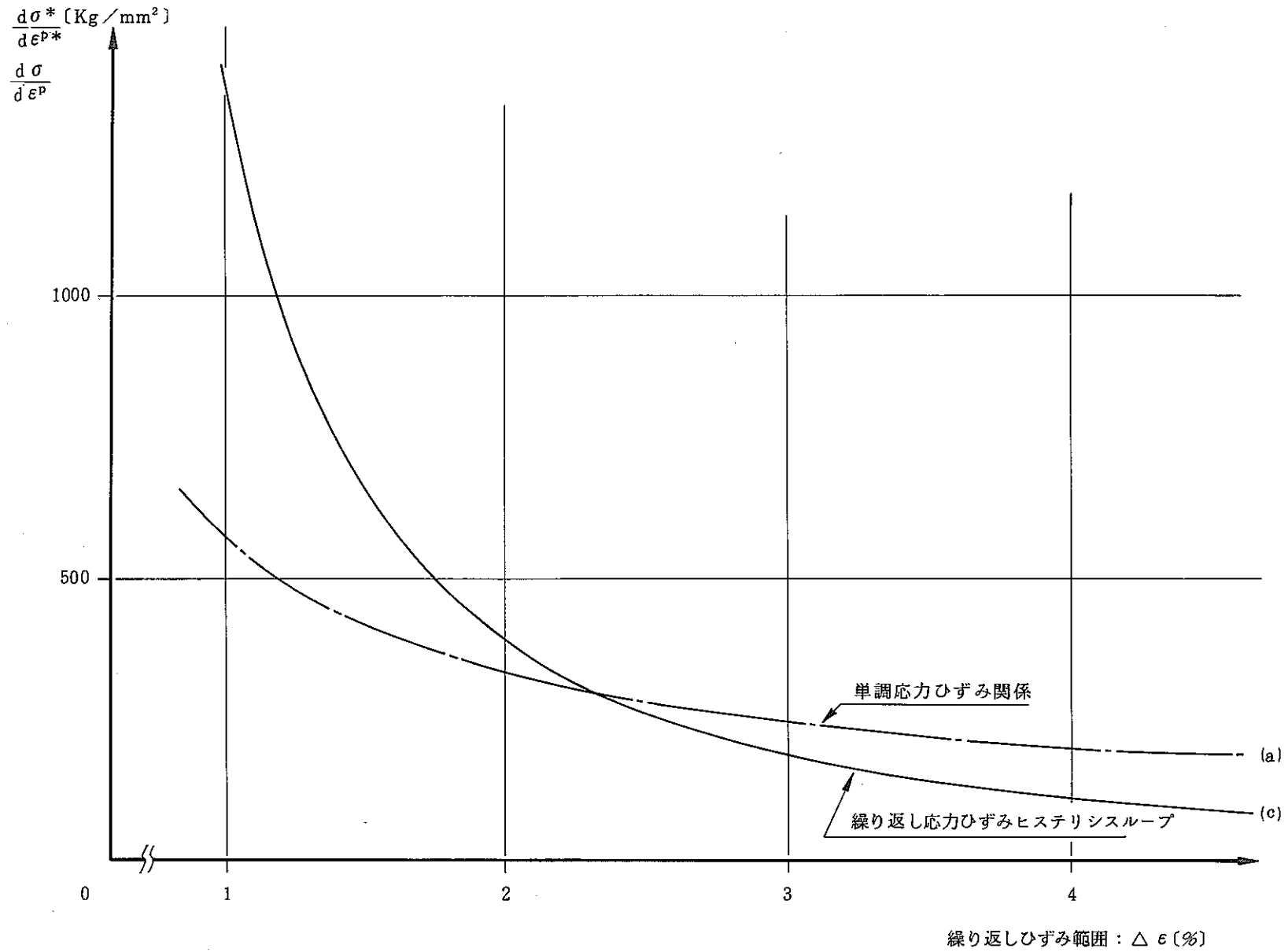
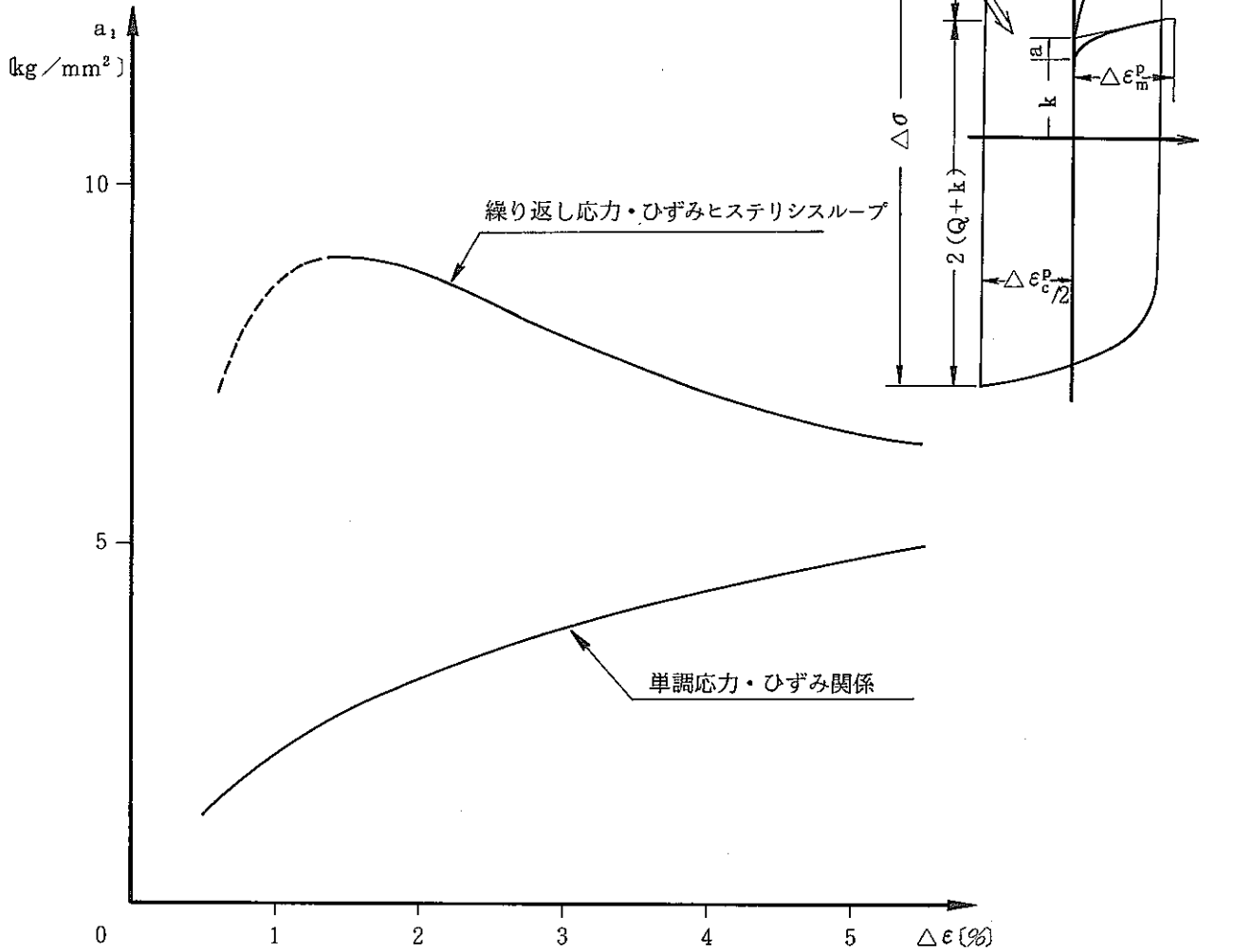


Fig. 4.1-1 Experimental Work Hardening Coefficient of 304 Type Stainless Steel (550°C)

過渡的非線形領域 ( $\approx a_1$ ) の大きさ  
 SUS 304 (550°C) PNC の実験値より



◎ 繰り返し応力・ひずみヒステリシスループより

$$a_1 \approx [\Delta\sigma(\Delta\epsilon_p^p) - \sigma^*(\Delta\epsilon_p^p, \epsilon_p^p) - B_c \Delta\epsilon_p^p/2] / 2$$

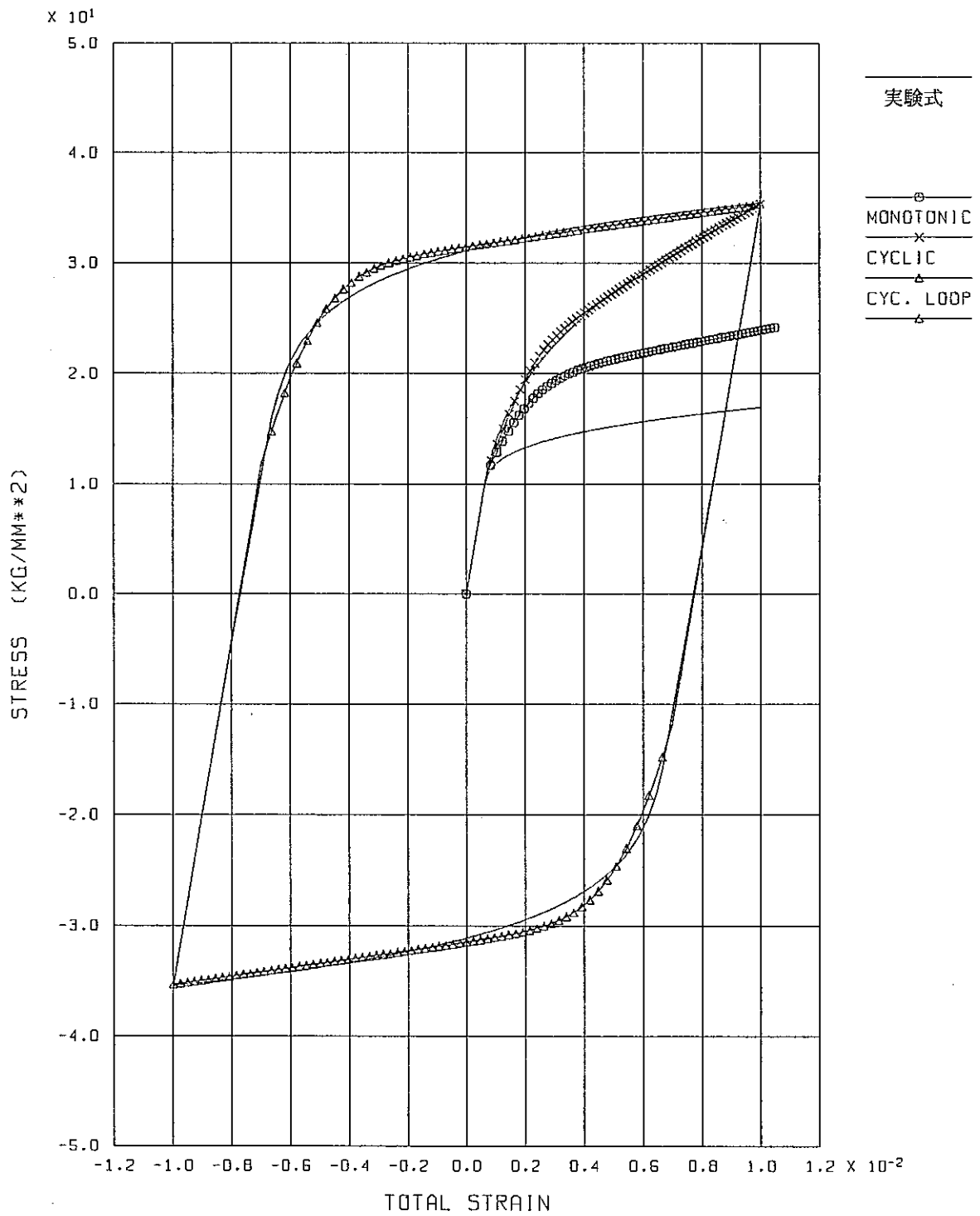
$$\sigma^*(\Delta\epsilon_p^p, \epsilon_p^p) = 2(Q + k), B_c \text{ は } \Delta\epsilon_p^p/2 \sim \Delta\epsilon_p^p \text{ 間の傾き}$$

◎ 単調応力・ひずみ関係より

$$a_1 \approx \sigma(\Delta\epsilon_m^p) - B_m \Delta\epsilon_m^p - k$$

$$B_m \text{ は } \Delta\epsilon_m^p/2 \sim \Delta\epsilon_m^p \text{ 間の傾き}$$

Fig. 4.1-2 Experimental Tansient Non-linear Part

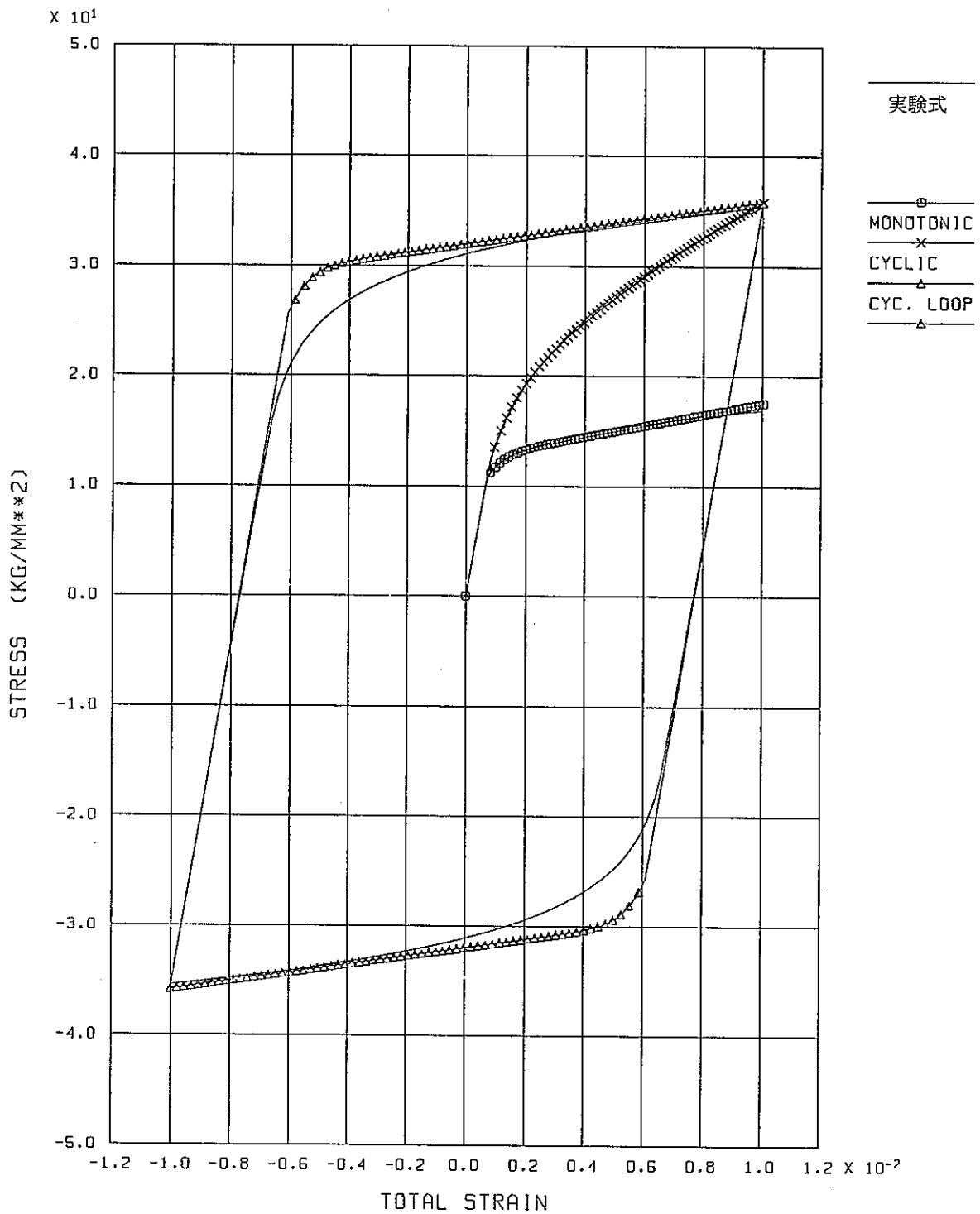


SUS-304 T=550 ELASTOPLASTIC CHABOCHE MODEL PART-2

手順-①による (繰り返しヒステリシスループより)

Fig.4.1 - 3(a) Stress-Strain Relationship by the Chaboche model.  
( Model Constant type-① )



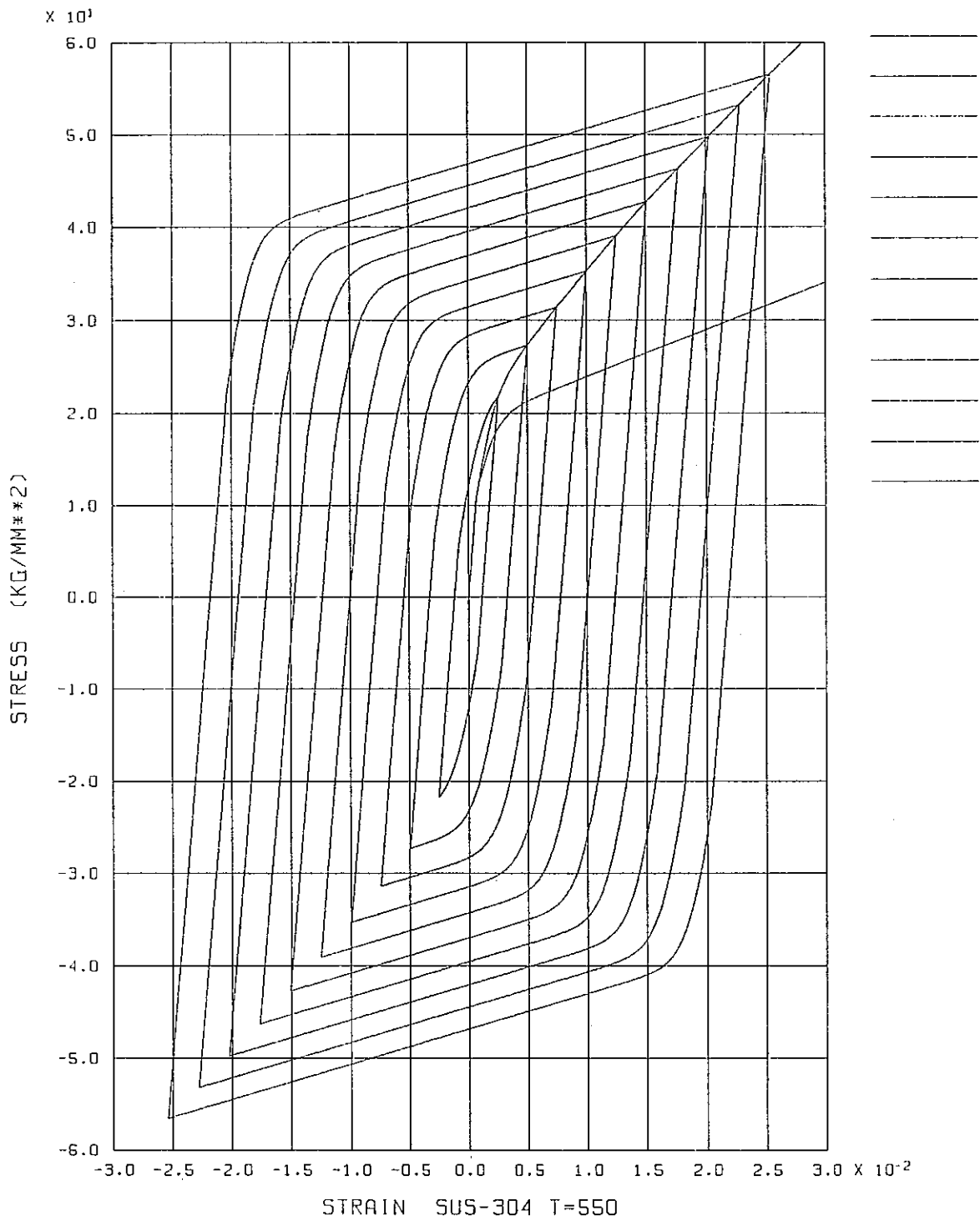


SUS-304 T=550 ELASTOPLASTIC CHABOCHE MODEL

手順-②による(単調応力・ひずみ関係より)

Fig. 4.1 - 3(b) Stress Strain Relationship by the Chaboche model.

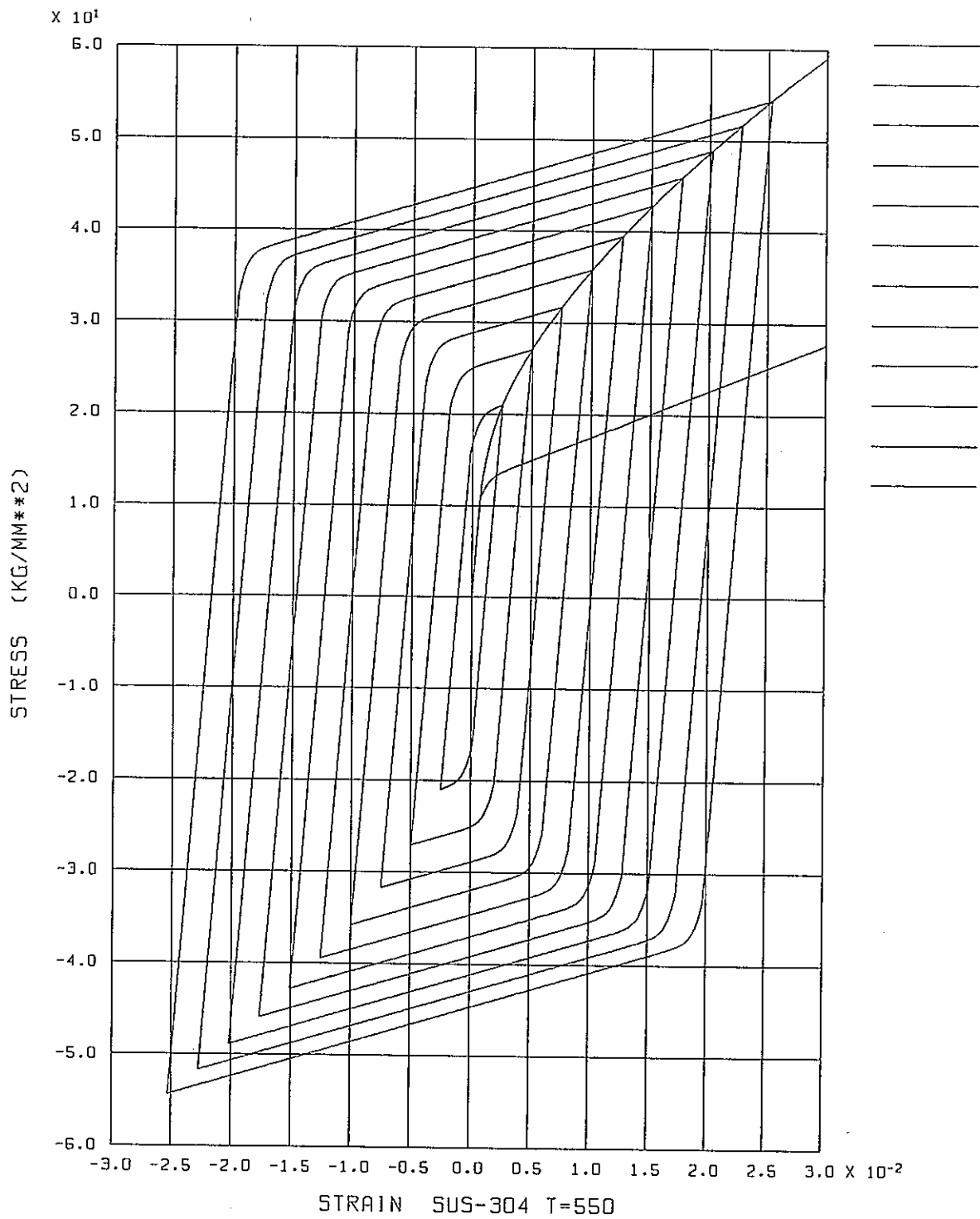
(Model Constant type-②)



ELASTIC-PLASTIC CHABOCHE MODEL

手順-①による(繰り返しヒステリシスループより)

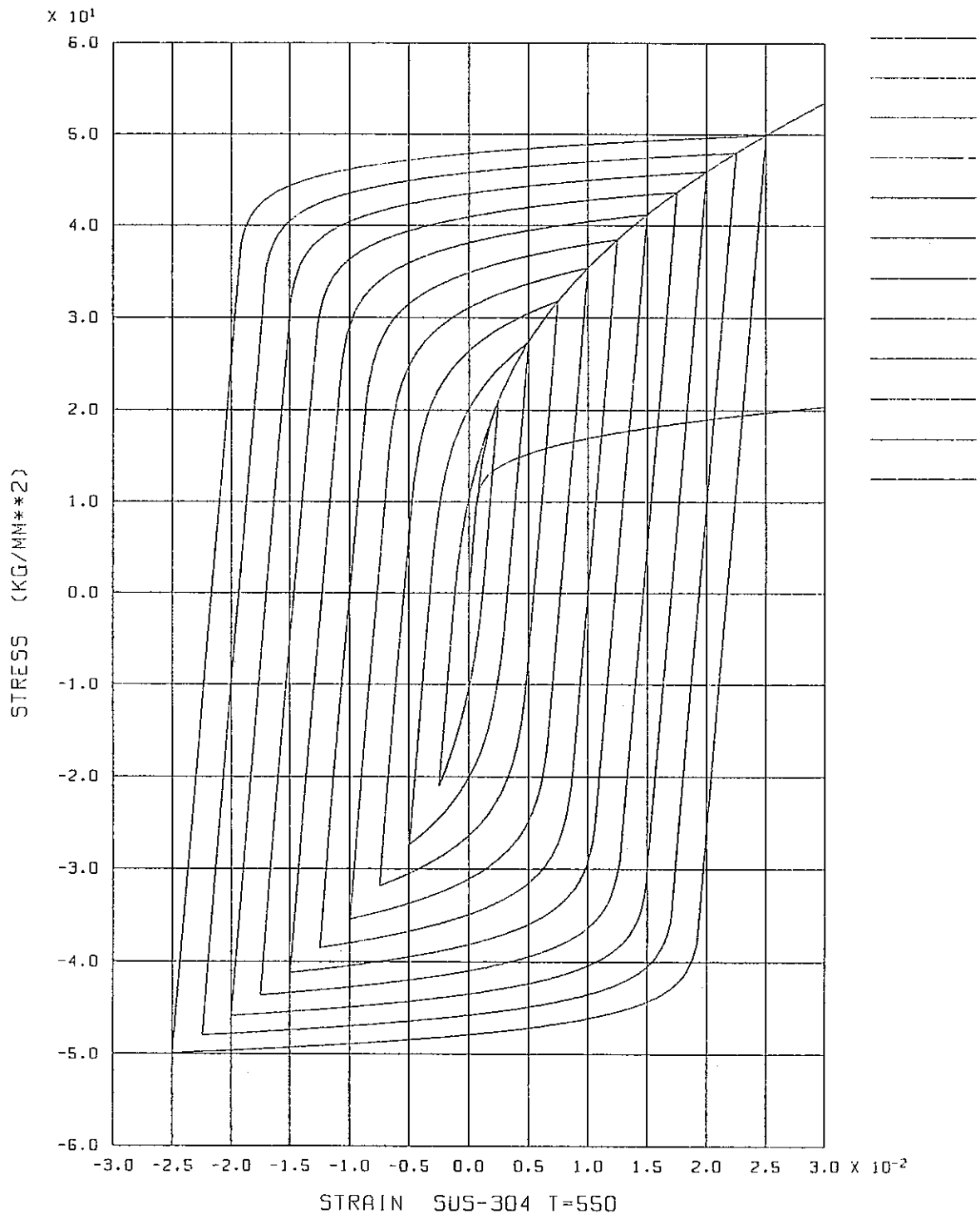
Fig. 4.1 - 4(a) Cyclic stress-strain Hysterisis loop (model coustantis type-①).



ELASTIC-PLASTIC CHABOCHE MODEL

手順-②による(単調応力・ひずみ関係より)

Fig. 4.1 - 4(b) Cyclic stress-strain Hysteresis loop (model constants type-②).



EXPERIMENTAL CYCLIC HYTERESYS LOOP

PNCによる実験式

Fig.4.1 - 4(c) Cyclic stress-strain Hyteresisloop (experiment)

#### 4.2 一般的な統一型モデル

ここでは、文献<sup>10)</sup>に従い、一般的な超過応力型の統一型モデルについて、そのモデル定数決定手順を示す。単軸状態における超過応力型の統一型モデルは、一般に以下のような形式となる。

・流れ則

$$\dot{\epsilon}^I = D \left( \frac{|\sigma - \alpha|}{K} \right)^n \cdot \frac{(\sigma - \alpha)}{|\sigma - \alpha|} \quad (4.2-1)$$

$$\left( \dot{\epsilon}^I = F(\sigma, \alpha, K, T) \right)$$

・Back Stress (背応力) の発展則

$$\dot{\alpha} = f_1 \dot{\epsilon}^I - f_2 \alpha |\dot{\epsilon}^I| - R_1 \quad (4.2-2)$$

$$(\alpha(0) = 0)$$

・Drag Stressの発展則

$$\dot{K} = g_1 |\dot{\epsilon}^I| - g_2 K |\dot{\epsilon}^I| - R_2 \quad (4.2-3)$$

$$(K(0) = K_0)$$

ただし

$$\left( \begin{array}{l} \epsilon^I : \text{非弾性ひずみ} \\ \alpha : \text{Back Stress} \\ K : \text{Drag Stress} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^I + \epsilon^T \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \text{弾性ひずみ} \quad \text{熱ひずみ} \end{array} \right)$$

$D, n, f_1, f_2, R_1, g_1, g_2, R_2, (K_0)$  は材料定数又は関数

(4.1-1) はべき乗則型の流れ則を表わし、(4.1-2.3) の第1項は硬化則を、第2項は状態変数  $\alpha, K$  の動的回復を表わす。さらに  $R_1, R_2$  は長期的な回復項である。

以下に先述のモデルに対するモデル定数決定手順を示す。

(1) 流れ則における材料定数  $n, D, (Z_0)$  の決定

まず、いくつかの一定ひずみ速度における単軸引張試験を一定温度の下に行い、これによって(4.2-1)式を決定する。さて一般にこの試験結果は下図のような傾向を示すと考えられ、2%程度のひずみが発生すると、応力はほとんど一定 ( $\sigma_0$ ) になる。

よって、この状態では、

$$\dot{\sigma} \simeq 0 \quad (4.2-4)$$

また

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^0 + \dot{\epsilon}^I + \dot{\epsilon}^T$$

ここに (4.2-4) より  $\dot{\epsilon}^0 \simeq 0$ 、一定温度であるので  $\dot{\epsilon}^T = 0$  よって、

$$\dot{\epsilon} \simeq \dot{\epsilon}^I \tag{4.2-5}$$

となる。(  $\dot{\epsilon}$  は実験条件にて一定)

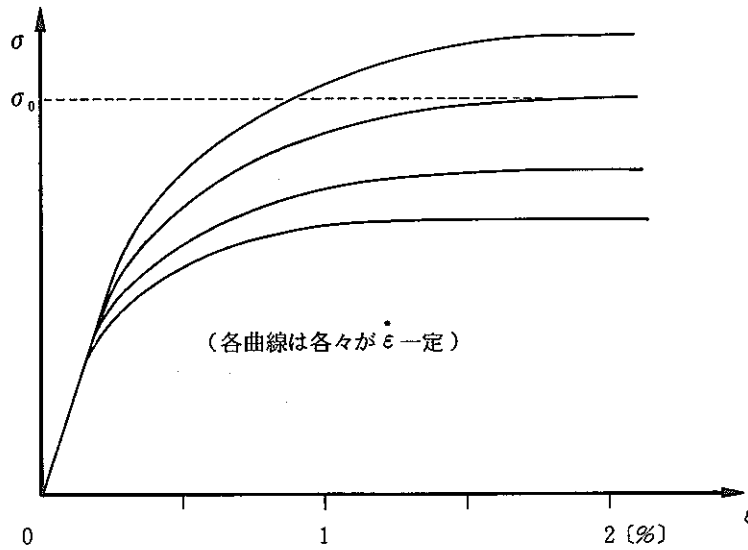


Fig.4.2 - 1 Schematic Strain Rate Sensitivity of monotonic curve

さて、このような単調引張では Drag Stress : K はそれほど変化しないと考えられるので、

$$K = K_0 \tag{4.2-6}$$

と仮定する。(ただしこの K は後に再評価される。)

この状態にて、流れ則は以下ようになる。(単軸引張では (4.2-1) 式の絶対値は不必要)

$$\dot{\epsilon}^I = D \left( \frac{\sigma_0 - \alpha}{K_0} \right)^n$$

さて、上式の左辺は、(4.2-5) によって  $\dot{\epsilon}$  (一定) である。よって上式がなりたつためには、 $\alpha = \alpha_0$  (一定) となる必要がある。よって、

$$\alpha = \alpha_0 \tag{4.2-7}$$

$$\dot{\alpha} = 0 \tag{4.2-8}$$

また、(4.2-2)式における第3項( $R_1$ )は、第1、2項に比べ小さい、 $R_1 \approx 0$ とおき、さらに(4.2-8)より(4.2-2)式は、この状態にて、

$$0 \approx \dot{\epsilon}^1 (f_1 - f_2 \alpha_0)$$

$\dot{\epsilon}^1 \neq 0$ 、よって

$$\alpha_0 \approx f_1 / f_2 \quad (4.2-9)$$

つまり、 $\alpha$ は $\dot{\epsilon}^1(\dot{\epsilon})$ に無関係に一定値 $\alpha_0$ に収束し、この値は材料定数 $f_1 / f_2$ に等しい。そこで、(4.2-1式)は、

$$\dot{\epsilon}^1 = \dot{\epsilon} = D \left( \frac{\sigma_0 - \alpha_0}{K_0} \right)^n$$

両辺の対数をとって $\phi = (\text{右辺} - \text{左辺})^2$ とおくと、

$$\phi = [n \cdot \log_0(\sigma_0 - \alpha_0) - n \log_0 K_0 + \log_0 D - \log_0 \dot{\epsilon}]^2 \quad (4.2-10)$$

よって、各実験結果より $\dot{\epsilon}$ と $\sigma_0$ の値が各々与えられるなら、そのすべての値において $\phi = 0$ を満足する $n$ 、 $D$ 、 $\alpha_0$ 、 $K_0$ が求めるべき材料定数となる。しかし一般的には、 $\phi$ 関数の極小値問題として $n$ 、 $D$ 、 $\alpha_0$ 、 $K_0$ を決定すればよい。

## (2) Back Stress履歴の決定

(1)の手順によって(4.2-1)式の材料定数は、すでに決定されているので、これをBack Stressについて解き以下のように表わす。

$$\alpha = \sigma - K_0 (\dot{\epsilon}^1 / D)^{1/n}$$

さて、今、実験結果より各ひずみ速度において、 $\sigma(t)$ 、又は $\sigma(\epsilon)$ が得られているので $\dot{\epsilon} = \sigma / E + \dot{\epsilon}^1$ より $\dot{\epsilon}^1(t)$ が求まり、上式によって各ひずみ速度における $\alpha(t)$ を決定することができる。また $\alpha(t)$ によって $\dot{\alpha}(t)$ が定まる。このとき $\alpha(t) = A t^b$ とおくとよい近似を与え $\dot{\alpha}(t)$ を計算するとき発生する誤差をおさえることができる。

## (3) Back Stressの発展則の定数決定

(2)の手順によって、 $\alpha(T)$ 、 $\dot{\alpha}(T)$ が定まっているので再び(4.2-2)式にて $R_1 = 0$ として、

$$\dot{\alpha} = f_1 \dot{\epsilon}^1 - f_2 \alpha \dot{\epsilon}^1$$

よって、

$$\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\epsilon}^1} = f_1 - f_2 \alpha$$

上式を  $\alpha$ 、 $\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\epsilon}^1}$  の関数として最小 2 乗法を用い直線近似することによって  $f_1$ 、 $f_2$  が定まる。

#### (4) Drag Stressの発展則の定数決定

(1)~(3)の手順によって (4.2-1,2) 式の材料定数は  $R_1$  を除いてすべて決定された。よってここでは、3) 式の材料定数を決定する。さて、3) 式において  $R_1 = 0$  とすると、これは以下のようなになる。

$$K = K_1 + (K_0 - K_1) e^{-g_2 \int \dot{\epsilon}^1 dt}$$

ここに、 $K_0$ 、 $K_1$  は各々  $K$  の初期値と漸近値である。

また、 $\int \dot{\epsilon}^1 dt$  が十分大きければ、 $\dot{K} = 0$  であるから (4.2-3) より、

$$K_1 = g_1 / g_2 \quad \text{の関係がある。}$$

よって、

$$K = g_1 / g_2 + (K_0 - g_1 / g_2) e^{-g_2 \int \dot{\epsilon}^1 dt}$$

また、1) を  $K$  について解き

$$K = |\sigma - \alpha| |\epsilon^1|^{-1/n}$$

これについても以下の関数の極小値問題として、 $g_1$ 、 $g_2$  を定めればよい。

$$\phi = [|\sigma - \alpha| |\epsilon^1|^{-1/n} - g_1 / g_2 + (K_0 - g_1 / g_2) e^{-g_2 \int \dot{\epsilon}^1 dt}]^2$$

ただし、今回は繰り返しの実験結果も用い、繰り返し硬化を考慮する。

#### (5) 繰り返し計算によって各定数を収束させる

以上によって (4.2-1~3) すべての定数 ( $R_1$ 、 $R_2$  は 0 のまま) が求まった。しかし、(4.2-1,2) の定数については、 $K = K_0$  の仮定の基に値を求めているので、(4)の結果を用いて再び (4.2-1) より同じ操作を行い、値を決めなおす。またさらに、低ひずみ速度実験結果を用いて  $R_1$ 、 $R_2$  の決定を行い、各値が収束するまで(1)~(4)を繰り返す。

以上から、文献<sup>19)</sup>に従って、一般の統一型構成方程式の材料定数決定法を述べたが、この方法



には以下のような問題点がある。

i)  $\sigma_0$  の決定について

手順(1)にて、応力・ひずみ関係が水平になる部分より、 $\sigma_0$  を求めているが、この値を実験値より読みとることは、かなりむずかしいと考えられる。

( 文献<sup>19)</sup> によると2%程度のひずみの発生にて応力・ひずみ関係が水平になると述べられているが、SUS304において $\dot{\sigma}$ は一定になるが、 $\sigma$ が一定になる傾向は得られていない。 )

ii)  $R_1$  ,  $R_2$  の決定について

論文には、 $R_1$  ,  $R_2$  の決定方法が明確に述べられていない。

iii) 繰り返し計算による材料定数の決定について

(1)~(4)の手順を繰り返すことによって、材料定数を決めるとあるが、この方法で安定した解が得られるとは限らない。

手順(4)に示したようにこのモデルは $\dot{\epsilon}^1$ の増大とともにDrag Stressがある一定値に漸近していく。よって、繰り返し硬化量のひずみ範囲依存性を表現することができない。この原因は3)式の定義にある。

## 第 II 編

### 非弾性解析アルゴリズム

## 1. 弾塑性構成方程式の積分法について

ここでは、弾完全塑性モデルについて構成方程式の各種積分法を示すが、まず、Misesの降伏面を用いた塑性流れ理論に従う、等方性弾完全塑性体の構成方程式を導出する。これは、塑性流れ理論において最も簡単なモデルである。また応力・ひずみについては、偏差成分のみに注目する。

全ひずみ増分  $d e_{ij}$  は、弾性ひずみ増分  $d e_{ij}^e$  と塑性ひずみ増分  $d e_{ij}^p$  の和として、以下の式で与えられる。

$$d e_{ij} = d e_{ij}^e + d e_{ij}^p \quad (1-1)$$

材料がHookの法則に従うなら、偏差応力増分  $d S_{ij}$  と  $d e_{ij}^e$  の間には以下の関係がある。(Gは、せん断弾性係数)

$$d S_{ij} = 2 G d e_{ij}^e \quad (1-2)$$

Misesの降伏条件を用いた降伏面は、以下の式で与えられる。

また、材料が塑性状態にあるなら、応力は常に降伏面上にあり、 $\phi = 0$  である。

$$\phi = S_{ij} S_{ij} - R^2 (= 0) \quad (1-3)$$

さて、今回は弾完全塑性体を対象とするので、降伏面半径Rは定数である。またこのRは、一軸の降伏応力  $\sigma_y$  との間に以下の関係がある。

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y$$

(1-3) の  $\phi$  を塑性ポテンシャルとし流れ理論に従うとすると、 $d e_{ij}^p$  は、正のスカラー量  $\lambda$  を用いて以下のように表わすことができる。

$$d e_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial S_{ij}} \quad (1-4)$$

(1-3) より

$$d e_{ij}^p = 2 \lambda S_{ij} \quad (1-4)'$$

よって、塑性ひずみ増分は常に偏差応力方向を向く。

さらに適応条件  $d\phi = 0$  を用いて

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial S_{ij}} dS_{ij} (= 0) \quad (1-5)$$

(1-3) より

$$S_{ij} dS_{ij} = 0 \quad (1-5)'$$

以上、(1-1, 2, 3, 4, 5) の5つの式より構成方程式を導く

(1-1, 2) より

$$dS_{ij} = 2G (de_{ij} - def_{ij}) \quad (1-6)$$

これに (1-4)' を代入し、

$$dS_{ij} = 2G (de_{ij} - 2\lambda S_{ij}) \quad (1-7)$$

(1-5) へ代入し整理して  $\lambda$  が求まる。

$$\lambda = S_{ij} de_{ij} / 2R^2 \quad (1-8)$$

(1-6) へもどすとよく知られた構成方程式が得られる。

$$dS_{ij} = 2G de_{ij} - 2GS_{ij} (S_{ij} de_{ij}) / R^2 \quad (1-9)$$

以上の関係を幾何学的に考察する。

まず、塑性ひずみ増分について、(1-4, 4)' より

$$\begin{aligned} def_{ij} &= (S_{ij} de_{ij}) S_{ij} / R^2 \\ &= |S_{ij}| |de_{ij}| \cos \theta S_{ij} / R^2 \\ \therefore def_{ij} &= |de_{ij}| \cos \theta \cdot \frac{S_{ij}}{R} \end{aligned}$$

次に応力について

$\Delta S_{ij} = 2G de_{ij}$  とおくと (1-9) は、

$$dS_{ij} = \Delta S_{ij} - 2G def_{ij}$$

よって

塑性ひずみ増分は偏差応力方向を向き \*1 応力増分と偏差応力は直交する。 \*2

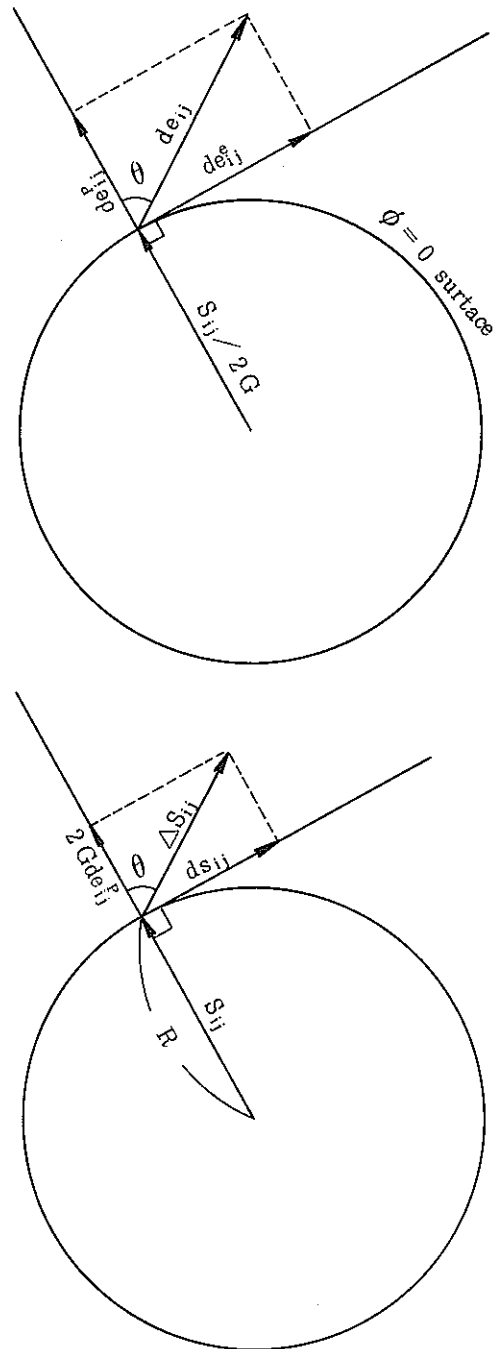


Fig.1 - 1 Schematic representation of Stress and Strain Components by elastic Perfect Plastic model.

\*1 この関係は、塑性流れ則 (1-4) による。よって等法硬化があっても同じであるが、移動硬化があると、 $de_{ij} \propto (S_{ij} - \alpha_{ij})$  となる。

\*2 この関係は適応条件 (1-5) による。よって硬化があると一般には成立しない。

### 1.1 Tangent Stiffness法

非線 FEM 構造解析プログラムでは、一般に増分法が採用されており、各増分間における状態変化が、線形であるとして次の状態が求められる。実際に応力状態  $S_{ij}$  においてあるステップの解析を行い、変位増分場が定まり、これにより、ある点の偏差ひずみ増分  $\Delta e_{ij}$  が求まったとする。さてこの増分は線形であると仮定しているので、

$$\Delta e_{ij} = \Delta t \cdot d e_{ij} \quad (1-1-1)$$

となる。

さて、ここでは (1.1-1) の増分を用いて構成方程式より次の応力状態を定めることを考える。

まず、増分前の応力状態  $S_{ij}^0$  に対し全増分間が弾性であったとし、 $S_{ij}^T$  (Trial) を求める。

$$S_{ij}^T = S_{ij}^0 + 2G \Delta t d e_{ij} \quad (1-1-2)$$

これを降伏条件 (1.1-3) に代入し、 $\phi < 0$  であれば  $S_{ij}^T$  は、次の状態である。しかし  $\phi \geq 0$  であれば、弾性から塑性への遷移が生じることになる。この遷移点の応力を  $S_{ij}^c$  (Contact) とする。

$$S_{ij}^c = S_{ij}^0 + 2G \Delta t k d e_{ij} \quad (1-1-3)$$

(1.1-3) 式の  $k$  は (1-3) より求まる。 ( $\phi(S_{ij}^c) = 0$ )

$$S_{ij}^c S_{ij}^c = R^2 \quad (1-1-4)$$

このとき  $\Delta t_p = (1 - k) \Delta t$  とおくと  $\Delta e_{ij}$  は弾性域と塑性域に分けられる。

$$\Delta e_{ij} = k \Delta t d e_{ij} + \Delta t_p d e_{ij} \quad (1-1-5)$$

よって塑性部分には (1-9) 式を適用して増分後の応力  $S_{ij}^{\wedge}$  が求まる。

$$S_{ij}^{\wedge} = S_{ij}^c + 2G \Delta t_p d e_{ij} - 2G \Delta t_p S_{ij}^c (S_{ij}^c d e_{ij}) / R^2 \quad (1-1-6)$$

さて、(1.1-6) によって求めた応力は、 $S_{ij}^c \not\ll d e_{ij}$  の場合以外は降伏面をとびでてしまう。

以下で述べる方法は、これを修正するためのものである。

従って、これから述べる方法は、あくまでひずみ増分は与えられたときどのように応力を決めるかという問題である。また、比例負荷の場合、常に  $S_{ij}^c \not\ll d e_{ij}$  が満足されるから、このような問題は生じない。

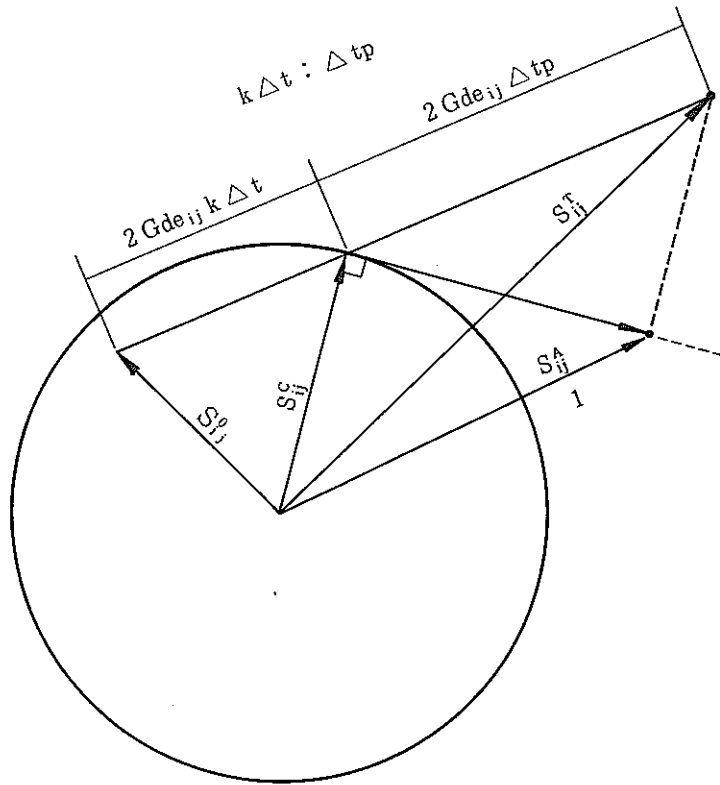


Fig. 1.1 - 1 Schematic Representation of the tangent stiffness Method

1.2 Tangent Stiffness-Radial Return法

この方法は、先の述べたTangent Stiffness Methodによって求めた $S_{ij}^A$ をスカラー倍することによって、降伏面に載せるものである。

さて、 $S_{ij}^A$ は(1.1-6)より、

$$S_{ij}^A = S_{ij}^T - \frac{2G}{R^2} \Delta t_P S_{ij} (S_{ij} d e_{ij})$$

この方法によって、求まる応力 $S_{ij}^F$ は、

$$S_{ij}^F = f \cdot S_{ij}^A$$

$$\left( S_{ij}^F = f \left[ S_{ij}^T - \frac{2G}{R^2} \Delta t_P (S_{ij} d e_{ij}) S_{ij} \right] \right) \tag{1.2-1}$$

この $f$ は $S^F$ が降伏面上にある条件(1-3)によって定まる。つまり、

$$S_{ij}^F S_{ij}^F - R^2 = 0 \tag{1.2-2}$$

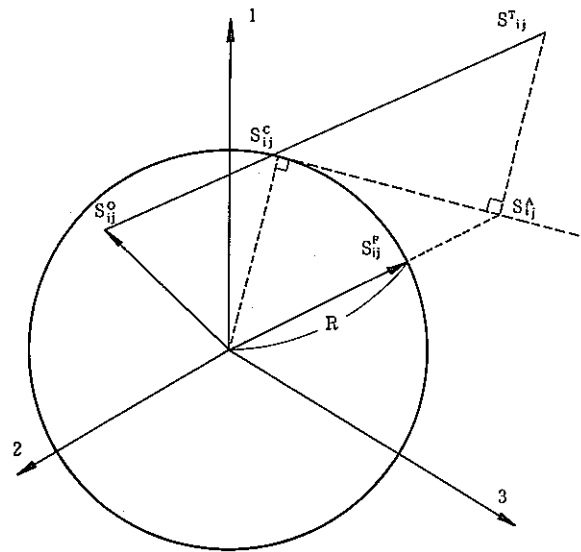


Fig.1.2-1 Schematic Representation of the tangent stiffness-Radial Return Method

Fig. 1.2-2はこの方法において任意のTangentialとRadial成分を持つ $\Delta S_{ij}$ が与えられたときの誤差角 $\theta$ をプロットしている。(文献<sup>21)</sup>より)

また、 $\otimes$ の点は後に示す計算点である。 $S_{ij}^F$ は正解であり、 $\theta$ は下図の場合を正とする。

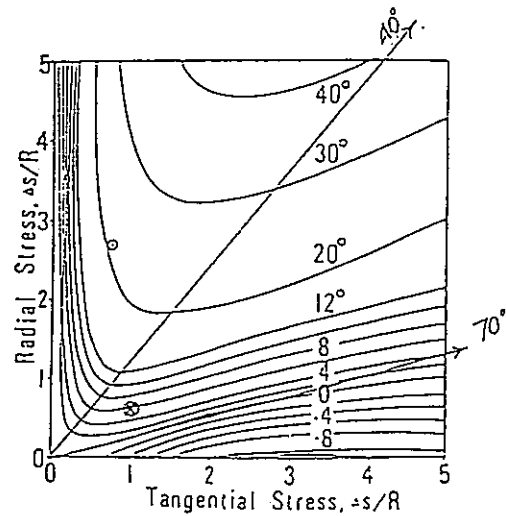
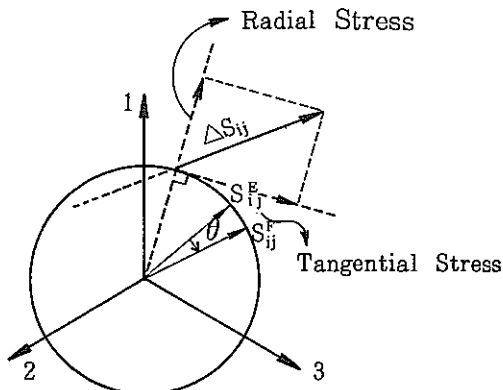


Fig.1.2-2 Angular Error of the Tangent Stiffness Radial Return Method



1.3 Secant Stiffness法

この方法は  $d S_{ij}$  を  $S_{ij}$  と  $S_{ij}^T$  の中点  $S_{ij}^P$  に直交するように定めるもので、求めた  $S_{ij}^P$  は常に降伏面上に載る。

これは (1.2-1) 式の  $S_{ij}$  を  $S_{ij}^P$  におきかえ  $f = 1$  とおくことによって得られる。

$$S_{ij}^P = S_{ij}^T - \frac{2G}{R^2} \Delta t_P (S_{ij}^P, d e_{ij}) S_{ij}^P \tag{1.3-1}$$

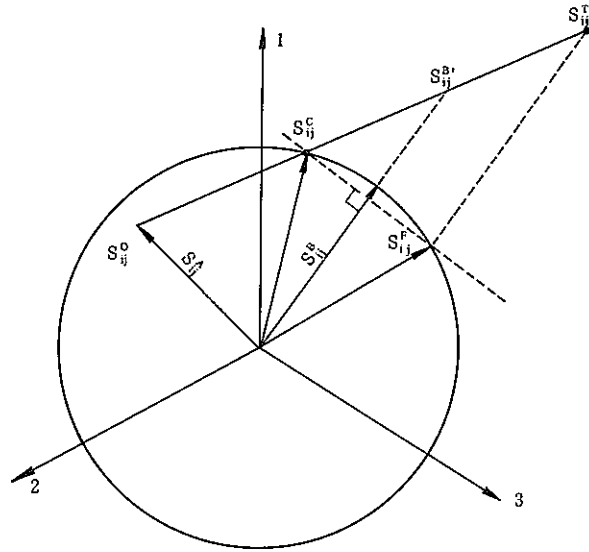


Fig. 1.3-1 Schematic Representation of the Secant Stiffness Method

ただし、

$$S_{ij}^P = f \left[ \frac{1}{2} (S_{ij}^0 + S_{ij}^T) \right] \tag{1.3-2}$$

この方法は、3種のReturn Mapping法のうちで  $|\Delta S_{ij}|$  が小さいときの精度が最もよい。またFig. 1.3-1に示すようにその誤差はRadial Stressの軸にほぼ垂直であり、以下の近似式によって表わされる。

$$\theta \approx 3.5 [S_{ij}^T, S_{ij}^T - (S_{ij}^T, S_{ij}^0) / R^2] \tag{1.3-3}$$

以上の理由によってこの方法は、Sub step法と組み合わせるのに都合がよい。

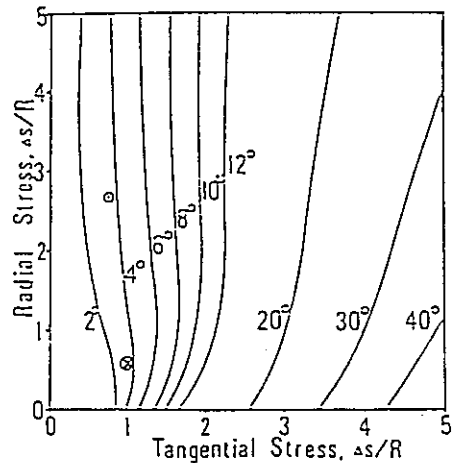


Fig. 1.3-2 Angular Error of the Secant Stiffness Method

1.4 Radial Return法

この方法は、単位  $S_{ij}^T$  をスカラー倍して降伏面にのせるという簡単なものである。

よって、

$$S_{ij}^R = \frac{S_{ij}^T}{|S_{ij}^T|} R \quad (1.4-1)$$

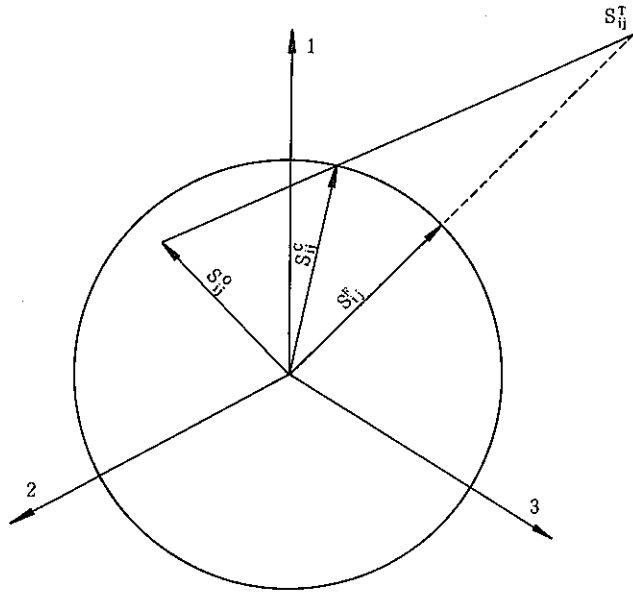


Fig. 1.4-1 Schematic Representation of the Radial Return Method.

この方法の最大の利点は簡単なことである。つまり  $S_{ij}^R$  点を求める必要がなく、さらには塑性の構成方程式\*1 もいらない。ただし剛性を決めるときには、塑性剛性行列が必要である。

またその誤差も高々  $12.7^\circ$  \*2 であり、この誤差が許容されるなら、最も有効なる手法であるが、一般の構造問題では、これは大きすぎるであろう。従来この方法は、流体問題において主に適用されてきた。

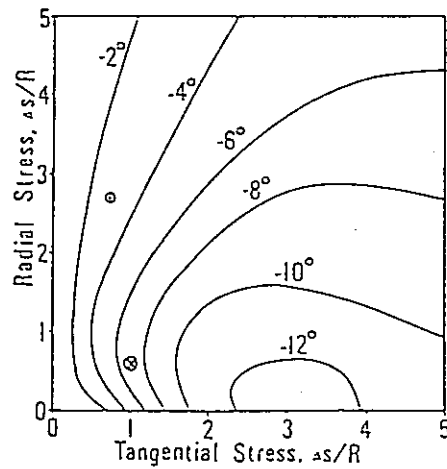


Fig. 1.4-2 Angular Error of the Radial Return Method

### 1.5 Substep法

この方法は、 $d e_{ij} \Delta t$ を任意に分割し、これを各々Substepとして応力を決めていく方法である。各Substepについては、今まで述べてきたTangent-Stiffness法、Secant法が適用できる。

例えば、Tangent-Stiffness法を採用するなら、以下の漸化式により各ステップの応力が定まってくる。

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n + \Delta S_{ij}^n - \frac{2G}{R^2} \Delta t_P^n (S_{ij}^n \cdot d e_{ij}) S_{ij}^n$$

$\Delta t_P^n$  : nサブステップめの時間増分

$\Delta S_{ij}^n$  :  $2G \Delta t_P^n d e_{ij}$

$\Delta S^{n=0}$  :  $S_{ij}$

また、Secant法は、増分のちいさいときの精度がよく、さらに(1.3-3)によって精度評価ができるので、Substep法とSecant法の組み合わせは効率よく、さらに望む精度が得られるような解析を可能とする。

### 1.6 Key, Kriegの厳密解<sup>21)</sup>

$S_{ij}$ と $d e_{ij}$ のなす角を $\phi$ とすると、この内積は以下の式で与えられる。

$$S_{ij} d e_{ij} = |S_{ij}| |d e_{ij}| \cos \phi \quad (1.6-1)$$

さて、応力が常に降伏面上にあるためには、(1-3)式を満足しなくてはならない。よって、

$$|S_{ij}| = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} = R \quad (1.6-2)$$

(先に述べたようにRは定数である。)

$d e_{ij}$ を一定であるとして、(1-9)式の両辺を微分すると、

$$d S_{ij} d e_{ij} = -R |d e_{ij}| d \phi \sin \phi \quad (1.6-3)$$

また、構成方程式(1-9)の両辺に $d e_{ij}$ をかけて、

$$d S_{ij} d e_{ij} = 2G |d e_{ij}|^2 - \frac{2G}{R^2} (S_{ij} d e_{ij}) \quad (1.6-4)$$

(1.6-3,4) より、以下の微分方程式が得られる。

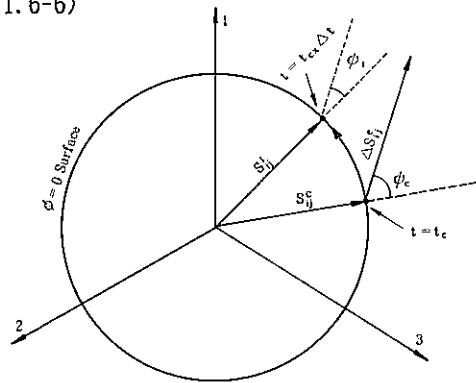
$$d\phi = - \frac{2G |de_{ij}|}{R} \sin\phi \tag{1.6-5}$$

さて、(1.6-5) を一般的に、時間に関する微分方程式とみなして降伏面に接触 (contact) している  $t_c$  より、 $\Delta t$  の間  $de_{ij}$  が与えられるとし、このときの  $\phi$  を  $\phi_1$  とすると、

$$\int_{\phi_c}^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sin\phi} = - \frac{2G |de_{ij}|}{R} \int_{t_c}^{t_c + \Delta t} dt \tag{1.6-6}$$

上の積分を実行して、

$$\tan \frac{1}{2} \phi_1 = \tan \frac{1}{2} \phi_c e^{-\frac{|\Delta S_{ij}^c|}{R}}$$



(1.6-7) Fig. 1.6-1 Schematic Representation of the Exact Solution

ただし、

$$\Delta S_{ij}^c = 2G de_{ij} \Delta t$$

これで  $de_{ij} \Delta t$  が与えられたとき、(1-9) 式の積分が解析的に行われ、結果として、 $\phi_1$  が定まった。次にこれを応力  $S_{ij}^1$  で表わす。 $S_{ij}^1$  は  $S_{ij}^c$  と  $\Delta S_{ij}^c$  の線形和として表わされ、かつ、 $\phi = 0$  Surface 上にあるから、

$$\frac{S_{ij}^1 = \alpha (S_{ij}^c + \beta \Delta S_{ij}^c)}{|S_{ij}^1| = R} \tag{1.6-8}$$

これにより、 $\alpha$ 、 $\beta$  を定めると、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2C}{(1+C^2) + (1+C^2) \cos\phi_c} \\ \beta &= \{1 - C^2 + (1 - C^2) \cos\phi_c\} \frac{R}{2C |\Delta S_{ij}^c|} \end{aligned} \right\} \tag{1.6-9}$$

$$C = e^{-\frac{|\Delta S_{ij}|}{R}}$$

$$\cos \phi_c = \frac{S_{ij} \Delta S_{ij}}{R |\Delta S_{ij}|}$$

このように、key, Kriegの厳密解は、基本的に(1.6-5)の微分方程式を解くことによって得られている。ここでは、この微分方程式を考察する。

(1.6-5)を書きかえると、

$$R d\phi = -\frac{|\Delta S_{ij}|}{\Delta t} \sin \phi$$

ここに  $\frac{|\Delta S_{ij}|}{\Delta t} = d|\Delta S_{ij}|$  と考えられる

から、

$$R d\phi = -d|\Delta S_{ij}| \cos \phi \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right)$$

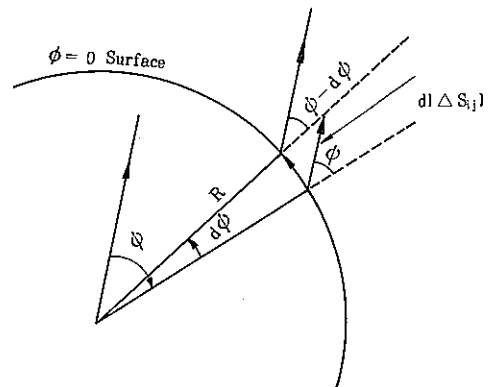


Fig. 1.6-2 Schematic Representation of the intergration method.

この関係をFig. 1.6-2に示す。

よって、概念的には、 $\Delta S_{ij}$ の降伏面への正封影成分を、 $\phi$ の変化を考慮しながら降伏面へはりつけていくことになる。

Sub step法も概念的に全く同一であり、(1.6-5)式を数値的に解いていることになる。

さて、Xucheng<sup>22)</sup>らはKriegと全く同様の方法に従い、移動硬化材料に対する厳密解を与えている。移動硬化材料では、降伏面の半径Rが変化しないのでKriegと同じく(1.6-5)式の微分方程式が得られ、これを解くことによって厳密解を得ている。よって当然のことながらXuchengの解において、移動硬化の項を0とするとKriegと全く同一の解を得る。

また、Xuchengは、この解を等方硬化材料へ適用することも述べている。これは移動硬化の解において降伏面の半径Rを各ステップの前の値とし、発生する降伏面の原点移動量もその都度リセットすることによって、等方硬化材料の解とするというものである。よってこの方法によって得られる解は厳密解でなく、概念的に増分間でのRの拡大を無視することになる。ただし、彼によればこの方法によって得られた解は、かなりの精度をもつようであるが、これも硬化係数に依存するものとする。

さらにXuchengは、この解を等方と移動の組み合わせ硬化に対しても拡張している。これは先と同様、移動硬化の解においてRを各ステップ前の値にし、さらに降伏面の原点移動量増分に対しては、全硬化に対する移動硬化の比率を乗することによって、この組み合わせ硬化の解としている。この方法も当然近似にすぎず、等方硬化の割合が増加するに従って精度は低下する。

1.7 各手法における計算とその評価

以上のモデルを用いた計算例を以下に示す。

○材料定数

$$E = 26000 \text{Kg/mm}^2$$

$$\nu = 0.3 \quad (G = 10000)$$

$$\sigma_y = 26 \text{Kg/mm}^2$$

$$H' = 0 \quad (\text{ただし (FINASにおいては } H' = 1 \times 10^{-2} \text{)})$$

初期応力

$$\sigma_x = -\sigma_z = 13 \text{Kg/mm}^2, \text{その他は } 0$$

与えるひずみ

$$d \varepsilon^x = d \varepsilon^z = 43/60000$$

$$d \varepsilon^y = -43/30000$$

さてこれらはすべて偏差成分のみで、せん断項をもたないため、右図のような関係となる。

この例では簡単のため、

$$S_{ij} = (S_x \quad S_y \quad S_z) \\ (= (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z))$$

$$d e_{ij} = (d e_x \quad d e_y \quad d e_z) \\ (= (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z))$$

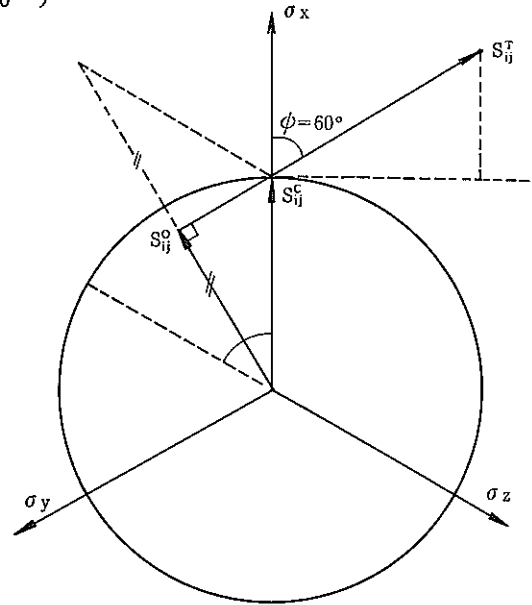


Fig. 1.7-1 Loading Condition of Example Calculation

と表わす。

さて、文献<sup>21)</sup>の表記に従えば、この問題は以下のように表わされる。

$$S_{ij}^0 = (\sigma_y / 2, 0, -\sigma_y / 2)$$

$$d e_{ij} \Delta t = (1+k) \sigma_y / E (1/2, -1, 1/2)$$

$$k = E / 6 G, \Delta t_F = 1$$

この関係を以前の式に代入して以下の結果を得る。また、①'はFINASによる解と同一であることを確認し、④はFINASによる5 Step後の解である。(要素はHEX8を使用)

① 厳密解	$S_{ij} = (13.402, -16.220, 2.818)$
① Tangent-Stiffness Radial Return Method	$S_{ij}^r = (12.261, -16.741, 4.480)$
①' Tangent-Stiffness Method	$S_{ij}^t = (52/3, -71/3, 19/3)$
② Secant Method	$S_{ij}^s = (12.801, -16.520, 3.719)$
③ Radial Return Method	$S_{ij}^r = (14.641, -15.355, 0.714)$
④ Tangent Stiffness Method with 5 Supsteps	$S_{ij}^r = (13.881, -17.266, 3.385)$

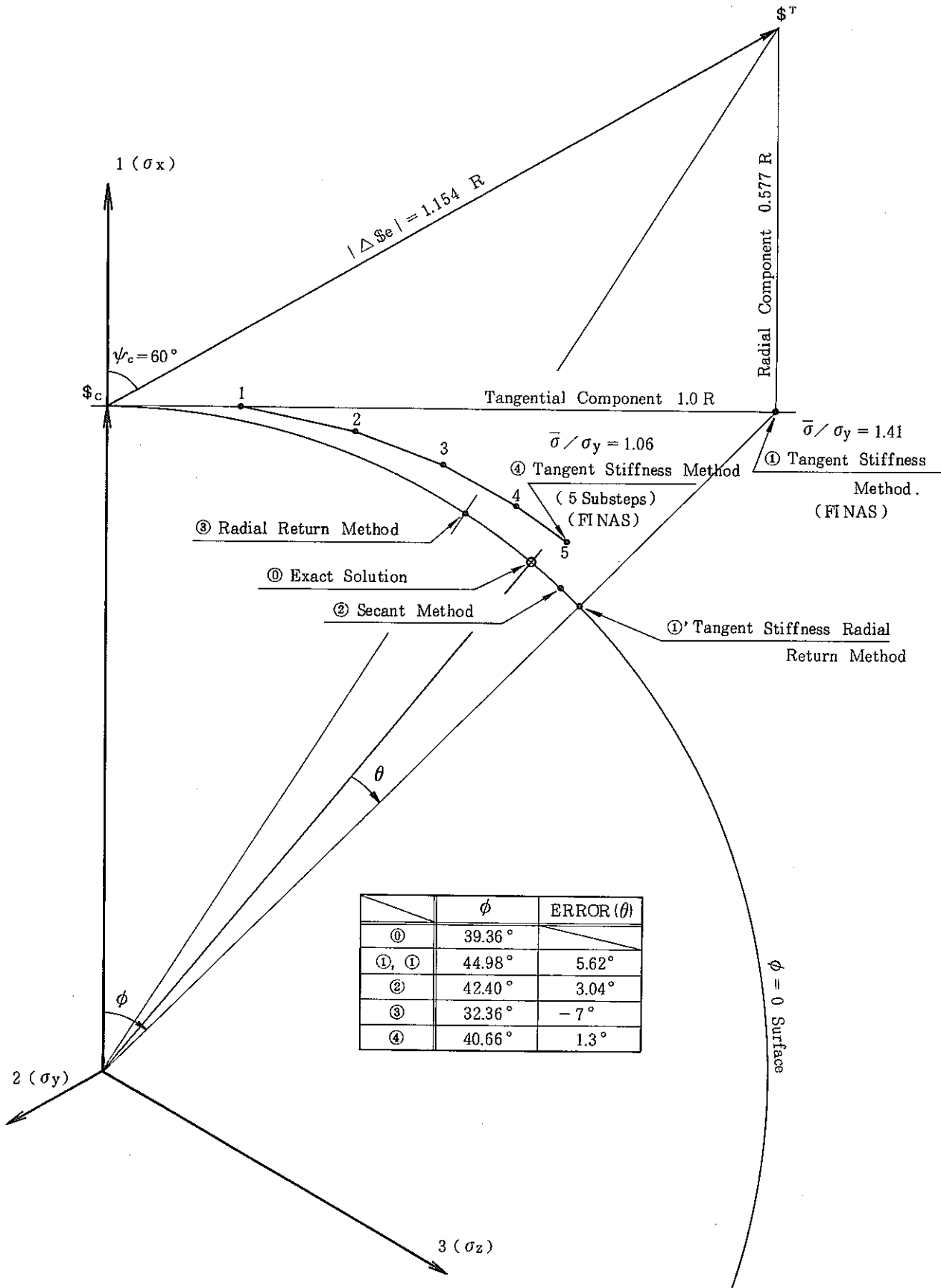


Fig.1.7 - 2 Result of Example Calculation



以上述べてきたように現在構成方程式の積分法は各種提案されているが、各々に一長一短がある。Tangent stiffness法は前進オイラー法による積分と等価で、最も簡単な方法で適用性は広いが計算精度は劣る。Tangent stiffness radial return法はTangent stiffness法により得られた応力をRadial retrun法により修正するものであり、Tangent stiffness法とRadial return法の中間的な性質を持つ。Secant stiffness法（Mean normal法）は中央差分を用いる修正オイラー法による積分に等価であり、解析的にこの解が得られる場合は非常に効率的である。Radial return法は実際に積分を実行することなく応力が得られるため、計算効率はやいが計算精度は最も劣る。Substep法は増分間をさらに分割し数値積分を行うため計算精度は分割数に依存する。またSubstep間の積分法として<sup>23)</sup> 前述各種の方法やRuge-Kutta法を採用することができる。この方法は数値積分を行うために適用性がよく任意の解析精度を期待できるが最も多くの計算時間が必要とされる。Key, Kriegの厳密解は解析解であるために計算精度、効率共に優れているが現在のところ解が得られているのはミーゼスの降伏条件に従う弾完全塑性モデルまたは移動硬化モデルのみであり他のモデルに対する適用性に問題が残る。

また今回の検討はミーゼスの降伏条件に従う弾完全塑性モデルに対するものであるが他の降伏条件や構成モデルを採用した場合はTangent stiffness radial return法, Radial Return法, Secant法を行うために、繰返し計算が必要となる場合がある。

従って手法として一番効率的なのは厳密解またはSecant法であるが、各種の降伏条件や構成モデルに対して用いるには適用性に問題があり、専用の解析コードや解析オプションとして用いるのに向いている。これに対しSubstep法は計算効率は劣るが適用性は広く汎用解析コードに向いている。

ただしこの節で述べた構成方程式の積分法は、あくまでも与えられたひずみに対して構成方程式の積分を如何に正確に行うかという問題であり、ひずみを如何に正確に求めるかという問題は別途考慮する必要がある。よってこの積分の精度を上げて直接解析精度が上がるとはいえず、今後この点について検討が必要と考える。

Table 1.7-1 Feature of each integration method

項目 \ 手法	厳密解	Substep法	Secant法 Mean-Nomal法	Return Mapping		Tangent-Stiffness法
				Tangent-Stiffness Radial-Return法	Radial-Return法	
精度	正解	Substep数によって任意	増分の少さいとき、以下の4つの方法より精度がよい。	△	△	× (降伏面をとびだす。)
適用性	×	○	○	○	○	◎ (現在のFINAS)
計算時間	○	×	○	○	◎	○
利点	正解である。	任意の精度が期待できる。	・誤差評価できる。 ・厳密解以外では増分の少さいとき1 Stepでは最も精度がよい。		簡単である。 最大誤差が決まっている。	
欠点	等方硬化のある場合の解はまだない。	計算時間がかかる。				降伏面をとびでる。
備考	適用問題に等方硬化がなければこの方法が最も有効。また計算時間も1 Step分にすぎない。	任意の問題に使い、かつ、Secant法と組み合わせれば誤差評価が可能。	理論的にはエレガントである。	いわゆる折衷案	塑性構成式がいらない。 弾性塑性遷移点を求める必要がない。	Stepが細かければそれほど問題にならないのは、ただし繰り返し負荷の時には、問題となる場合がある。
				Return Mapping法では、等方硬化のとき、dRをどう評価するかに疑問。		

◎優れている , ○普通 , △やや劣る , ×劣る

## 2. 塑性・クリープ統一型モデルの積分アルゴリズムについて

塑性・クリープ統一型モデルを用いた解析は、現在の応力状態において次ステップの非弾性ひずみを求める初期ひずみ法による解析が一般的である。しかし統一型モデルでは応力の変化に対する非弾性ひずみの変化が非常に大きく、この方法により安定した解析を行うためにはかなり細かな時間増分が必要となる。またこのことが統一型モデルの普及を妨げている一因ともなっている。これに対して統一型モデルの解析効率を改善するための積分アルゴリズムが近年各種提案されている。以下に示すWalkerの方法とMillerの方法はその代表的なものである。

Walkerの方法<sup>24)</sup>は構成方程式をUniformly valid asymptotic recursive級数に展開して積分方程式を導くものである。この手法はあくまでもWalkerモデルに適用されたものであり、他の構成モデルについては式の展開をやり直す必要が生じる。

MillerによるNONSS<sup>25)</sup>は構成方程式をテイラー展開することによって線形化し剛性マトリックスを数値的に求めるもので、任意の統一型構成モデルに適用できる非常に有望な方法である。しかし実際には数値的に剛性マトリックスを得ることによりかなりの計算を必要とするため、かなり大規模な問題にならないと実用にならないと思われる。

また文献<sup>26)</sup>には初期ひずみ法を用いる場合の数値積分法についての検討がなされている。ここで検討されている積分法は、古典的なオイラー法、修正オイラー法、四次のルンゲークッタ法の三種である。(ミルの予測子、修正子法も示されているが実際のFEMへの適用においてマルチステップとなるために記憶容量の点で不利として検討されていない)そしてこれらの積分法を用いて実際に解析を行い計算時間と精度の点からみてオイラー法が最も効率であることが示されている。このような観点からオイラー法を用いた自動時間増分決定アルゴリズムがこれらの“stiff”な構成方程式を持ったモデルに最も適した方法であり、MARC, ABAQUS, ADINA等の汎用構造解析コードもこの方法を採用している。

## 2.1 Walkerの方法

Walkerの方法<sup>24)</sup> は、Walkerモデルに対して適用されたものである。

第1編3.4節のWalkerモデルの変数をQ, G, Jに変換する。Qについては

$$\dot{Q} = \frac{3\mu}{X} \left( \frac{X}{K} \right)^n \quad (2.1-1)$$

よって、 $\dot{R}$ と以下のような関係を持ち、 $R$ に同様な量であることが解る。

$$\dot{Q} = \frac{3\mu}{X} \dot{R} \quad (2.1-1)'$$

さて、このようなQを用いると構成式は以下のように積分形で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \frac{2}{3} \alpha_{ij}(t) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t) + \int_{\xi=0}^t e^{-iQ(t)-Q(\xi)} \\ & \left( 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (2.1-2) \end{aligned}$$

上式の積分をa Uniformly Valid Asymptotic Recursive級数に展開し、その第一項のみ、とると、 $\sigma_{ij}(t+\Delta t)$ は以下の式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t+\Delta t) = & \frac{2}{3} \alpha_{ij}(t+\Delta t) + \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t+\Delta t) \\ & + \left( \sigma_{ij}(t) \frac{2}{3} \alpha_{ij}(t) - \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(t) \right) e^{-\Delta Q} \\ & + \left( 2\mu \Delta \varepsilon_{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \Delta \varepsilon_{kk} - \frac{2}{3} \Delta \alpha_{ij} \right) \left( \frac{1 - e^{-\Delta Q}}{\Delta Q} \right) \quad (2.1-3) \end{aligned}$$

また $\dot{Q}$ と $\dot{R}$ の関数は、以下のようにも書ける。

$$\dot{Q} = \frac{3\mu}{K} \dot{R}^{1-\frac{1}{n}} \quad (2.1-2)'$$

これより  $f_1(\Delta Q, \Delta G, \Delta J)$  を後退差分によって定義し、誤差の評価と修正を行う。

$$f_1(\Delta Q, \Delta G, \Delta J) = \Delta Q - \frac{3 \mu \Delta t}{K(t + \Delta t, \Delta Q, \Delta G, \Delta J)} \dot{R}^{1-\frac{1}{n}}(t + \Delta t, \Delta Q, \Delta G, \Delta J) \tag{2.1-4}$$

背応力:  $\alpha_{ij}(t)$  についても  $G$  を用いて以下の積分方程式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ij}(t) &= \int_{\xi=0}^t n_2 e^{-(G(t)-G(\xi))} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \xi} d\xi \\ G(t) &= \int_{\xi=0}^t \left\{ n_3 \frac{\partial R}{\partial \xi} + n_4 \left( \frac{2}{3} \alpha_{k1}(\xi) \alpha_{k1}(\xi) \right)^{\frac{m-1}{2}} \right\} d\xi \end{aligned} \right\} \tag{2.1-5}$$

これも展開し、第1項のみとれば、

$$\alpha_{ij}(t + \Delta t) = \alpha_{ij}(t) e^{-\Delta G} + n_2 \Delta \varepsilon_{ij} \left( \frac{1 - e^{-\Delta G}}{\Delta G} \right) \tag{2.1-6}$$

$\dot{G}$  の定義より  $f_2(\Delta Q, \Delta G, \Delta J)$  を、先に同様後退差分によって定義し誤差の評価と修正を行う。

$$\begin{aligned} f_2(\Delta Q, \Delta G, \Delta J) &= \Delta G - \left\{ n_3 \dot{R}(t + \Delta t, \Delta Q, \Delta G, \Delta J) \right. \\ &\quad \left. + n_4 \left( \frac{2}{3} \alpha_{k1}(t + \Delta t, \Delta Q, \Delta G, \Delta J) \alpha_{k1}(-) \right)^{\frac{m-1}{2}} \right\} \Delta t \end{aligned} \tag{2.1-7}$$

抗応力:  $K(t)$  についても背応力同様積分方程式で表わせれば、

$$\left. \begin{aligned} K(t) &= K_0 + \int_{\xi=0}^t n_5 e^{-(J(t)-J(\xi))} \frac{\partial R}{\partial \xi} d\xi \\ J(t) &= \int_{\xi=0}^t \left\{ n_6 \frac{\partial R}{\partial \xi} + n_7 (K(\xi) - K_0)^{p-1} \right\} d\xi \end{aligned} \right\} \tag{2.1-8}$$

先に同様第1項のみとれば、

$$K(t + \Delta t) = K_0 + (K(t) - K_0)e^{-\Delta J} + n_5 \Delta R \left( \frac{1 - e^{-\Delta J}}{\Delta J} \right) \quad (2.1-9)$$

$\dot{K}$ の定数より先に同様 $f_3(\Delta Q, \Delta G, \Delta J)$ を後退差分によって定義し、誤差の評価と修正を行う。

$$f_3(\Delta Q, \Delta G, \Delta J) = \Delta J - \{n_0 \dot{R}(t + \Delta t, \Delta Q, \Delta G, \Delta J) + n_7 (K(t + \Delta t, \Delta Q, \Delta G, \Delta J) - K_0)^{p-1}\} \Delta t \quad (2.1-10)$$

以上の関係式よりNewton-Raphson法によって収束計算を行い、 $\Delta Q, \Delta G, \Delta J$ を定める。

このときの計算は、以下のような手順による。今、 $\Delta Q, \Delta G, \Delta J$ を各々、 $x_1, x_2, x_3$ とすると、それらが正解なら(2.1-4, 7, 10)より以下の関係が成り立つ。

$$f_i(x_j) = 0 \quad (2.1-11)$$

しかし、収束計算途中の $n$ 番目に得られた解： $x_j^n$ は誤差 $b_i$ を含み、

$$x_j = x_j^n + b_j$$

よってテイラー展開して第一項のみとれば、

$$f_i(x_j^n + b_j) \simeq f_i(x_j^n) + \frac{\partial f_i(x_j)}{\partial x_j} b_j = 0$$

つまり、

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} b_j &= -f_i(x_j^n) \\ A_{ij} &= \frac{\partial f_i(x_j^n)}{\partial x_j} \end{aligned} \right\} \quad (2.1-12)$$

この方程式を解いて、得られた解 $b_j$ によって、 $x_j^n$ は以下のように修正される。

$$x_j^{n+1} = x_j^n + b_j \quad (2.1-13)$$

また $A_{ij}$ は以下のように数値的に求められる。

$$\left. \begin{aligned} A_{i1} &= [f_i(\Delta Q + \Delta, \Delta G, \Delta J) - f_i(\Delta Q, \Delta G, \Delta J)] / \Delta \\ A_{i2} &= [f_i(\Delta Q, \Delta G + \Delta, \Delta J) - f_i(\Delta Q, \Delta G, \Delta J)] / \Delta \\ A_{i3} &= [f_i(\Delta Q, \Delta G, \Delta J + \Delta) - f_i(\Delta Q, \Delta G, \Delta J)] / \Delta \end{aligned} \right\} \quad (2.1-14)$$

ただし、 $\Delta$ としては、 $\Delta Q$ ,  $\Delta G$ ,  $\Delta J$ が高々4までなので0.01としている。

## 2.2 Millerの方法 (NONSS)

ここでは、文献<sup>25)</sup>による粘塑性構成モデルの解法アルゴリズム"NONSS"(NONlinear System Solver)について概説する。

"NONSS"は、Constant Stiffness MethodとVariable Stiffness Methodの混合法と考えられ、その基本的概念は、構成方程式をTaylor展開することに依って線形化し、以下のような応力-ひずみマトリックスを数値的に求めようとするものである。

$$D \varepsilon = \sigma + \xi$$

この方法は剛性マトリックスを毎回作り直す必要があるが、従来行われてきた零次近似と考えられるConstant Stiffness Method(初期ひずみ法)より安定であることが期待される。問題としては、剛性マトリックスを数値的に求めるため多少手間がかかること、各々の構成モデルにおいてTaylor展開式を定義する必要のあることが挙げられる。前者については、応力、非弾性ひずみ、内部状態変数の各成分数の次元(一般的なBack, DragStress形で19元)よりなるマトリックス(対称性はない)を各積分点毎に解く必要がある。このことよりある程度大きな問題でソルバーに要するCPU時間の比率が高くないとこの利点を生かしきれないと考える。(脚注参照)また後者については、近年進歩している数式処理を使えば効率的なプログラミングが可能であろう。

以上のようにこの方法は安定であり、またそのために時間増分を大きくできる魅力的な方法ではあるが、剛性マトリックスの作成に手間がかかるため小規模問題には向いていないと考える。

例えば汎用構造解析プログラムFINASによるパイプ結合部の3次元弾性解析(未知数2839、要素数125(HBX20))の規模においてこの点を予測する。この問題はCRAYX-MPにおいて解析に10.6秒を要している。(このうちソルバーでは3.8秒)

さて、今19元のマトリックスを解くのに要する時間を0.69msec(実測値)とすると、このためにNONSSでは $125 \times 27 \times 0.69E-3 = 2.33$ (秒)余分にかかることになる。(一般的なBack, DragStressモデルの場合)これはソルバーに要している時間の60%程度であり、かなりの負担となる。



### 3. 塑性・クリープ統一型モデルの時間増分決定方法について

塑性、クリープ統一型モデルは応力の変化に対して粘塑性ひずみの変化が大きく、微分方程式が非常に"stiff"な特性を持っており、精度のよい数値解を得るには膨大な計算が必要となる。従ってこれらのモデルを用いて実際の構造問題を効率的に解析するためには、速く、安定で、経済的な時間増分を設定することが望まれる。この問題について文献<sup>26)</sup>に従い統一型モデルの自動時間増分決定方法アルゴリズムについて検討した。検討は以下の三つの方法について行った。

1. テイラー展開に基づく方法
2. Kumarの方法<sup>27)</sup>
3. Aryaの方法<sup>26)</sup>

これらの統一型モデルの時間増分決定アルゴリズムの概要を以下に示す。

#### 3.1 テイラー展開に基づく方法

この手法は、クリープ解析における時間増分自動決定においてよく用いられ、汎用構造解析コードFINAS, MARCの" AUTO CREEP" オプションもこの考えに基づいている。(FINASでは  $\epsilon^0 < \delta_1$ 、 $\epsilon^0$ 、 $\sigma < \delta_2$ 、 $\sigma$ を満足するように  $t$ が定められる)

ひずみ  $\epsilon(t + \Delta t)$  をテイラー展開すると

$$\epsilon(t + \Delta t) = \epsilon(t) + \Delta t \dot{\epsilon} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \ddot{\epsilon} + \dots \quad (3.1-1)$$

時間増分  $\Delta t$  は第二項が第一項に比べてある比率:  $\lambda$  になるように定める。

$$\Delta t = \lambda \frac{|\epsilon|}{|\dot{\epsilon}|} \quad (3.1-2)$$

同様に  $\Delta t$  を第三項が第二項に比べてある比率:  $\mu$  になるように定めるなら

$$\Delta t = \mu \frac{|\dot{\epsilon}|}{|\ddot{\epsilon}|} \quad (3.1-3)$$

ただし文献<sup>26)</sup>によると、この方法に基づく計算を行なうと始めはよい値を得ることができるがしだいにステップが大きくなって不安定になり、また判定基準を小さくする事によりこの現象の発生を

遅らせることはできるが本質的にその発生をくいとめることは不可能であるとしている。

### 3.2 Kumarの方法<sup>27)</sup>

正規形の常微分方程式は下のようになり、以下この式について考える。

$$\frac{d y}{d t} = \phi (y, x) \quad (3.2-1)$$

$t + \Delta t$ における $y$ の値は、オイラー法により以下のように書ける。

$$y (t + \Delta t) = y (t) + \Delta t \phi (y, t) \quad (3.2-2)$$

時間増分を制御する誤差: $e$ は以下のように定義される。

$$e = \Delta t | \nabla \phi | / | y (t) |$$

ただし $\nabla \phi$ は $\phi$ の第一後退差分である。(概念的には $y$ の二階微分)

この $e$ によって $\Delta t$ を以下のようにとり、計算を進める。

$$\begin{aligned} e > e_{\max} \text{のとき} & : \Delta t := \Delta t / 2 \text{とし、このステップの計算をやり直す} \\ e_{\max} \geq e \geq e_{\min} \text{のとき} & : \Delta t \text{はそのまま次のステップに進む} \\ e_{\min} > e \text{のとき} & : \Delta t := \Delta t * 2 \text{とし、次のステップに進む} \end{aligned}$$

この計算アルゴリズムをFig. 3.2-1に示す。

### 3.3 Aryaの方法<sup>26)</sup>

この方法も3.2同様、正規形の微分方程式の解法の形で述べられており、 $t + \Delta t$ における $y$ の値を、以下のように二つ定める。

$$\begin{aligned} Y_F &= y(t) + \Delta t \phi (y, t) && : (1\text{step}) \\ Y_H &= y(t) + \Delta t \phi (y, t) / 2 + \Delta t \phi (y + \Delta y / 2, t + \Delta t / 2) / 2 && : (2\text{step}) \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

時間増分を制御する誤差: $tol$ は以下のように定義し、後はこの $tol$ を用いて2.と同様の操作を行なう。

$$tol = | Y_F - Y_H | / | Y_H | \quad (3.3-2)$$

$tol > tol_u$  のとき :  $\Delta t := \Delta t / 2$  とし、このステップの計算をやり直す

$tol_u \geq tol \geq tol_l$  のとき :  $\Delta t$  はそのまま次のステップに進む

$tol_l > tol$  のとき :  $\Delta t := \Delta t * 2$  とし、次のステップに進む

また3.2.3.3節において正規形ではなく一般のベクトル微分方程式に適用するには各々の変数について得られた'e'または'tol'の最大値や、自乗和、絶対値和を時間増分制御に用いる。

この計算アルゴリズムをFig. 3.3-1に示す。

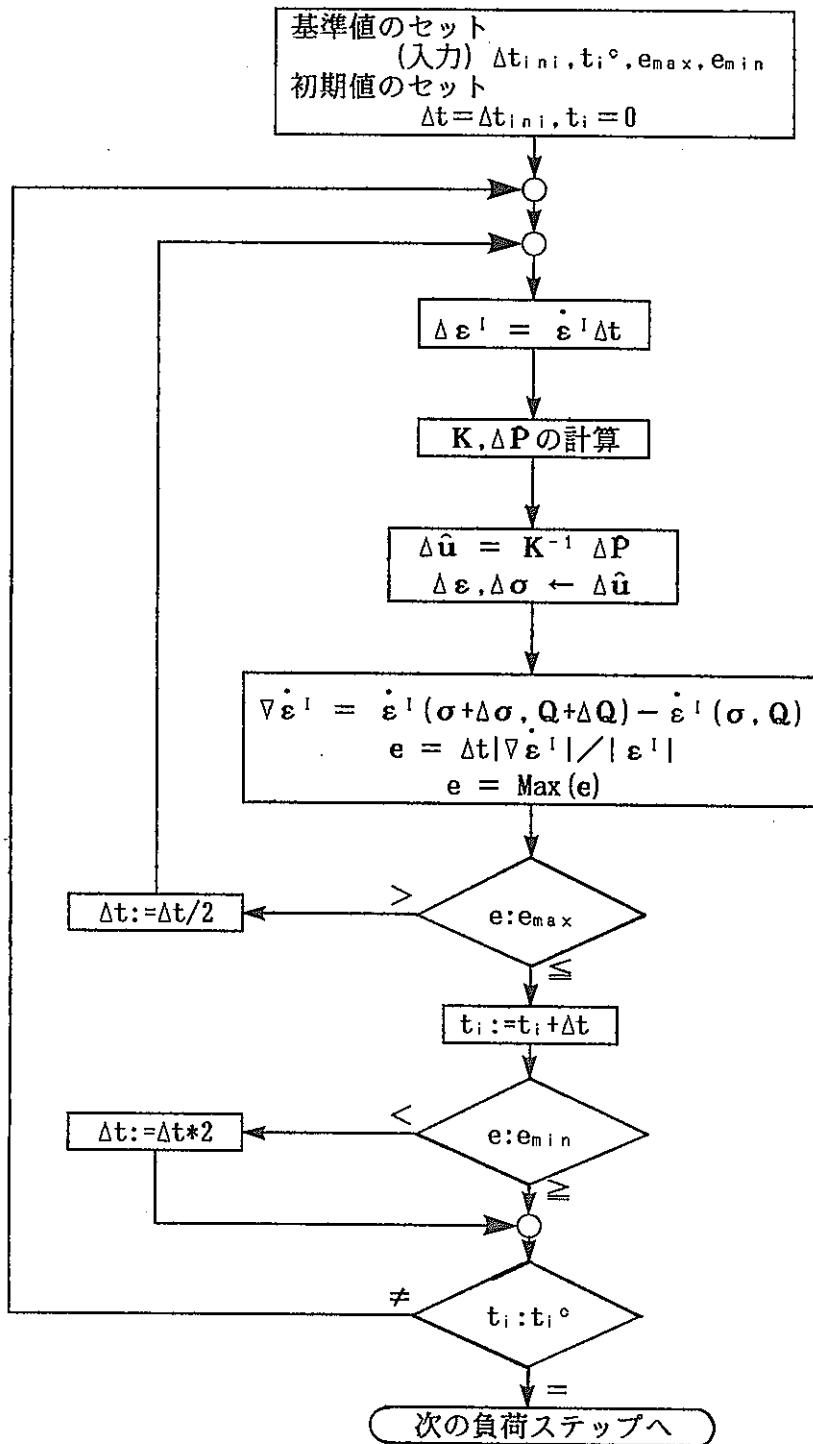


Fig. 3.2-1 Flow chart of the Kumar's strategy



### 3.4 Bodner-Partomモデルによる解析例とその評価

先に述べた時間増分自動決定アルゴリズムの評価を行うため文献<sup>26)</sup>に従いBoder-Partomモデルを用い非弾性挙動シミュレーションプログラムADMODELによって解析を行った。これは単軸応力状態においてFig. 3.4-1に示す保持時間付きのひずみを与えるものである。ただし、テイラー展開に基づく方法は統一型モデルにおいて解が発散する可能性があるため、ここではKumarの方法とAryaの方法のみについて検討を行った。

#### ○時間増分一定での解析例

まず、時間増分： $\Delta t$ を一定として解析を行なった。この結果をTable. 3.4-1に示す。解析結果によると、かなり時間増分を細かくしても得られた応力にはばらつきが見られる。しかし20000ステップを費やしての解析結果はほぼ正解と考えられ、以降の検討においてはこの解を基準とする。この結果をFig. 3.4-2に示す。また表中に示すCPU TIMEはCRAY X/MP-18によるものである。

#### ○Kumar、Aryaの方法を用いた解析例

次にKumar, Aryaの方法による時間増分自動決定機能を用いた解析を行った。Table. 3.4-2(a)は文献<sup>26)</sup>に全く同一の条件を用いた解析結果である。これによると精度はAryaの方法の方がよいが計算時間はKumarの方法の方が優るため一概に比較はできない。そこでKumarの方法における時間制御のための定数をより厳しくし、Aryaの計算時間に合わせた解析結果をTable. 3.4-2(b)に示す。これによるとAryaの方法が若干有利な結果を出しているもののたいした差は見られない。またKumar, Aryaの方法による解析結果をFig. 3.4-3, Fig. 3.4-4に各々示す。

ただし解析においては後に示すように絶対誤差の評価基準も付加している。

#### ○KumarとAryaの方法における問題点と評価

これらのアルゴリズムは、実際の計算において以下のような問題点を持つ。

##### ① 非弾性ひずみの絶対誤差評価の必要性

Kumarの方法にしるAryaの方法にしる、時間増分を制御するために誤差の相対評価を行なっている。そこでこのままの式を用いて計算を行なうと、非弾性ひずみの発生初期において非常に小さな非弾性ひずみに依って時間が制御され、意味のない計算を行なうことになる。これを避けるために、Kumarの方法による誤差評価項の分母： $y(t)$ 、Aryaの方法における同様な $Y_H$ に下限値を設けてこれ以下では、誤差が絶対的に評価されるようにすることが考えられる。今回の解析では $y(t)$ 、 $Y_H$ の下限値として応力が単位の場合は、1.0を、歪の場合は、 $1E-4$ を採用している。

##### ② Kumarの方法における問題点

Kumarの方法ではまず誤差の物理的な意味が不明なこと、またこの誤差評価が後退差分によることが挙げられる。ただし今回の解析では、誤差評価に非弾性ひずみを用い前進差分によるアルゴリズムを採用している。しかし例えば応力を用いて誤差評価を行なうなら後退差分に依るし

か方法がない。

③ Aryaの方法における問題点

Aryaの方法における問題点は、解析において常に2ステップが必要なことである。(ただしこれは、サブステップと同様な方法に依って避けることが可能ではあるがこの場合不釣り合い力を考慮する必要がある) また、非弾性ひずみの評価を  $t + \Delta t$  において行なわないので Fig. 3.4-5 に示すような発散が起こる可能性があり、安定なアルゴリズムとはいえない。

概念のみればこれらのアルゴリズムは状態量の二階微分によって時間制御をしておりこの点に関して本質的な差はない。しかし解析において常に2ステップを要しかつ発散する可能性のある Aryaの方法より Kumarの方が優れていると考える。

Table.3.4-1 Result of analysis by constant time increment

増分の大きさ		t=0.005s (20000step)	t=0.05s (2000step)	t=0.5s (200step)
各 時 間 に お け る 応 力	Time(s)	応力(MPa)	応力(MPa) 相対誤差	応力(MPa) 相対誤差
	5.0	93.720	93.720 (0.00)	93.720 (0.00)
	10.0	149.149	149.177 (0.02)	149.529 (0.25)
	15.0	156.267	156.294 (0.02)	156.574 (0.20)
	20.0	157.780	157.789 (0.01)	157.877 (0.06)
	25.0	158.046	158.048 (0.00)	158.068 (0.01)
	30.0	60.026	59.721 (0.51)	54.534 (9.15)
	35.0	-33.694	-33.999 (0.91)	-39.186 (14.02)
	40.0	-127.402	-127.070 (0.26)	-132.893 (4.31)
	45.0	-157.927	-157.931 (0.00)	-157.974 (0.03)
	50.0	-158.071	-158.072 (0.00)	-158.082 (0.01)
	55.0	-140.837	-140.768 (0.05)	-139.851 (0.70)
	60.0	-137.135	-137.094 (0.03)	-136.566 (0.41)
	65.0	-135.006	-134.976 (0.02)	-134.603 (0.30)
	70.0	-133.513	-133.490 (0.02)	-133.201 (0.23)
	75.0	-132.364	-132.345 (0.01)	-132.110 (0.19)
	80.0	-38.598	-38.574 (0.06)	-38.282 (0.82)
85.0	55.122	55.146 (0.04)	55.438 (0.57)	
90.0	147.503	147.603 (0.07)	148.577 (0.73)	
95.0	157.860	157.863 (0.00)	157.897 (0.02)	
100.0	158.059	158.060 (0.00)	158.071 (0.01)	
CPU TIME		8.62s	0.96s	0.24s
平均誤差		—————	0.10%	1.60%

相対誤差は、20000stepの解析値に対するもので(%)の単位を持つ



Table.3.4-2(a) Result of analysis by Kumar's and Arya's strategy (1)

		$\Delta t$ :一定 (20000step)	Kumarの方法 (416step)	Aryaの方法 (639step)
各 時 間 に お け る 応 力	Time(s)	応力(MPa)	応力(MPa) 相対誤差	応力(MPa) 相対誤差
	5.0	93.720	93.720 (0.00)	93.720 (0.00)
	10.0	149.149	149.183 (0.02)	149.156 (0.00)
	15.0	156.267	156.374 (0.07)	156.299 (0.02)
	20.0	157.780	157.856 (0.05)	157.802 (0.01)
	25.0	158.046	158.077 (0.02)	158.055 (0.01)
	30.0	60.026	59.631 (0.66)	59.963 (0.10)
	35.0	-33.694	-34.089 (1.17)	-33.757 (0.19)
	40.0	-127.402	-127.809 (0.32)	-127.477 (0.06)
	45.0	-157.927	-157.952 (0.02)	-157.934 (0.00)
	50.0	-158.071	-158.086 (0.01)	-158.076 (0.00)
	55.0	-140.837	-140.661 (0.12)	-140.787 (0.04)
	60.0	-137.135	-136.965 (0.12)	-137.084 (0.04)
	65.0	-135.006	-134.485 (0.39)	-134.957 (0.04)
	70.0	-133.513	-133.356 (0.12)	-133.465 (0.04)
	75.0	-132.364	-132.215 (0.11)	-132.319 (0.03)
	80.0	-38.598	-38.429 (0.44)	-38.547 (0.13)
85.0	55.122	55.291 (0.31)	55.173 (0.09)	
90.0	147.503	147.836 (0.23)	147.623 (0.08)	
95.0	157.860	157.893 (0.02)	157.869 (0.01)	
100.0	158.059	158.081 (0.01)	158.066 (0.00)	
CPU TIME (s)		8.62	0.65	1.03
平均誤差 (%)		—————	0.211	0.045
増分の大きさ		5E-3 (一定)	7.8125E-3~4.0s	6.25E-3~6.4s

相対誤差は、20000stepの解析値に対するもので(%)の単位を持つ

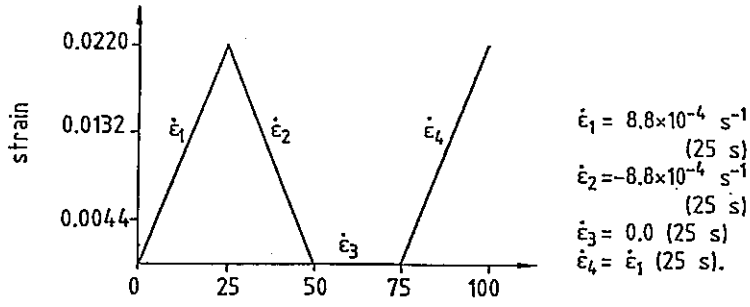
文献26)より、Kumarの方法における $e_{max}$ ,  $e_{min}$ は1E-3, 1E-4、Aryaの方法における $tol_u$ ,  $tol_i$ は1E-5, 1E-4としている。

Table. 3.4-2(b) Result of analysis by Kumar's and Arya's strategy (2)

		$\Delta t$ :一定 (20000step)	Kumarの方法 (888step)	Aryaの方法 (639step)
各 時 間 に お け る 応 力	Time(s)	応力(MPa)	応力(MPa) 相対誤差	応力(MPa) 相対誤差
	5.0	93.720	93.720 (0.00)	93.720 (0.00)
	10.0	149.149	149.163 (0.01)	149.156 (0.00)
	15.0	156.267	156.318 (0.03)	156.299 (0.02)
	20.0	157.780	157.816 (0.02)	157.802 (0.01)
	25.0	158.046	158.063 (0.01)	158.055 (0.01)
	30.0	60.026	59.854 (0.29)	59.963 (0.10)
	35.0	-33.694	-33.866 (0.51)	-33.757 (0.19)
	40.0	-127.402	-127.586 (0.14)	-127.477 (0.06)
	45.0	-157.927	-157.941 (0.01)	-157.934 (0.00)
	50.0	-158.071	-158.079 (0.01)	-158.076 (0.00)
	55.0	-140.837	-140.762 (0.05)	-140.787 (0.04)
	60.0	-137.135	-137.061 (0.05)	-137.084 (0.04)
	65.0	-135.006	-134.933 (0.05)	-134.957 (0.04)
	70.0	-133.513	-133.443 (0.05)	-133.465 (0.04)
	75.0	-132.364	-132.294 (0.05)	-132.319 (0.03)
	80.0	-38.598	-38.515 (0.22)	-38.547 (0.13)
85.0	55.122	55.205 (0.15)	55.173 (0.09)	
90.0	147.503	147.661 (0.11)	147.623 (0.08)	
95.0	157.860	157.876 (0.01)	157.869 (0.01)	
100.0	158.059	158.072 (0.01)	158.066 (0.00)	
CPU TIME (s)		8.62	1.10	1.03
平均誤差 (%)		—————	0.089	0.045
増分の大きさ		5E-3 (一定)	3.125E-3~4.0s	6.25E-3~6.4

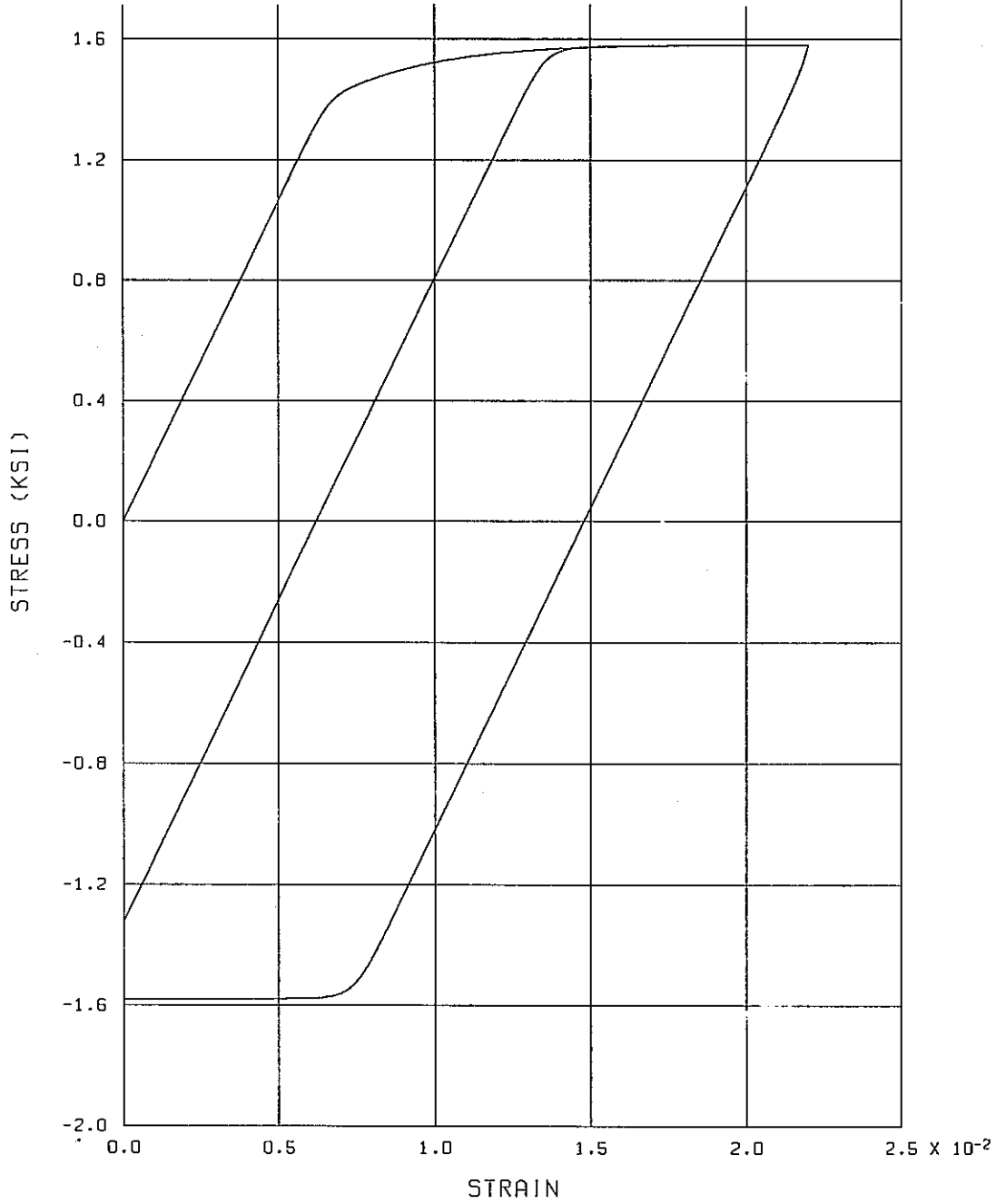
相対誤差は、20000stepの解析値に対するもので(%)の単位を持つ

この表においてAryaの方法における $tol_u$ ,  $tol_l$ は $1E-5$ ,  $1E-4$ のままであるが、Kumarの方法における $e_{max}$ ,  $e_{min}$ はAryaの方法とCPU時間を合わせるため、 $2E-4$ ,  $2E-5$ とFig. 3.4-2(a)の1/5に設定している。



ADMODEL

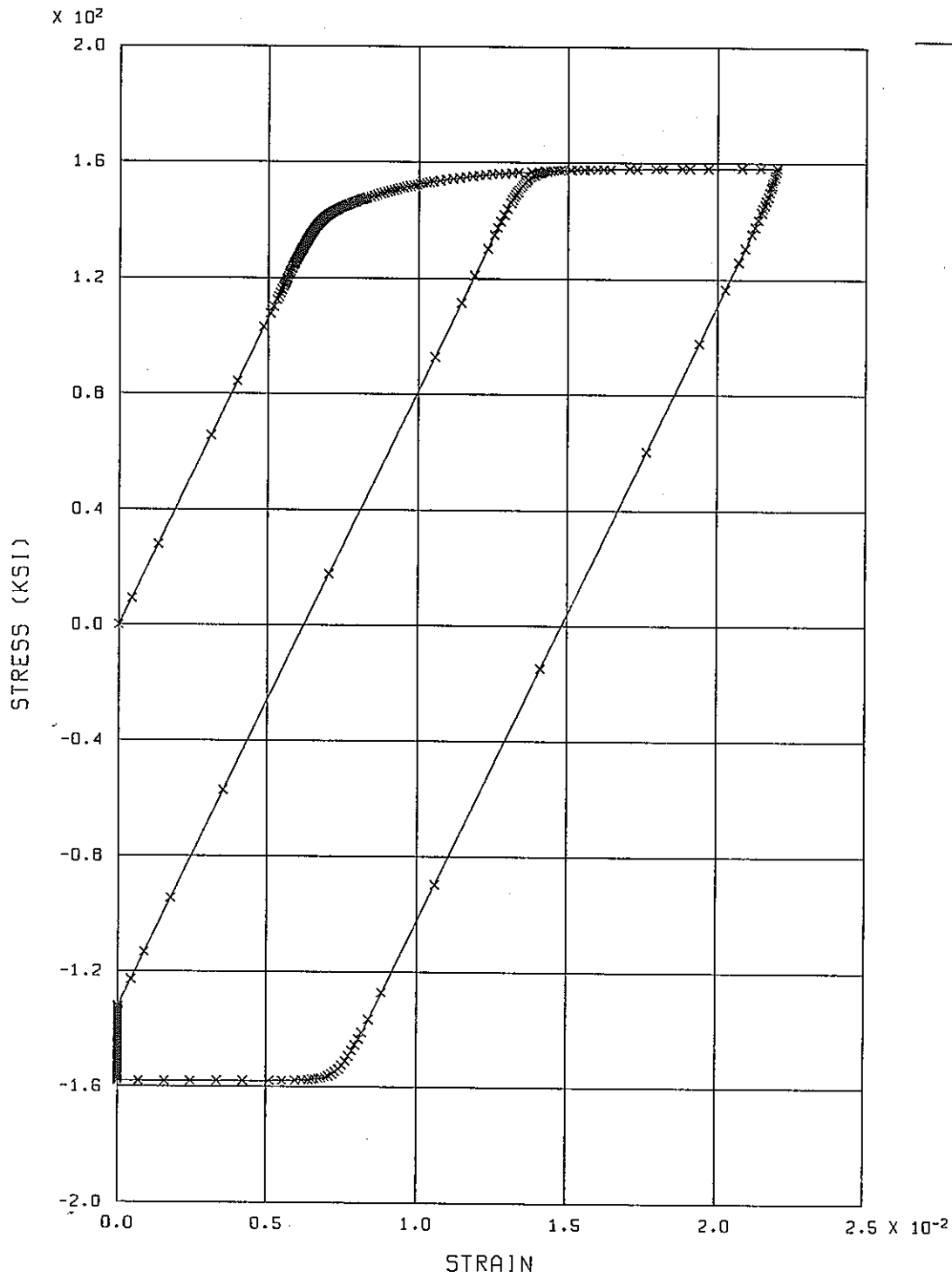
Fig. 3.4 - 1 Loading Condition of problem.



BODNER-PARTOM MODEL (DT=0.005) 20000 Steps.

Fig. 3.4 - 2 Result of Analysis by constant time increment

FINAS

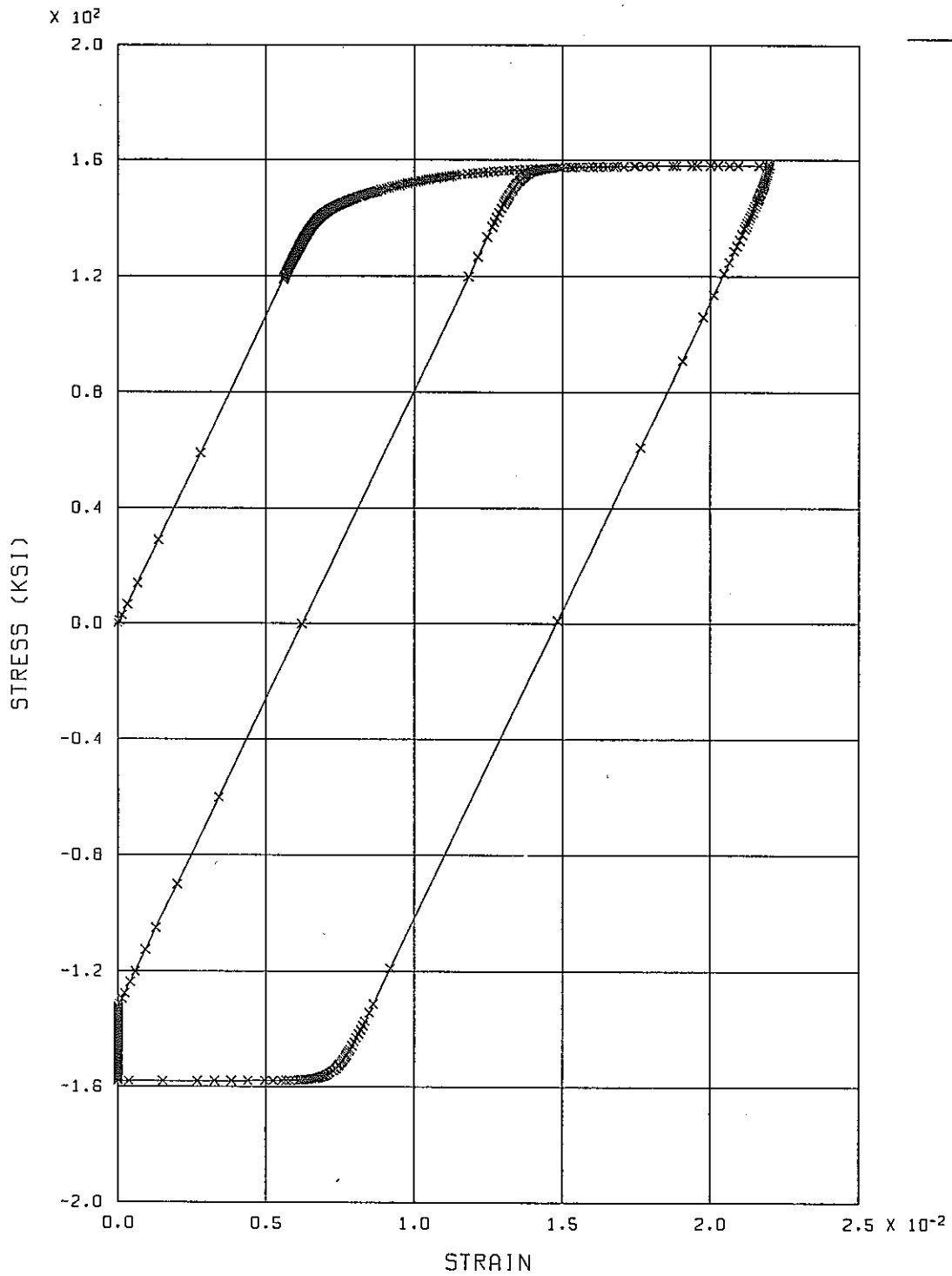


BODNER-PARTOM MODEL (MODIFIED KUMAR'S INTEGRATION STRATEGY)

(最少ステップ:  $7.8125 \times 10^{-3}$ s (1 サイクル目),  $3.125 \times 10^{-2}$ s (その他) 416 Step  
 最大ステップ: 4s

Fig.3.4 - 3 Result of Analysis by the Kumar's strategy

FINAS



BODNER-PARTOM MODEL (ARYA'S INTEGRATION STRATEGY)

'Arya' (初期値を 0.05 s に変更)

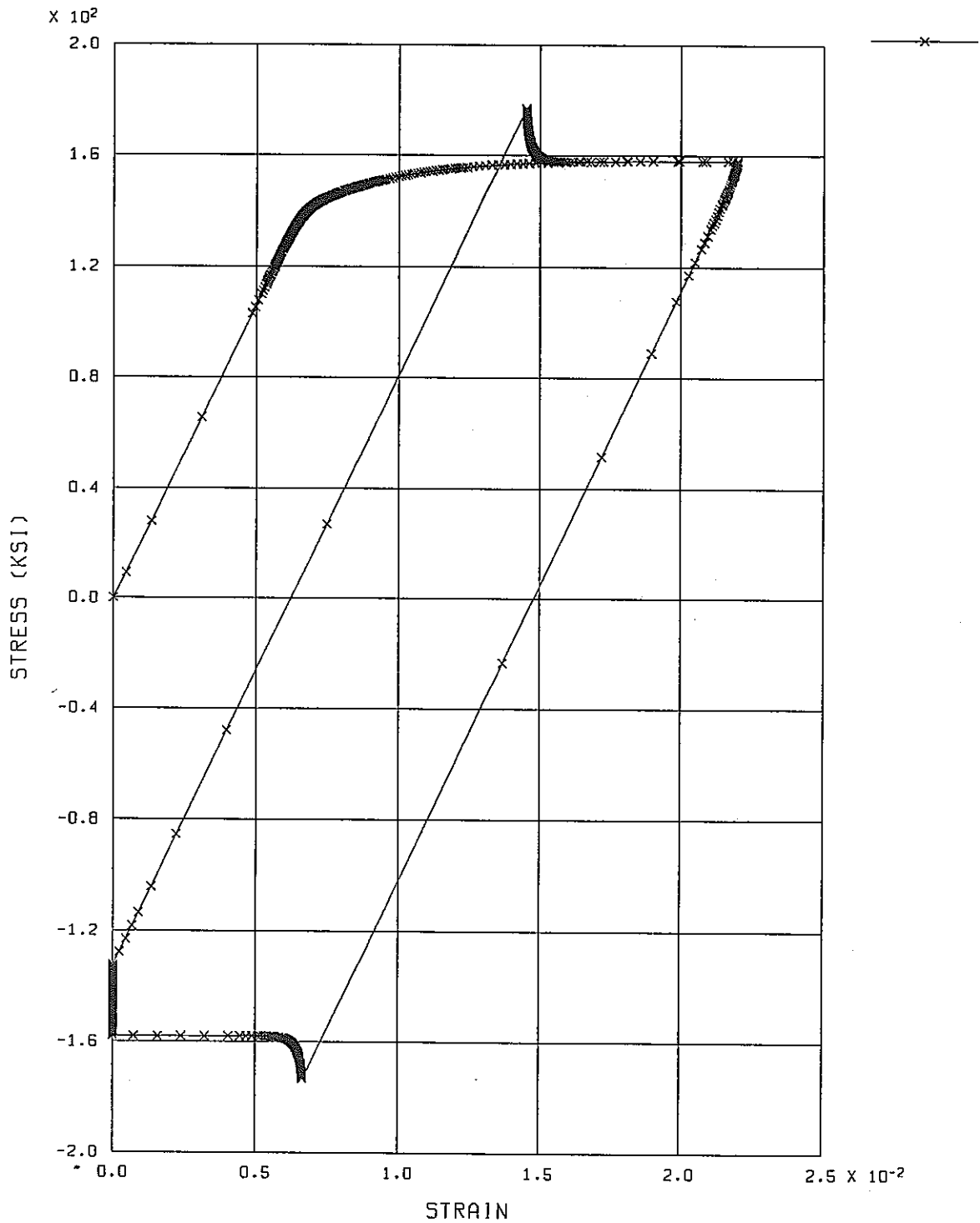
639 Step

最少ステップ  $6.25 \times 10^{-3}$  s (1 サイクル目),  $2.5 \times 10^{-2}$  s (その他)

最大ステップ 6.4 s

Fig.3.4 - 4 Result of Analysis by the Arya's strategy

FINAS



BODNER-PARTOM MODEL (ARYA'S INTEGRATION STRATEGY)

'Arya'

(各半サイクルの初期に0.5sの初期値を与えたもの)

→ステップが大きくなりすぎ正しくない解を与えている。

Fig. 3.4 - 5 Result of Analysis by the Arya's strategy (divergence example).

## 結 言

本報では非弾性解析の高精度化と高効率化のために各種の高精度非弾性構成モデルと非弾性解析アルゴリズムを検討し、その評価を行ない、この結果以下の結論を得た。

- (1) FBRの主要構造材料であるSUS304鋼の繰返し材料挙動を精度よく表現できる弾塑性構成モデルはChabocheモデル、非線形繰返し非硬化領域モデル、McDowellモデル、電中研モデルである。しかしChabocheモデルは精度に、McDowellモデルは構造の複雑さに問題があり、現状では非線形繰返し非硬化領域モデルと電中研モデルがこれに最も適している。
- (2) 統一型構成モデルは今回扱ったどのモデルも非線形硬化、応力のひずみ速度依存性、クリープ特性を表現することができる。ただし統一型構成モデルでは弾塑性構成モデルのように接線形の応力-ひずみ関係を陽に求めることができないため、弾塑性構成モデルのように安定した解を得ることに難しさがある。
- (3) 弾塑性構成方程式の積分法として最も効率と精度がよいのはKey, Kriegの厳密解であるが、降伏曲面が拡大する場合についてはまだ解が得られていない。また計算効率は多少劣るが最も適用性の広いのはSubstep法であり、この場合計算精度を任意に設定できる。
- (4) 統一型モデルの積分法としてWalkerの方法は今のところWalkerモデルにしか適用できない。またMillerの方法(NONSS)は任意の統一型構成モデルに適用できるが、応力-ひずみの接線剛性を数値的に求める必要があるため、大規模な問題でなければその効果を期待できない。
- (5) 統一型モデルの時間増分決定方法としてKumarの方法、Aryaの方法は同様の効果を期待できる。ただし、Aryaの方法は解が発散する可能性を持つ。

以上本報では各種構成モデルと解析アルゴリズムを扱ってきたがこれらは主に非弾性挙動シミュレーションプログラムADMODELによって3次元の単位立方体(一様応力場)に関する解析により検討と評価を行なったにすぎない。従ってこれら有効であると認められた構成モデル及び解析アルゴリズムについて、今後実際の構造問題における解析に適用し、その実用面での有効性を確認していく必要がある。

## 参 考 文 献

- (1) Besseling, J.F. : "A Theory of elastic, plastic and creep deformation of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery, and secondary creep", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 25, 1958, 529-536
- (2) 非弾性構造解析法の実用化に関する研究 (II) 日本機会学会, 1979, 19-26
- (3) Krieg, R.D. : A practical two surface plasticity theory, *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 42, 641-646(1975)
- (4) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Plastic internal variables formalism in cyclic plasticity, *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 98, 645-651(1976)
- (5) Chaboche, J.L. and Rousselier, G. : On the plastic and viscoplastic constitutive equations Part I : Rules developed with internal variable concept, *Trans. ASME J. Pres. Ves. Tech.* 105 153-158(1983)
- (6) Chaboche, J.L., Dang-van, K. and Cordier, G. : Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel, *Trans. 5th SMiRT*, 111/3, (1979)
- (7) 大野信忠 : 非硬化ひずみ領域を考慮した繰返し塑性構成式 日本機会学会論文集(A編), 48巻, 434号, 1342-1350 (昭57)
- (8) 大野, 加智, 村上 : 非線形硬化材料の繰返し塑性構成式 日本機会学会論文集(A編), 51巻, 470号, 2349-2358 (昭60)
- (9) 大野, 佐藤, 高橋, 桑原 : 温度変動下のSUS304の繰返し塑性構成方程式 日本機会学会論文集(A編), 54巻, 501号, 1140-1150 (昭63)
- (10) PNC SN9410 90-108 「SUS304繰返し塑性構成モデルの検討」平成2年6月



- (11) 電力中央研究所報告 研究報告:T86114 「FBR構造材料SUS304鋼の高温非弾性性構成式の提案」  
昭和62年6月
- (12) McDowell, D.L. : A two surface model for transient nonproportional cyclic plasticity,  
Trans. ASME J. Appl. Mech. 52 298-302(1985)
- (13) Watanabe, O and Atluri, S.N. : A new endochronic approach to computational elastoplasticity,  
Trans. ASME J. Appl. Mech. 52 857-864(1985)
- (14) 渡部 : 内部時間理論を用いた繰返し塑性の新しい積分形構成方程式と材料定数野決定方法 日本  
機械学会論文集(A編), 52巻, 481号, 2285-2293 (昭61)
- (15) 渡部 : 内部時間を用いた塑性異方硬化則(第1報, 降伏曲面の変形) 日本機械学会論文集(A編),  
53巻, 485号, 139-147 (昭62)
- (16) 渡部 : 内部時間を用いた塑性異方硬化則(第2報, 降伏曲面の変形) 日本機械学会論文集(A編),  
53巻, 493号, 1844-1853 (昭62)
- (17) Chaboche, J.L. and Rousselier, G. : On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations  
Part II: Application of internal variable concepts to the 316 stainless steel, Trans. ASME  
J. Pre. Ves. Tech, 105 159-164(1983)
- (18) Robinson, D.N. : Constitutive relationships for anisotropic high-temperature alloys,  
Nuclear Engineering and design, 83 389-396(1983)
- (19) Ramaswamy, V.G. : A constitutive model for the inelastic multiaxial cyclic response of  
a Nickel base superalloy RENE' 80, ph.D. thesis, University of Cincinnati, 1985
- (20) Bodner, S.R and Partom, Y. : Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening  
materials, Trans. ASME J. Appl. Mech. 42 385-389(1975)

(21) Krieg, R. D. and Krieg, D. B. : Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly Plastic model. Trans. ASME J. Pres. Ves. Tech, 99 510-515(1977)

(22) Xucheng, W and Liangming, L. : Exact integration of constitutive equations of kinematic hardening material and its extended applications. SMiRT-8 Proc. Paper L2/3, Brussels(1985)

(23) Sloan, S. W. : Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations. Numerical Method in Engineering vol. 24, 893-911(1987)

(24) Walker, K. P. : A uniformly valid asymptotic integration algorithm for unified viscoplastic constitutive models

(25) Miller, A. K. and Tanaka, T. G. : NONSS: A new method for integrating unified constitutive equations under complex histories. Trans. ASME J. Eng. Mat. Tech. vol. 110 205-211(1988)

(26) Arya, V. K., Hornberger, K. and Stamm, H. : On the numerical integration of viscoplastic models. KfK 4082 May. 1986

(27) Kumar, V., Morjaria, M. and Mukherjee S. : Numerical integration of some stiff constitutive models of inelastic deformation, Trans. ASME J. Eng. Mat. Tech. vol. 102 92-96(1980)