PNC TN9410 93-189

分置

熱応力評価法の開発

第6報　不連続熱応力の考察

1993年9月

動力炉・核燃料開発事業団
大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については，下記にお問い合わせください。
〒311-13　茨城県東茨城郡大洗町成田町4002
動力炉・核燃料開発事業団
大洗工学センター　システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団（Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation）

PNC TN9410 93-189
1993年 9月

熱応力評価法の開発

第6報；不連続熱応力の考察

報告者　古橋一郎*
実施責任者　笠原直人**

要旨

実用的な熱応力評価法の開発を目的に、材質および板厚の異なる円筒の接続部について、シェル理論解析および検討を行い、以下の知見を得た。

①主要な熱応力要因である次の温度荷重に対してシェル理論解を得た。

・要因1～円筒1と円筒2に平均熱膨張差$\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2}$が生じた場合

・要因2～円筒1に内外面温度差 T_{B1}が生じた場合

・要因3～円筒2に内外面温度差 T_{B2}が生じた場合

②円筒1および円筒2の板厚平均温度と内外面温度差がそれぞれ任意に与えられた場合の熱応力はこれらの解を重ね合わせればよい。

③垂直応力係数は弾性係数比$g = E_2 / E_1$と板厚比$k = t_2 / t_1$のみの関数であり半径に依存しない。剪断応力係数はさらに$(t / r)^{0.5}$に比例する。

④接続部近傍の応力分布を無限円筒の熱応力（軸および周方向の曲げ応力$-0.714E\alpha T_B$）と不連続熱応力の和と表した場合、不連続熱応力に対する温度曲げひずみ$\alpha_1 T_{B1}$と$\alpha_2 T_{B2}$の寄与感度比は-1対gk^2である。従って$gk^2 > 1$の構造での1側の応力評価では自身の T_{B1}だけでなく、接続相手側の T_{B2}に一層留意せねばならない。

⑤$g \fallingdotseq 1$、$k > 1$の一般的な板厚不連続構造では、1側（薄肉側）の応力が2側より大きくなり、設計評価では薄肉側のみ応力評価を行えば良い。

⑥ノズル構造など他の直列不連続構造でも本報告と同様に「応力係数による熱応力評価式」が記述可能であることを示した。

* （株）ＣＲＣ総合研究所
** 大洗工学センター　機器構造開発部　構造工学室

目　次

1．序論 …… 1

2．シェル理論による解析 …… 4

3．平均熱膨張差による熱応力 …… 6

4．円筒１の内外面温度差による熱応力 …… 8

5．円筒２の内外面温度差による熱応力 …… 9

6．熱応力解のまとめおよび考察 …… 11

7．簡易熱応力評価法について …… 14

8．参考文献 …… 20

図 表 リ ス ト

図１　材質および板厚の不連続 …… 3

図２　直列接続の不連続構造 …… 25

表１　シェル熱応力解のまとめ …… 21

表２　無次元パラメータ …… 21

表３　シェル関数値 …… 24

1．序論

高温プラントの機器・配管の設計では内圧、地震などによる一次応力の評価に加えて、熱応力の評価が重要不可欠である。これらの機器・配管の熱応力評価手段には大きく分けて以下の２つの手法があり、それぞれに長所および短所がある。

（１）理論解、公式、近似式および線図などによる簡易評価法または工学的評価法

・長所－－計算が簡単である。電卓、パソコンにより机上で容易に計算可能である。

・短所－－適用範囲がせまい。単純形状、単純な条件に適用範囲が限定される。

（２）スーパーコンピュータと汎用ＦＥＭコードによる伝熱解析および応力解析

・長所－－適用範囲が広い。任意の複雑形状、任意の複雑な条件が計算できる。

・短所－－計算コストが大きい。汎用ＦＥＭコードを自在に使いこなすには高度の知識と経験を有する構造解析技術者の多大の労力を要する。

このように、一方の長所が他方の短所となっていて、両者を相互補完的に併用することが大切であると考える。スーパーコンピュータおよび汎用ＦＥＭコードが普及した現在は（２）が主流であり、機器・配管の熱応力評価に多大な労力とコストが消費されている現状である。

このような現状のもと、著者らは両者の長所を併せ持った工学的に実用価値の高い熱応力評価法の開発を進めている。以下のような利用法を念頭に置いている。

（３）発生熱応力の概略値の敏速な評価。

現実の形状および条件の本質的な要素を抽出した「基本モデル」に工学的評価法を適用し、応力集中係数等を乗じて、発生熱応力の概略値を敏速に評価する。

（４）敏速なパラメータ感度解析。

「基本モデル」に工学的評価法を適用し、パラメータ感度解析をおこない、熱応力要因（原因）と熱応力（結果）の関係の概略傾向を敏速に把握する。

（５）ＦＥＭ解析と工学的評価法を相互補完的に併用し、熱応力計算の効率を上げる。

工学的評価法による敏速な机上計算、パラメータ感度解析を参考にして、高価なＦＥＭ解析の解析ケースを適切にしぼりこみ、解析コストを節約し計算効率を上げる。あるいは、重ね合わせ法、数値積分などをうまく応用し、高価なＦＥＭ解析結果を普遍的に有効利用するための、工学的手法を確立し、その結果として計算効率を上げる。

（６）最適設計に応用する。

工学的評価法によるパラメータ感度解析により、熱応力要因の最適化を行う。例えば、過渡事象時の流量特性や熱出力特性あるいは部材形状を最適化し、発生熱応力を経済的に許容値以下に制御することなどが考えられる。一般にＦＥＭ解析のみで、このような最適設計をおこなうのは、コストおよび計算期間の両面から無理である場合が多い。

（７）高温プラントの構造設計における熱応力評価体系の確立に寄与する。

応力係数による簡易熱応力評価式を策定し、合理的で簡便な熱応力評価体系を確立する。

（８）過渡熱応力の高速シュミュレーション手法の確立に寄与する。

非定常熱伝導を含めた過渡熱応力の高速シュミュレーション手法を確立する。経済性と安全性を考慮し、最適運転形態や最適構造設計を行うには、過渡熱応力の高速シュミュレーション手法が大きく貢献する。また、世界的に注目されつつある「過渡荷重および損傷のモニタシステム」の基盤技術と

して、過渡熱応力の高速シュミュレーション手法は欠かせない重要技術である。

著者らは以上の考えに基づき、以下の理論解析および実用的な熱応力評価法の開発を行ってきた。

第１報（文献１）　平板の非定常熱伝導および熱応力の理論解析および線図化

第２報（文献２）　軸対称非定常熱応力のシェル理論解析、計算コード化および線図化

第３報（文献３）　軸対称非定常熱応力のシェル理論解析、計算コードＳＩＭＰＬＥの開発改良

第４報（文献４）　非定常熱応力計算における Duhamelの定理の応用

第５報（文献５）　１次元非定常熱伝導解および変係数問題への応用

本報告（第６報）では、材質および形状の不連続部の熱応力について考察を行った。一般に材質および形状の不連続部を含む構造物に温度分布が生じた場合、不連続部近傍に生じる熱応力はさまざまな因子に影響される。簡易式による設計評価は困難であり、ＦＥＭ数値解に基づいて評価されるのが一般的である。本報告では代表的な不連続構造である「材質および板厚の異なる円筒の接続部」に、主要な熱応力発生要因となる以下の３つの基本的な温度分布荷重が作用した場合に対して、発生熱応力のシェル理論解を求め、考察を加えた。

・円筒１と円筒２に平均熱膨張差（$\Delta_{TE}=\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2}$）が生じた場合

・円筒１に内外面温度差(T_{B1}) が生じた場合

・円筒２に内外面温度差(T_{B2}) が生じた場合

円筒１に平均温度 T_{M1}と内外面温度差 T_{B1}が生じ、円筒２に平均温度 T_{M2}と内外面温度差 T_{B2}が生じた場合の熱応力は、これらの３つの解を重ね合わせれば良い。

これにより、断面全体に作用する部材力（膜力、曲げモメント、剪断力）および設計評価における S_n が、無次元応力係数を用いた簡単な理論式により算出評価できる。応力集中による割増し分、および板厚内温度分布の非線形成分による熱ピーク応力を加えて、S_P が容易に算出評価でき、クリープ疲労損傷が評価できる。

またシェル解を陽に与えることにより、熱応力の要因（Δ_{TE}、 T_{B1}、 T_{B2}）の各々に対して、弾性係数比および板厚比とどの様な関係にあるかが明らかとなる。すなわち各要因と結果（熱応力値）の因果関係が明らかになり、設計評価への応用が期待できる。例えば、各要因の熱応力への寄与割合など、設計評価のうえで重大な応用価値をもつ情報が、明らかとなる。

ノズル構造、管板構造などの他の直列不連続シェル構造の熱応力に関しても「半径方向剛性比および曲げ剛性比の関数として、本報告と同様の熱応力係数が記述可能である。」と考える。これらの他の不連続構造の熱応力に関する考察は次報で報告予定である。

以下の記号を使用する。ｊ＝１は円筒１側を表し、ｊ＝２は円筒２側を表すものとする。

以下の記号を使用する。j＝1は円筒1側を表し、j＝2は円筒2側を表すものとする。

E_j ；弾性係数（ヤング率）

ν ；ポアソン比、円筒1、2とも共通に$\nu=0.3$とする。

α_j ；線膨張係数

t_j ；板厚

r ；平均半径、円筒1、2とも共通とする。

x ；接続境界からの軸方向距離

T_{Mj} ；板厚平均温度

T_{Bj} ；等価線形温度（内面値－外面値）

$D_j = E_j\ t_j^{\ 3} / [12(1-\nu^2)]$ ；板の曲げ剛性 (1a)

$\beta_j = [3(1-\nu^2)]^{1/4} / (rt_j)^{1/2} = 1.2854 / (rt_j)^{1/2}$ ；シェル減衰係数 (1b)

$y_j = \beta_j x$ ；接続境界からの軸方向無次元距離 (1c)

$u_j(x)$ ；半径方向変位

$M_{xj}(x)$ ；単位円周長さ当たりの軸方向曲げモメント

$M_{cj}(x)$ ；単位軸方向長さ当たりの周方向曲げモメント

$Q_j(x)$ ；単位円周長さ当たりの半径方向剪断力

$\sigma_{Mcj} = E_j(u_j - r\alpha_j T_{Mj}) / r$ ；周方向膜応力 (2a)

$\sigma_{Bxj} = 6M_{xj} / t_j^{\ 2}$ ；軸方向曲げ応力 (2b)

$\sigma_{Bcj} = 6M_{cj} / t_j^{\ 2}$ ；周方向曲げ応力 (2c)

$\tau_{Rxj} = Q_j / t_j$ ；半径方向剪断応力 (2d)

$f_1(y_j) = f_1(\beta_j x) = \exp(-\beta_j x)[\cos(\beta_j x)+\sin(\beta_j x)]$ ；シェル関数1 (3a)

$f_2(y_j) = f_2(\beta_j x) = \exp(-\beta_j x)[\cos(\beta_j x)-\sin(\beta_j x)]$ ；シェル関数2 (3b)

$f_3(y_j) = f_3(\beta_j x) = \exp(-\beta_j x)\cos(\beta_j x)$ ；シェル関数3 (3c)

$f_4(y_j) = f_4(\beta_j x) = \exp(-\beta_j x)\sin(\beta_j x)$ ；シェル関数4 (3d)

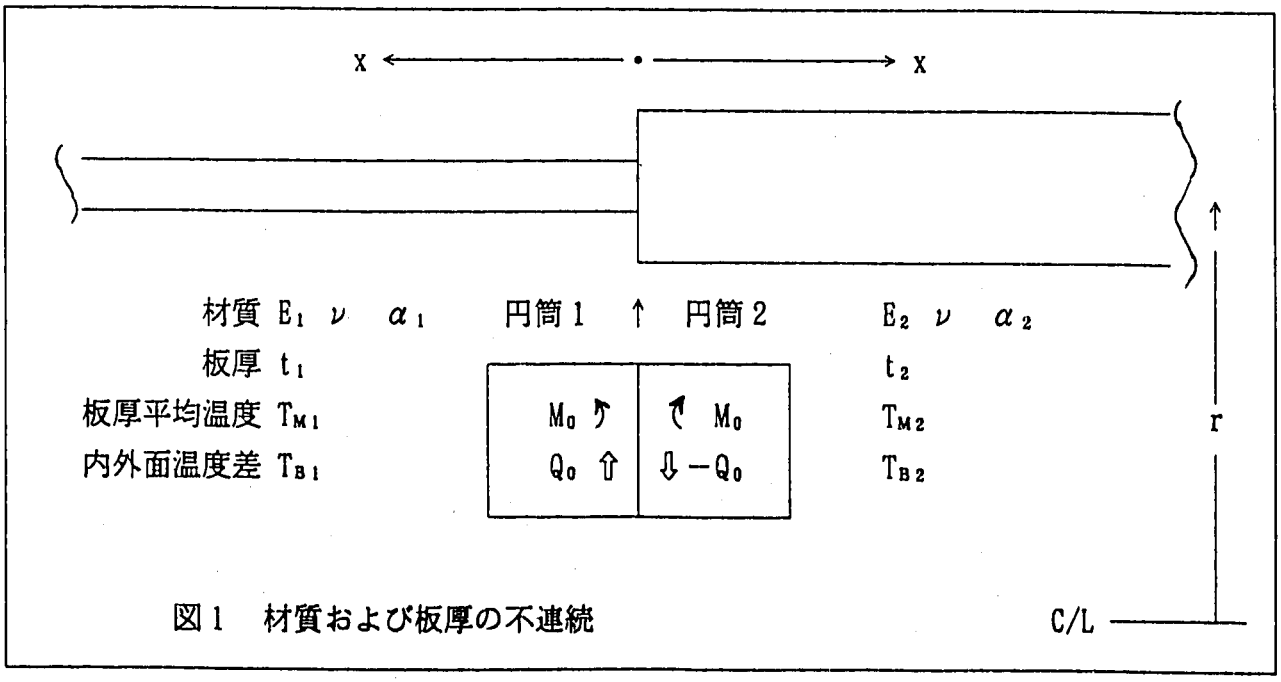


図1　材質および板厚の不連続

2。シェル理論による解析

ソリッド要素を用いたＦＥＭ解析によれば詳細形状パラメータ、材料特性の温度依存性および複雑な非線形温度分布などをすべて含めて、詳細な応力分布の数値解が得られる。シェル理論による数学的な解を得るには、これら詳細な条件をすべて考慮することは困難であり、単純な条件のみ考慮することができる。このようにシェル理論解析の適用範囲は甚だ貧弱ではあるが、本報告では以下の理由により敢えてシェル理論解析を試みることにした。

①構造物の強度評価の目安となる「断面全体に作用する合計力（膜力、曲げモメント、剪断力）」はシェル理論により精度良く記述できる。

②詳細なパラメータは取扱不可能であるけれども、基本的なパラメータ（弾性係数比、板厚比、板厚半径比、板厚平均温度、内外面温度差など）の各々の効果を明確に分離および評価できる。基本的なパラメータと熱応力の関係を明確に把握するには適切と考えられる。

③ソリッドＦＥＭ解析ではすべてのパラメータの効果を含んだ解が得られる反面、これら各パラメータの効果を明確に分離および評価するのが困難な場合が多い。

④本報告では温度分布として、板厚平均温度と内外面線形温度差のみ考慮し、これらが接続境界でステップ変化するものとした。現実には軸方向の熱流により、滑らかな曲線状温度変化となるが、発生熱応力の上限値および傾向はステップ変化により明確に記述できると考える。

⑤板厚内温度分布の非線形成分（ピーク温度）は無視した。断面全体に作用する合計力には、大きな影響を与えないと考える。疲労損傷評価の際に、応力集中による割増し分と合わせて、熱ピーク応力を考慮すれば良いと考える。

⑥接続部の詳細形状（コーナーＲ形状、テーパ形状）は無視した。詳細形状効果については別途、応力集中係数および等価板厚などにより評価すべきであろう。この分野ではＦＥＭ解析を応用すべきであると考える。

解析モデルを図１に示す。dislocation 法によりシェル解を求める。接続部に曲げモメントM_0および剪断力Q_0が生じるものとする。M_0およびQ_0は図１の向きに作用するものとする。接続部を自由端とした場合の自由熱膨張解にM_0とQ_0による解を加え合わせた合計解を考え、合計解が接続部で変位と勾配の連続条件を満たすように接続力M_0とQ_0を決定する。すなわち接続部における自由熱膨張変形の不連続量（dislocation)を解消するように接続力M_0とQ_0が発生するものと考える。シェル方程式の詳細については文献２を参照されたい。

円筒１側の解は、境界からの距離を xとして、次式で与えられる。

$$u_1(x) = r\alpha_1 T_{M1} + \frac{(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1} f_2(y_1)}{2\beta_1^2 t_1} + \frac{M_0 f_2(y_1)}{2\beta_1^2 D_1} + \frac{Q_0 f_3(y_1)}{2\beta_1^3 D_1} \tag{4a}$$

$$du_1/dx = -\frac{(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1} f_3(y_1)}{\beta_1 t_1} - \frac{M_0 f_3(y_1)}{\beta_1 D_1} - \frac{Q_0 f_1(y_1)}{2\beta_1^2 D_1} \tag{4b}$$

$$M_{x1}(x) = \frac{D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{t_1}\left[-1 + f_1(y_1)\right] + M_0 f_1(y_1) + \frac{Q_0 f_4(y_1)}{\beta_1} \tag{4c}$$

$$M_{c1}(x) = \frac{D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{t_1}\left[-1 + \nu f_1(y_1)\right] + \nu M_0 f_1(y_1) + \frac{\nu Q_0\ f_4(y_1)}{\beta_1} \tag{4d}$$

$$Q_1(x)=-\frac{2\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1} f_4(y_1)}{t_1}-2\beta_1 M_0 f_4(y_1)+Q_0 f_2(y_1) \tag{4e}$$

ここに $y_1=\beta_1 x$ は無次元距離、$f_1(y_1)$〜$f_4(y_1)$は (3)式で定義されるシェル関数である。

円筒２側の解は、境界からの距離を xとして、次式で与えられる。

$$u_2(x)=r\alpha_2 T_{M2}+\frac{(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2} f_2(y_2)}{2\beta_2{}^2 t_2}+\frac{M_0 f_2(y_2)}{2\beta_2{}^2 D_2}-\frac{Q_0 f_3(y_2)}{2\beta_2{}^3 D_2} \tag{5a}$$

$$du_2/dx=-\frac{(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2} f_3(y_2)}{\beta_2 t_2}-\frac{M_0 f_3(y_2)}{\beta_2 D_2}+\frac{Q_0 f_1(y_2)}{2\beta_2{}^2 D_2} \tag{5b}$$

$$M_{x2}(x)=\frac{D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{t_2}[-1+f_1(y_2)]+M_0 f_1(y_2)-\frac{Q_0 f_4(y_2)}{\beta_2} \tag{5c}$$

$$M_{c2}(x)=\frac{D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{t_2}[-1+\nu f_1(y_2)]+\nu M_0 f_1(y_2)-\frac{\nu Q_0\ f_4(y_2)}{\beta_2} \tag{5d}$$

$$Q_2(x)=-\frac{2\beta_2 D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2} f_4(y_2)}{t_2}-2\beta_2 M_0 f_4(y_2)-Q_0 f_2(y_2) \tag{5e}$$

ここに $y_2=\beta_2 x$ は無次元距離、$f_1(y_2)$〜$f_4(y_2)$は (3)式で定義されるシェル関数である。

接続部の変位および軸方向勾配の連続条件は次式で与えられる。

$u_1(0)=u_2(0)$より

$$\left(\frac{1}{2\beta_1{}^2 D_1}-\frac{1}{2\beta_2{}^2 D_2}\right)M_0+\left(\frac{1}{2\beta_1{}^3 D_1}+\frac{1}{2\beta_2{}^3 D_2}\right)Q_0=$$

$$-r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})-\frac{(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{2\beta_1{}^2 t_1}+\frac{(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{2\beta_2{}^2 t_2} \tag{6a}$$

$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=0}=-\left.\frac{du_2}{dx}\right|_{x=0}$ より

$$-\left(\frac{1}{\beta_1 D_1}+\frac{1}{\beta_2 D_2}\right)M_0-\left(\frac{1}{2\beta_1{}^2 D_1}-\frac{1}{2\beta_2{}^2 D_2}\right)Q_0=\frac{(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{\beta_1 t_1}+\frac{(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{\beta_2 t_2} \tag{6b}$$

次式で定義される弾性係数比および板厚比を導入する。

$$g=E_2/E_1 \tag{7a}$$

$$k=t_2/t_1 \tag{7b}$$

$D_2=gk^3 D_1$ 、$\beta_2=\beta_1/k^{0.5}$および $t_2=kt_1$ を用いて (6)式を整理すると次式を得る。

$$\frac{gk^2-1}{2\beta_1{}^2 D_1 gk^2}M_0+\frac{gk^{1.5}+1}{2\beta_1{}^3 D_1 gk^{1.5}}Q_0=$$

$$-r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})-\frac{(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{2\beta_1{}^2 t_1}+\frac{(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{2\beta_1{}^2 t_1} \tag{8a}$$

$$-\frac{gk^{2.5}+1}{\beta_1 D_1 gk^{2.5}}M_0-\frac{gk^2-1}{2\beta_1{}^2 D_1 gk^2}Q_0=\frac{(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{\beta_1 t_1}+\frac{(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{\beta_1 t_1 k^{0.5}} \tag{8b}$$

(6)式あるいは (8)式はM_0、Q_0を未知数とする連立方程式である。これを解いてM_0、Q_0を求め、(4)式および (5)式に代入すると、材質１側および２側のシェル解が求まる。

3。平均熱膨張差による熱応力

平均熱膨張差（$\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2}$）が生じた場合を考える。内外面温度差は0とする（$T_{B1} = T_{B2} = 0$）。(8)式を解くと次の解を得る。

$$M_0 = 2\beta_1^2 D_1 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2}) \frac{gk^2(gk^2-1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}$$

$$= 2\beta_2^2 D_2 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2}) \frac{gk^2-1}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{9a}$$

$$Q_0 = 2\beta_1^3 D_1 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2}) \frac{-2gk^{1.5}(gk^{2.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}$$

$$= 2\beta_2^3 D_2 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2}) \frac{-2(gk^{2.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{9b}$$

(9)式を(4)式に代入すると、円筒1側のシェル解が以下のように得られる。

$$u_1(x) = r\alpha_1 T_{M1} - r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})[C_1 f_3(y_1) + C_2 f_4(y_1)] \tag{10a}$$

$$M_{x1}(x) = 2\beta_1^2 D_1 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})[-C_1 f_4(y_1) + C_2 f_3(y_1)] \tag{10b}$$

$$M_{c1}(x) = \nu\ M_{x1}(x) \tag{10c}$$

$$Q_1(x) = -2\beta_1^3 D_1 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})[C_1 f_2(y_1) + C_2 f_1(y_1)] \tag{10d}$$

$$\frac{\sigma_{MC1}}{E_1(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = -[C_1 f_3(y_1) + C_2 f_4(y_1)] \tag{10e}$$

$$\frac{\sigma_{BX1}}{E_1(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = \left(\frac{3}{1-\nu^2}\right)^{0.5}[-C_1 f_4(y_1) + C_2 f_3(y_1)]$$
$$= 1.816\ [-C_1 f_4(y_1) + C_2 f_3(y_1)] \tag{10f}$$

$$\frac{\sigma_{BC1}}{E_1(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = \nu\left(\frac{3}{1-\nu^2}\right)^{0.5}[-C_1 f_4(y_1) + C_2 f_3(y_1)]$$
$$= 0.545\ [-C_1 f_4(y_1) + C_2 f_3(y_1)] \tag{10g}$$

$$\frac{\tau_{RX1}}{E_1(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = -\frac{(t_1/r)^{0.5}}{2[3(1-\nu^2)]^{1/4}}[C_1 f_2(y_1) + C_2 f_1(y_1)]$$
$$= -0.389\ (t_1/r)^{0.5}\ [C_1 f_2(y_1) + C_2 f_1(y_1)] \tag{10h}$$

(9)式を(5)式に代入すると、円筒2側のシェル解が以下のように得られる。

$$u_2(x) = r\alpha_2 T_{M2} + r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})[(1-C_1) f_3(y_2) - C_3 f_4(y_2)] \tag{11a}$$

$$M_{x2}(x) = 2\beta_2^2 D_2 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})[(1-C_1) f_4(y_2) + C_3 f_3(y_2)] \tag{11b}$$

$$M_{c2}(x) = \nu\ M_{x2}(x) \tag{11c}$$

$$Q_2(x) = 2\beta_2^3 D_2 r(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})[(1-C_1) f_2(y_2) - C_3 f_1(y_2)] \tag{11d}$$

$$\frac{\sigma_{MC2}}{E_2(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = (1-C_1) f_3(y_2) - C_3 f_4(y_2) \tag{11e}$$

$$\frac{\sigma_{BX2}}{E_2(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = \left(\frac{3}{1-\nu^2}\right)^{0.5}[(1-C_1) f_4(y_2) + C_3 f_3(y_2)]$$
$$= 1.816\ [(1-C_1) f_4(y_2) + C_3 f_3(y_2)] \tag{11f}$$

$$\frac{\sigma_{BC2}}{E_2(\alpha_1 T_{M1} - \alpha_2 T_{M2})} = \nu\left(\frac{3}{1-\nu^2}\right)^{0.5}[(1-C_1) f_4(y_2) + C_3 f_3(y_2)]$$
$$= 0.545\ [(1-C_1) f_4(y_2) + C_3 f_3(y_2)] \tag{11g}$$

$$\frac{\tau_{RX2}}{E_2(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})} = \frac{(t_2/r)^{0.5}}{2[3(1-\nu^2)]^{1/4}}\left[(1-C_1)f_2(y_2)-C_3 f_1(y_2)\right]$$

$$= 0.389\,(t_2/r)^{0.5}\left[(1-C_1)f_2(y_2)-C_3 f_1(y_2)\right] \qquad (11h)$$

ここにC_1、C_2、C_3は次式で与えられる。

$$C_1 = \frac{g^2k^4+gk^2+2gk^{1.5}}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \qquad (12a)$$

$$C_2 = \frac{gk^2(gk^2-1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \qquad (12b)$$

$$C_3 = \frac{gk^2-1}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} = \frac{C_2}{gk^2} \qquad (12c)$$

これらの解から以下のことが理解できる。

①接続部の熱膨張差　$r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})$ に対する円筒1と円筒2の変位分担割合が$-C_1$対（$1-C_1$）となる。すなわちC_1は接続部の半径方向変位を表す無次元パラメータである。

$$u_1(0) = r\alpha_1 T_{M1} - C_1 r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2}) = u_2(0)$$

$$u_2(0) = r\alpha_2 T_{M2} + (1-C_1)\,r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})$$

②接続部のモメントはC_2に比例する。すなわちC_2は接続部のモメントの大きさを表す無次元パラメータである。　$M_0 = 2\beta_1^2 D_1 r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})\,C_2$

③接続部の剪断力はC_1+C_2に比例する。すなわちC_1+C_2は接続部の剪断力の大きさを表す無次元パラメータである。　$Q_0 = -\,2\beta_1^3 D_1 r(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})(C_1+C_2)$

④円周方向応力、軸方向応力は$E(\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2})$ に比例し、比例係数（応力係数）はC_1とC_2のみの関数となる。すなわち弾性係数比と板厚比のみの関数となり半径に依存しない。

⑤剪断応力はさらに（板厚／半径）$^{0.5}$ に比例する。

4。円筒1側の内外面温度差による熱応力

円筒1側に内外面温度差 T_{B1}が生じた場合を考える。 $T_{M1}=T_{M2}=T_{B2}=0$ とする。(8)式を解くと次の解を得る。

$$M_0=\frac{D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{t_1}\ \frac{-\ gk^2(gk^2+2k^{0.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}$$

$$=\frac{D_2(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{t_2}\ \frac{-(gk^2+2k^{0.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{13a}$$

$$Q_0=\frac{\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{t_1}\ \frac{-\ 2gk^{1.5}(k^{0.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}$$

$$=\frac{\beta_2 D_2(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}}{t_2}\ \frac{-2(k^{0.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{13b}$$

(13)式を (4)式に代入すると、円筒1側のシェル解が以下のように得られる。

$$u_1(x)=-[(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}\ /(2\beta_1{}^2 t_1)]\ [C_3 f_3(y_1)+(1-C_4)f_4(y_1)] \tag{14a}$$

$$M_{x1}(x)=-[D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_1]\ [1+C_3 f_4(y_1)-(1-C_4)f_3(y_1)] \tag{14b}$$

$$M_{c1}(x)=-[D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_1]\ \{1+\nu\ [C_3 f_4(y_1)-(1-C_4)f_3(y_1)]\} \tag{14c}$$

$$Q_1(x)=-\ [\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_1]\ [C_3 f_2(y_1)+(1-C_4)f_1(y_1)] \tag{14d}$$

$$\frac{\sigma_{MC1}}{E_1\alpha_1 T_{B1}}=-\left(\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}\right)^{0.5}[C_3 f_3(y_1)+(1-C_4)f_4(y_1)]$$

$$=-0.393\ \ [C_3 f_3(y_1)+(1-C_4)f_4(y_1)] \tag{14e}$$

$$\frac{\sigma_{BX1}}{E_1\alpha_1 T_{B1}}=-\frac{1}{2(1-\nu)}\ [1+C_3 f_4(y_1)-(1-C_4)f_3(y_1)]$$

$$=-0.714\ +0.714[-C_3 f_4(y_1)+(1-C_4)f_3(y_1)] \tag{14f}$$

$$\frac{\sigma_{BC1}}{E_1\alpha_1 T_{B1}}=-\frac{1}{2(1-\nu)}\ \{1+\nu\,[C_3 f_4(y_1)\ -(1-C_4)f_3(y_1)]\}$$

$$=-0.714\ +0.214[-C_3 f_4(y_1)+(1-C_4)f_3(y_1)] \tag{14g}$$

$$\frac{\tau_{RX1}}{E_1\alpha_1 T_{B1}}=-\frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{12(1-\nu)}\ (t_1/r)^{0.5}\ [C_3 f_2(y_1)+(1-C_4)f_1(y_1)]$$

$$=-0.153(t_1/r)^{0.5}\ [C_3 f_2(y_1)+(1-C_4)f_1(y_1)] \tag{14h}$$

(13)式を (5)式に代入すると、円筒2側のシェル解が以下のように得られる。

$$u_2(x)=[(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}\ /(2\beta_2{}^2 t_2)]\ [-C_3 f_3(y_2)+C_4 f_4(y_2)/(gk^2)] \tag{15a}$$

$$M_{x2}(x)=-[D_2(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_2]\ [C_3 f_4(y_2)+C_4 f_3(y_2)/(gk^2)] \tag{15b}$$

$$M_{c2}(x)=\nu\ M_{x2}(x) \tag{15c}$$

$$Q_2(x)=-\ [\beta_2 D_2(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_2]\ [C_3 f_2(y_2)-C_4 f_1(y_2)/(gk^2)] \tag{15d}$$

$$\frac{\sigma_{MC2}}{E_2\alpha_1 T_{B1}}=\left(\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}\right)^{0.5}\left(-C_3 f_3(y_2)+\frac{C_4}{gk^2}\ f_4(y_2)\right)$$

$$=0.393\ \left(-C_3 f_3(y_2)+\frac{C_4}{gk^2}\ f_4(y_2)\right) \tag{15e}$$

$$\frac{\sigma_{BX2}}{E_2\alpha_1 T_{B1}}=-\frac{1}{2(1-\nu)}\ \left(C_3 f_4(y_2)+\frac{C_4}{gk^2}\ f_3(y_2)\right)$$

$$=-0.714\ \left(C_3 f_4(y_2)+\frac{C_4}{gk^2}\ f_3(y_2)\right) \tag{15f}$$

$$\frac{\sigma_{BC2}}{E_2\alpha_1 T_{B1}} = -\frac{\nu}{2(1-\nu)}\left(C_3 f_4(y_2) + \frac{C_4}{gk^2} f_3(y_2)\right)$$

$$= -0.214\left(C_3 f_4(y_2) + \frac{C_4}{gk^2} f_3(y_2)\right) \tag{15g}$$

$$\frac{\tau_{RX2}}{E_2\alpha_1 T_{B1}} = -\frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{12(1-\nu)}(t_2/r)^{0.5}\left(C_3 f_2(y_2) - \frac{C_4}{gk^2} f_1(y_2)\right)$$

$$= -0.153\,(t_2/r)^{0.5}\left(C_3 f_2(y_2) - \frac{C_4}{gk^2} f_1(y_2)\right) \tag{15h}$$

ここにC_4は次式で与えられる。

$$C_4 = \frac{gk^2(gk^2+2k^{0.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{16}$$

これらの解から以下のことが理解できる。

①接続部の半径方向変位はC_3に比例する。すなわちC_3は接続部の半径方向変位を表す無次元パラメータである。　$u_1(0) = -C_3[(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}\ /(2\beta_1^2 t_1)] = u_2(0)$

②接続部のモメントはC_4に比例する。すなわちC_4は接続部のモメントの大きさを表す無次元パラメータである。　$M_0 = -C_4[D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_1]$

③接続部の剪断力は$1+C_3-C_4$に比例する。すなわち$1+C_3-C_4$は接続部の剪断力の大きさを表す無次元パラメータである。　$Q_0 = -(1+C_3-C_4)[\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_1 T_{B1}/t_1]$

④円周方向応力、軸方向応力は$E\alpha_1 T_{B1}$に比例し、比例係数（応力係数）はC_3とC_4のみの関数となる。すなわち弾性係数比と板厚比のみの関数となり半径に依存しない。

⑤剪断応力はさらに（板厚／半径）$^{0.5}$ に比例する。

5。円筒2側の内外面温度差による熱応力

円筒2側に内外面温度差 T_{B2}が生じた場合を考える。 $T_{M1} = T_{M2} = T_{B1} = 0$ とする。 (8)式を解くと次の解を得る。

$$M_0 = \frac{D_1(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{t_1}\ \frac{-gk^2(gk^2+2gk^{1.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}$$

$$= \frac{D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{t_2}\ \frac{-(gk^2+2gk^{1.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{17a}$$

$$Q_0 = \frac{\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{t_1}\ \frac{2gk^{1.5}(gk^{2.5}+gk^2)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}$$

$$= \frac{\beta_2 D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}}{t_2}\ \frac{2(gk^{2.5}+gk^2)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1} \tag{17b}$$

(17)式を (4)式に代入すると、円筒1側のシェル解が以下のように得られる。

$$u_1(x) = [(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}\ /(2\beta_1^2 t_1)]\ [C_2 f_3(y_1) + C_5 f_4(y_1)] \tag{18a}$$

$$M_{x1}(x) = -[D_1(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_1]\ [-C_2 f_4(y_1) + C_5 f_3(y_1)] \tag{18b}$$

$$M_{c1}(x) = \nu\ M_{x1}(x) \tag{18c}$$

$$Q_1(x)=[\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_1]\ [C_2 f_2(y_1)+C_5 f_1(y_1)] \tag{18d}$$

$$\frac{\sigma_{MC1}}{E_1\alpha_2 T_{B2}}=\left(\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}\right)^{0.5}[C_2 f_3(y_1)+C_5 f_4(y_1)]=0.393\ [C_2 f_3(y_1)+C_5 f_4(y_1)] \tag{18e}$$

$$\frac{\sigma_{BX1}}{E_1\alpha_2 T_{B2}}=-\frac{1}{2(1-\nu)}[-C_2 f_4(y_1)+C_5 f_3(y_1)]=-0.714[-C_2 f_4(y_1)+C_5 f_3(y_1)] \tag{18f}$$

$$\frac{\sigma_{BC1}}{E_1\alpha_2 T_{B2}}=-\frac{\nu}{2(1-\nu)}[-C_2 f_4(y_1)+C_5 f_3(y_1)]=-0.214[-C_2 f_4(y_1)+C_5 f_3(y_1)] \tag{18g}$$

$$\frac{\tau_{RX1}}{E_1\alpha_2 T_{B2}}=\frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{12(1-\nu)}(t_1/r)^{0.5}\ [C_2 f_2(y_1)+C_5 f_1(y_1)]$$
$$=0.153\ (t_1/r)^{0.5}\ [C_2 f_2(y_1)+C_5 f_1(y_1)] \tag{18h}$$

(17)式を (5)式に代入すると、円筒２側のシェル解が以下のように得られる。

$$u_2(x)=[(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/(2\beta_2^2 t_2)]\ [C_2 f_3(y_2)-C_4 f_4(y_2)] \tag{19a}$$

$$M_{X2}(x)=-[D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_2]\ [1-C_2 f_4(y_2)-C_4 f_3(y_2)] \tag{19b}$$

$$M_{C2}(x)=-[D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_2]\ \{1-\nu\ [C_2 f_4(y_2)+C_4 f_3(y_2)]\} \tag{19c}$$

$$Q_2(x)=[\beta_2 D_2(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_2]\ [C_2 f_2(y_2)-C_4 f_1(y_2)] \tag{19d}$$

$$\frac{\sigma_{MC2}}{E_2\alpha_2 T_{B2}}=\left(\frac{1+\nu}{12(1-\nu)}\right)^{0.5}[C_2 f_3(y_2)-C_4 f_4(y_2)]=0.393\ [C_2 f_3(y_2)-C_4 f_4(y_2)] \tag{19e}$$

$$\frac{\sigma_{BX2}}{E_2\alpha_2 T_{B2}}=-\frac{1}{2(1-\nu)}[1-C_2 f_4(y_2)-C_4 f_3(y_2)]$$
$$=-0.714+0.714\ [C_2 f_4(y_2)+C_4 f_3(y_2)] \tag{19f}$$

$$\frac{\sigma_{BC2}}{E_2\alpha_2 T_{B2}}=-\frac{1}{2(1-\nu)}\{1-\nu[C_2 f_4(y_2)-C_4 f_3(y_2)]\}$$
$$=-0.714+0.214\ [C_2 f_4(y_2)+C_4 f_3(y_2)] \tag{19g}$$

$$\frac{\tau_{RX2}}{E_2\alpha_2 T_{B2}}=\frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{12(1-\nu)}(t_2/r)^{0.5}\ [C_2 f_2(y_2)-C_4 f_1(y_2)]$$
$$=0.153\ (t_2/r)^{0.5}\ [C_2 f_2(y_2)-C_4 f_1(y_2)] \tag{19h}$$

ここにC_5は次式で与えられる。

$$C_5=\frac{gk^2(gk^2+2gk^{1.5}+1)}{g^2k^4+2gk^{2.5}+2gk^2+2gk^{1.5}+1}=gk^2(1-C_4) \tag{20}$$

これらの解から以下のことが理解できる。

①接続部の半径方向変位はC_2に比例する。すなわちC_2は接続部の半径方向変位を表す無次元パラメータである。　$u_1(0)=C_2[(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/(2\beta_1^2 t_1)]=u_2(0)$

②接続部のモメントはC_5に比例する。すなわちC_5は接続部のモメントの大きさを表す無次元パラメータである。　$M_0=-C_5[D_1(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_1]$

③接続部の剪断力はC_2+C_5に比例する。すなわちC_2+C_5は接続部の剪断力の大きさを表す無次元パラメータである。　$Q_0=(C_2+C_5)[\beta_1 D_1(1+\nu)\ \alpha_2 T_{B2}/t_1]$

④円周方向応力、軸方向応力は$E\alpha_2 T_{B2}$に比例し、比例係数（応力係数）はC_2とC_5のみの関数となる。すなわち弾性係数比と板厚比のみの関数となり半径に依存しない。

⑤剪断応力はさらに（板厚／半径）$^{0.5}$ に比例する。

⑥前節の解と比較し、$C_2=gk^2C_3$ 、$C_5=gk^2(1-C_4)$ が重要な意味を持つことが次節で示される。

6。熱応力解のまとめおよび考察

以上の3～5節の解を重ね合わせれば、円筒1側に平均温度 T_{M1}と内外面温度差 T_{B1}が生じ、円筒2側に平均温度 T_{M2}と内外面温度差 T_{B2}が生じた場合のシェル解が得られる。熱応力の主要な3つの発生要因ごとに軸方向応力および周方向応力をまとめた結果を表1に示す。弾性係数比 $g=E_2/E_1=0.5\sim2.0$ 、板厚比 $k=t_2/t_1=1.0\sim10.0$の無次元パラメータ$C_1\sim C_5$を表2に示す。

要因1――平均熱膨張差　$\Delta_{TE}=\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2}$

要因2――円筒1側の内外面温度差 T_{B1}（温度曲げひずみ$\alpha_1 T_{B1}$）

要因3――円筒2側の内外面温度差 T_{B2}（温度曲げひずみ$\alpha_2 T_{B2}$）

・表1では剪断応力は省略した。剪断応力は垂直応力の概略 $(t/r)^{0.5}$ 倍となり、一般には無視できるが、必要ならば3～5節の解を参照されたい。

・接続部($x=0$）の応力は表1のシェル関数値を$f_3=1$、$f_4=0$とすれば得られる。

・接続部から任意距離x位置の応力は、無次元距離$y_1=\beta_1 x=1.2854x/(rt_1)^{0.5}$に対してシェル関数値を計算すれば得られる。$y/\pi=\beta x/\pi=0\sim1$のシェル関数値を表3に示す。

・ここで表1内のC_3と $1-C_4$をそれぞれ$C_2/(gk^2)$と$C_5/(gk^2)$で置き換えると、以下のことがらが良く理解できる。特に T_{B1}と T_{B2}の相対的な関係が良く理解できる。

①すべての要因に対して、接続部の軸方向曲げ応力は、1側と2側でk^2対1となる。
軸方向曲げモメントが接続部で釣り合い(M_0)、軸方向曲げ応力$=6M_0/t^2$であるから、当然である。
$k>1$のとき、1側（薄肉側）＞2側（厚肉側）となる。

②Δ_{TE}による接続部の周方向膜応力は、1側と2側で$-C_1$対 $g(1-C_1)$ となる。
$k>1$のとき、表2から明らかなように、大きさは1側（薄肉側）＞2側（厚肉側）となる。

③ T_{B1}、 T_{B2}による接続部の周方向膜応力は、1側と2側で1対g となる。
半径方向変位u が釣り合い、周方向膜応力$=E\ u/r$ であるから、当然である。
一般には $g\fallingdotseq1$の場合が多く、1側と2側で同程度と見なして良い。また表1および表2から明らかなように周方向膜応力への寄与感度はΔ_{TE}に比べて相対的に小さい（詳細は次節参照）。

④これら①～③を総合すると、 $k>1$の構造では1側（薄肉側）の応力値が大きくなり、接続部の設計評価では1側（薄肉側）のみ応力評価すれば良い。

⑤ T_{B1}による1側の応力分布を無限円筒の熱応力（$\sigma_{MC1}=0$、$\sigma_{BX1}=\sigma_{BC1}=-0.714\ E_1\alpha_1T_{B1}$）と不連続熱応力の和と見なした時、（不連続熱応力／$E_1\alpha_1T_{B1}$）は（T_{B2}により1側に発生する熱応力／$E_1\alpha_2T_{B2}$）の$-1/(gk^2)$倍となる。すなわち式で対比すると次のようになる。

T_{B1}による1側の応力＝無限円筒の熱応力　＋　不連続熱応力

$$\sigma_{MC1}/(E_1\alpha_1T_{B1}) = 0 \quad -0.393[C_2f_3+C_5f_4]/(gk^2) \tag{21a}$$

$$\sigma_{BX1}/(E_1\alpha_1T_{B1}) = -0.714 \quad +0.714[C_5f_3-C_2f_4]/(gk^2) \tag{21b}$$

$$\sigma_{BC1}/(E_1\alpha_1T_{B1}) = -0.714 \quad +0.214[C_5f_3-C_2f_4]/(gk^2) \tag{21c}$$

T_{B2}による1側の応力

$$\sigma_{MC1}/(E_1\alpha_2T_{B2}) = +0.393[C_2f_3+C_5f_4] \tag{22a}$$

$$\sigma_{BX1}/(E_1\alpha_2T_{B2}) = -0.714[C_5f_3-C_2f_4] \tag{22b}$$

$$\sigma_{BC1}/(E_1\alpha_2T_{B2}) = -0.214[C_5f_3-C_2f_4] \tag{22c}$$

⑥ T_{B2}による2側の応力分布を無限円筒の熱応力（$\sigma_{MC2}=0$、$\sigma_{BX2}=\sigma_{BC2}=-0.714\ E_2\alpha_2T_{B2}$）と不連続熱応力の和と見なした時、（不連続熱応力／$E_2\alpha_2T_{B2}$）は（T_{B1}により2側に発生する熱応力／$E_2\alpha_1T_{B1}$）の$-gk^2$倍となる。すなわち式で対比すると次のようになる。

T_{B2}による2側の応力＝無限円筒の熱応力　＋　不連続熱応力

$$\sigma_{MC2}/(E_2\alpha_2T_{B2}) = 0 \quad +0.393[C_2f_3-C_4f_4] \tag{23a}$$

$$\sigma_{BX2}/(E_2\alpha_2T_{B2}) = -0.714 \quad +0.714[C_4f_3+C_2f_4] \tag{23b}$$

$$\sigma_{BC2}/(E_2\alpha_2T_{B2}) = -0.714 \quad +0.214[C_4f_3+C_2f_4] \tag{23c}$$

T_{B1}による2側の応力

$$\sigma_{MC2}/(E_2\alpha_1T_{B1}) = -0.393[C_2f_3-C_4f_4]/(gk^2) \tag{24a}$$

$$\sigma_{BX2}/(E_2\alpha_1T_{B1}) = -0.714[C_4f_3+C_2f_4]/(gk^2) \tag{24b}$$

$$\sigma_{BC2}/(E_2\alpha_1T_{B1}) = -0.214[C_4f_3+C_2f_4]/(gk^2) \tag{24c}$$

⑦これら⑤、⑥から次のことが理解できる。すなわち、接続部近傍の応力分布を（不連続無しの無限円筒の熱応力）と（接続による不連続熱応力）の和と見なした場合、不連続熱応力に関して、1側の温度曲げひずみα_1T_{B1}と2側の温度曲げひずみα_2T_{B2}の寄与感度比は-1対gk^2である。

一般に平板、円筒、球などの板シェル構造の曲げ剛性は$D=Et^3/[12(1-\nu^2)]$で与えられ、温度曲げひずみαT_Bは曲率に換算し$\alpha T_B/t$である。従って、曲げ変形が拘束される場合の曲げモメントは、平面シェル応力場では$D(1+\nu)\alpha T_B/t=\underline{Et^2}\alpha T_B/[12(1-\nu)]$となる。

本報告の結果「不連続近傍の応力を、不連続が無い場合の熱応力と不連続熱応力の和と見なした場合、<u>不連続熱応力に対するα_1T_{B1}とα_2T_{B2}の寄与感度比は-1対gk^2（$-E_1t_1^2$対$E_2t_2^2$）となる。</u>」は、<u>他の直列不連続シェル構造に対しても一般的に成立する基本法則</u>と推察される。

⑧従って$k>1$の構造における1側（薄肉側）の応力評価では、自身のT_{B1}と同時に相手側（厚肉側）のT_{B2}にも一層留意する必要がある。$\alpha_1T_{B1}\fallingdotseq\alpha_2T_{B2}$の場合は、$T_{B2}$による応力が$T_{B1}$による応力より大きくなる。一般に内外面温度差そのものがT_{B2}（厚肉側）＞T_{B1}となる場合が多く、T_{B2}の相対的な寄与割合は更に大きくなる。

逆に2側（厚肉側）では無限円筒の応力に比べて応力が小さくなり、応力評価上は接続部の影響が無いものとしても安全側の評価となる。

⑨次式で定義される無次元応力分布関数 d_1 ～ d_4 を用いると、

$$d_1(y)=d_1(\beta x)=C_2f_3(\beta x)+C_5f_4(\beta x)=\exp(-\beta x)\{C_2\cos(\beta x)+C_5\sin(\beta x)\} \quad (25a)$$

$$d_2(y)=d_2(\beta x)=C_5f_3(\beta x)-C_2f_4(\beta x)=\exp(-\beta x)\{C_5\cos(\beta x)-C_2\sin(\beta x)\} \quad (25b)$$

$$d_3(y)=d_3(\beta x)=C_2f_3(\beta x)-C_4f_4(\beta x)=\exp(-\beta x)\{C_2\cos(\beta x)-C_4\sin(\beta x)\} \quad (25c)$$

$$d_4(y)=d_4(\beta x)=C_4f_3(\beta x)+C_2f_4(\beta x)=\exp(-\beta x)\{C_4\cos(\beta x)+C_2\sin(\beta x)\} \quad (25c)$$

T_{B1}、T_{B2}による応力分布をまとめて次のように表すことができる。

合計熱応力＝無限円筒熱応力　＋　不連続熱応力

・1側

$$\sigma_{MC1}(x)=0.0+0.393E_1\{\alpha_2T_{B2}-\alpha_1T_{B1}/(gk^2)\}d_1(\beta_1x) \quad (26a)$$

$$\sigma_{BX1}(x)=-0.714E_1\alpha_1T_{B1}-0.714E_1\{\alpha_2T_{B2}-\alpha_1T_{B1}/(gk^2)\}d_2(\beta_1x) \quad (26b)$$

$$\sigma_{BC1}(x)=-0.714E_1\alpha_1T_{B1}-0.214E_1\{\alpha_2T_{B2}-\alpha_1T_{B1}/(gk^2)\}d_2(\beta_1x) \quad (26c)$$

・2側

$$\sigma_{MC2}(x)=0.0+0.393E_2\{\alpha_2T_{B2}-\alpha_1T_{B1}/(gk^2)\}d_3(\beta_2x) \quad (27a)$$

$$\sigma_{BX2}(x)=-0.714E_2\alpha_2T_{B2}+0.714E_2\{\alpha_2T_{B2}-\alpha_1T_{B1}/(gk^2)\}d_4(\beta_2x) \quad (27b)$$

$$\sigma_{BC2}(x)=-0.714E_2\alpha_2T_{B2}+0.214E_2\{\alpha_2T_{B2}-\alpha_1T_{B1}/(gk^2)\}d_4(\beta_2x) \quad (27c)$$

⑩接続部の周方向膜応力に対するΔ_{TE}、α_1T_{B1}、α_2T_{B2}の寄与感度を無次元応力係数で表示すると次のようになる。

熱応力要因(--)	Δ_{TE}	α_1T_{B1}	α_2T_{B2}
1側応力 [$\sigma_{MC1}/(E_1$--)]	$-C_1$	$-0.393C_2/(gk^2)$	$0.393C_2$
2側応力 [$\sigma_{MC2}/(E_2$--)]	$1-C_1$	$-0.393C_2/(gk^2)$	$0.393C_2$

⑪接続部の軸方向曲げ応力に対するΔ_{TE}、α_1T_{B1}、α_2T_{B2}の寄与感度を無次元応力係数で表示すると次のようになる。

・合計熱応力（無限円筒熱応力＋不連続熱応力）に対して

熱応力要因(--)	Δ_{TE}	α_1T_{B1}	α_2T_{B2}
1側応力 [$\sigma_{BX1}/(E_1$--)]	$1.816C_2$	$-0.714C_4$	$-0.714C_5$
2側応力 [$\sigma_{BX2}/(E_2$--)]	$1.816C_2/(gk^2)$	$-0.714C_4/(gk^2)$	$-0.714C_5/(gk^2)$

・不連続熱応力に対して

1側応力 [$\sigma_{BX1}/(E_1$--)]	$1.816C_2$	$0.714C_5/(gk^2)$	$-0.714C_5$
2側応力 [$\sigma_{BX2}/(E_2$--)]	$1.816C_2/(gk^2)$	$-0.714C_4/(gk^2)$	$0.714C_4$

⑫接続部の周方向曲げ応力に対するΔ_{TE}、α_1T_{B1}、α_2T_{B2}の寄与感度を無次元応力係数で表示すると次のようになる。

・合計熱応力（無限円筒熱応力＋不連続熱応力）に対して

熱応力要因(--)	Δ_{TE}	α_1T_{B1}	α_2T_{B2}
1側応力 [$\sigma_{BC1}/(E_1$--)]	$0.545C_2$	$-0.5-0.214C_4$	$-0.214C_5$
2側応力 [$\sigma_{BC2}/(E_2$--)]	$0.545C_2/(gk^2)$	$-0.214C_4/(gk^2)$	$-0.5-0.214C_5/(gk^2)$

・不連続熱応力に対して

1側応力 [$\sigma_{BC1}/(E_1$--)]	$0.545C_2$	$0.214C_5/(gk^2)$	$-0.214C_5$
2側応力 [$\sigma_{BC2}/(E_2$--)]	$0.545C_2/(gk^2)$	$-0.214C_4/(gk^2)$	$0.214C_4$

7。簡易熱応力評価法について

簡易熱応力評価法への応用について考える。以下 g＝1、 k≧1の1側の接続部の熱応力評価について考える。単調な熱過渡（例えば、内面側流体温度の単調上昇）を考えると T_{B1}と T_{B2}は正になり、また薄肉の1側の温度上昇が2側より大きくなりΔ_{TE}も正になる。従ってΔ_{TE}、 T_{B1}、 T_{B2}は全て同一符号となる場合が多く、以下の議論でも3者の同一符号を仮定する。

(1) 周方向膜応力

周方向膜応力の無次元応力係数を計算すると次のようになる。

板厚比 $k=t_2/t_1$	$\sigma_{MC}/(E_1\Delta_{TE})$ $=-C_1$	$\sigma_{MC}/(E_1\alpha_1T_{B1})$ $=-0.393C_3$	$\sigma_{MC}/(E_1\alpha_2T_{B2})$ $=0.393C_2$
1.0	−0.5 (min)	0.0 (min)	0.0 (min)
1.1	−0.512	−0.008	0.010
1.2	−0.523	−0.015	0.021
1.3	−0.534	−0.019	0.033
1.4	−0.545	−0.023	0.044
1.5	−0.556	−0.025	0.056
1.6	−0.567	−0.026	0.068
1.8	−0.589	−0.028	0.091
2.0	−0.611	−0.028 (max)	0.112
2.333	−0.647	−0.027	0.146
2.5	−0.663	−0.026	0.161
3.0	−0.709	−0.022	0.200
4.0	−0.780	−0.016	0.256
5.0	−0.830	−0.012	0.291
6.0	−0.865	−0.009	0.314
7.0	−0.889	−0.007	0.331
8.0	−0.908	−0.005	0.342
9.0	−0.922	−0.004	0.351
10.0	−0.933	−0.004	0.357
∞	−1.0 (max)	0.0 (min)	0.393 (max)

・周方向膜応力への寄与感度は$\Delta_{TE}>\alpha_2T_{B2}>\alpha_1T_{B1}$である。特に$\alpha_1T_{B1}$の寄与は無視できる。

・Δ_{TE}（およびα_1T_{B1}）とα_2T_{B2}の寄与は符号が反対で相殺する傾向にある。

・以上を考慮し、設計評価ではα_1T_{B1}の寄与を無視した次式で簡易評価することが考えられる。

$$\sigma_{MC}\text{（簡易評価）}=-m_1E_1\Delta_{TE}+m_2E_1\alpha_2T_{B2}$$

$$m_1=C_1 \quad 、 \quad m_2=0.393C_2$$

・従来のシェル数値解とＦＥＭ詳細解の比較例（文献２、３）によれば、本報告と同様の接続部でのステップ状温度不連続（$\Delta_{TE}=\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2}$）を仮定したシェル解は周方向膜応力を過大評価する傾向がある。実際の構造では接続部での軸方向熱流により、接続部近傍では T_{M1}から T_{M2}に滑らかに変化する。これを考慮し、Δ_{TE}の周方向膜応力への寄与を補正すべきである。

$$m_1=C_1\times\text{補正係数}$$

・設計評価式として使用する場合、どの程度の補正が必要であるか、今後の検討課題である。

(2) 軸方向曲げ応力

軸方向曲げ応力の無次元応力係数を計算すると次のようになる。

板厚比 $k=t_2/t_1$	$\sigma_{BX}/(E_1\Delta_{TE})$ $=1.816C_2$	$\sigma_{BX}/(E_1\alpha_1T_{B1})$ $=-0.714C_4$	$\sigma_{BX}/(E_1\alpha_2T_{B2})$ $=-0.714C_5$
1.0	0.0 (min)	−0.357 (min)	−0.357 (min)
1.1	0.047	−0.382	−0.401
1.2	0.098	−0.406	−0.444
1.3	0.151	−0.427	−0.485
1.4	0.204	−0.446	−0.525
1.5	0.259	−0.464	−0.563
1.6	0.313	−0.480	−0.599
1.8	0.418	−0.508	−0.666
2.0	0.519	−0.533	−0.725
2.333	0.673	−0.566	−0.808
2.5	0.743	−0.579	−0.843
3.0	0.924	−0.611	−0.926
4.0	1.180	−0.650	−1.022
5.0	1.345	−0.671	−1.066
6.0	1.453	−0.684	−1.084
7.0	1.527	−0.692	−1.089 (max)
8.0	1.581	−0.697	−1.088
9.0	1.620	−0.701	−1.083
10.0	1.650	−0.703	−1.076
∞	1.816 (max)	−0.714 (max)	−0.714

・軸方向曲げ応力への寄与感度は3者とも大きく、k が大きくなると一定値（Δ_{TE}とα_1T_{B1}は上限値）に収束する。

・α_2T_{B2}の寄与感度はα_1T_{B1}より大きい。一般に T_{B2}（厚肉側）＞ T_{B1}となり、α_2T_{B2}の相対的な寄与は更に一層大きくなる。

・Δ_{TE}の寄与は、α_1T_{B1}およびα_2T_{B2}の寄与と符号が反対で相殺する傾向にある。

・以上を考慮し、設計評価では、3者をすべて考慮し、$E_1(1.816C_2\Delta_{TE}-0.714\ C_4\alpha_1T_{B1}-0.714\ C_5\alpha_2T_{B2})$により軸方向曲げ応力を簡易評価することが考えられる。

$$\sigma_{BX}\text{（簡易評価）}=m_3E_1\Delta_{TE}-m_4E_1\alpha_1T_{B1}-m_5E_1\alpha_2T_{B2}$$

$$m_3=1.816C_2\ ,\ m_4=0.714C_4\ ,\ m_5=0.714C_5$$

・従来のシェル数値解とＦＥＭ詳細解の比較例（文献２、３）によれば、本報告と同様の接続部でのステップ状温度不連続(T_{M1},T_{B1}～ T_{M2},T_{B2}）を仮定したシェル解は軸方向曲げ応力に関して、ＦＥＭ詳細解に近い値を与える。

・従って、大きな補正なしで、上式が設計評価式として使用できると考える。

(3) 周方向曲げ応力

周方向曲げ応力の無次元応力係数を計算すると次のようになる。

板厚比 $k=t_2/t_1$	$\sigma_{BC}/(E_1\Delta_{TE})$ $=0.545C_2$	$\sigma_{BC}/(E_1\alpha_1T_{B1})$ $=-0.5-0.214C_4$	$\sigma_{BC}/(E_1\alpha_2T_{B2})$ $=-0.214C_5$
1.0	0.0 (min)	−0.607 (min)	−0.107 (min)
1.1	0.014	−0.615	−0.120
1.2	0.029	−0.622	−0.133
1.3	0.045	−0.628	−0.146
1.4	0.061	−0.634	−0.157
1.5	0.078	−0.639	−0.169
1.6	0.094	−0.644	−0.180
1.8	0.126	−0.652	−0.200
2.0	0.156	−0.660	−0.217
2.333	0.202	−0.670	−0.242
2.5	0.223	−0.674	−0.253
3.0	0.277	−0.683	−0.277
4.0	0.354	−0.695	−0.306
5.0	0.404	−0.701	−0.319
6.0	0.436	−0.705	−0.325
7.0	0.458	−0.707	−0.326 (max)
8.0	0.474	−0.709	−0.326
9.0	0.486	−0.710	−0.325
10.0	0.495	−0.711	−0.323
∞	0.545 (max)	−0.714 (max)	−0.214

・周方向曲げ応力への寄与感度は$\alpha_1T_{B1}>\alpha_2T_{B2}$、$\Delta_{TE}$であり、k が大きくなると一定値（$\Delta_{TE}$と$\alpha_1T_{B1}$は上限値）に収束する。

・Δ_{TE}とα_2T_{B2}の寄与感度は軸方向曲げ応力の場合のν(0.3) 倍となる。

・Δ_{TE}の寄与は、α_1T_{B1}およびα_2T_{B2}の寄与と符号が反対で相殺する傾向にある。

・ T_{B1}の寄与は k=1.0 で下限値$-0.607\ E_1\alpha_1T_{B1}$、 k=∞で上限値$-\ 0.714E_1\alpha_1T_{B1}$（無限円筒の曲げ応力）となり、 kの変化に対する変動が小さい。

・以上を考慮し、設計評価では T_{B1}の寄与をその上限値$-\ 0.714E_1\alpha_1T_{B1}$で評価し、$\Delta_{TE}$と T_{B2}の寄与は軸方向曲げ応力の場合の0.3 倍とすることが考えられる。

$$\sigma_{BC}\text{（簡易評価）} = 0.3m_3E_1\Delta_{TE}-m_6E_1\alpha_1T_{B1}-0.3m_5E_1\alpha_2T_{B2}$$

$$m_6 = 0.714$$

・従来のシェル数値解とＦＥＭ詳細解の比較例（文献２、３）によれば、本報告と同様の接続部でのステップ状温度不連続(T_{M1}, T_{B1}～ T_{M2}, T_{B2}）を仮定したシェル解は周方向曲げ応力に関して、ＦＥＭ詳細解より少し小さ目の近い値を与える。

・従って、大きな補正なしで、上式が設計評価式として使用できると考える。

(4) 1次元非定常温度解析を併用した、過渡熱応力の簡易評価法について

1次元非定常温度解析を併用した、以下の手順による簡易熱応力評価法が考えられる。

・1次元非定常温度解析

接続部の軸方向の熱流束を無視し、1側と2側のそれぞれに対して、1次元非定常温度解析を行う。平板の理論解に基づく簡易プログラム（文献2、3）が容易されている。また線図による評価も可能である。設計熱過渡サイクルに対してΔ_{TE}（$=\alpha_1 T_{M1}-\alpha_2 T_{M2}$）、$T_{B1}$、$T_{B2}$の各々の最小値および最大値の2極値を与える、合計6時点のΔ_{TE}、T_{B1}、T_{B2}を求める。ここでT_{B1}、T_{B2}は板厚内温度分布にモーメント等価な線形温度分布の内外面温度差（内面値－外面値）とする。また熱過渡サイクル中の非線形温度成分（表面温度－等価線形温度）の最大値を求め、これをピーク温度T_Pとする。$T_P<0$の場合は$T_P=0$とする。

単調温度上昇（あるいは単調温度降下）のみの単一熱過渡の場合は初期一定温度状態が極値2時点の1つとなるので、評価時点は合計4時点となる。

・合計6時点の内面および外面の軸方向応力と周方向応力を計算し、その範囲を求める。

・内面および外面の応力強さ範囲S_nを評価する。剪断応力は無視する。

・不連続部のコーナーRおよび板厚比 kを考慮して応力集中係数Kを適切に設定し、次式によりピーク応力強さ範囲S_Pを評価する。

$$S_P=K\times S_n+E_1\alpha_1 T_P/0.7$$

(5) 他の不連続構造について

次に、ノズル構造、管板構造などの他の不連続構造の熱応力について考える。本報告のシェル解析ら推察できるように、直列接続の不連続シェル構造では、接続部を切り離して自由端とした場合の、端部の熱膨張変形、半径方向剛性および曲げ剛性の関数として、本報告と同様の無次元応力係数が記述されるものと考えられる。すなわち以下の3つの解を用いて、熱応力係数が求められる。

・熱膨張変形－－接続部を自由端とし、基本温度分布荷重を負荷した場合の解

不連続が無い場合の内部拘束力（本報告の無限円筒の曲げ応力に対応）を端部で解放すれば、自由熱膨張変形の解となる。従って、不連続が無い場合の内部拘束力を含めた解で代用できる。

・半径方向剛性－－接続部を自由端とし、半径方向に単位引張荷重を負荷した場合の解

・曲げ剛性－－接続部を自由端とし、単位曲げモメントを負荷した場合の解

これらの解は単純形状（均一厚さの平板、円筒や球など）については参考書に記載され、簡単な初等関数で記述され取扱も容易である。形状が少し複雑になると（例えば、板厚が直線的に増加する円筒テーパ構造など、形状パラメータが1、2個追加されるだけで）ベッセル関数などの特殊関数を用いた記述となり、取扱が一段と複雑になる。さらに複雑な形状になると、もはや解析関数を用いた取扱が不可能であり、ＦＥＭ数値解に頼らざるを得ない。

(6) ＦＥＭ解析による熱応力係数の求め方について

図２に示すような不連続構造の熱応力係数をＦＥＭ数値解を用いて求めることを考える。

・接続部のコーナーＲあるいはテーパー部を構造および温度分布の遷移領域と見なすことにする。

・遷移領域の両側で、材料特性、板厚、板厚平均温度、内外面等価線形温度差がそれぞれ一定値で与えられた場合を考える。

・遷移領域の材料特性は１側あるいは２側のどちらかと共通であるか、あるいは１側と２側の平均値であるとする。

・遷移領域の板厚内温度分布は、１側との接続部では１側に等しく、２側との接続部では２側に等しいものとし、１側から２側に向かって直線的に変化するものとする。

・ $T_{M1}=1$、 $T_{M2}=T_{B1}=T_{B2}=0$ の解析を行う。主要な応力評価断面（両側の接続部、および接続部から一定距離離れた断面）の板厚内応力分布解を求める。板厚内で積分処理して、膜応力、曲げ応力およびピーク応力の和に分解する。$E_1\Delta_{TE}=E_1(\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2})$ で除して無次元応力係数を求める。

長手方向膜応力　$\sigma_{ML}=C_{ML1}E_1(\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2})$

長手方向曲げ応力　$\sigma_{BL}=C_{BL1}E_1(\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2})$

周方向膜応力　$\sigma_{MC}=C_{MC1}E_1(\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2})$

周方向曲げ応力　$\sigma_{BC}=C_{BC1}E_1(\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2})$

また表面応力（ピーク応力を含む）を（膜応力＋曲げ応力）で除し、応力集中係数 K_{L1}（長手方向）、K_{C1}（周方向）を求める。

・ $T_{B1}=1$、 $T_{M1}=T_{M2}=T_{B2}=0$ の解析を行う。同様に $E_1\alpha_1T_{B1}$ で除して無次元応力係数 C_{ML2}、C_{BL2}、C_{MC2}、C_{BC2} を求める。応力集中係数 K_{L2}、K_{C2} を求める。

・ $T_{B2}=1$、 $T_{M1}=T_{M2}=T_{B1}=0$ の解析を行う。同様に $E_1\alpha_2T_{B2}$ で除して無次元応力係数 C_{ML3}、C_{BL3}、C_{MC3}、C_{BC3} を求める。応力集中係数 K_{L3}、K_{C3} を求める。

・１側の T_{M1}、 T_{B1}、２側の T_{M2}、 T_{B2} が任意に与えられた場合の応力は、遷移領域およびその近傍の温度分布の近似誤差を無視すれば、これら３つの解の線形和で与えられる。１側および２側の温度は１次元熱伝導解により高速計算が可能であり、３つの解（１２個の応力係数と６個の応力集中係数）を用いて、過渡熱応力の高速評価が可能となる。応力係数のなかで、無視できるものは省略して良いであろう。応力集中係数については応力成分に対応した平均的な２個で充分であろう。

・応力係数と T_{M1}、 T_{B1}、 T_{M2}、 T_{B2} を用いて、膜応力、曲げ応力および応力強さ範囲 S_n を計算評価する。

・応力集中係数を用いて表面ピーク応力を計算し、さらにピーク温度 T_{P1}、 T_{P2} による熱ピーク応力を加えて、表面応力およびピーク応力強さ範囲 S_P を計算評価する。

(7) 過渡荷重および損傷のモニタシステムについて

これら(4) ～(6) で示した手法は、プラント安全上特に重要な構成機器（例えば原子炉容器ノズルなど）の過渡熱応力を、近傍の流体温度計測データを用いて高速計算し、累積クリープ疲労損傷を高速評価およびモニタする「過渡荷重および損傷のモニタシステム」の基盤技術として応用可能であると考えられる。

応力係数および応力集中係数が求まり、モニタシステムが構築されると、数年先の累積損傷値の予測、運転形態を変更した場合の発生応力と損傷の高速シュミュレーションが可能となる。従って、経済性と安全性を考慮した、最適構造設計、最適運転形態および補修計画の立案などに応用可能であり、その利用価値は大きい。

「過渡荷重および損傷のモニタシステム」は、原子力その他の高温プラントの安全性および最適運転計画の関連技術の有力な一つとして、最近世界的に注目されつつある。米国の原子力プラントでの応用例が最近報告されているが、本格的な実用化はこれからである。

(8) 熱応力評価法の開発の目的、今後の課題

著者らは、熱応力評価法の開発の大きな目標として、以下２点を特に重視している。

・高温プラントの構造設計分野での、熱応力評価体系を確立すること。
応力係数を用いた簡易熱応力評価式を策定し、合理的で簡便な過渡熱応力評価手法を確立する。
構造設計コードにおける熱応力評価体系は未だ確立されていない。BS-5500 Appendix-Gにノズルの過渡熱応力評価法が記載されている程度である。ASMEコードや告示における管の応力評価式では、接続相手側の$\alpha_2 T_{B2}$の項が含まれず、不連続部の熱応力を評価するには不十分であると考える。
・過渡熱応力の高速評価シュミュレーション手法を確立すること。
非定常熱伝導を含めた過渡熱応力の高速シュミュレーション手法を確立すること。
「過渡荷重および損傷のモニタシステム」など、広範な領域に応用可能な基盤技術となる。

以上(1) ～(6) で応力係数を用いた簡易熱応力評価法の試案を提示したが、工学的補正係数を含めて、どのような簡易評価式が適切であるか、ＦＥＭ数値解析を併用した検討が今後必要である。

8。参考文献

1．平板の非定常熱応力の理論解析、PNC N9410 87-028

2．不連続熱応力の簡易解析、PNC N9410 87-158

3．シェル理論による簡易熱応力評価プログラムの改定、PNC PN9410 93-050

4．非定常熱応力計算における Duhamelの定理の応用、PNC PN9410 93-165

5．１次元非定常熱伝導解および変係数問題への応用、PNC PN9410 93-198

表1　シェル熱応力解のまとめ

応力	要因	円筒1側の熱応力	円筒2側の熱応力
周方向	Δ_{TE}	$-[C_1f_3+C_2f_4]E_1\Delta_{TE}$ (注)	$+[(1-C_1)f_3-C_3f_4]E_2\Delta_{TE}$
膜応力	T_{B1}	$-0.393[C_3f_3+(1-C_4)f_4]E_1\alpha_1T_{B1}$	$+0.393[-C_3f_3+C_4/(gk^2)f_4]E_2\alpha_1T_{B1}$
σ_{MC1}	T_{B2}	$+0.393[C_2f_3+C_5f_4]E_1\alpha_2T_{B2}$	$+0.393[C_2f_3-C_4f_4]E_2\alpha_2T_{B2}$
軸方向	Δ_{TE}	$+1.816[-C_1f_4+C_2f_3]E_1\Delta_{TE}$	$+1.816[(1-C_1)f_4+C_3f_3]E_2\Delta_{TE}$
曲げ	T_{B1}	$-0.714E_1\alpha_1T_{B1}$ $+0.714[-C_3f_4+(1-C_4)f_3]E_1\alpha_1T_{B1}$	$-0.714[C_3f_4+C_4/(gk^2)f_3]E_2\alpha_1T_{B1}$
応力	T_{B2}	$-0.714[-C_2f_4+C_5f_3]E_1\alpha_2T_{B2}$	$-0.714E_2\alpha_2T_{B2}$ $+0.714[C_2f_4+C_4f_3]E_2\alpha_2T_{B2}$
σ_{BX1}			
周方向	Δ_{TE}	$+0.545[-C_1f_4+C_2f_3]E_1\Delta_{TE}$	$+0.545[(1-C_1)f_4+C_3f_3]E_2\Delta_{TE}$
曲げ	T_{B1}	$-0.714E_1\alpha_1T_{B1}$ $+0.214[-C_3f_4+(1-C_4)f_3]E_1\alpha_1T_{B1}$	$-0.214[C_3f_4+C_4/(gk^2)f_3]E_2\alpha_1T_{B1}$
応力	T_{B2}	$-0.214[-C_2f_4+C_5f_3]E_1\alpha_2T_{B2}$	$-0.714E_2\alpha_2T_{B2}$ $+0.214[C_2f_4+C_4f_3]E_2\alpha_2T_{B2}$
σ_{BC1}			

(注) $\Delta_{TE}=\alpha_1T_{M1}-\alpha_2T_{M2}$は平均熱膨張ひずみの差である。

表2　無次元パラメータ

(1)　g=0.5

G = 0.5

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.412	-0.059	-0.118	0.412	0.294
1.1	0.425	-0.048	-0.079	0.448	0.334
1.2	0.436	-0.034	-0.048	0.481	0.373
1.3	0.446	-0.019	-0.023	0.512	0.413
1.4	0.456	-0.002	-0.003	0.539	0.451
1.5	0.464	0.015	0.014	0.565	0.489
1.6	0.472	0.034	0.027	0.589	0.527
1.8	0.489	0.074	0.046	0.630	0.599
2.0	0.505	0.114	0.057	0.667	0.667
2.5	0.546	0.215	0.069	0.738	0.818
3.0	0.587	0.309	0.069	0.790	0.943
4.0	0.661	0.463	0.058	0.860	1.124
5.0	0.722	0.577	0.046	0.901	1.237
6.0	0.769	0.660	0.037	0.927	1.308
7.0	0.806	0.721	0.029	0.945	1.351
8.0	0.834	0.767	0.024	0.957	1.377
9.0	0.857	0.803	0.020	0.966	1.393
10.0	0.875	0.831	0.017	0.972	1.401

(2)　g=0.6

G = 0.6

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.435	-0.048	-0.081	0.435	0.339
1.1	0.448	-0.034	-0.047	0.472	0.384
1.2	0.459	-0.017	-0.020	0.504	0.428
1.3	0.469	0.002	0.002	0.534	0.472
1.4	0.478	0.022	0.019	0.562	0.515
1.5	0.487	0.043	0.032	0.587	0.557
1.6	0.496	0.065	0.042	0.610	0.598
1.8	0.514	0.109	0.056	0.652	0.677
2.0	0.531	0.155	0.064	0.688	0.750
2.5	0.576	0.263	0.070	0.758	0.909
3.0	0.619	0.361	0.067	0.808	1.035
4.0	0.694	0.515	0.054	0.874	1.209
5.0	0.753	0.624	0.042	0.913	1.311
6.0	0.798	0.702	0.032	0.937	1.370
7.0	0.831	0.758	0.026	0.952	1.404
8.0	0.857	0.799	0.021	0.963	1.422
9.0	0.877	0.831	0.017	0.971	1.431
10.0	0.894	0.855	0.014	0.976	1.435

表2　無次元パラメータ（続き）

(3)　g=0.7

G = 0.7

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.455	-0.037	-0.053	0.455	0.381
1.1	0.467	-0.019	-0.022	0.491	0.431
1.2	0.478	0.001	0.001	0.524	0.480
1.3	0.488	0.023	0.019	0.554	0.528
1.4	0.498	0.046	0.033	0.581	0.575
1.5	0.507	0.069	0.044	0.606	0.621
1.6	0.517	0.094	0.052	0.629	0.665
1.8	0.536	0.143	0.063	0.670	0.749
2.0	0.555	0.191	0.068	0.705	0.826
2.5	0.602	0.306	0.070	0.774	0.989
3.0	0.647	0.405	0.064	0.823	1.114
4.0	0.722	0.558	0.050	0.886	1.279
5.0	0.778	0.662	0.038	0.922	1.370
6.0	0.820	0.734	0.029	0.944	1.419
7.0	0.851	0.786	0.023	0.958	1.445
8.0	0.874	0.824	0.018	0.967	1.457
9.0	0.893	0.852	0.015	0.974	1.461
10.0	0.907	0.874	0.012	0.979	1.460

(4)　g=0.8

G = 0.8

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.472	-0.025	-0.031	0.472	0.422
1.1	0.484	-0.004	-0.004	0.508	0.476
1.2	0.495	0.019	0.016	0.540	0.529
1.3	0.505	0.043	0.032	0.570	0.581
1.4	0.515	0.069	0.044	0.597	0.632
1.5	0.525	0.095	0.053	0.622	0.680
1.6	0.535	0.121	0.059	0.645	0.727
1.8	0.555	0.174	0.067	0.686	0.815
2.0	0.576	0.226	0.070	0.720	0.894
2.5	0.625	0.344	0.069	0.788	1.060
3.0	0.670	0.444	0.062	0.836	1.183
4.0	0.745	0.594	0.046	0.895	1.338
5.0	0.799	0.693	0.035	0.929	1.418
6.0	0.838	0.761	0.026	0.949	1.459
7.0	0.866	0.808	0.021	0.962	1.477
8.0	0.888	0.843	0.016	0.971	1.484
9.0	0.905	0.868	0.013	0.977	1.483
10.0	0.918	0.888	0.011	0.982	1.479

(5)　g=0.9

G = 0.9

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.487	-0.012	-0.014	0.487	0.462
1.1	0.499	0.011	0.010	0.523	0.520
1.2	0.510	0.037	0.028	0.555	0.577
1.3	0.521	0.063	0.042	0.585	0.632
1.4	0.531	0.091	0.052	0.612	0.685
1.5	0.542	0.119	0.059	0.636	0.736
1.6	0.552	0.147	0.064	0.659	0.785
1.8	0.573	0.203	0.070	0.700	0.876
2.0	0.594	0.257	0.071	0.734	0.958
2.5	0.645	0.378	0.067	0.800	1.123
3.0	0.691	0.478	0.059	0.847	1.243
4.0	0.764	0.624	0.043	0.904	1.388
5.0	0.816	0.719	0.032	0.935	1.458
6.0	0.852	0.782	0.024	0.954	1.491
7.0	0.879	0.826	0.019	0.966	1.503
8.0	0.899	0.858	0.015	0.974	1.505
9.0	0.914	0.881	0.012	0.979	1.501
10.0	0.926	0.899	0.010	0.983	1.495

(6)　g=1.0

G = 1.0

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.500	0.000	0.000	0.500	0.500
1.1	0.512	0.026	0.022	0.536	0.562
1.2	0.523	0.054	0.037	0.568	0.622
1.3	0.534	0.083	0.049	0.598	0.680
1.4	0.545	0.113	0.057	0.625	0.736
1.5	0.556	0.142	0.063	0.649	0.789
1.6	0.567	0.172	0.067	0.672	0.840
1.8	0.589	0.230	0.071	0.712	0.933
2.0	0.611	0.286	0.071	0.746	1.016
2.5	0.663	0.409	0.065	0.811	1.181
3.0	0.709	0.509	0.057	0.856	1.296
4.0	0.780	0.650	0.041	0.911	1.431
5.0	0.830	0.741	0.030	0.940	1.492
6.0	0.865	0.800	0.022	0.958	1.518
7.0	0.889	0.841	0.017	0.969	1.525
8.0	0.908	0.870	0.014	0.976	1.523
9.0	0.922	0.892	0.011	0.981	1.517
10.0	0.933	0.909	0.009	0.985	1.507

(7)　g=1.1

G = 1.1

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.512	0.012	0.011	0.512	0.537
1.1	0.524	0.041	0.031	0.548	0.602
1.2	0.536	0.071	0.045	0.580	0.665
1.3	0.547	0.102	0.055	0.610	0.726
1.4	0.559	0.133	0.062	0.636	0.784
1.5	0.570	0.165	0.067	0.661	0.839
1.6	0.581	0.196	0.069	0.684	0.891
1.8	0.604	0.256	0.072	0.723	0.986
2.0	0.627	0.313	0.071	0.757	1.069
2.5	0.680	0.437	0.064	0.821	1.232
3.0	0.725	0.536	0.054	0.864	1.344
4.0	0.795	0.673	0.038	0.917	1.468
5.0	0.842	0.759	0.028	0.945	1.521
6.0	0.875	0.815	0.021	0.961	1.541
7.0	0.898	0.854	0.016	0.971	1.544
8.0	0.915	0.881	0.013	0.978	1.538
9.0	0.928	0.901	0.010	0.983	1.529
10.0	0.938	0.916	0.008	0.986	1.518

(8)　g=1.2

G = 1.2

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.523	0.025	0.021	0.523	0.573
1.1	0.535	0.055	0.038	0.559	0.641
1.2	0.547	0.087	0.051	0.591	0.707
1.3	0.559	0.120	0.059	0.620	0.770
1.4	0.571	0.153	0.065	0.647	0.829
1.5	0.583	0.186	0.069	0.672	0.886
1.6	0.595	0.218	0.071	0.694	0.939
1.8	0.618	0.280	0.072	0.734	1.035
2.0	0.641	0.338	0.070	0.767	1.119
2.5	0.694	0.462	0.062	0.829	1.279
3.0	0.740	0.560	0.052	0.872	1.386
4.0	0.808	0.693	0.036	0.922	1.501
5.0	0.853	0.775	0.026	0.948	1.546
6.0	0.884	0.828	0.019	0.964	1.560
7.0	0.906	0.864	0.015	0.973	1.559
8.0	0.922	0.890	0.012	0.980	1.551
9.0	0.934	0.909	0.009	0.984	1.539
10.0	0.943	0.923	0.008	0.987	1.527

表2　無次元パラメータ（続き）

(9)　g=1.3

G = 1.3

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.533	0.037	0.029	0.533	0.607
1.1	0.545	0.070	0.044	0.569	0.678
1.2	0.558	0.104	0.055	0.601	0.747
1.3	0.570	0.138	0.063	0.631	0.812
1.4	0.582	0.172	0.068	0.657	0.873
1.5	0.594	0.206	0.070	0.682	0.931
1.6	0.607	0.239	0.072	0.704	0.985
1.8	0.631	0.302	0.072	0.743	1.082
2.0	0.654	0.361	0.069	0.776	1.165
2.5	0.708	0.486	0.060	0.837	1.322
3.0	0.753	0.581	0.050	0.878	1.424
4.0	0.819	0.711	0.034	0.926	1.530
5.0	0.862	0.790	0.024	0.952	1.568
6.0	0.891	0.840	0.018	0.966	1.577
7.0	0.912	0.874	0.014	0.975	1.573
8.0	0.927	0.898	0.011	0.981	1.562
9.0	0.939	0.915	0.009	0.985	1.549
10.0	0.947	0.928	0.007	0.988	1.534

(10)　g=1.4

G = 1.4

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.542	0.049	0.035	0.542	0.641
1.1	0.555	0.084	0.049	0.578	0.715
1.2	0.568	0.119	0.059	0.611	0.785
1.3	0.580	0.155	0.065	0.640	0.852
1.4	0.593	0.190	0.069	0.667	0.915
1.5	0.606	0.225	0.071	0.691	0.973
1.6	0.618	0.259	0.072	0.713	1.028
1.8	0.643	0.324	0.071	0.752	1.125
2.0	0.667	0.383	0.068	0.784	1.208
2.5	0.720	0.507	0.058	0.844	1.361
3.0	0.765	0.601	0.048	0.884	1.459
4.0	0.829	0.727	0.032	0.931	1.555
5.0	0.870	0.802	0.023	0.955	1.588
6.0	0.898	0.850	0.017	0.968	1.592
7.0	0.918	0.882	0.013	0.977	1.584
8.0	0.932	0.904	0.010	0.982	1.571
9.0	0.943	0.921	0.008	0.986	1.556
10.0	0.951	0.933	0.007	0.989	1.541

(11)　g=1.5

G = 1.5

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.551	0.061	0.041	0.551	0.673
1.1	0.564	0.097	0.054	0.587	0.750
1.2	0.577	0.134	0.062	0.619	0.822
1.3	0.590	0.171	0.068	0.649	0.890
1.4	0.603	0.208	0.071	0.675	0.954
1.5	0.616	0.243	0.072	0.700	1.014
1.6	0.629	0.278	0.072	0.722	1.069
1.8	0.654	0.343	0.071	0.760	1.166
2.0	0.678	0.403	0.067	0.792	1.248
2.5	0.732	0.526	0.056	0.851	1.398
3.0	0.775	0.619	0.046	0.890	1.490
4.0	0.838	0.741	0.031	0.934	1.579
5.0	0.878	0.813	0.022	0.957	1.605
6.0	0.904	0.859	0.016	0.970	1.605
7.0	0.923	0.889	0.012	0.978	1.595
8.0	0.936	0.910	0.009	0.984	1.580
9.0	0.946	0.926	0.008	0.987	1.563
10.0	0.954	0.937	0.006	0.990	1.547

(12)　g=1.6

G = 1.6

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.559	0.073	0.046	0.559	0.705
1.1	0.573	0.111	0.057	0.595	0.784
1.2	0.586	0.149	0.065	0.628	0.858
1.3	0.599	0.187	0.069	0.657	0.927
1.4	0.613	0.225	0.072	0.684	0.992
1.5	0.626	0.261	0.073	0.708	1.052
1.6	0.639	0.296	0.072	0.730	1.107
1.8	0.664	0.362	0.070	0.768	1.204
2.0	0.689	0.422	0.066	0.799	1.285
2.5	0.742	0.545	0.054	0.857	1.431
3.0	0.785	0.635	0.044	0.895	1.519
4.0	0.846	0.754	0.029	0.938	1.599
5.0	0.884	0.823	0.021	0.959	1.620
6.0	0.909	0.866	0.015	0.972	1.617
7.0	0.927	0.895	0.011	0.980	1.604
8.0	0.940	0.915	0.009	0.985	1.587
9.0	0.949	0.930	0.007	0.988	1.569
10.0	0.957	0.941	0.006	0.990	1.552

(13)　g=1.8

G = 1.8

K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.574	0.096	0.053	0.574	0.766
1.1	0.588	0.136	0.063	0.610	0.848
1.2	0.602	0.177	0.068	0.643	0.925
1.3	0.616	0.217	0.071	0.672	0.997
1.4	0.630	0.256	0.073	0.699	1.063
1.5	0.644	0.294	0.073	0.723	1.124
1.6	0.657	0.330	0.072	0.744	1.179
1.8	0.683	0.397	0.068	0.781	1.275
2.0	0.708	0.457	0.063	0.812	1.353
2.5	0.761	0.577	0.051	0.868	1.490
3.0	0.802	0.664	0.041	0.903	1.569
4.0	0.860	0.776	0.027	0.943	1.635
5.0	0.895	0.840	0.019	0.963	1.646
6.0	0.918	0.880	0.014	0.975	1.637
7.0	0.935	0.906	0.010	0.982	1.619
8.0	0.946	0.924	0.008	0.986	1.599
9.0	0.955	0.937	0.006	0.989	1.580
10.0	0.961	0.947	0.005	0.991	1.560

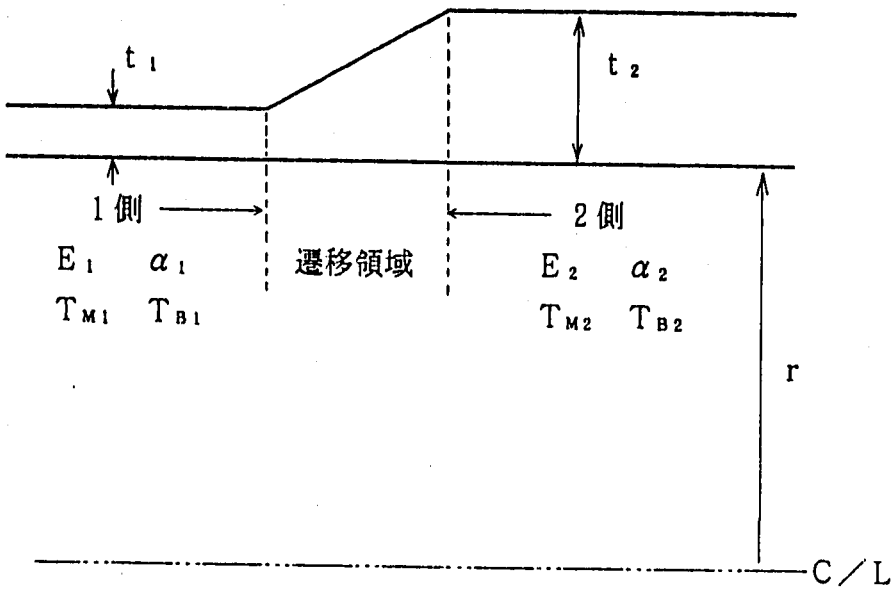
(14)　g=2.0

G = 2.0

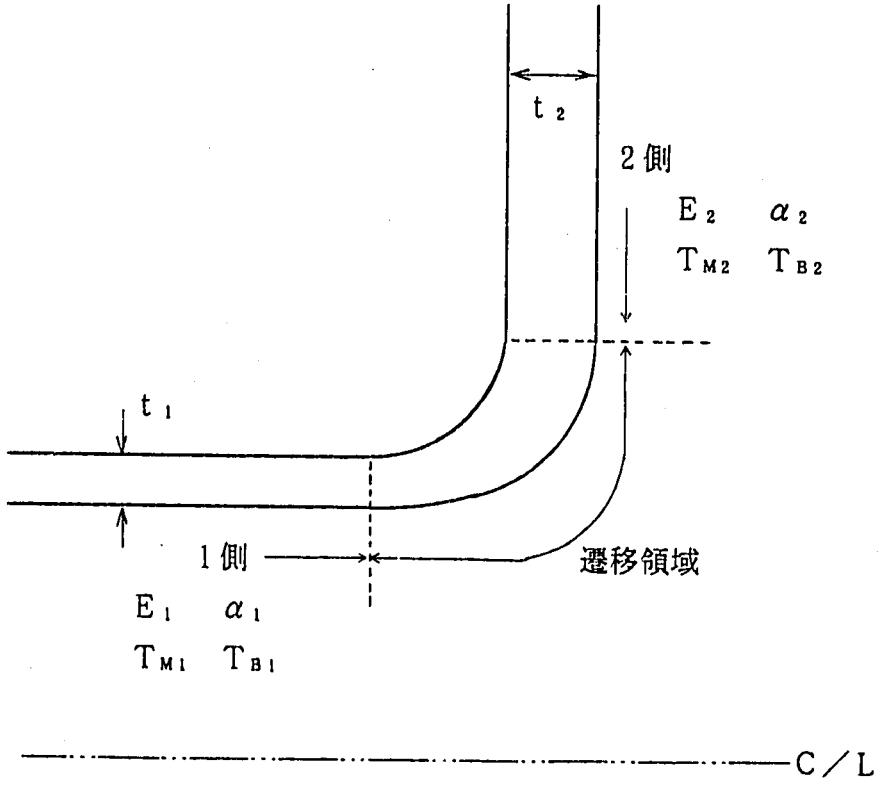
K	C1	C2	C3	C4	C5
1.0	0.588	0.118	0.059	0.588	0.824
1.1	0.603	0.161	0.066	0.624	0.909
1.2	0.617	0.203	0.071	0.657	0.989
1.3	0.632	0.245	0.073	0.686	1.062
1.4	0.646	0.285	0.073	0.712	1.128
1.5	0.660	0.324	0.072	0.736	1.189
1.6	0.674	0.361	0.070	0.757	1.244
1.8	0.700	0.428	0.066	0.793	1.338
2.0	0.725	0.487	0.061	0.823	1.414
2.5	0.777	0.605	0.048	0.877	1.542
3.0	0.817	0.689	0.038	0.910	1.612
4.0	0.871	0.794	0.025	0.948	1.665
5.0	0.904	0.854	0.017	0.967	1.668
6.0	0.926	0.891	0.012	0.977	1.653
7.0	0.941	0.915	0.009	0.983	1.632
8.0	0.951	0.931	0.007	0.987	1.610
9.0	0.959	0.943	0.006	0.990	1.588
10.0	0.965	0.952	0.005	0.992	1.567

表3　シェル関数値

BX/PAI	F1	F2	F3	F4
0.00	1.000	1.000	1.000	0.000
0.01	0.999	0.938	0.969	0.030
0.02	0.996	0.878	0.937	0.059
0.03	0.992	0.820	0.906	0.086
0.04	0.985	0.764	0.875	0.111
0.05	0.978	0.710	0.844	0.134
0.06	0.969	0.658	0.814	0.155
0.07	0.958	0.608	0.783	0.175
0.08	0.947	0.560	0.753	0.193
0.09	0.934	0.514	0.724	0.210
0.10	0.920	0.469	0.695	0.226
0.11	0.906	0.426	0.666	0.240
0.12	0.890	0.385	0.638	0.253
0.13	0.874	0.346	0.610	0.264
0.14	0.857	0.309	0.583	0.274
0.15	0.840	0.273	0.556	0.283
0.16	0.822	0.239	0.530	0.291
0.17	0.803	0.206	0.505	0.298
0.18	0.784	0.175	0.480	0.304
0.19	0.765	0.146	0.455	0.309
0.20	0.745	0.118	0.432	0.314
0.21	0.725	0.092	0.409	0.317
0.22	0.705	0.067	0.386	0.319
0.23	0.685	0.043	0.364	0.321
0.24	0.665	0.021	0.343	0.322
0.25	0.645	0.000	0.322	0.322
0.26	0.625	-0.020	0.302	0.322
0.27	0.604	-0.038	0.283	0.321
0.28	0.584	-0.055	0.264	0.320
0.29	0.564	-0.071	0.246	0.318
0.30	0.544	-0.086	0.229	0.315
0.31	0.525	-0.100	0.212	0.312
0.32	0.505	-0.113	0.196	0.309
0.33	0.486	-0.125	0.181	0.305
0.34	0.467	-0.136	0.166	0.301
0.35	0.448	-0.146	0.151	0.297
0.36	0.429	-0.155	0.137	0.292
0.37	0.411	-0.163	0.124	0.287
0.38	0.393	-0.170	0.112	0.282
0.39	0.376	-0.177	0.099	0.276
0.40	0.359	-0.183	0.088	0.271
0.41	0.342	-0.188	0.077	0.265
0.42	0.325	-0.192	0.066	0.259
0.43	0.309	-0.196	0.057	0.253
0.44	0.294	-0.200	0.047	0.247
0.45	0.278	-0.202	0.038	0.240
0.46	0.263	-0.204	0.030	0.234
0.47	0.249	-0.206	0.021	0.227
0.48	0.235	-0.207	0.014	0.221
0.49	0.221	-0.208	0.007	0.214
0.50	0.208	-0.208	0.000	0.208
0.50	0.208	-0.208	0.000	0.208
0.51	0.195	-0.208	-0.006	0.201
0.52	0.183	-0.207	-0.012	0.195
0.53	0.171	-0.206	-0.018	0.188
0.54	0.159	-0.205	-0.023	0.182
0.55	0.148	-0.203	-0.028	0.175
0.56	0.137	-0.201	-0.032	0.169
0.57	0.126	-0.199	-0.036	0.163
0.58	0.116	-0.197	-0.040	0.157
0.59	0.107	-0.194	-0.044	0.150
0.60	0.097	-0.191	-0.047	0.144
0.61	0.089	-0.188	-0.050	0.138
0.62	0.080	-0.185	-0.052	0.133
0.63	0.072	-0.182	-0.055	0.127
0.64	0.064	-0.178	-0.057	0.121
0.65	0.057	-0.175	-0.059	0.116
0.66	0.050	-0.171	-0.061	0.110
0.67	0.043	-0.167	-0.062	0.105
0.68	0.036	-0.163	-0.063	0.100
0.69	0.030	-0.159	-0.064	0.095
0.70	0.025	-0.155	-0.065	0.090
0.71	0.019	-0.151	-0.066	0.085
0.72	0.014	-0.147	-0.066	0.080
0.73	0.009	-0.142	-0.067	0.076
0.74	0.004	-0.138	-0.067	0.071
0.75	0.000	-0.134	-0.067	0.067
0.76	-0.004	-0.130	-0.067	0.063
0.77	-0.008	-0.126	-0.067	0.059
0.78	-0.011	-0.121	-0.066	0.055
0.79	-0.015	-0.117	-0.066	0.051
0.80	-0.018	-0.113	-0.066	0.048
0.81	-0.021	-0.109	-0.065	0.044
0.82	-0.023	-0.105	-0.064	0.041
0.83	-0.026	-0.101	-0.063	0.038
0.84	-0.028	-0.097	-0.063	0.034
0.85	-0.030	-0.093	-0.062	0.031
0.86	-0.032	-0.089	-0.061	0.029
0.87	-0.034	-0.085	-0.060	0.026
0.88	-0.035	-0.082	-0.059	0.023
0.89	-0.037	-0.078	-0.057	0.021
0.90	-0.038	-0.075	-0.056	0.018
0.91	-0.039	-0.071	-0.055	0.016
0.92	-0.040	-0.068	-0.054	0.014
0.93	-0.041	-0.064	-0.053	0.012
0.94	-0.041	-0.061	-0.051	0.010
0.95	-0.042	-0.058	-0.050	0.008
0.96	-0.042	-0.055	-0.049	0.006
0.97	-0.043	-0.052	-0.047	0.004
0.98	-0.043	-0.049	-0.046	0.003
0.99	-0.043	-0.046	-0.045	0.001
1.00	-0.043	-0.043	-0.043	0.000



（a） 円筒テーパー部



（b） ノズルコーナー部

図 2 直列接続の不連続構造