

分置

免震要素としての皿ばねの力学的特性の検討

(その1：単軸荷重に対する皿ばねの構造解析手法の検討)

1995年11月

動力炉・核燃料開発事業団
大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせください。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation)

1995年11月

免震要素としての皿ばねの力学的特性の検討

(その1：単軸荷重に対する皿ばねの構造解析手法の検討)

坂井哲也*，月森和之*，森下正樹*

西 日

『建屋水平免震を前提とし、これに機器レベルでの上下免震を組合わせることでプラント全体の3次元免震を実現する』ことを目標においていた機器上下免震の研究において、『原子炉容器と一次系機器を搭載する共通スラブ構造（コモンデッキ）を、各機器の廻りで機器と同心円状の大型皿ばねを用いた免震要素で上下方向に免震支持する』構造の概念を創出し、その成立性の見通しを得ている。このような構造の実現に係わるいくつかの課題のうち本報では、免震要素として用いる大型皿ばねの力学的特性の検討を行なって、以下に示す知見を得た。

- (1) FEM解析によって皿ばね断面内に発生する応力分布を検討した結果、卓越成分は周方向曲げ応力であり、皿ばねコーナー部が高応力部となることを確認した。
- (2) JIS等に記載されている設計公式は、マクロ的にみると単軸荷重に対する皿ばねの荷重-たわみ関係の非線形性及び内部に発生する周方向応力の傾向について良く捕らえているが、詳細に検討すれば設計公式値は皿ばね剛性及び最大周方向応力をFEM解より大きく評価する傾向にある。この傾向はたわみが進行するほど、また皿ばねの自由高さが高いモデルほど顕著となる。
- (3) 上記(2)に示した傾向を補正するために設計公式の改良式を設計公式導出に当っての仮定を見直すことにより導出し、その改良式が単軸荷重に対する皿ばねの力学的特性をより精度良く表現するものであることを確認した。
- (4) 皿ばね境界条件に関するパラメータ解析を行い、最大荷重及び発生周方向応力を検討した結果、皿ばね上下端の回転自由度に対する拘束条件が、皿ばねの力学的特性を決定する大きな支配因子であることが明らかとなった。

* 基盤技術開発部 構造・材料技術開発室

INVESTIGATION OF MECHANICAL CHARACTERISTIC OF CONED DISH SPRING AS A VERTICAL ISOLATION DEVICE

(Part 1 : Investigation of structural analysis method of coned dish spring to axial load)

T. Sakai*, K. Tsukimori* and M. Morishita*

Abstract

If one can combine a vertical seismic isolation at equipment level with base isolation, the plant may be three dimensionally freed from seismic load, which will substantially enhance plant safety and economy. From this point of view, a structural concept of vertical isolation system has been pursued. Up to now, a structural concept has been created in which the reactor vessel and the major primary components are suspended from a large common deck. This common deck is then supported by a couple of isolation devices consisted of large bore coned dish springs around each component. Among several issues left for realization of such a structure, this report is concerned with mechanical characteristic of coned dish spring as vertical isolation devices. The results of the study are summarized as below.

- (1) It was confirmed from FEM analysis that the bending hoop stress is dominant in an axially compressed dish spring. This stress takes its peak value at the corners of the dish spring.
- (2) The design formulas described in JIS can depict non-linear load-deflection relation and hoop stress of a dish spring due to an axial load with reasonable accuracy. However, it was revealed from a close investigation that the design formulas give a large stiffness and maximum hoop stresses. This tendency becomes significant when the deflection is large and the height of dish spring is large.
- (3) A set of modified formulae was developed in order to improve the tendency described above. And it was confirmed that the improved equations can accurately express mechanical characteristic of dish spring to vertical direction loading.
- (4) A parametric survey was also carried out on the boundary condition of dish spring. According to investigation of maximum load and hoop stress, it has been clarified that the rotation as degree of freedom at the upper and lower ends of the dish spring is a ruling factor of mechanical characteristic of the dish spring.

* Structure and Material Research Section, O-arai Engineering Center

目 次

1. 緒 言	1
2. 皿ばね構造解析の方針	3
2.1 目的と方法	3
2.2 解析条件及び解析ケース	5
(1) 解析方法	5
(2) 解析対象 (モデル名と形状寸法)	5
(3) 材料定数	6
(4) 境界条件	7
(5) 有限要素解析におけるモデル化	8
(6) 荷重条件	9
3. 解析結果及び試験、設計公式との比較	10
3.1 皿ばね単体の特性試験結果と FEM 解との比較	10
3.2 皿ばねの軸荷重に対する応力分布	14
3.3 ソリッドモデル解とシェルモデル解の比較	18
3.4 形状パラメータ解析における設計公式とソリッドモデル解の比較	23
3.5 境界条件の違いによる比較	29
4. 考 察	45
4.1 シェル要素によるモデル化の検討	45
4.2 設計公式の精緻化による改善 (設計公式の改良式の提示)	49
4.3 皿ばねの支持条件による影響の評価	57
5. 結 言	59
参考文献	60

APPENDIX

A. JIS B 2706-1978 皿ばね解説	A-1
B. J.O. Almen and Laszlo による 皿ばねの荷重 - たわみ関係式導出に関する解説	B-1
C. 皿ばね設計公式の改良式の導出	C-1

1. 緒言

『建屋水平免震を前提とし、これに機器レベルでの上下免震を組合わせることでプラント全体としての3次元免震を実現する』ことを最終的な目標において、機器上下免震構造の研究開発を行なってきた。上下免震に適した構造、要素等に関する種々の検討の結果、図1に示すように『原子炉容器と一次系機器を搭載する共通スラブ構造（コモンデッキ）を、各機器廻りで機器と同心円状の大型皿ばねを用いた免震要素で上下方向に免震支持する』構造の概念を創出し、これについてひとつおりの地震応答解析と構造設計を行なってその成立性の見通しを得ている。^{(1), (2)} この中において、上下免震の要素として大型の皿ばねの設計は、JIS等に記載されている設計公式^{(3), (4)}に基づいて行なっているが、これには以下に示す課題を有している。

- (1) 免震要素としての皿ばねに対する適用性の検証を必要とする。
- (2) 皿ばね座面の鉛直方向のみ拘束の境界条件を想定して導出されているため、他の境界条件を持つ皿ばねには適用できない。
- (3) 軸荷重に対する評価式しかない。（曲げ剛性に対する評価ができない。）
- (4) 弾性材料を仮定しており、弾塑性が考慮出来ない。
- (5) 薄肉シェルの理論に基づいている（と想定される）ので、コーナー部の応力集中が正確に表現できない（特にRの影響等）。
- (6) 崩壊等、想定される破損モードに関する予測が不可能である。

そこで、以下の(a)～(c)に示す目的に則した有限要素法による一連の皿ばねの静的応力解析を行なって、皿ばねの力学的特性を明らかにするとともに、現状の設計公式ではカバー出来ない範囲での特性評価手法の整備の一助とする。

- (a) 設計公式の免震皿ばねに対する適用性の評価と境界条件パラメータによる応力評価
(上記課題(1)及び(2)に対応)
- (b) 皿ばねの曲げ剛性の評価 (上記課題(3)に対応)
- (c) 弾塑性解析による皿ばねの強度評価 (上記課題(4), (5), (6)に対応)

なお、本報告書は、上記(a)～(c)の研究項目の内、(a)の設計公式の免震皿ばねに対する適用性の評価及び境界条件パラメータによる応力評価についてまとめたものであり、(b), (c)の研究項目については次の報告書においてまとめる予定である。

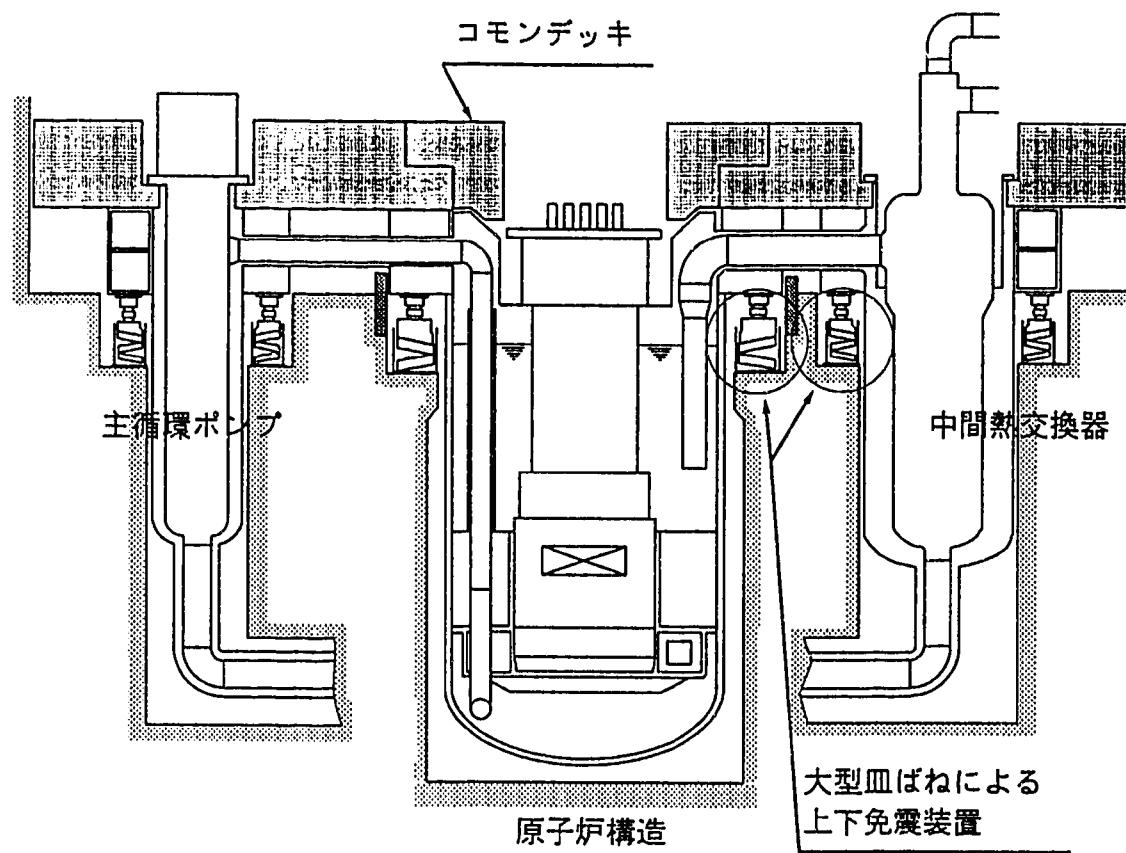


図 1 コモンデッキ方式機器上下免震構造

2. 盤ばね構造解析の方針

2.1 目的と方法

盤ばねの設計公式は、単軸荷重に対する「荷重－たわみ」、「ばね剛性－たわみ」、「荷重－周方向応力」のそれぞれの関係についてJIS B 2706 (1978)⁽³⁾に記載されているが、以下に示す仮定を設定して組み立てられた式であるため、実際の挙動と必ずしも一致しないこともあると考えられる。

- (1) 公式導出にあたっての応力－ひずみ関係式に薄肉シェル理論を採用している。
- (2) 断面の角変位（たわみによる底面と盤ばね子午線のなす角）は小さい。
- (3) たわみを生じた場合も（子午線方向）断面は変形しない。

そこで原子炉容器(R/V)廻り、及び機器廻りの上下免震要素として検討されている大型盤ばねについて、一般的な境界条件（盤ばね下面の鉛直方向自由度のみ拘束）のもとで形状をパラメータとしてFEM解析を実施し、それらと設計公式値の比較・検討を行い、一致しない部分については設計公式導出の際に仮定された諸条件等を考察し、その評価量（式または係数等）を明らかにする。また、設計公式導出の際に想定された境界条件と異なる数種の境界条件でFEM解析を実施し、それぞれの条件における盤ばねの力学的特性の傾向を明らかにすることにより上下免震プラントの設計に供する。なお、盤ばねにおいては一般にたわみ量 $\delta = 0.75 h$ (h : 盤ばね自由高さ) のときを最大荷重とすることが多い（Appendix A 参照）ことから、盤ばねに負荷する荷重は変位制御にて0.75hまでとし、この範囲において力学的挙動を検討する。実施するFEM解析の項目と対応する検討事項を以下に示す。

(a) 盤ばね単体の特性試験結果とFEM解との比較・検討

別途実施されているコモンデッキ方式上下免震構造の振動試験の一環として行われた盤ばね単体の特性試験結果⁽⁵⁾と、その試験体をソリッド要素及びシェル要素による2つのモデル化を行い実施したFEM解とを比較・検討し、FEM解の妥当性について検証する。

(b) 盤ばねの軸荷重に対する応力分布の確認

軸荷重を載荷したときの盤ばね断面内に発生する応力分布を検討し、卓越する応力成分、高応力位置、分布の様相等の評価を行なって、盤ばねの軸荷重に対する発生応力の特徴を把握する。

(c) ソリッドモデル解とシェルモデル解の比較検討

盤ばねのFEM解析においては、シェル要素またはソリッド要素によるモデル化が考えられる。計算効率等の観点からはシェルモデルによる解析が望ましいが、ある程度の板厚をもった免震盤ばねの解析に対して、薄肉シェル理論によるシェル要素の適用性の問題、境界条件設定に際しての厳密性の問題等が考えられる。そこで盤ばねのシェルモデルによるFEM解析結果（以下シェル解）を、ソリッドモデルによるFEM解析結果（以下ソリッド解）と比較検討することによりシェル要素によるモデル化の適用性を確認する。

(d) 形状(h/t) パラメータによる設計公式解とソリッドモデル解の比較検討

ソリッドモデル解をリファレンスとして種々の形状パラメータ(h/t)領域での設計公式値の精度を検討する。

(e) 境界条件をパラメータとするシェルモデルにおける解析

盤ばねを用いた免震構造においては、被支持構造物の運動の方向が切り替わる際にガタ系となる問題を有していることから、盤ばね支持方法の検討が必要となる。上下免震プラント設計における盤ばね支持方法の検討データを提供することを目的として、盤ばねの上端及び下端の境界条件をパラメトリックに変えて解析を実施しそれぞれの条件における「荷重-たわみ」関係、「ばね剛性-たわみ」関係、及び「周方向応力-たわみ」関係の各項目について検討し、境界条件の違いによる盤ばね力学的挙動の特徴について考察する。

2.2 解析条件及び解析ケース

「設計公式の免震皿ばねに対する適用性の評価」及び「境界条件パラメータによる応力評価」を行うため実施した解析において、設定した解析条件及び解析ケースを以下に示す。なお、解析は汎用非線形構造解析システム「F I N A S」を用いて行なった。

(1) 解析方法

皿ばねは非線形ばね特性を有することから、解析は幾何学的非線性を考慮した弾性大変形解析にて実施。

(2) 解析対象（モデル名と形状寸法）

形状 h/t (h : 自由高さ、 t : 板厚) による皿ばね力学的特性の違いを評価するため表 2.2.1 に示す R/V 回り 5 種類、機器回り 1 種類の形状パラメータを設定する。（図 2.2.1 参照）

表 2.2.1 皿ばねモデル名と形状寸法

モデル名	外径 D(mm)	内径 d(mm)	板厚 t(mm)	高さ h(mm)		摘要 h/t
				6.3	0.50	
MODEL 1-1	650	500	12.5	6.3	0.50	R/V 回りモティファイ 1
MODEL 1-0	650	500	12.5	9.4	0.75	R/V 回りリファレンス
MODEL 1-2	650	500	12.5	12.5	1.00	R/V 回りモティファイ 2
MODEL 1-3	650	500	12.5	17.7	1.41	R/V 回りモティファイ 3
MODEL 1-4	650	500	12.5	25.0	2.00	R/V 回りモティファイ 4
MODEL 2-0	375	250	7.5	5.6	0.75	機器回りリファレンス

記号 D : 外径 mm , d : 内径 mm
 t : 板厚 mm , h : 全高さから板厚を引いた値

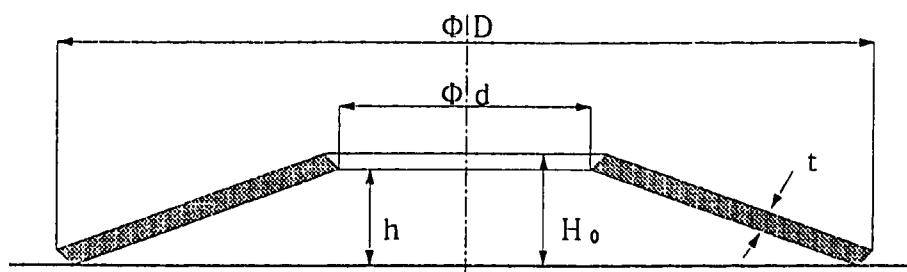


図 2.2.1 盤ばね断面の概念図

(3) 材料定数

今回リファレンスとした盤ばね特性試験においては、使用した盤ばねの材質は SUP 10 であり、解析においてはこれを参考に表 2.2.2 に示した材料定数を用いる。

表 2.2.2 材料定数

材料特性の種類	単位	Value
E : 縦弾性係数	kgf/mm ²	2.1×10^4
ν : ポアソン比		0.30
σ_y^* : 降伏応力	kgf/mm ²	149.0

* 降伏応力 σ_y については、境界条件パラメータ解析における応力評価の参考値とする。

(4) 境界条件

境界条件パラメータ解析において設定したケースを表 2.2.3に示す。

表 2.2.3 境界条件パラメータ

CASE	node #1			node #2		
	r	z	β	r	z	β
BC-1	○	○	○	○	×	○
BC-2	○	○	○	×	×	○
BC-3	○	○	○	×	×	×
BC-4	×	○	○	×	×	×
BC-5	×	○	×	×	×	×

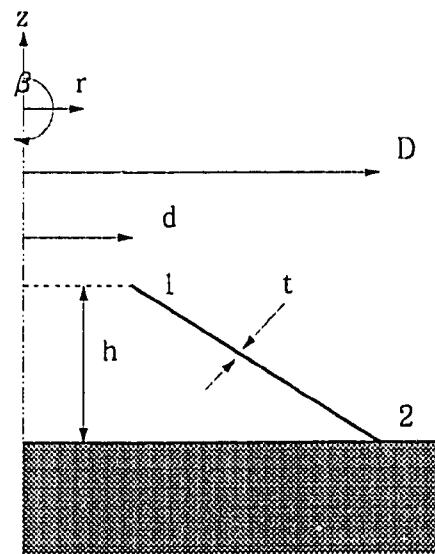


図 2.2.2 境界条件図

(注) ○ : FREE , × : FIX

(5) 有限要素解析におけるモデル化

有限要素解析においては、皿ばねを軸対称シェル及び軸対称ソリッドの2つのモデル化を行う。

(a) 要素タイプ

- A. 軸対称シェル要素 : NAXSHEL3 (3節点軸対称シェル調和級数要素)
- B. 軸対称ソリッド要素 : QAX4 (4節点四変形軸対称要素)

(b) メッシュ分割図

軸対称シェル要素及び軸対称ソリッド要素による有限要素分割図を、それぞれ
図2.2.3、図2.2.4に示す。

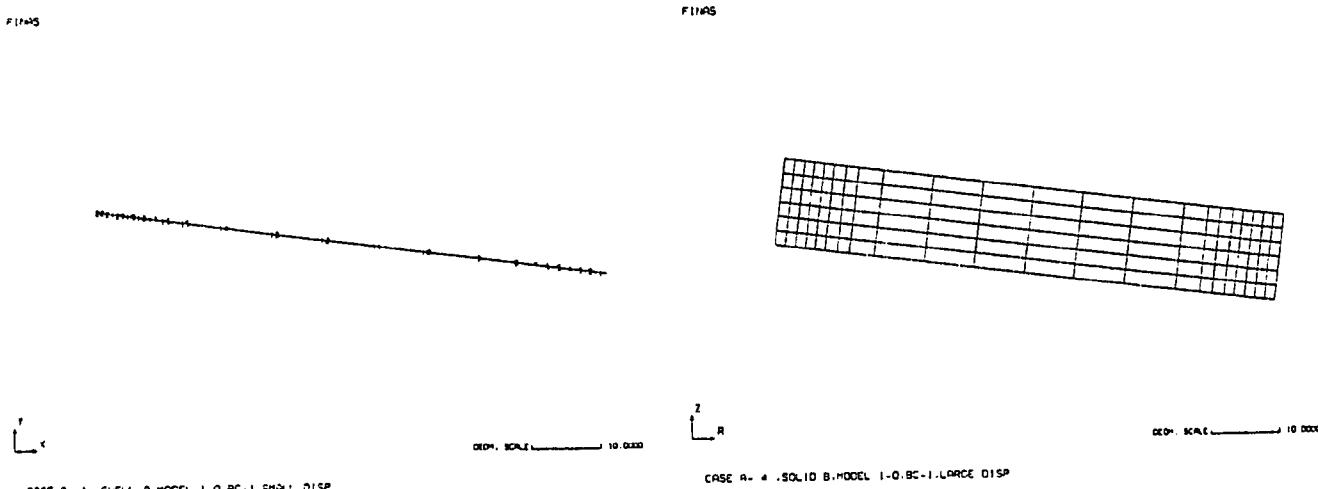


図2.2.3 軸対称シェル有限要素モデル

図2.2.4 軸対称ソリッド有限要素モデル

(6) 荷重条件

図2.2.5 荷重条件図に示すように、皿ばね上端に下向きの軸荷重を載荷するが、その載荷方法は変位制御で、 $0.75h$ までの強制変位を20荷重ステップの条件で載荷する。

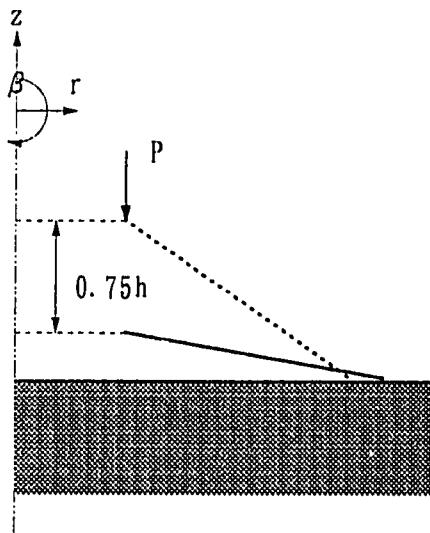


図2.2.5 荷重条件図

3. 解析結果及び試験、設計公式との比較

3.1 盤ばね単体の特性試験結果とFEM解との比較検討

盤ばね単体の荷重 - 変位特性及び破損強度の把握を目的として、盤ばね座面の鉛直方向のみの拘束条件のもとで、盤ばね単体の軸荷重負荷試験が行われている。⁽⁵⁾ 図3.1.1、図3.1.2に盤ばね試験体及び図3.1.3、図3.1.4に盤ばね特性試験装置を示す。試験は盤ばねの上下を鋼板（ばね押さえ）で挟み込み、引張り試験機を使用して単軸圧縮荷重を $0 - 0.9h - 0$ (h :盤ばね自由高さ) の履歴で3回繰り返し負荷したもので、図3.1.5及び図3.1.6における破線で示す試験値は、それぞれR/V廻り及び機器廻り盤ばねにおける試験時の発生荷重と変位（盤ばねの周方向 90° おきに4箇所で計測した変位の平均）の関係をプロットしたものである。試験値は $0 - 0.9h$ の載荷ステップにおいてはグラフの上側のカーブを描き、目標変位に到達した後の除荷し始めるターニングポイントにおいて荷重が急激に減少した後下側の曲線の履歴をたどっている。これは除荷の始まる時点において座面と支持平板の間の静摩擦による影響（除荷を始めた直後は盤ばねの座面と支持平板との間の静摩擦分によりたわみが除荷に追従せず、盤ばねの復元力が摩擦力を上回った後は除荷に追従してたわみが減少していく）によるものと考えられ、本来の盤ばねの「荷重 - たわみ」関係に関する力学的挙動は、ほぼ載荷時の曲線（上側の曲線）に表わされていると言える。同図にはその試験体と同モデルのソリッドモデル及びシェルモデルによるFEM解を重ねて記しているが、シェル解がたわみが進むに従い試験値およびソリッド解に比べたわみにおける荷重値が多少小さくなる傾向を示すが、シェル解、ソリッド解とともに試験値における載荷時の曲線（上側の曲線）とよく一致していることが確認できる。

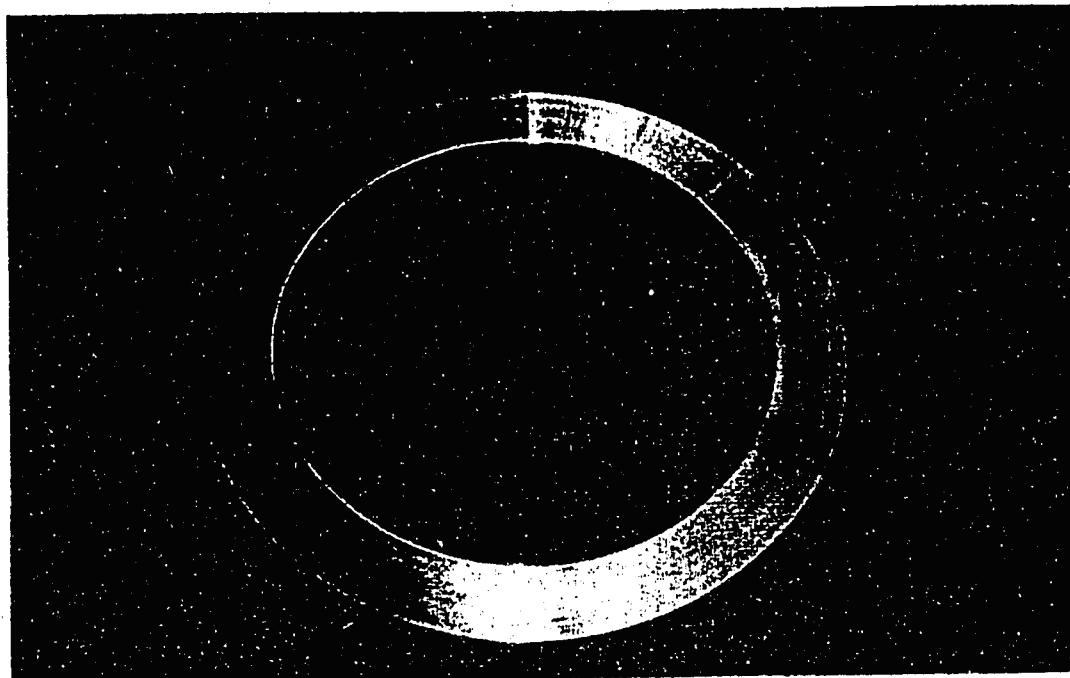


図 3.1.1 盤ばね試験体 (R/V 回り盤ばね)

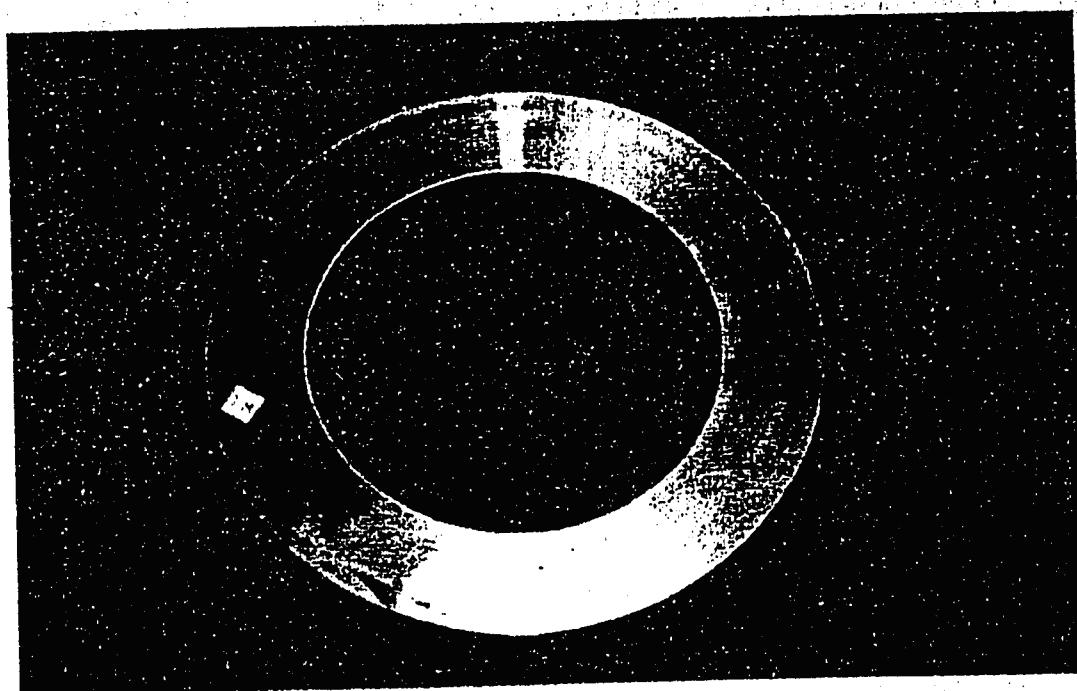


図 3.1.2 盤ばね試験体 (機器回り盤ばね)

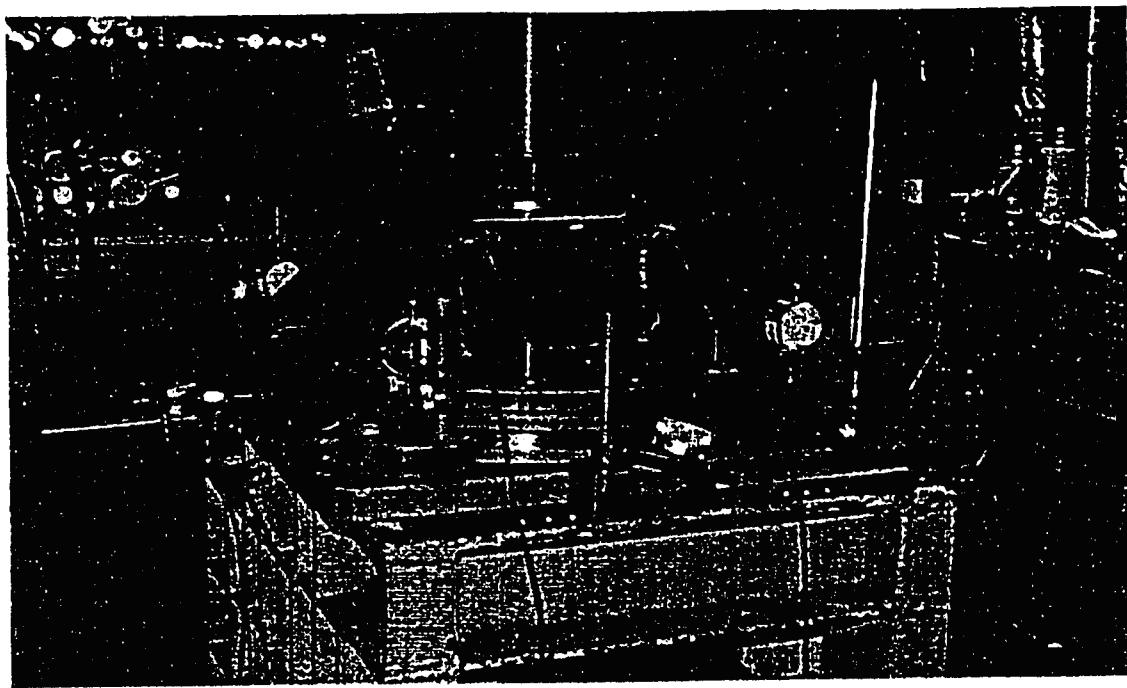


図 3.1.3 盤ばね特性試験装置（試験状況）

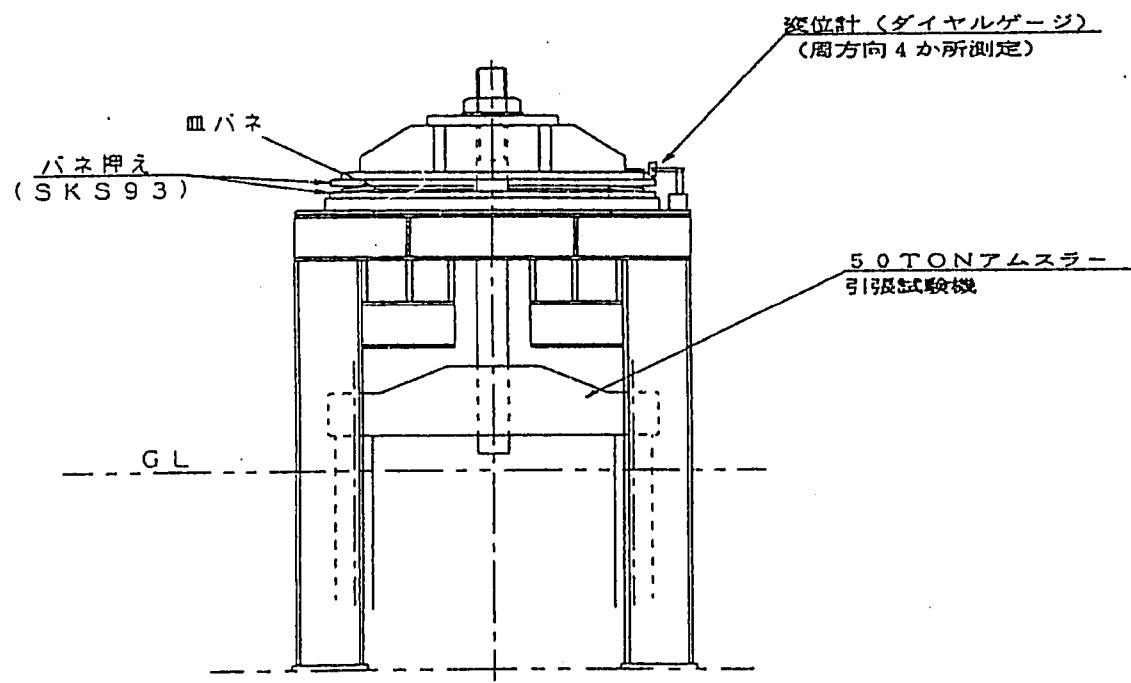


図 3.1.4 盤ばね特性試験装置（概略図）

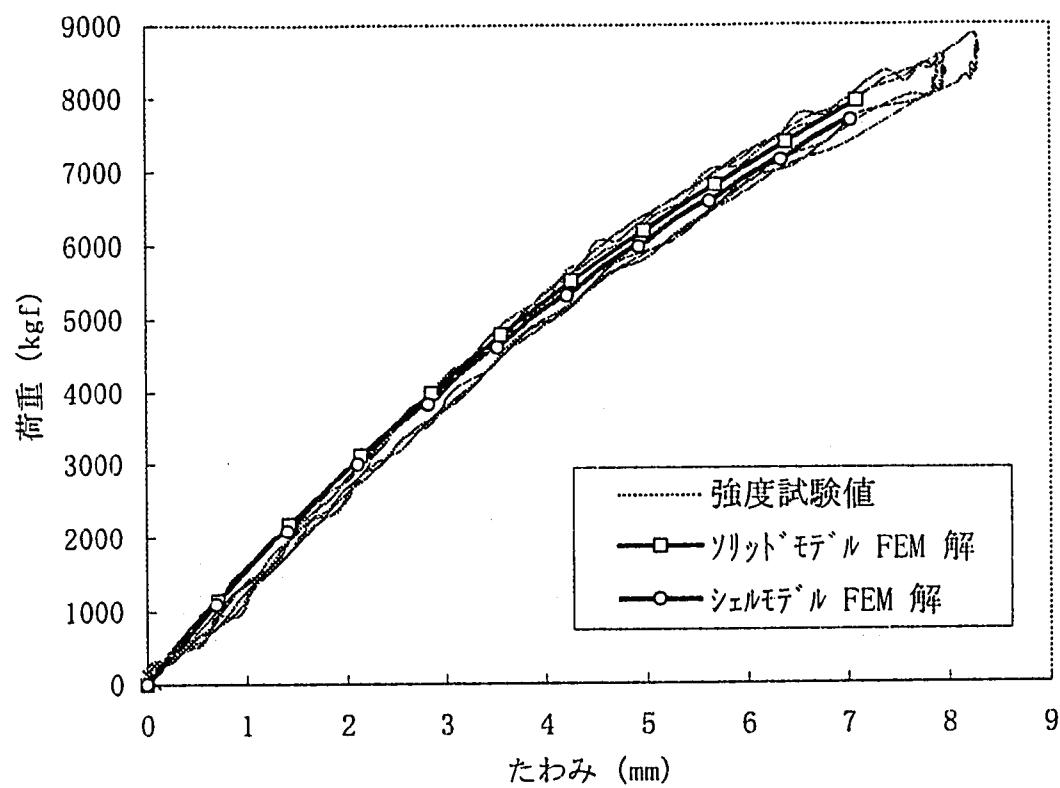


図 3.1.5 「荷重ーたわみ」：強度試験値とFEM解との比較
R/V 回り皿ばね (Model 1-0)

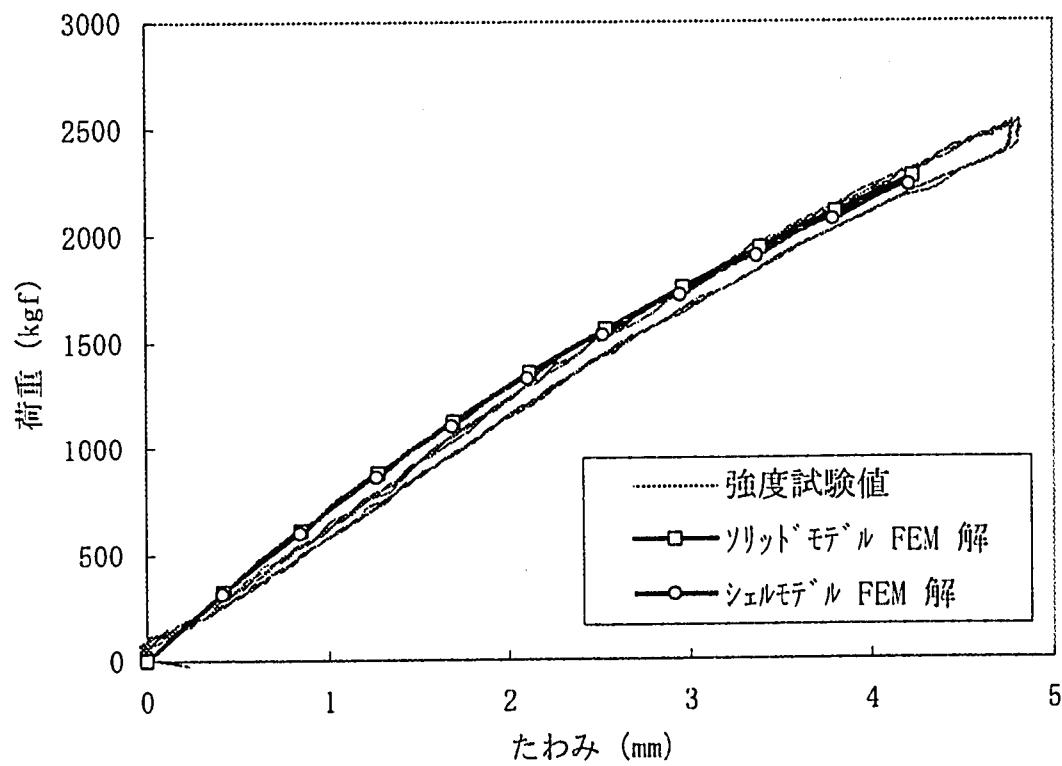


図 3.1.6 「荷重ーたわみ」：強度試験値とFEM解との比較
機器回り皿ばね (Model 2-0)

3. 2 盤ばねの軸荷重に対する応力分布の確認

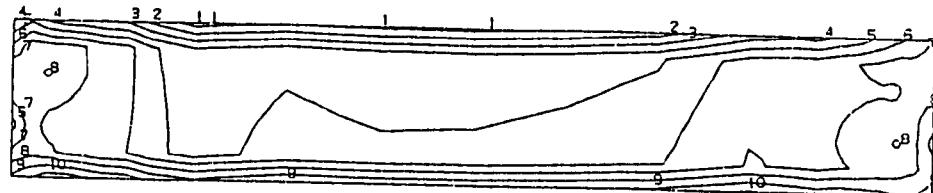
盤ばねの軸荷重に対する応力分布を確認するため、前節3.1で、R/V廻り盤ばね特性試験値と比較したソリッドモデルによるFEM解析結果のうち、盤ばね断面に生じている応力分布を成分ごとに、図3.2.1～図3.2.5に示す。各成分の応力コンター値のオーダーから、盤ばねの軸荷重に対し発生する主たる応力成分は周方向成分であり、この応力がミーゼスの相当応力の主な成分となっていることがわかる。これより以下における軸荷重による盤ばね断面内の発生応力の検討については、周方向応力成分について行うものとする。

次に、図3.2.3に示す周方向応力分布について詳細に検討すると、盤ばねの高さ方向にはほぼ平行に線形分布しており、盤ばねの外周面で圧縮応力、内周面で引張り応力が発生していることがわかる。これから周方向応力の分布においては、曲げ応力が主たる成分であり膜応力については僅かと判断できる。また最大圧縮応力、最大引張り応力の発生位置はそれぞれ外周面上端及び内周面下端の盤ばねコーナー部であり、これらの位置における周方向応力については、設計公式が導出されている。次節以降では、盤ばねコーナー部（全4点）における周方向応力についてFEM解及び設計公式値を比較検討する。

FINAS
STRESS COMPONENT 1

CONTOUR VALUES

1	-2.74000
2	-2.33000
3	-1.92000
4	-1.51000
5	-1.10000
6	-0.69000
7	-0.28000
8	0.13000
9	0.540000
10	0.950000



STEP NO. 20

GEOM. SCALE 1 10.0000

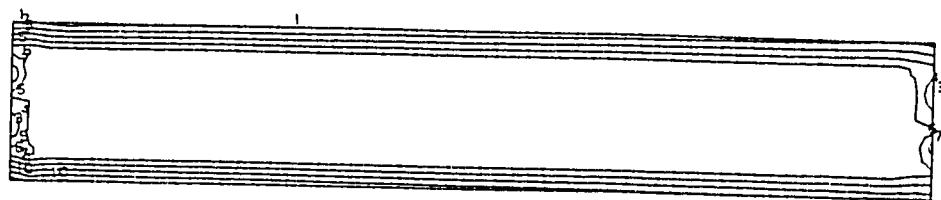
CASE A-4 .SOLID B.MODEL 1-0.BC-1.LARGE DISP

図 3.2.1 板厚方向応力

FINAS
STRESS COMPONENT 2

CONTOUR VALUES

1	-3.05000
2	-2.35000
3	-1.65000
4	-0.95000
5	-0.25000
6	0.450000
7	1.150000
8	1.850000
9	2.550000
10	3.250000



STEP NO. 20

GEOM. SCALE 1 10.0000

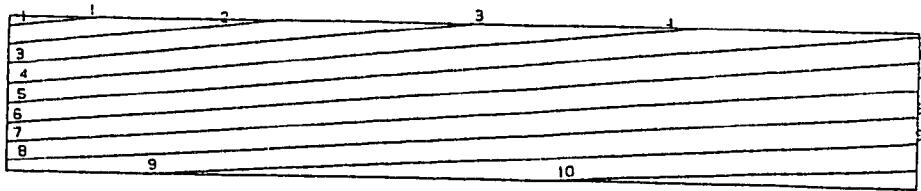
CASE A-4 .SOLID B.MODEL 1-0.BC-1.LARGE DISP

図 3.2.2 子午線方向応力

FINAS
STRESS COMPONENT 3

CONTOUR VALUES

1	-69.0000
2	-55.0000
3	-43.0000
4	-30.0000
5	-17.0000
6	-4.00000
7	9.000001
8	22.00000
9	35.00000
10	48.00000



STEP NO. 20

GEOM. SCALE 10.0000

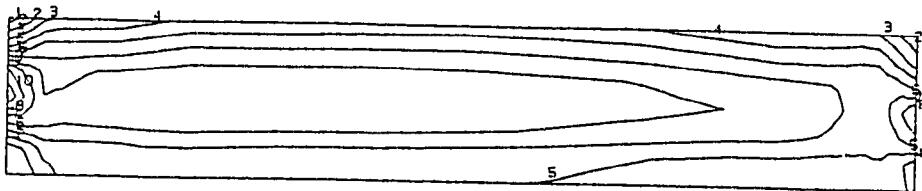
CASE A-4 .SOLID B.MODEL 1-0.BC-1.LARGE DISP

図 3.2.3 周方向応力

FINAS
STRESS COMPONENT 4

CONTOUR VALUES

1	-8.00-02
2	2.000-02
3	0.120000
4	0.220000
5	0.320000
6	0.420000
7	0.520000
8	0.620000
9	0.720000
10	0.820000



STEP NO. 20

GEOM. SCALE 10.0000

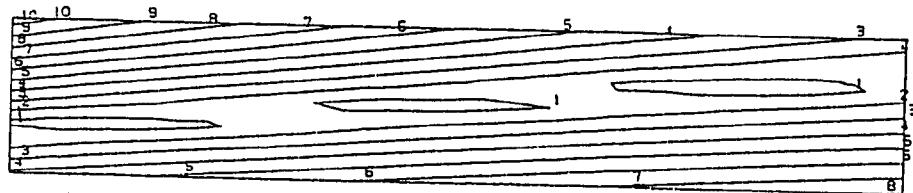
CASE A-4 .SOLID B.MODEL 1-0.BC-1.LARGE DISP

図 3.2.4 せん断応力 (τ_{rz})

FINAS
VON MISES STRESS

CONTOUR VALUES

1	4.80000
2	12.00000
3	19.20000
4	26.40000
5	33.60000
6	40.80001
7	48.00001
8	55.20001
9	62.40001
10	69.60001



STEP NO. 20

CECM. SCALE 1 10.0000

CASE A-4 .SOLID B.MODEL 1-0.BC-1.LARGE DISP

図 3.2.5 ミーゼス相当応力

3.3 ソリッドモデル解とシェルモデル解の比較

免震皿ばねの解析において、皿ばねをシェル要素よりモデル化するに当たっての適用性を検討するため、シェルモデルによるFEM解析結果（以下シェル解）を、ソリッドモデルによるFEM解析結果（以下ソリッド解）と比較検討する。図3.3.1～図3.3.6に自由高さ h の異なる2つの皿ばね Model 1-0 ($h = 9.4\text{ mm}$) 及び Model 1-4 ($h = 25.0\text{ mm}$)についてそれぞれシェル解とソリッド解を比較したグラフを示す。「ばね剛性－たわみ」線図*をみると、自由高さが小さい Model 1-0においては、たわみ始めた初期におけるばね剛性は同じであり、「荷重－たわみ」線図はシェル解、ソリッド解ともにほぼ同じカープを描き、たわみが進むにつれ幾分シェル解の方が同荷重に対するたわみ量が大きくなつてばね剛性が低くなる傾向にはあるが、その差は僅かでありシェル解の皿ばね構造解析への適用性が実証された。一方、自由高さ h の大きい Model 1-4においては、たわみ始める初期のばね剛性が、シェル解がソリッド解に比べ約 5000 kgf/mmほど低く評価されており「荷重－たわみ」関係はたわみの初期から有意な差を生じていることが確認できる。よって、自由高さ h の大きい皿ばねについてのFEM解析においては、シェル要素によるモデル化に問題があると言える。

次に「周方向応力－たわみ」関係の結果についてみてみると、両モデルともシェル解の方が幾分大きめの傾向にはあるが、たわみ量 0.75 h までの段階において、ソリッド解と大きな差は生じておらず、周方向応力についてはシェル要素によるモデル化においてもほぼ妥当な解を得ることができた。

* : 「ばね剛性－たわみ」線図におけるばね剛性は、「荷重－たわみ」線図における接線剛性を意味する。（実際には、隣接する解析ステップ間の”（荷重増分）／（たわみ増分）”としてばね剛性を算出している。）

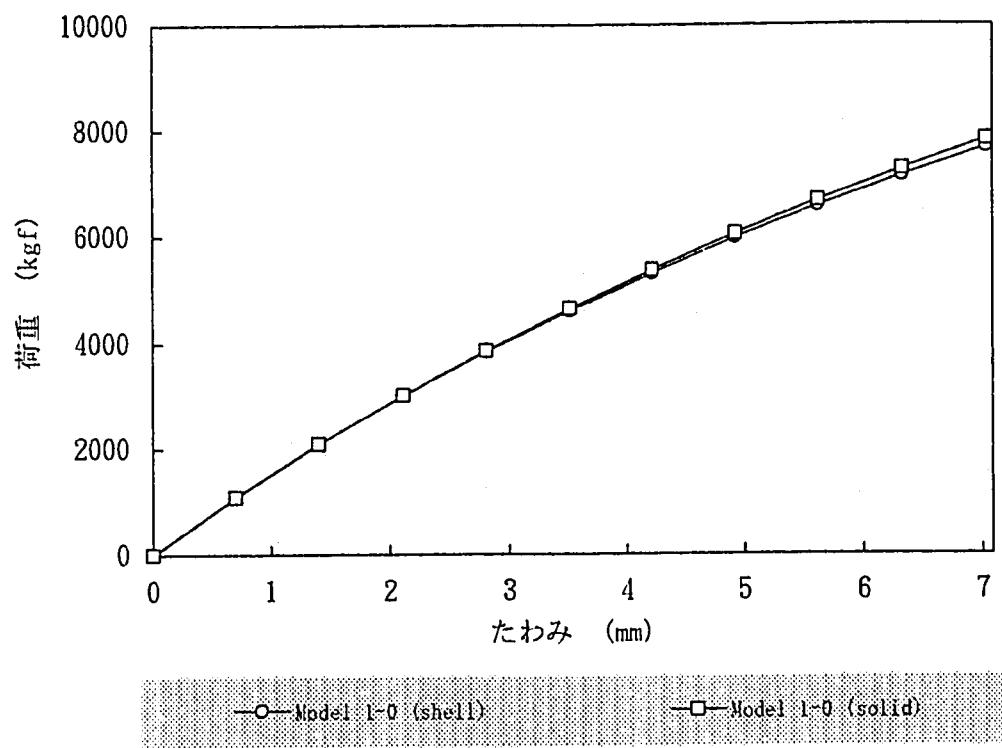


図 3.3.1 Model 1-0：「荷重ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解の比較)

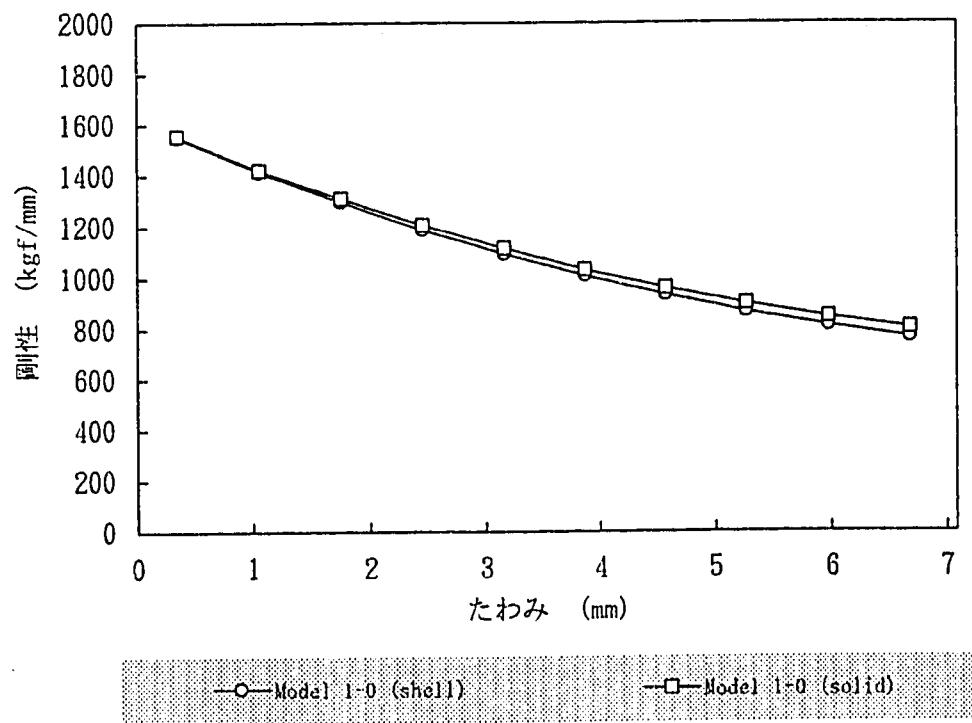


図 3.3.2 Model 1-0：「ばね剛性ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解の比較)

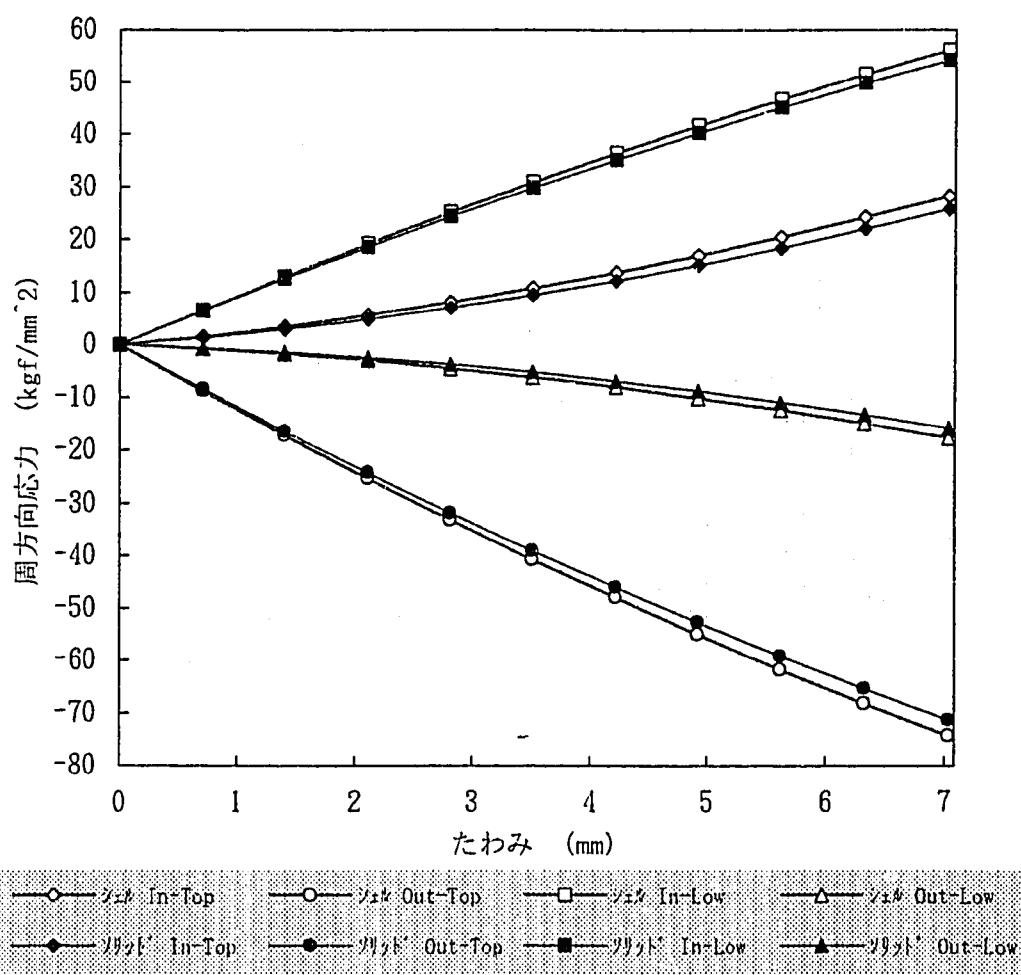


図 3.3.3 Model 1-0：「周方向応力ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解の比較)

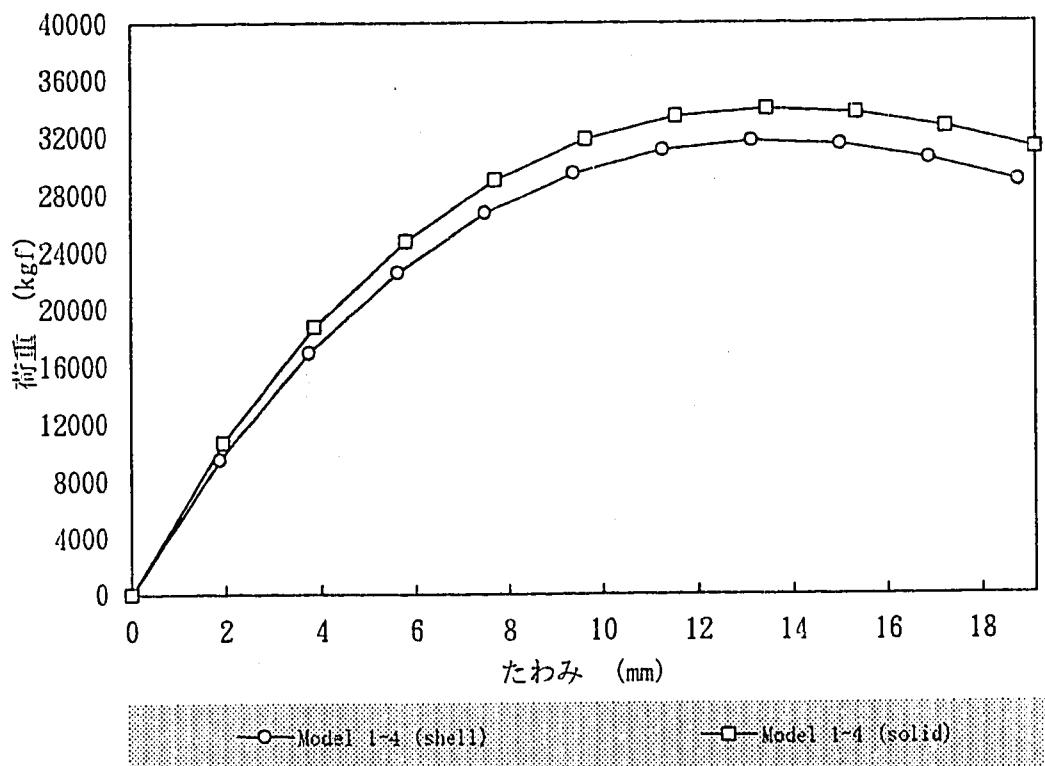


図 3.3.4 Model 1-4 : 「荷重ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解の比較)

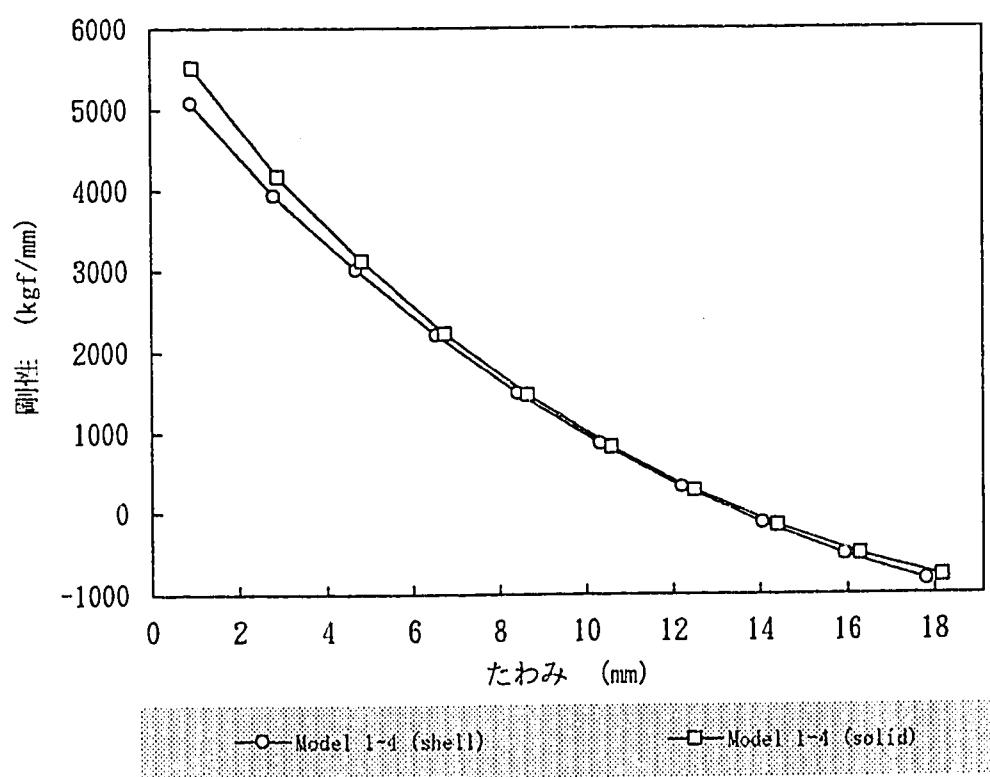


図 3.3.5 Model 1-4 : 「ばね剛性ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解の比較)

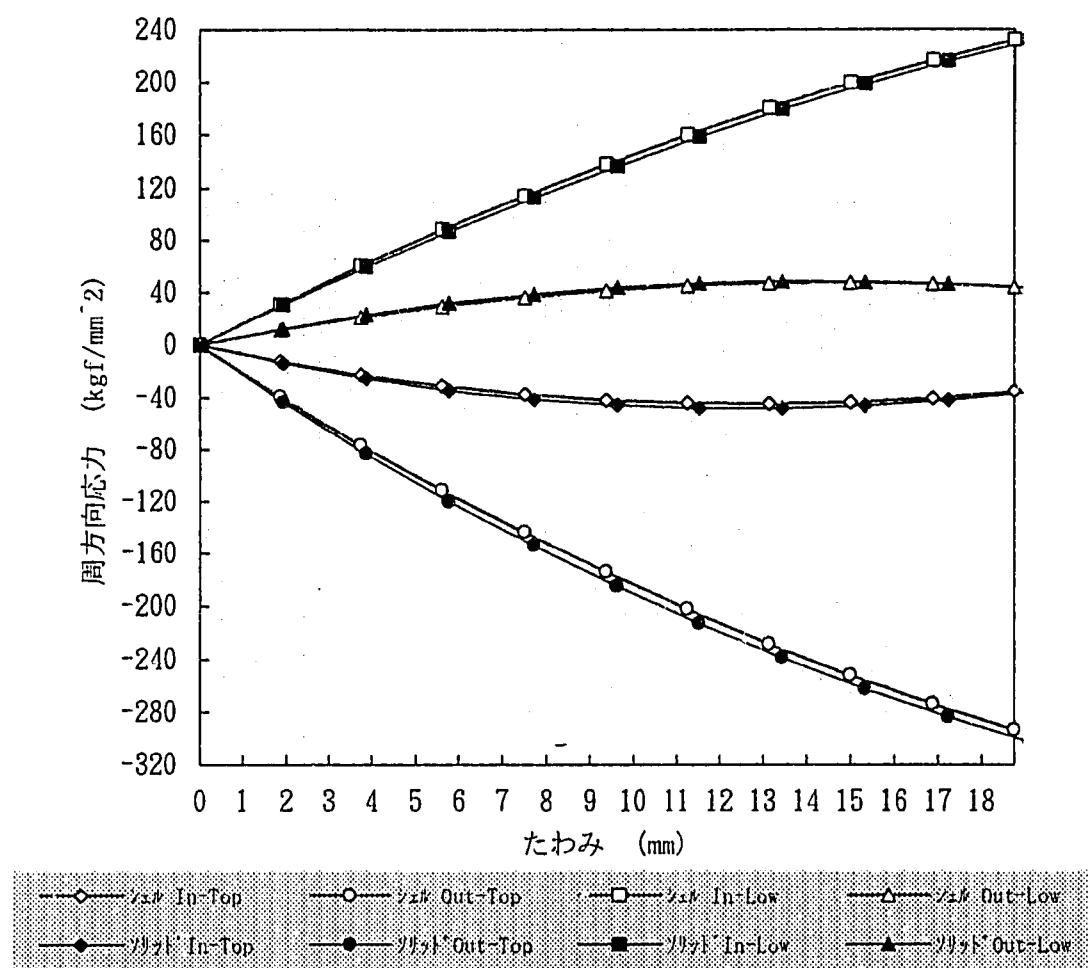


図 3.3.6 Model 1-4：「周方向応力ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解の比較)

3.4 形状パラメータ解析における設計公式とソリッドモデル解の比較

設計公式の免震皿ばねの力学特性に対する記述性を確認するため、リファレンスとするソリッドモデルによる大変形解析を形状(h/t)をパラメータとして実施し、設計公式解との比較検討を行なった。

形状(h/t)をパラメータとする「荷重－たわみ」関係(図3.4.1～図3.4.2)及び「剛性－たわみ」関係(図3.4.3～図3.4.4)の傾向をマクロに眺めると、皿ばね剛性はたわみの初期の段階において h/t の値が大きなモデルほど高く、またどの形状ケースにおいてもたわみの増加に伴って減少していくが、 h/t の値が大きな皿ばねほどばね剛性の変化率が同じたわみ量に対して大きくなっている。皿ばね剛性に関する一般的傾向は、設計公式解とソリッド解はよく一致している。更に、設計公式のから導出される

$h > \sqrt{2}t$: 荷重Pの最大最小に相当する δ が存在し、その間ではばね定数が負。

$h = \sqrt{2}t$: $\delta = h$ の1点で0。 -

$h < \sqrt{2}t$: 常にはばね定数は正。

なる関係⁽⁴⁾は、ソリッド解についても $\delta = 0.75h$ の範囲において適合している。 $(h > \sqrt{2}t$ の条件を満たすModel 1-4においてはたわみが増加するに伴ってばね定数が正から負に転ずる点が存在し、 $h = \sqrt{2}t$ であるModel 1-3ではばね定数が $\delta = 0.75h$ において0に収束しようとする傾向を示し、 $h < \sqrt{2}t$ のModel 1-0からModel 1-2ではばね定数は常に正となっている。)

次に詳細に設計公式解とソリッド解のばね剛性の比較をすると、Model 1-4の荷重を与えた直後を除いて、たわみのどの段階においても設計公式値はソリッド解に比べ剛性が高い傾向を示している。そして同正規化たわみに対する荷重値の差は、 h/t の大きい形状モデルほど大きい傾向にある。

図3.4.5～図3.4.6に最も大きい周方向応力の発生する皿ばね上端外側(Out-Top:圧縮応力)と下端内側(In-Low:引張り応力)における「周方向応力－たわみ」関係を表わすグラフを示す。前記の皿ばねの剛性の傾向を反映して、 h/t が大きくなるほど同正規化たわみに対する応力値は大きくなっている。そして、設計公式値の応力値とソリッド解

の応力値を比べると、どの h/t の形状モデルにおいてもほぼたわみの全段階において、設計公式値はソリッド大変形解に比べ応力が高い傾向にあることがわかる。

上記、設計公式値のソリッド大変形解に対する差分の一因としては、設計公式導出にあたっての仮定：「断面の角変位は小さい（角度 β が微小）」に基づいた $\cos \beta \approx 1$ 等の定式化に当っての近似が考えられる。よって次章に示す考察において、これらの定式化に当っての近似を厳密化し、設計公式の改良を試みることにする。

A : ソリッド解

F : 設計公式解

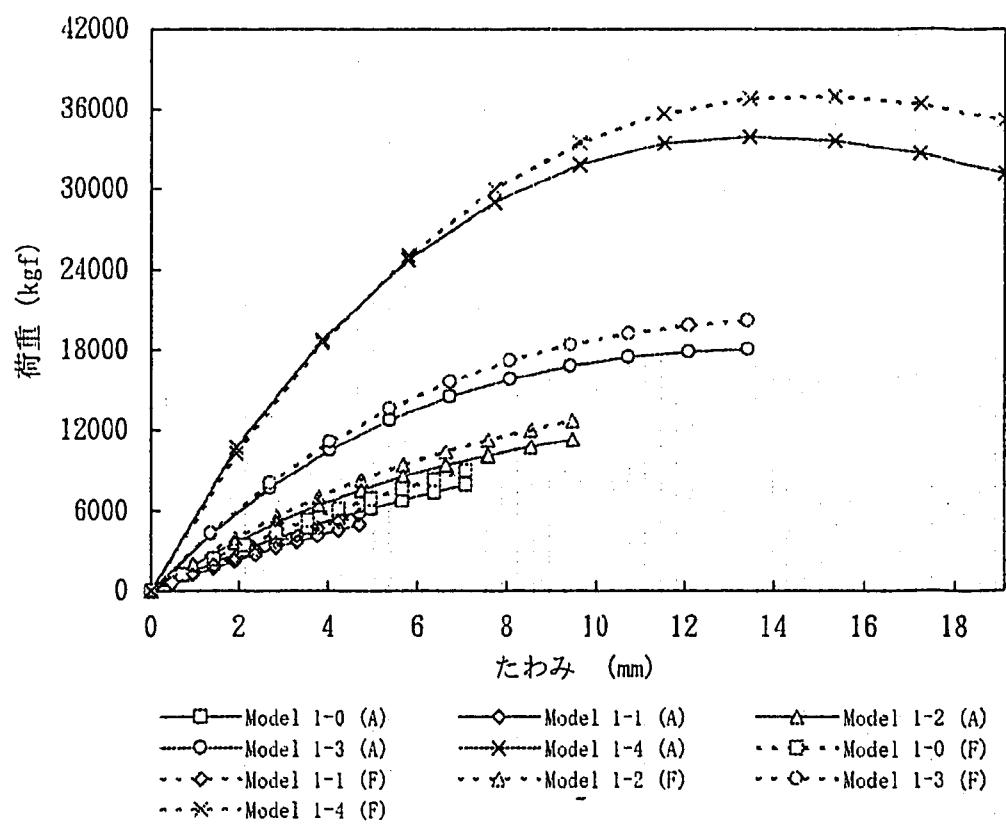


図 3.4.1 形状をパラメータとした「たわみー荷重」関係
ソリッド解と設計公式解の比較

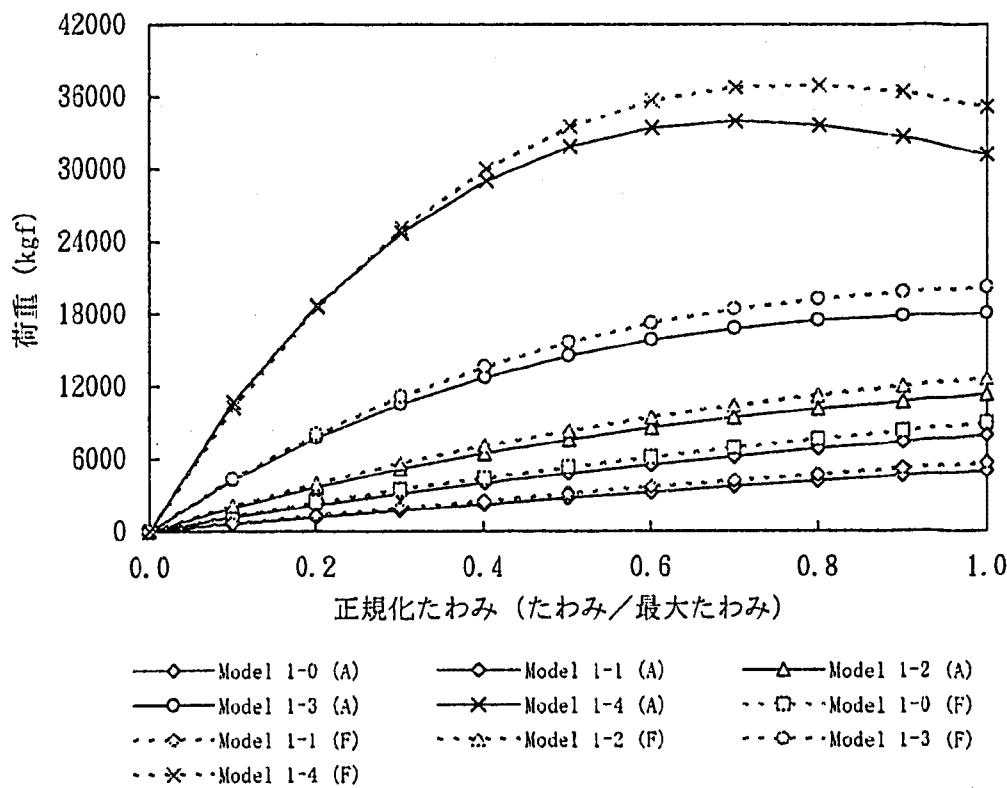


図 3.4.2 形状をパラメータとした「荷重ー正規化たわみ」関係
ソリッド解と設計公式解の比較

A : ソリッド解

F : 設計公式解

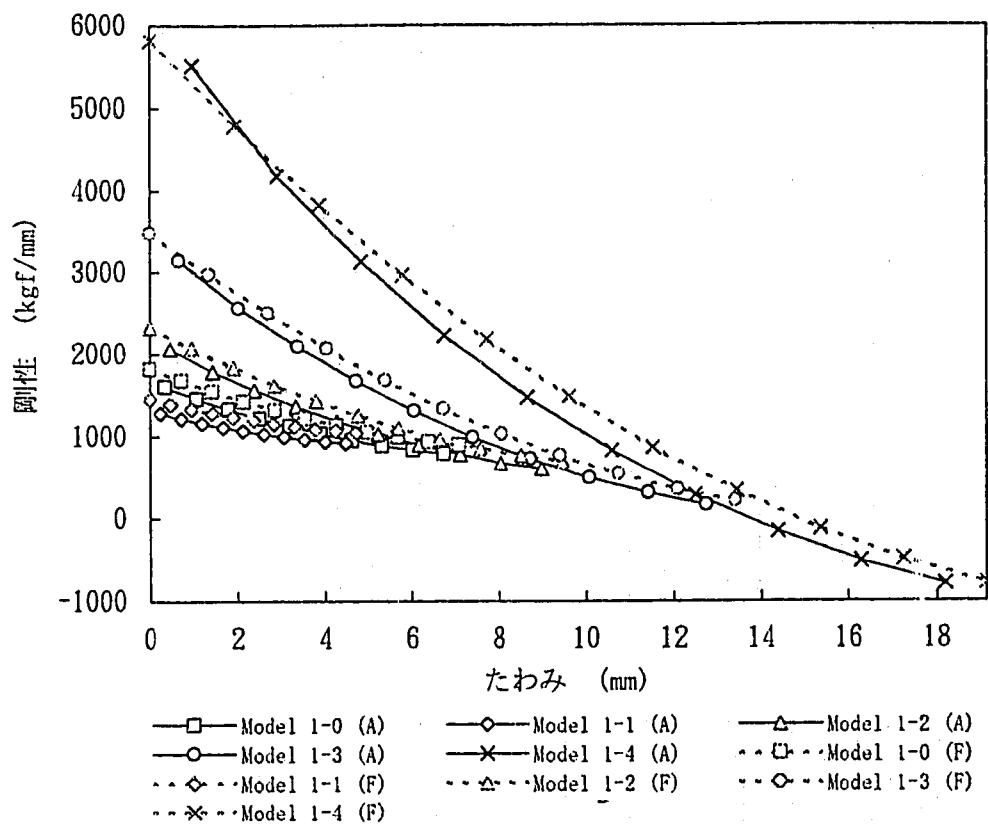


図 3.4.3 形状をパラメータとした「剛性ーたわみ」関係
ソリッド解と設計公式解の比較

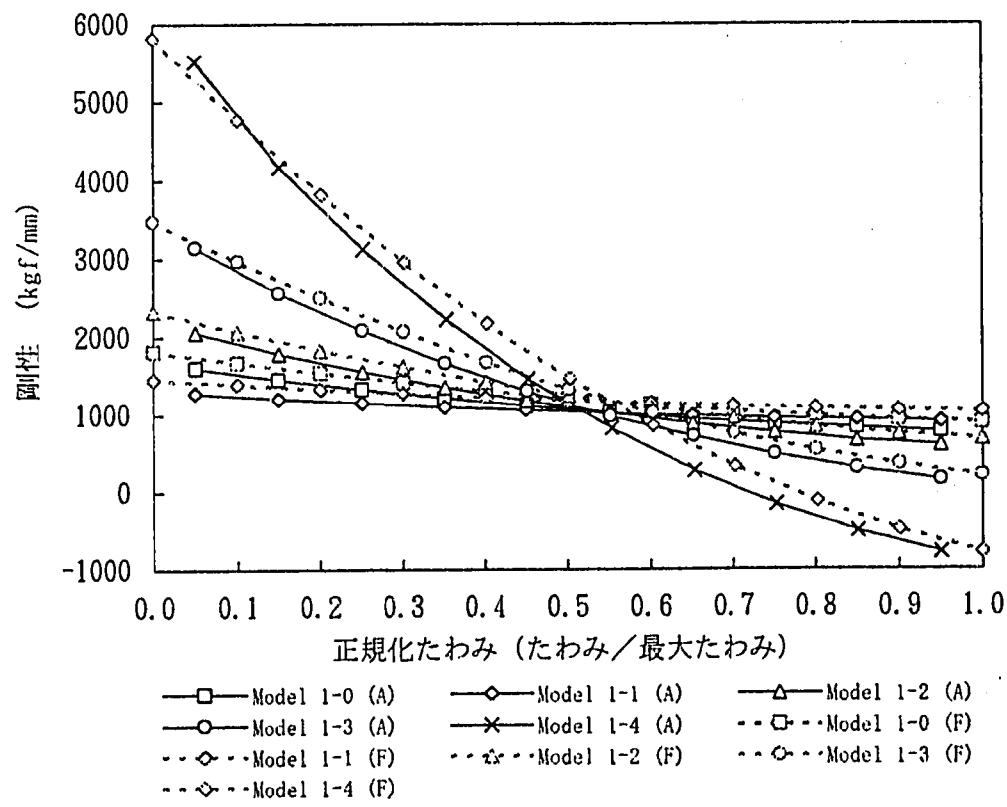


図 3.4.4 形状をパラメータとした「剛性ー正規化たわみ」関係
ソリッド解と設計公式解の比較

A : ソリッド解

F : 設計公式解

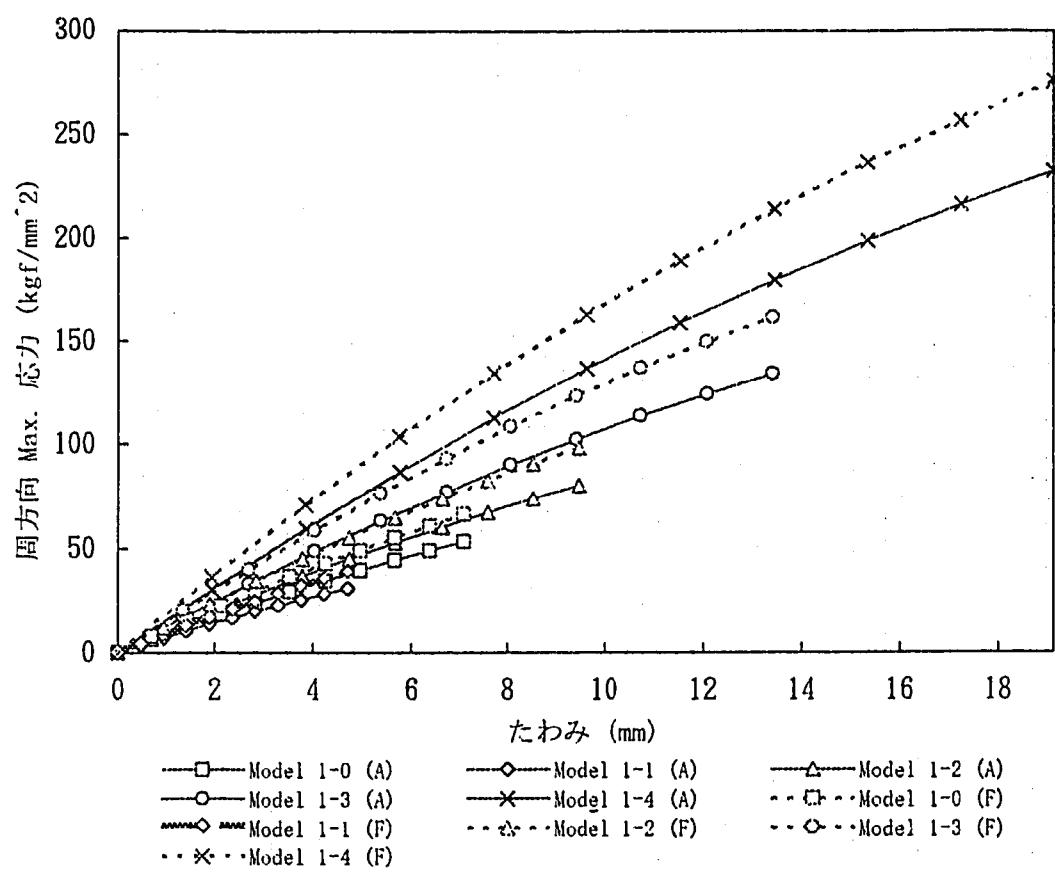


図 3.4.5 形状をパラメータとした「周方向応力ーたわみ」(In-Low)
ソリッド解と設計公式の比較

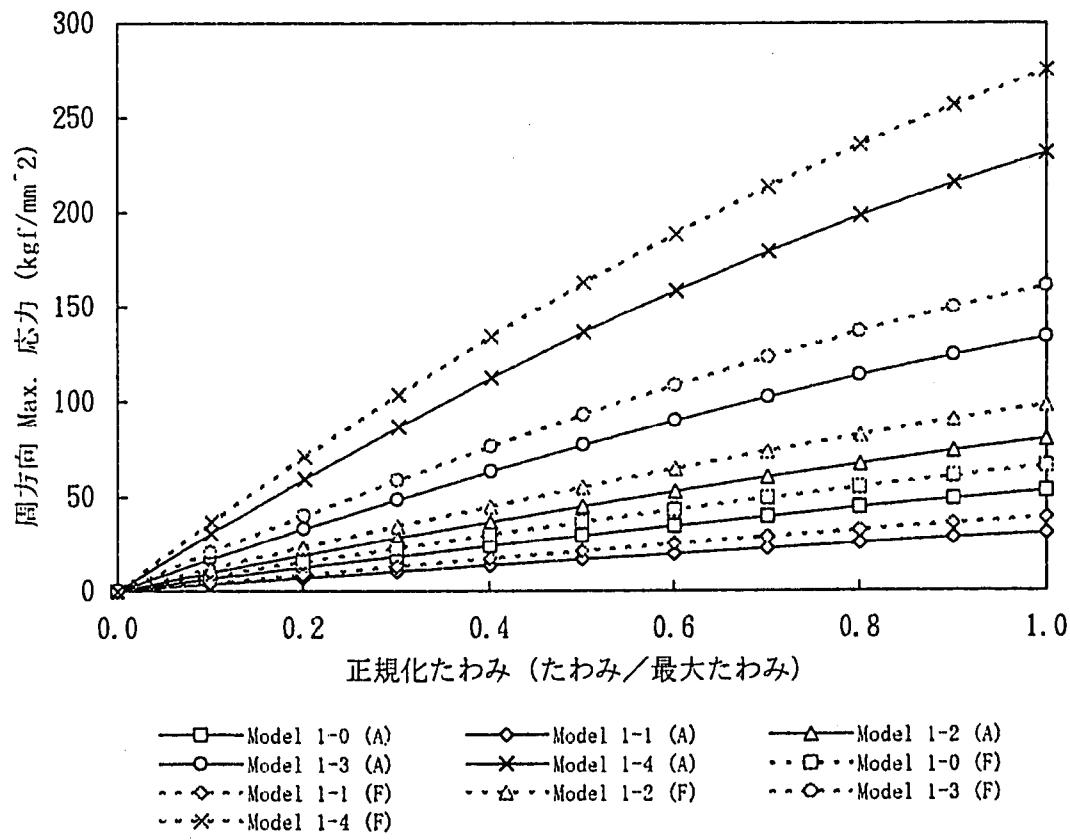


図 3.4.6 形状をパラメータとした「周方向応力ー正規化たわみ」関係(In-Low)
ソリッド解と設計公式解の比較

A : ソリッド解

F : 設計公式解

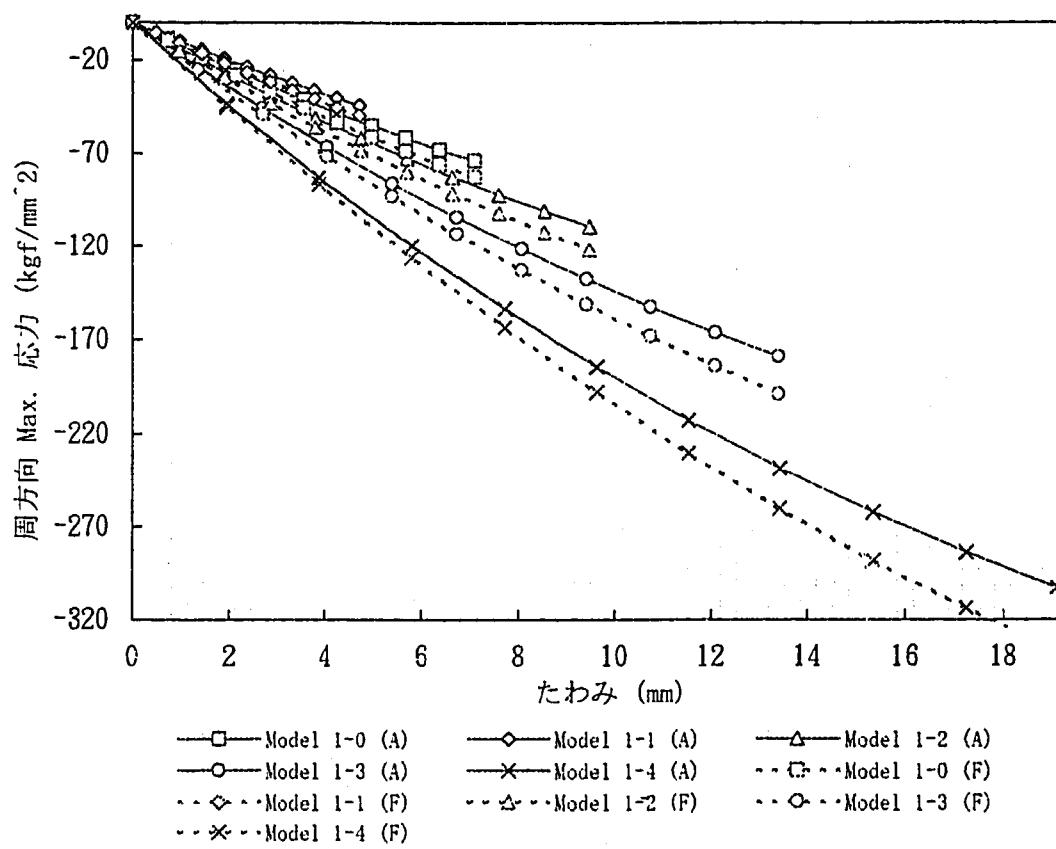


図 3.4.7 形状をパラメータとした「周方向応力ーたわみ」(Out-Top)
ソリッド解と設計公式解の比較

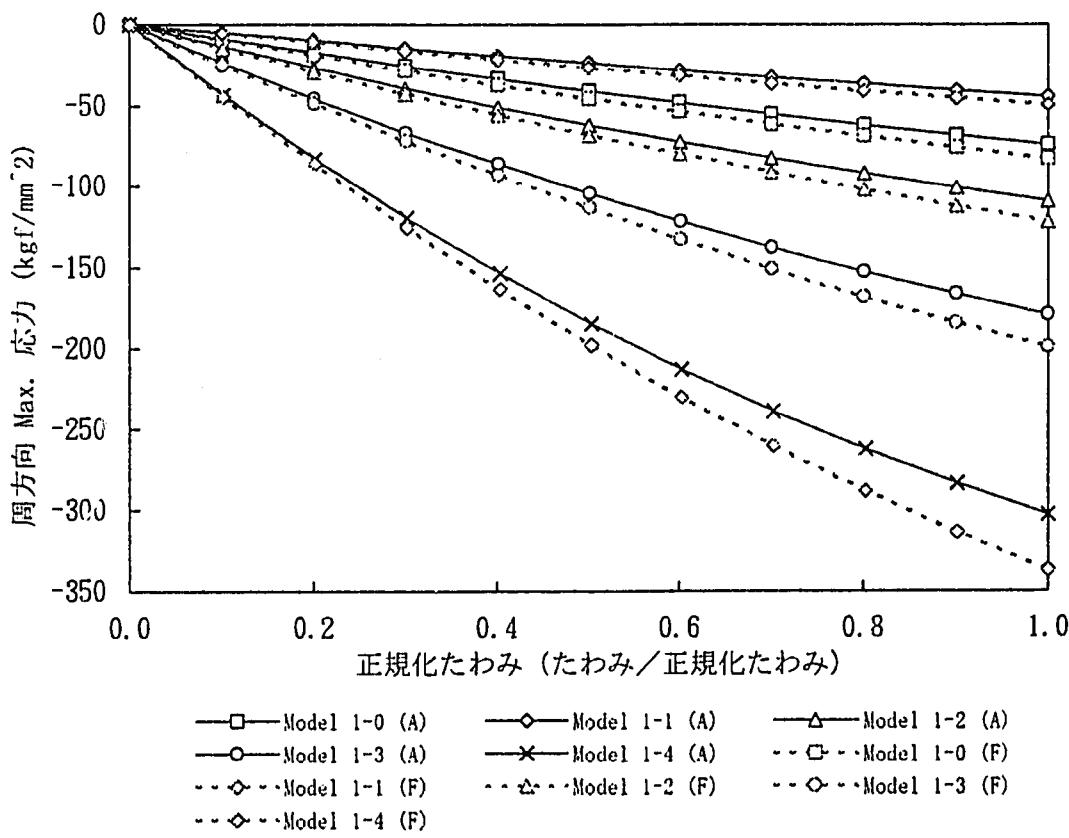


図 3.4.8 形状をパラメータとした「周方向応力ー正規化たわみ」(Out-Low)
ソリッド解と設計公式解の比較

3.5 境界条件の違いによる比較

R/V廻りリファレンスモデルである Model 1-0 ($h/t=0.75$) について、図3.5.1に示す5種類の境界条件を設定し、最終荷重 $0.75h$ までの変位制御による荷重条件下でシェルモデルによる大変形解析*をパラメトリックに実施した結果を表3.5.1、及び図3.5.2～図3.5.18に示す。境界条件によるパラメータ解析結果全体を定性的にみると（図3.5.2及び図3.5.3 参照）、基本的には拘束自由度を増やす程、同一のたわみ状態における荷重量は大きくなり、内部に発生する最大周方向応力の値も大きくなっている。また、境界条件により皿ばね剛性の非線形性の度合、及び断面内の応力分布の様相も異なってくる。以下に $0.75h$ (h : 自由高さ) のたわみの範囲、及び皿ばね特性試験で採用した皿ばね材料 SUP 10 (降伏応力 : 約 149.0 kgf/mm^2) を考慮しつつ、各境界条件の結果について個別に検討を行う。

* : Model 1-0におけるシェル解の適用性については、3.3節のソリッドモデル解とシェルモデル解の比較において適用可能と確認されている。

(a) ケース1（皿ばね座面の z 方向自由度のみ拘束）：図3.5.4～図3.5.6

この境界条件は、皿ばねをそのまま床に置き、軸荷重を加えた場合であり、設計公式もこの境界条件を踏まえて導出されたものである。たわみ量 $0.75h$ の状態における最終荷重値は 7.68 t 、その時の周方向応力は、皿ばね外周の上端で最大圧縮荷重 74.3 kgf/mm^2 、皿ばね内周の下端で最大引張り応力 56.06 kgf/mm^2 となっている。このうち最大周方向応力については降伏応力の約半分以下であり、このたわみ範囲においては弾性範囲内と言える。ばね剛性については初期の約 1600 kgf/mm からたわみの進行とともにゆるやかに減少し、最終荷重値で約 800 kgf/mm となっている。

(b) ケース2（皿ばね座面の r 方向及び z 方向の自由度を拘束）：図3.5.7～図3.5.9

たわみ量 $0.75h$ の状態における最終荷重値は 9.94 t でケース1の約 1.3倍の値を示し、その時の最大周方向応力の発生位置はケース1と同じであり、その値は最大圧縮応力 100.4 kgf/mm^2 、最大引張り応力 35.18 kgf/mm^2 となっている。これは降伏応力の約

67% 以下で弾性範囲内であり、ケース 1 と比べると約 1.37 倍となっている。ばね剛性はたわみ初期の約 3300 kgf/mm からたわみが進につれ、ケース 1 に比べ急激に減少し、 0.75h の最終たわみ状態においてに至っては、ばね剛性はほぼ 0 となる。

(c) ケース 3 (皿ばね座面の r 、 z 、 β (回転) の全自由度を拘束) : 図3.5.10～図3.5.

11

たわみ量 0.75h の状態における最終荷重値は 362 t で前記ケース 1 及びケース 2 に比べると 2 オーダー高い載荷能力を示す。しかしその際の周方向応力値は最大圧縮応力が 151.2 kgf/mm^2 、最大引張り応力が 151.7 kgf/mm^2 で、降伏応力を僅かに上回り、塑性領域を生じる結果となっている。また前 2 ケースとはことなり、外周上端及び内周下端に圧縮応力、内周上端及び外周下端に引張り応力が生じ、最大圧縮応力、最大引張り応力ともに皿ばねの下端 (座面) 側で生じている。ばね剛性に関してはたわみの初期に 54000 kgf/mm であり、その後のたわみの進行に伴う剛性の減少率は小さく、たわみ量 0.75h の時点においては、約 49500 kgf/mm となっており、「たわみ－荷重」関係のグラフをみると、線形に近い関係となっている。

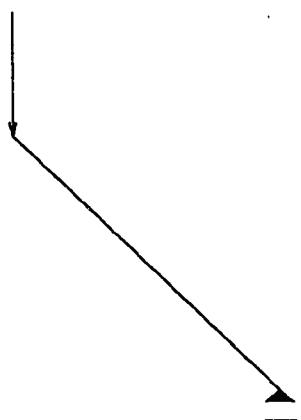
(d) ケース 4 (皿ばね座面の r 、 z 、 β (回転) の全自由度及び皿ばね上面の r 方向自由度を拘束) : 図3.5.13～図3.5.15

たわみ量 0.75h の状態における最終荷重値は 1440 t でケース 3 よりも同じオーダーの範囲で僅かに高い値を示す。周方向応力に関してコーナー部に発生する圧縮応力及び引張り応力の位置関係はケース 3 と同じである、そのうち最大圧縮応力は 161.8 kgf/mm^2 最大引張り応力は 78.97 kgf/mm^2 となっており、ケース 3 より最大圧縮応力が僅かに大きくなり (最大引張り応力に関しては逆にケース 3 の約半分となっている)、塑性領域を生じることが判断できる。ばね剛性に関しては、たわみの初期で約 150000 kgf/mm でたわみの進行とともに大きく減少し、 0.75h の最終たわみ状態においては僅かに負となり、 0.75h のたわみの直前において、解析上荷重が減少するとたわみが進行する状態が生じていることがわかる。

(e) ケース 5 (皿ばね座面の r 、 z 、 β の全自由度及び皿ばね上面の r 及び β 方向自由度を拘束=皿ばね上面の z 方向のみフリー) : 図3.5.16~図3.5.18

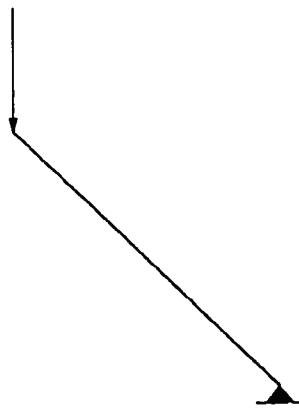
たわみ量 $0.75h$ の状態における最終荷重値は $390 t$ でケース 1 及びケース 2 より 3 オーダー、ケース 3 及びケース 4 より、1 オーダー高い値を示す。周方向応力に関してコーナー部に発生する圧縮応力及び引張り応力の位置関係はケース 3 及びケース 4 と同じであるが、最大値を示す位置がケース 3 及びケース 4 が皿ばね座面であったのに対し本ケースは皿ばね上面側となっているところが異なる。またその値は、最大圧縮応力が 396.5 kgf/mm^2 、最大引張り応力が 292.8 kgf/mm^2 で降伏応力の 3 倍強となっている。ばね剛性に関してはたわみの初期で約 300000 kgf/mm であり、 $0.75h$ の最終たわみ時ににおいては約 15000 kgf/mm で初期の約半分となっている。

>ケース 1



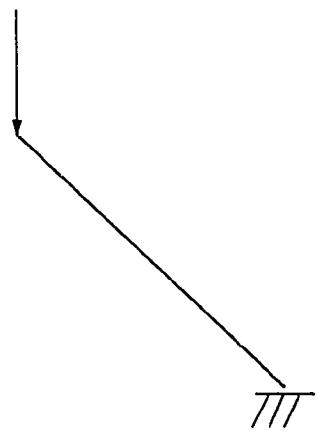
境界条件図 (BC-1)

>ケース 2



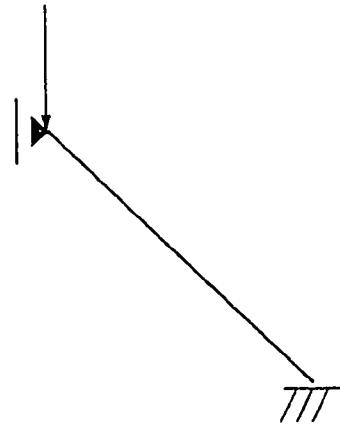
境界条件図 (BC-2)

>ケース 3



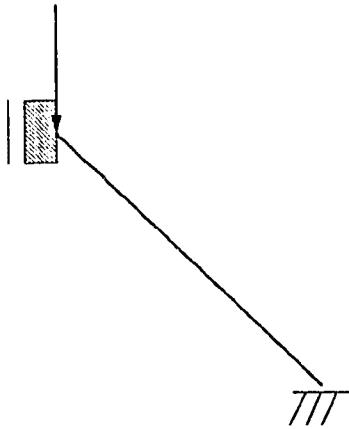
境界条件図 (BC-3)

>ケース 4



境界条件図 (BC-4)

>ケース 5



境界条件図 (BC-5)

図 3.5.1 境界条件パラメータ解析結果の概念図

表3.5.1 境界条件パラメータ解析結果のまとめ

CASE No.	最終荷重 (kgf)	位置	境界条件			周方向応力 (kgf/mm ²)	
			r	z	β	内側(In)	外側(Out)
1	7.68E+03	上端 (Top)	○	○	○	28.420 引張	-74.300 圧縮 (max)
		下端 (Low)	○	×	○	56.060 引張 (max)	-17.740 圧縮
2	9.94E+03	上端 (Top)	○	○	○	2.537 引張	-100.400 圧縮 (max)
		下端 (Low)	×	×	○	35.180 引張 (max)	-38.510 圧縮
3	3.62E+05	上端 (Top)	○	○	○	33.870 引張	-119.700 圧縮
		下端 (Low)	×	×	×	-154.700 圧縮 (max)	151.200 引張 (max)
4	3.90E+05	上端 (Top)	×	○	○	29.880 引張	-130.700 圧縮
		下端 (Low)	×	×	×	-161.800 圧縮 (max)	78.970 引張 (max)
5	1.44E+06	上端 (Top)	×	○	×	292.800 引張 (max)	-396.500 圧縮 (max)
		下端 (Low)	×	×	×	-330.300 圧縮	243.800 引張

(注) 境界条件における記号 (○ : FREE 、 × : FIX)

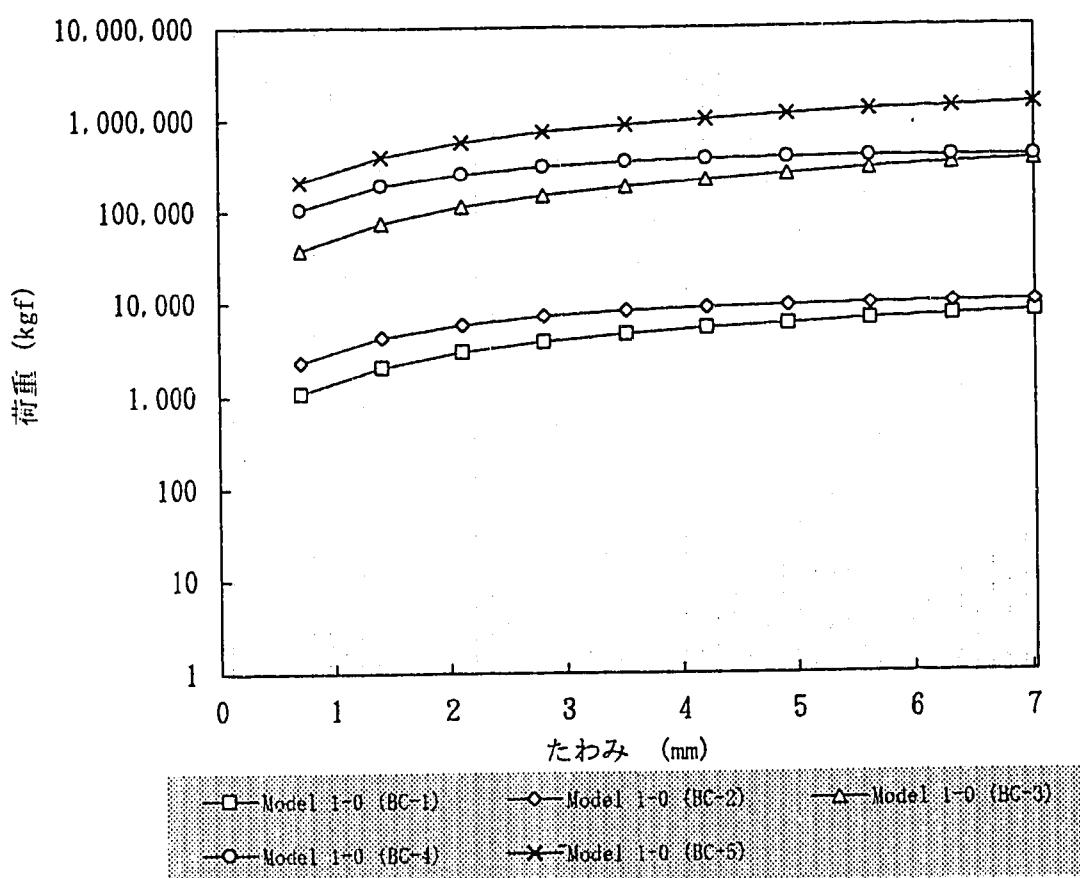


図 3.5.2 境界条件をパラメータとした「たわみー荷重」関係

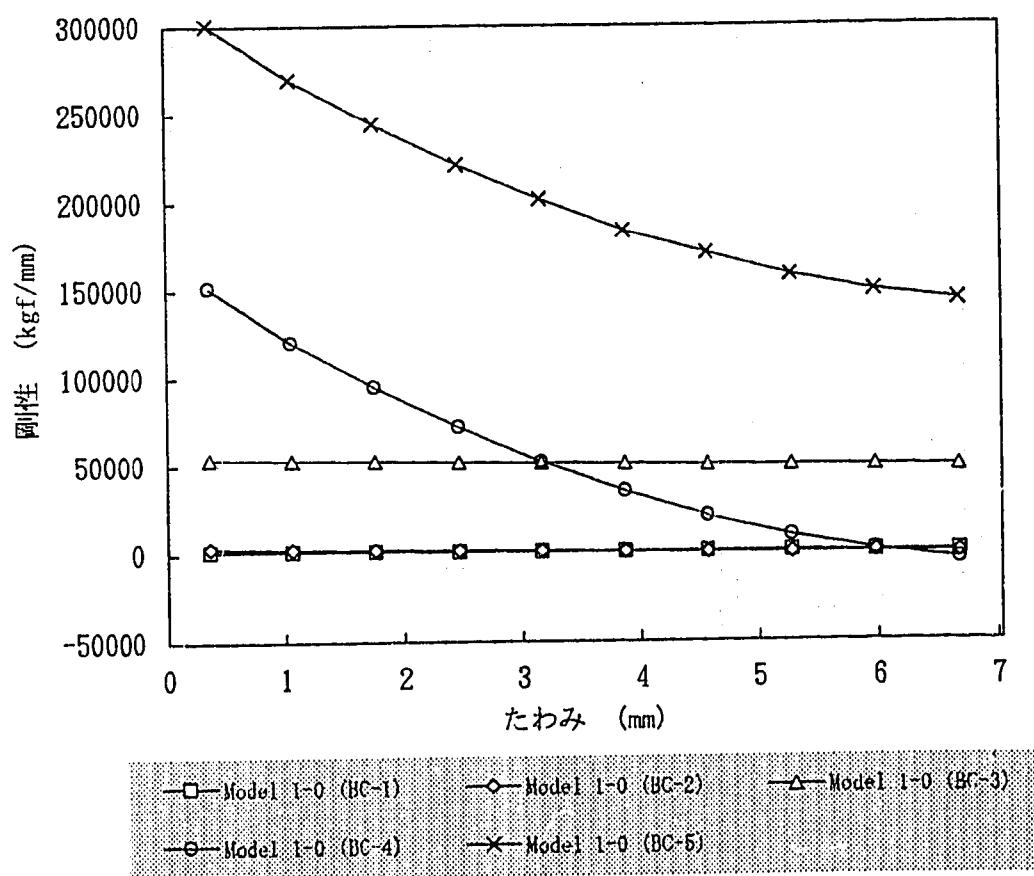


図 3.5.3 形状をパラメータとした「たわみーばね剛性」関係

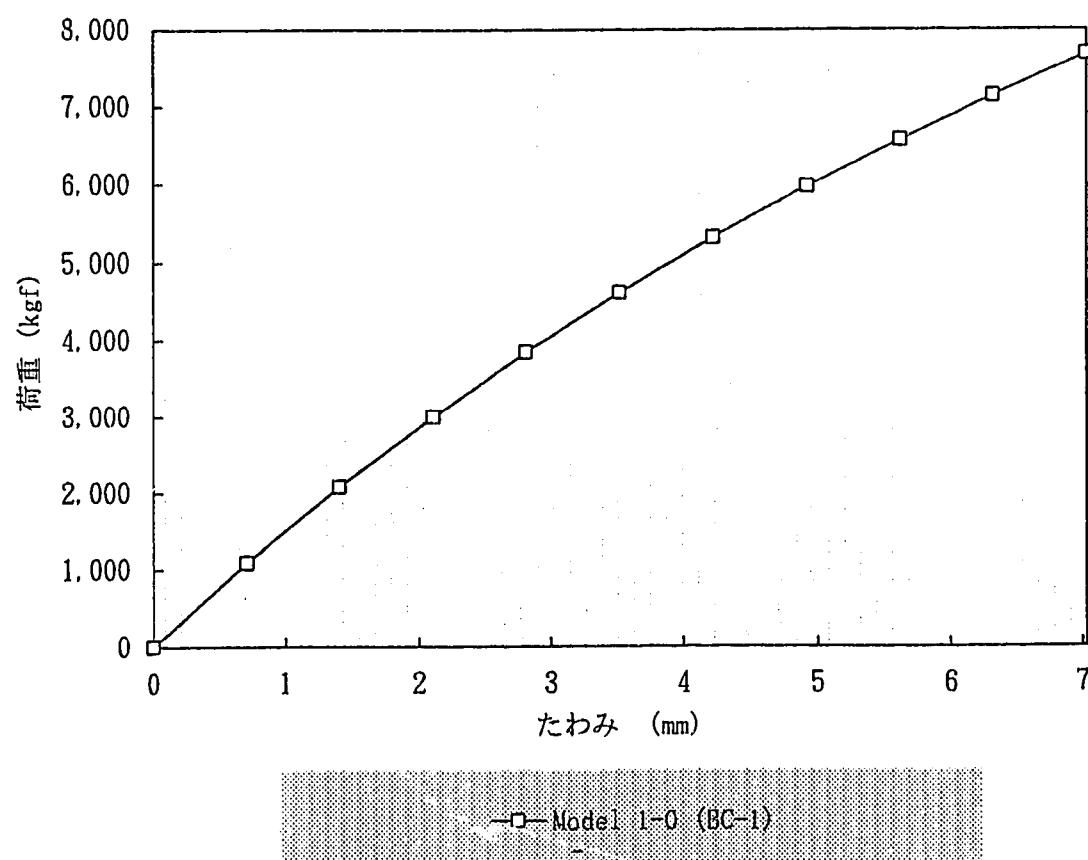


図 3.5.4 ケース 1：境界条件 BC-1：「たわみー荷重」関係

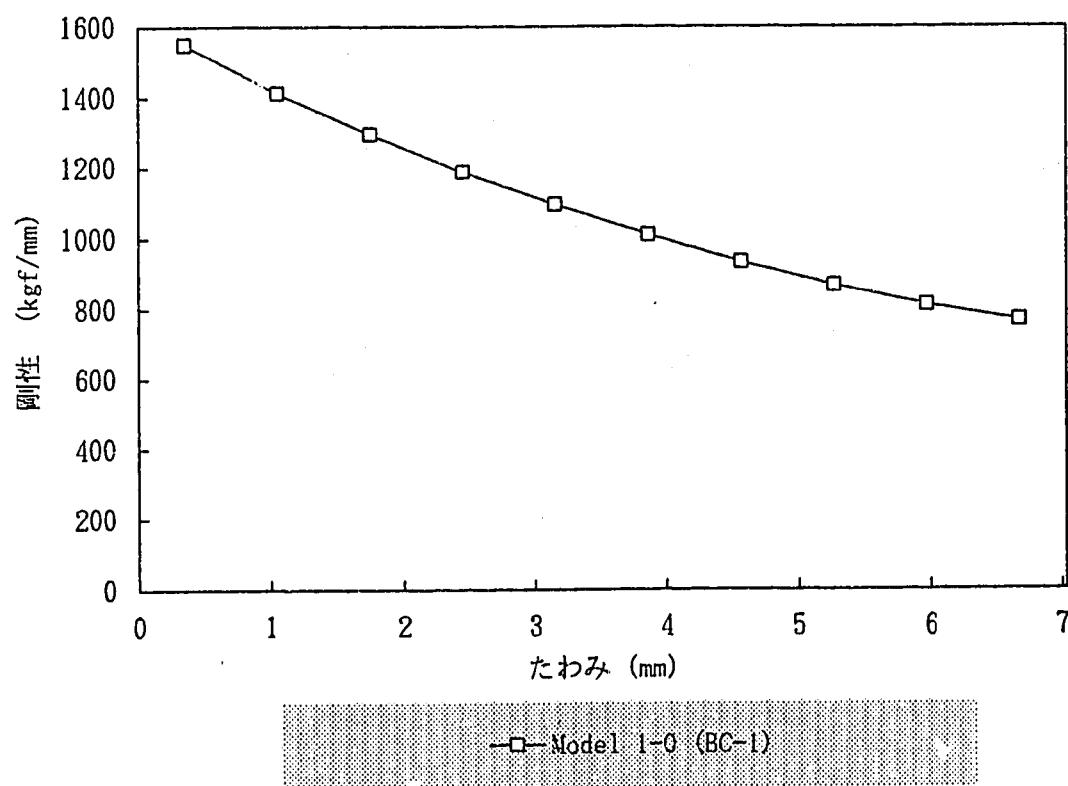


図 3.5.5 ケース 1：境界条件 BC-1：「たわみーばね剛性」関係

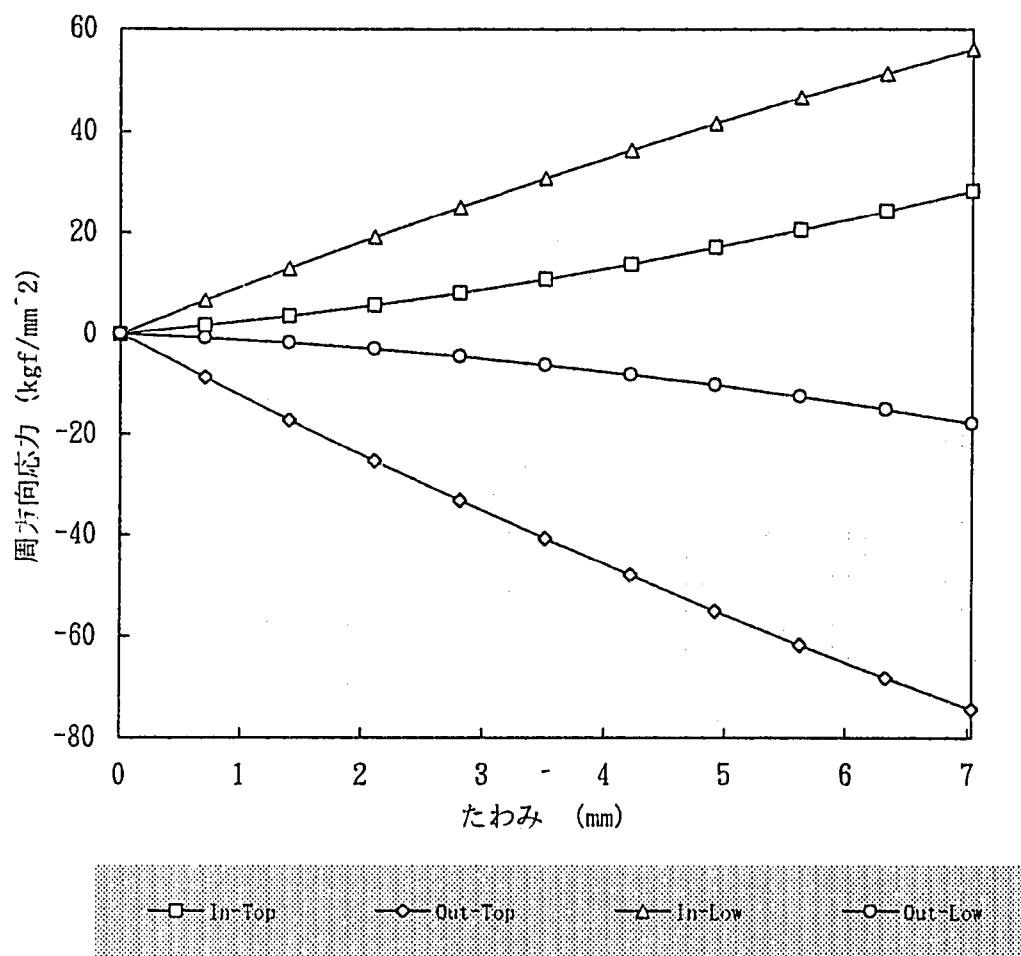


図 3.5.6 ケース 1：境界条件 BC-1：「たわみ－周方向応力」関係

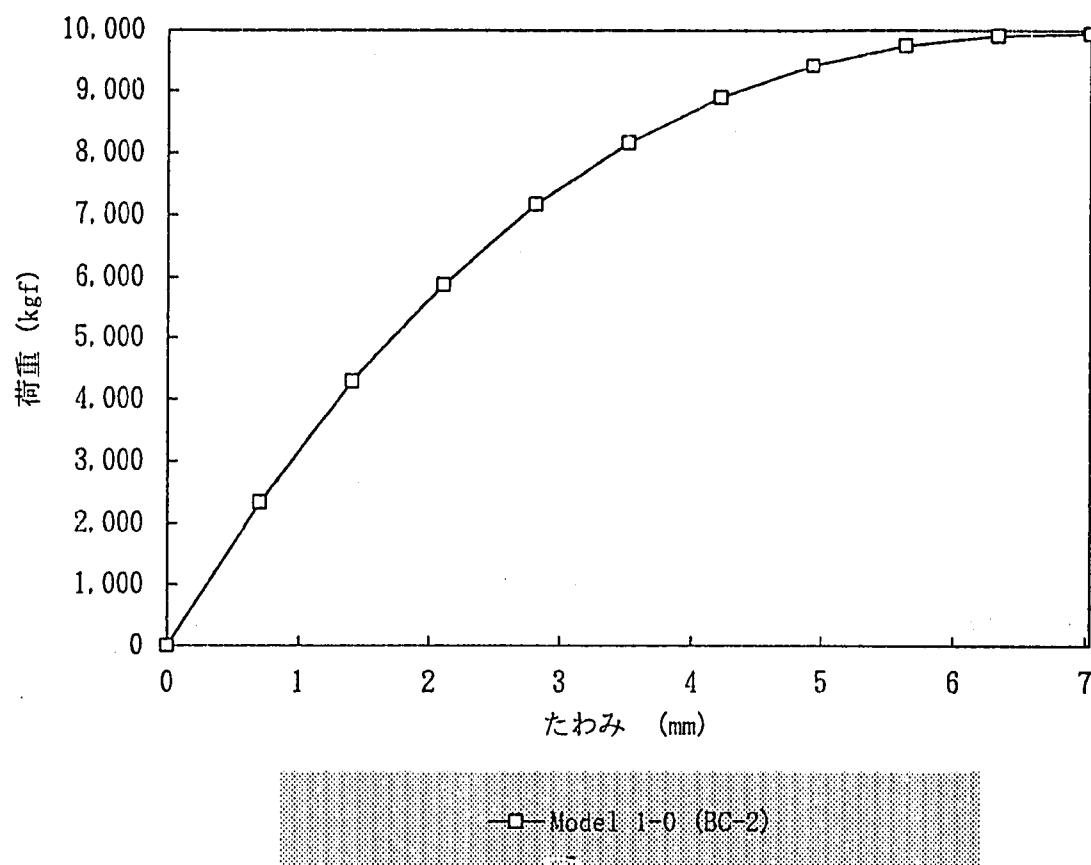


図 3.5.7 ケース 2 : 境界条件 BC-2 : 「たわみー荷重」関係

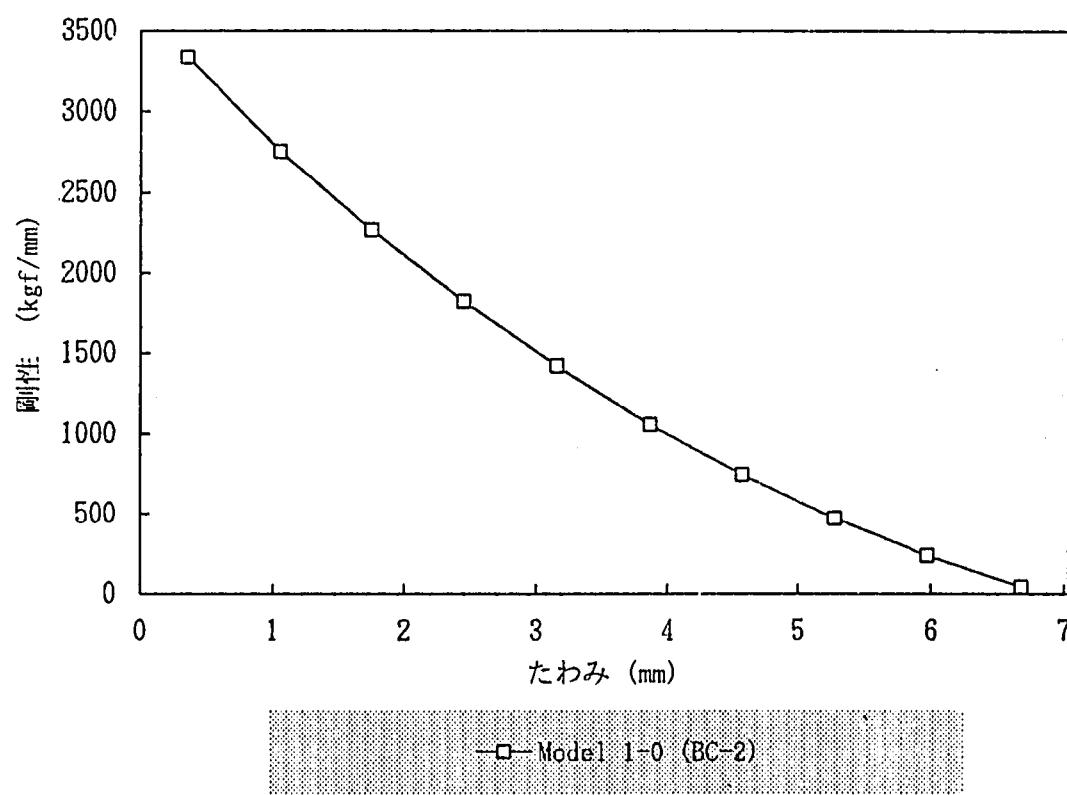


図 3.5.8 ケース 2 : 境界条件 BC-2 : 「たわみーばね剛性」関係

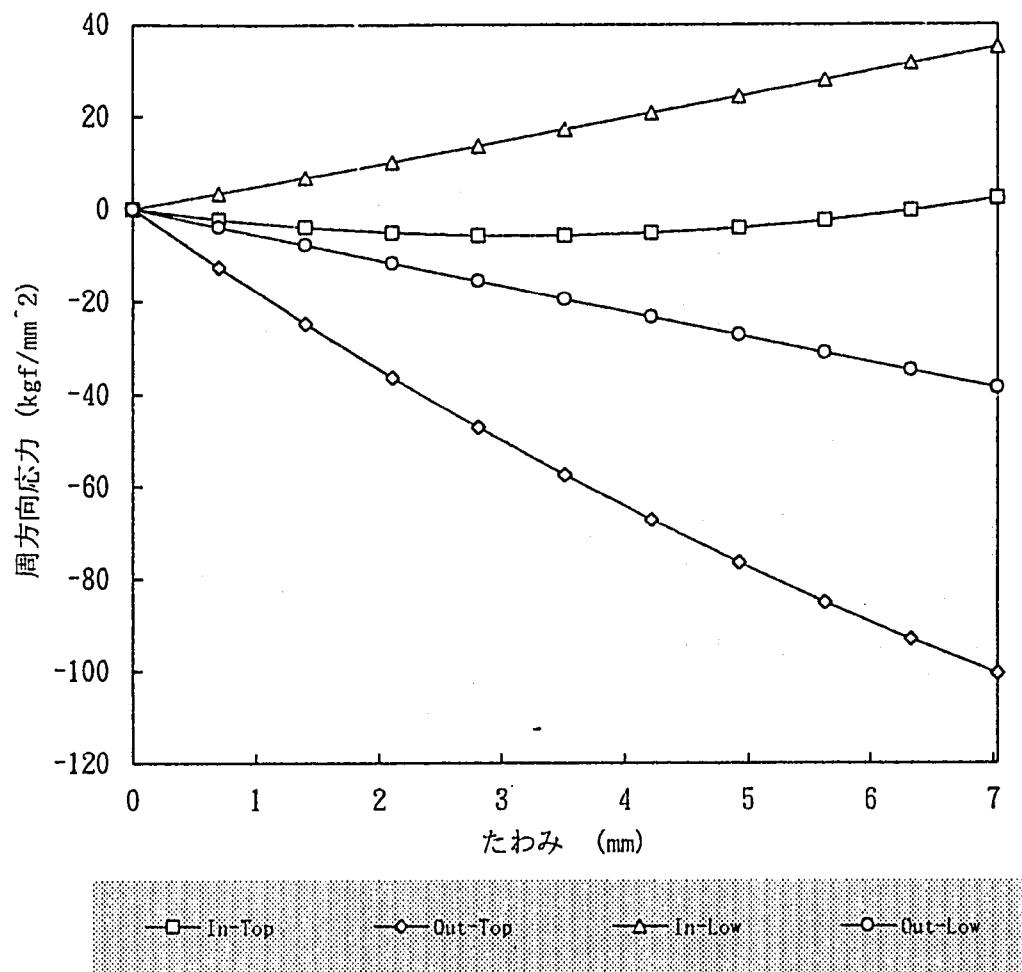


図 3.5.9 ケース 2 : 境界条件 BC-2 : 「たわみー周方向応力」関係

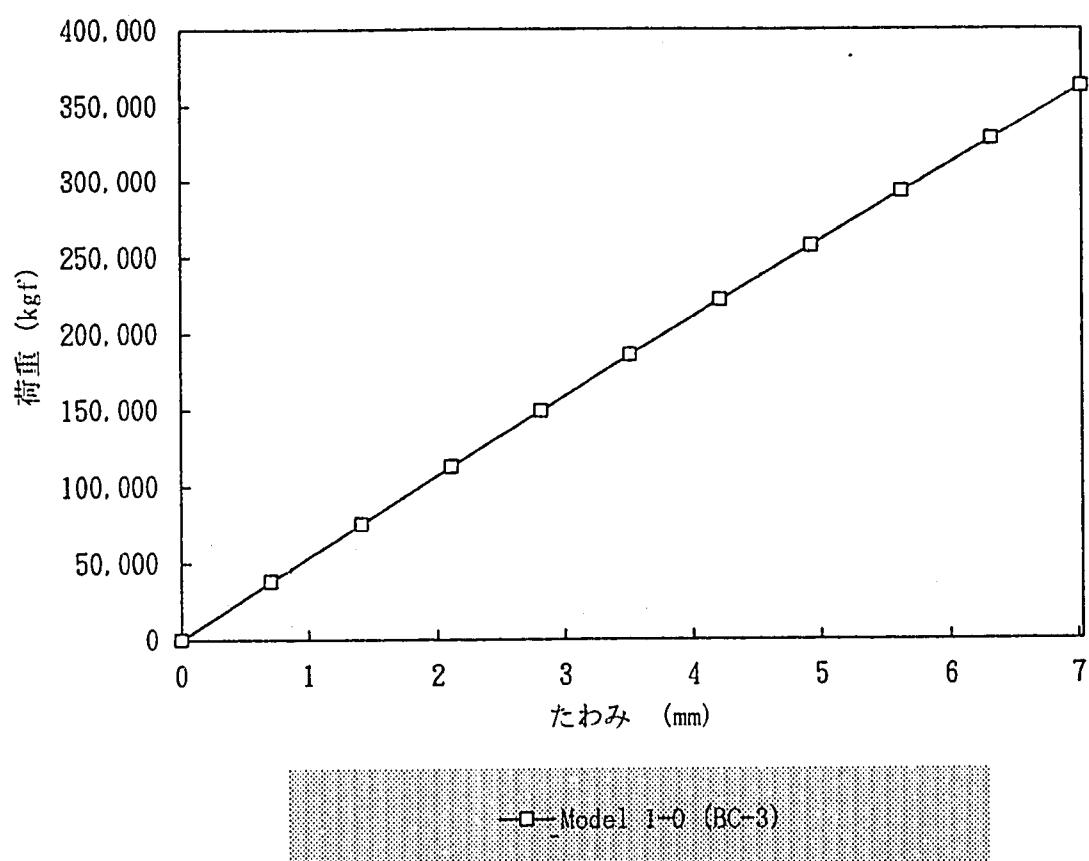


図 3.5.10 ケース 3 : 境界条件 BC-3 : 「たわみー荷重」関係

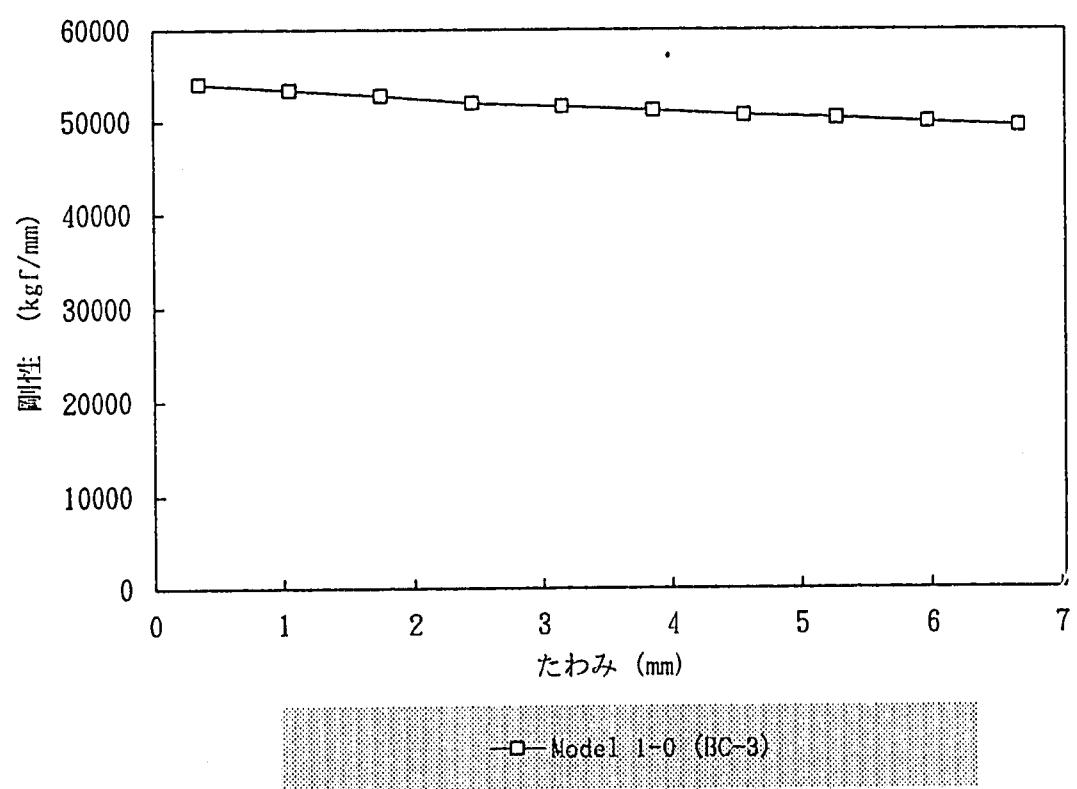


図 3.5.11 ケース 3 : 境界条件 BC-3 : 「たわみーばね剛性」関係

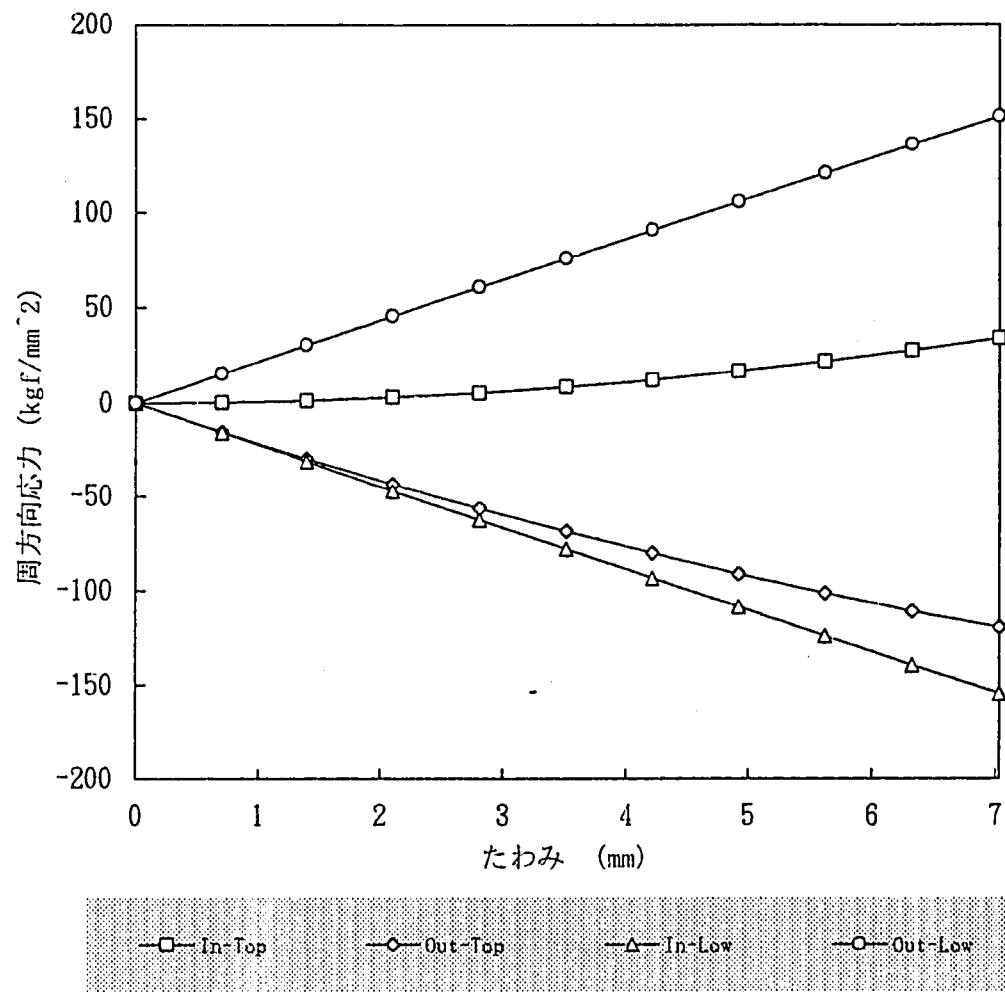


図 3.5.12 ケース 3 : 境界条件 BC-3 : 「たわみ－周方向応力」関係

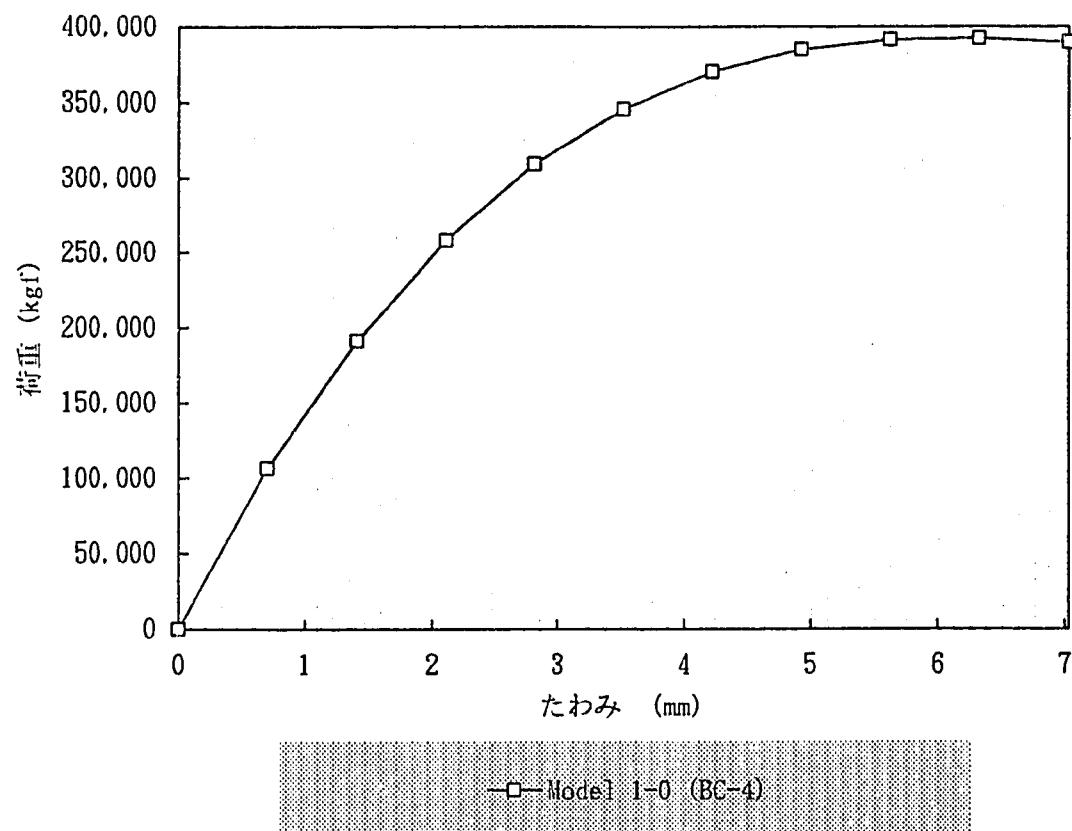


図 3.5.13 ケース4：境界条件 BC-4：「たわみー荷重」関係

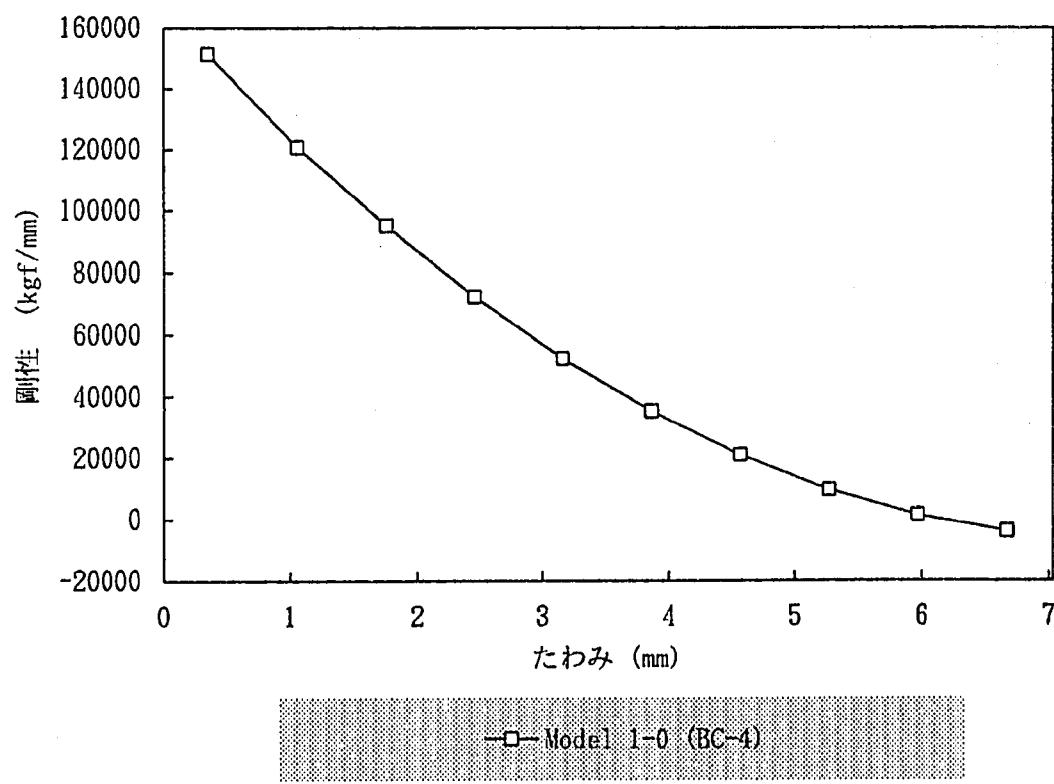


図 3.5.14 ケース4：境界条件BC-4：「たわみーばね剛性」関係

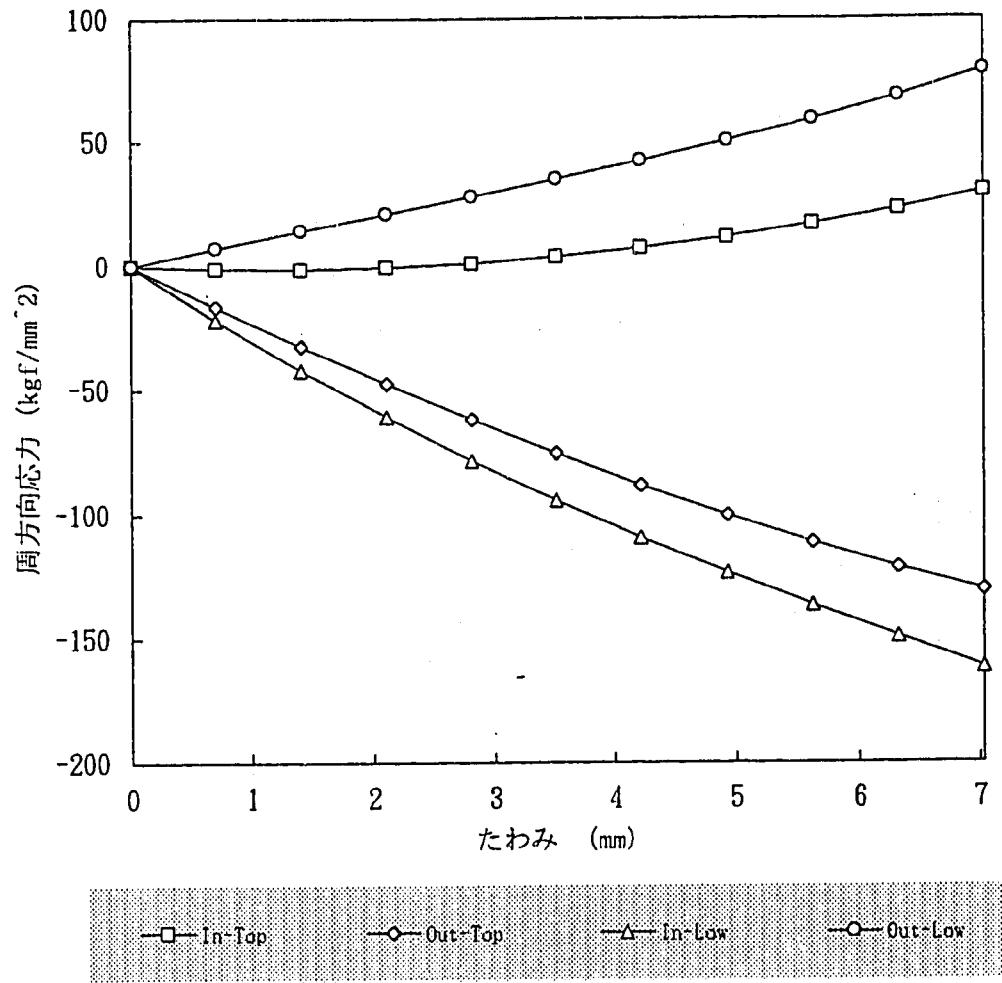


図 3.5.15 ケース 4 : 境界条件 BC-4 : 「たわみ-周方向応力」関係

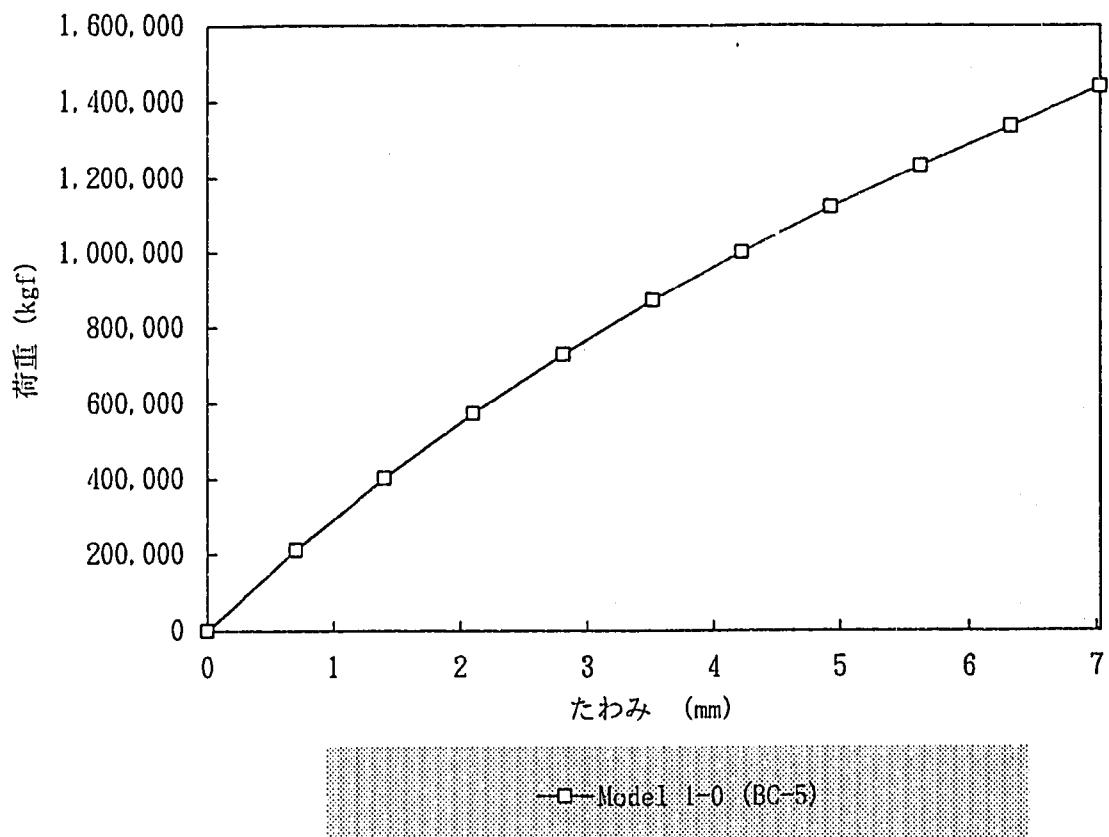


図 3.5.16 ケース 5：境界条件 BC-5：「たわみー荷重」関係

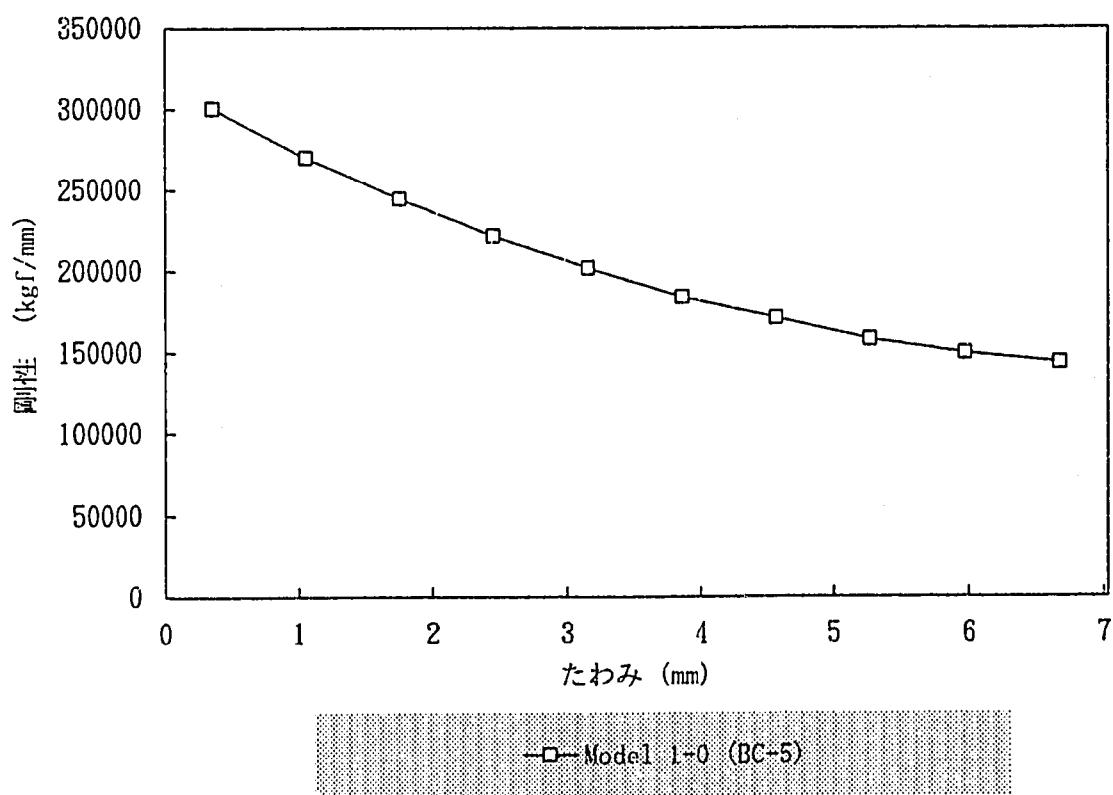


図 3.5.17 ケース 5：境界条件 BC-5：「たわみーばね剛性」関係

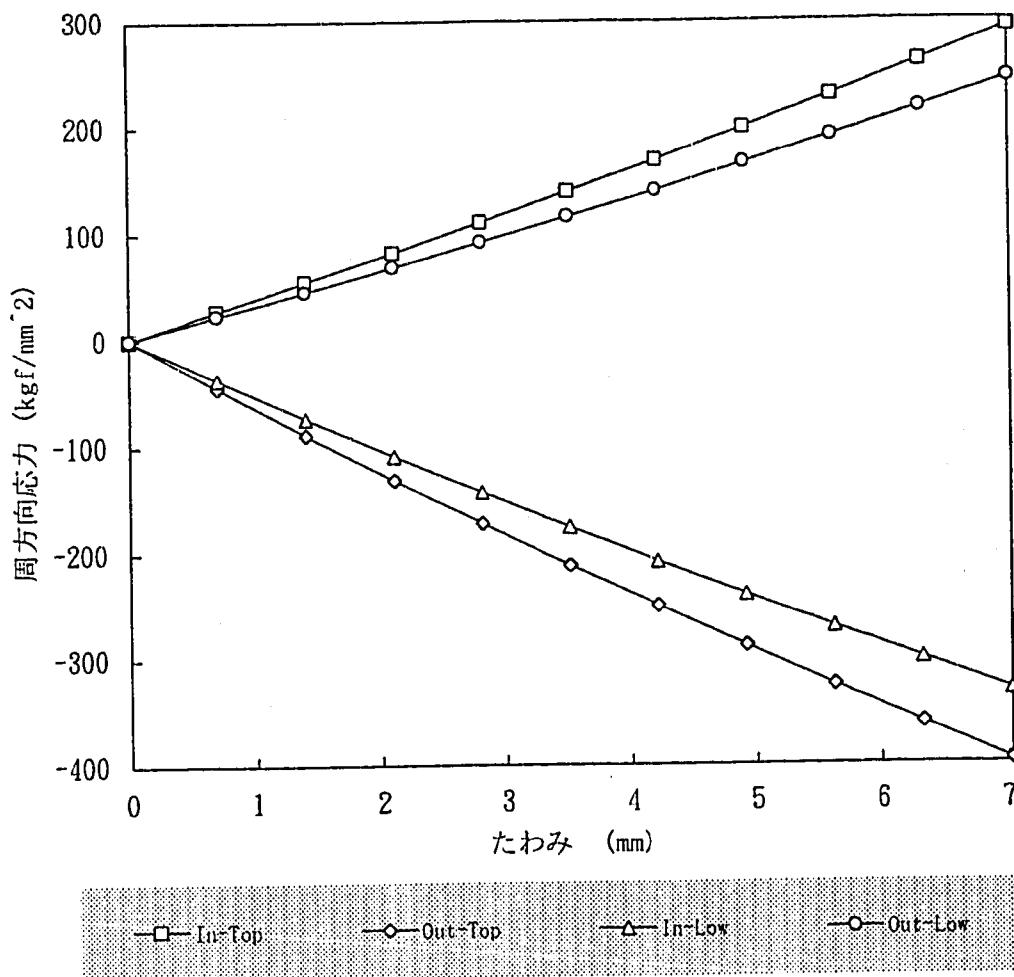


図 3.5.18 ケース 5 : 境界条件 BC-5 : 「たわみー周方向応力」関係

4. 考察

4.1 シェル要素によるモデル化の検討

前章 3.3節において、免震要素としての皿ばねの構造解析に当たりシェル要素によるモデル化の適用性の検討を行うため、ソリッド解をリファレンスとしてソリッド解とシェル解の比較を行なった。その結果自由高さの小さい皿ばねに関しては、シェルモデルによる解析は、ばね剛性及び発生周方向応力のどちらについてもソリッド解とおおむね同じ結果が得られ、シェル要素による皿ばねのモデル化は妥当であると確認されたが、自由高さが大きい皿ばねに関しては、シェル解は発生周方向応力についてはソリッド解と一致するが、ばね剛性についてはたわみの初期段階において有意にソリッド解より小さく評価され、シェル要素でのモデル化に問題があることが判明した。この一因としては、皿ばねの荷重載荷位置及び拘束位置のモデル化の違いが考えられる。図4.1.1に示すように、シェルモデルは皿ばね上下端の断面中央位値（板厚中心）にそれぞれ強制変位と鉛直方向の拘束を受けることになるのに対し、ソリッドモデルは上端外側のコーナー点に強制変位、下端内側のコーナー点に鉛直方向の拘束を受ける。これからモーメント荷重に関する腕の長さはソリッドモデルの方が短くなり、その差は皿ばねの板厚を t 、あるたわみ状態における皿ばね円錐角（皿ばね子午線方向と床面のなす角）を θ としたとき、 $t \cdot \sin \theta$ と表わすことができる。よって同一強制変位条件においてはソリッドモデルに生じるモーメント荷重は小さくなり、またあるたわみ状態における皿ばね高さが大きいほど（角度 θ が大きいほど）モーメント荷重は大きくなると考えられる。図4.1.2～図4.1.4は、この考察を確認するため、Model 1-4について皿ばねソリッドモデルによる底面の支持位置、及び上面の載荷位置を板厚中心にして解析した結果（以下、補正ソリッド解）と従来のシェル解及びソリッド解を同一グラフで示したものである。これらの図から、免震要素としての皿ばねの許容使用範囲と考えられる線形挙動に近い範囲（ばね剛性が正から負に転ずる付近を除いた範囲）において、補正ソリッド解のばね剛性は、シェル解にほぼ一致することが確認できる。実際の皿ばねの使用状態では、従来のソリッド解の載荷位置及び拘束位置のほうが忠

実であり、自由高さの高い皿ばねにシェル要素を適用するに当たっては、この点に関する補正が必要となる。

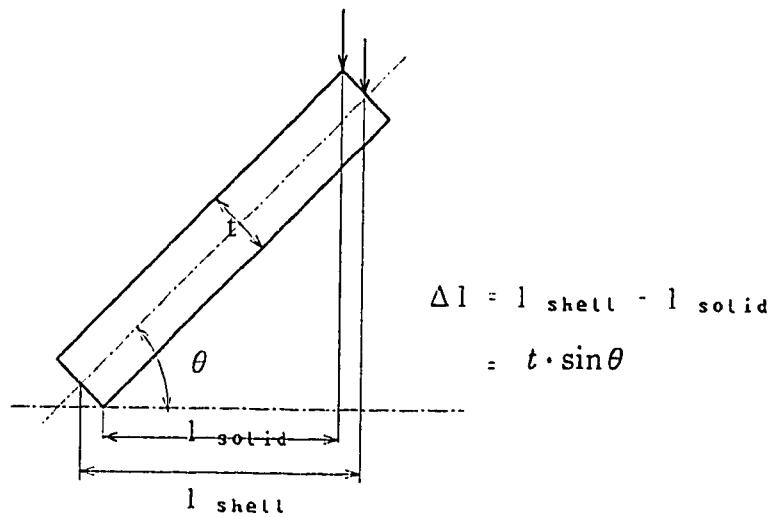


図4.1.1 シェルモデル及びソリッドモデルにおけるモーメントアーム

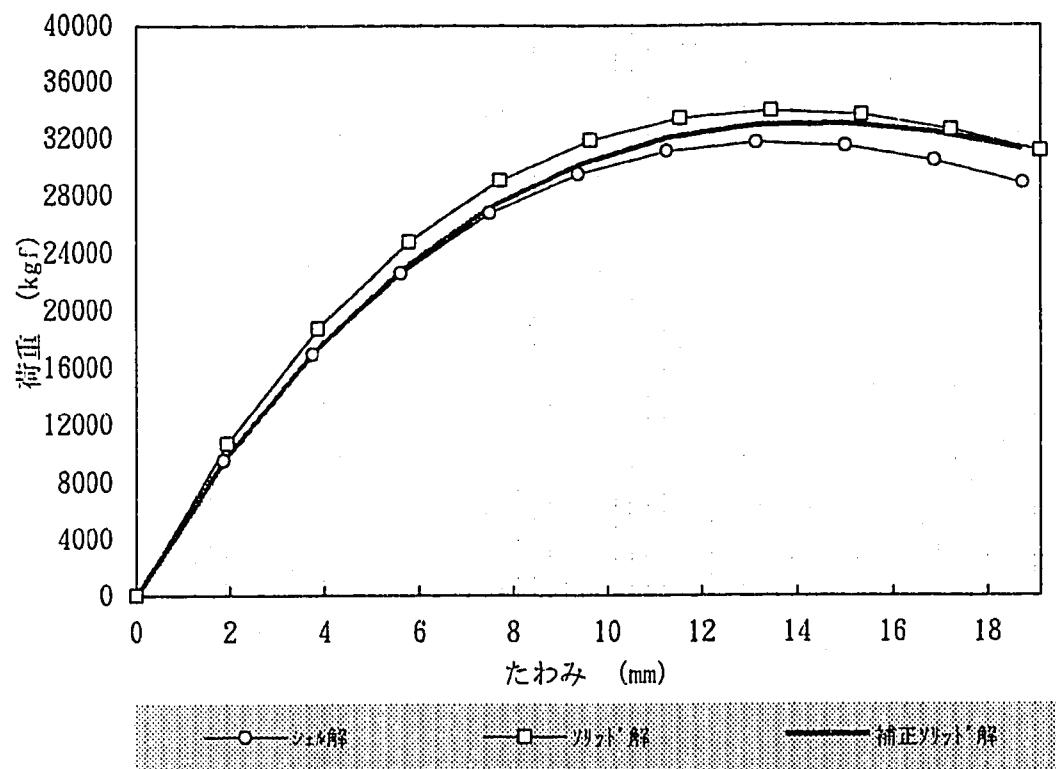


図 4.1.2 Model 11-4 : 「荷重ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解及び補正ソリッド解の比較)

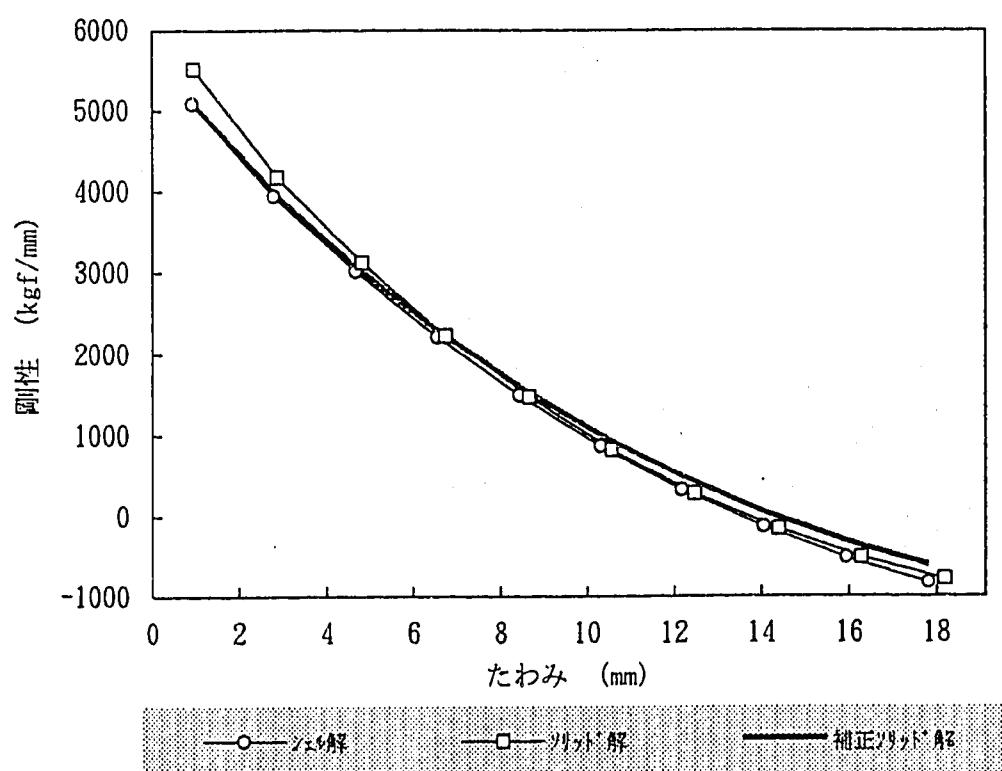


図 4.1.3 Model 11-4 : 「ばね剛性ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解及び補正ソリッド解の比較)

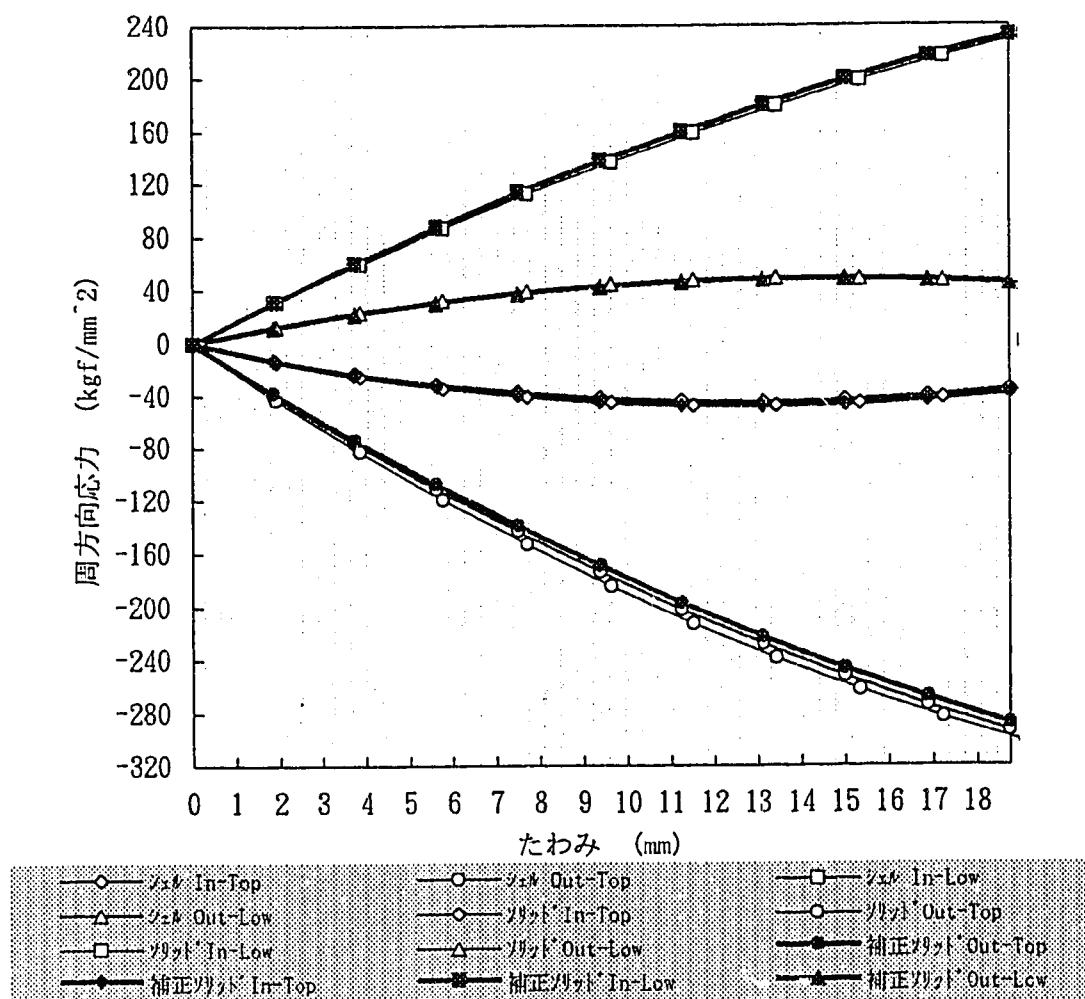


図 4.1.4 Model 1-4: 「周方向応力ーたわみ」関係
(シェル解とソリッド解及び補正ソリッド解の比較)

4.2 設計公式の精緻化による改善（設計公式の改良式の提示）

前章 3.4節の形状パラメータ解析における設計公式解とソリッドモデル大変形解の比較の節で述べたように、皿ばねの剛性及び最大周方向応力はたわみのどの段階においてもおおむね設計公式の方がソリッド解より大きく、その差はたわみの進行に従って大きくなる傾向を示すことが判明したが、ここで設計公式を以下に示す観点から再検討し、免震要素としての皿ばねの単軸荷重による力学的挙動の記述性の向上を試みる。

皿ばねの設計公式は APPENDIX B に示すように、円周上の等分布軸荷重 P による半径方向変位 dr と回転中による接線方向ひずみ（半径方向変位 dr は板厚内に一定のひずみを生じさせ、回転中は上下面で最大、中立面で 0 の曲げひずみを生じさせる）から生じる接線方向応力が皿ばね回転中心点 o 回りの子午線方向モーメントを生み、これが外力によるモーメントに抵抗するという考えに基づいて導出されている。この際、皿ばねの初期円錐角 β 及び荷重 P による円錐角の変化 ϕ が微小であるとのことから、 $\cos \beta = 1$ 、 $\sin \beta = \beta$ 、 $\sin \phi = \phi$ 等の近似を行っている。また半径方向変位 dr に起因する接線方向力による点 o 回りの半径方向モーメント算出時、及び回転中に起因する曲げひずみによる接線方向力による点 o 回りの半径方向モーメント算出時においての積分範囲を、同理由から本来皿ばね子午線方向に沿って皿ばね下端から上端の範囲とすべきところを、皿ばね径方向に投影した範囲で行っている。

今回、皿ばねの設計公式の見直しにあたっては、上記近似を行わないで厳密に式を導出し、ソリッド解との適合の度合を考察する。以下に、設計公式の改良式を示す。なお、式の導出の過程については、APPENDIX C に示す。

皿ばね設計公式の改良式の提示（図4.2 参照）

○「荷重 - たわみ」関係式

$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{2\pi E}{(1-\nu^2)(a-b)} \left[\frac{t \cdot \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{\cos\beta} \right. \\
 & \times \left. \left\{ \frac{b^2 - 2c(b-a) - a^2}{2\cos^2(\beta-\phi)} - \frac{A(b-a)}{\cos(\beta-\phi)} + A^2 \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} \right\} \right. \\
 & + \left. \frac{t^3}{12} \left\{ \tan\beta \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} - \tan(\beta-\phi) \ln \frac{b}{a} \right\} \right] \\
 \therefore \quad & A = \frac{c}{\cos\beta} \quad \beta = \arctan\left(\frac{h}{a-b}\right), \quad \phi = \beta - \arcsin\left(\frac{h-\delta}{l}\right)
 \end{aligned}$$

○ばね定数 k

$$\begin{aligned}
 k = \frac{\partial P}{\partial \delta} = & -\frac{2\pi E \cdot (l_2 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2 + n)}{(1-\nu^2)(a-b)\sqrt{l^2 - (h-\delta)^2}} \\
 \therefore \quad l_1 = & \frac{ts \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{\cos\beta} \\
 l_2 = & \frac{t}{\cos\beta} [-\cos(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \} \\
 & + \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \cos\phi - \cos\beta \sin\phi \}] \\
 m_1 = & \left\{ \frac{b^2 - 2c(b-a) - a^2}{2\cos^2(\beta-\phi)} - \frac{A(b-a)}{\cos(\beta-\phi)} + A^2 \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} \right\} \\
 m_2 = & \frac{(b^2 - 2c(b-a) - a^2) \sin 2(\beta-\phi)}{2\cos^4(\beta-\phi)} + \frac{A(b-a) \sin(\beta-\phi)}{\cos^2(\beta-\phi)} \\
 & + \frac{A^3(a-b) \sin(\beta-\phi)}{\{c-b-A\cos(\beta-\phi)\} \{c-a-A\cos(\beta-\phi)\}} \\
 n = & \frac{t^3}{12} \left[\frac{(a-b) \cdot \tan\beta \cdot \sin(\beta-\phi)}{\{c-b-A\cos(\beta-\phi)\} \{c-a-A\cos(\beta-\phi)\}} + \sec^2(\beta-\phi) \cdot \ln \frac{b}{a} \right]
 \end{aligned}$$

○周方向応力 σ

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{x \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{c-x\cos\beta} + \left\{ \frac{\sin\beta}{c-x\cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c-x\cos(\beta-\phi)} \right\} \cdot y \right]$$

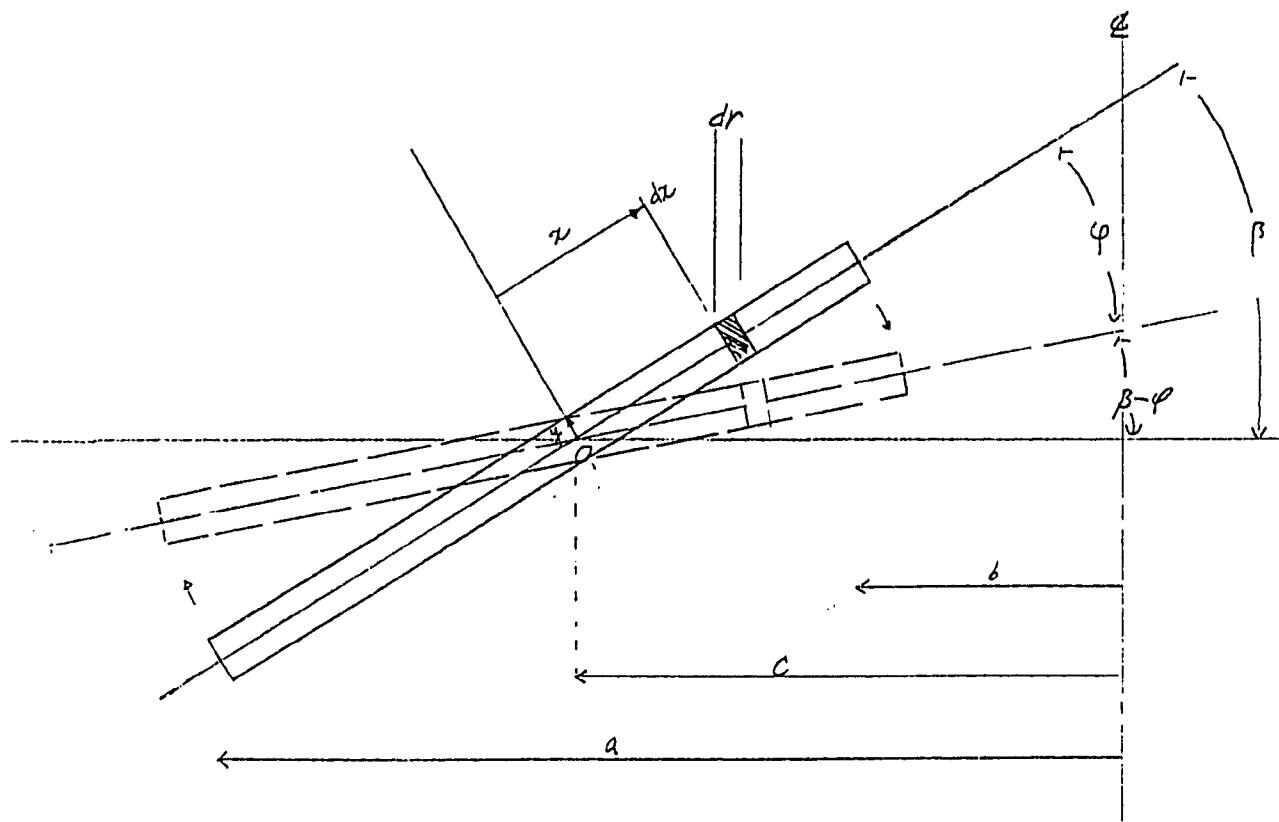


図 4.2 盤ばね設計公式の改良式の記号図

【記 号】

- a = 盤ばねの外半径
- b = 盤ばねの内半径
- c = 中立軸と中心の距離
- β = 盤ばねの初期円錐角
- ϕ = 荷重 P による円錐角の変化
- P = 円周上の等分布軸荷重
- h = 盤ばねの自由高さ
- δ = 盤ばねの軸変位
- E = 弹性係数
- ν = ポアソン比
- γ = 板厚中心から板厚方向への距離

Model 1-0 及びModel 1-4 の「荷重－たわみ」、「ばね剛性－たわみ」、「周方向応力－たわみ」の3つの関係について、設計公式、上記設計公式の補正式及びソリッド大変形解析により計算し比較した結果を図4.2.1 から図4.2.6 に示す。どちらのモデルにおいても改良式による解は従来の設計公式に比べ、「荷重－たわみ」、「ばね剛性－たわみ」、「周方向応力－たわみ」のどの関係においても、ソリッド解にフィティングする傾向を示し、そのフィティングの度合は、自由高さの大きいModel 1-4 において顕著に現れていることがわかる。以上これらの傾向から設計公式導出にあたっての仮定：「断面の角変位は小さい（角度 β が微小）」という近似を用いずに厳密化して導出した改良式は、単軸荷重に対する皿ばねの力学的特性をより精度良く表現するものであり、特に角変位が大きい、すなわち自由高さが比較的大きくたわみ量の大きい場合においては、既存の設計公式導出における仮定は適切でないことが判明した。

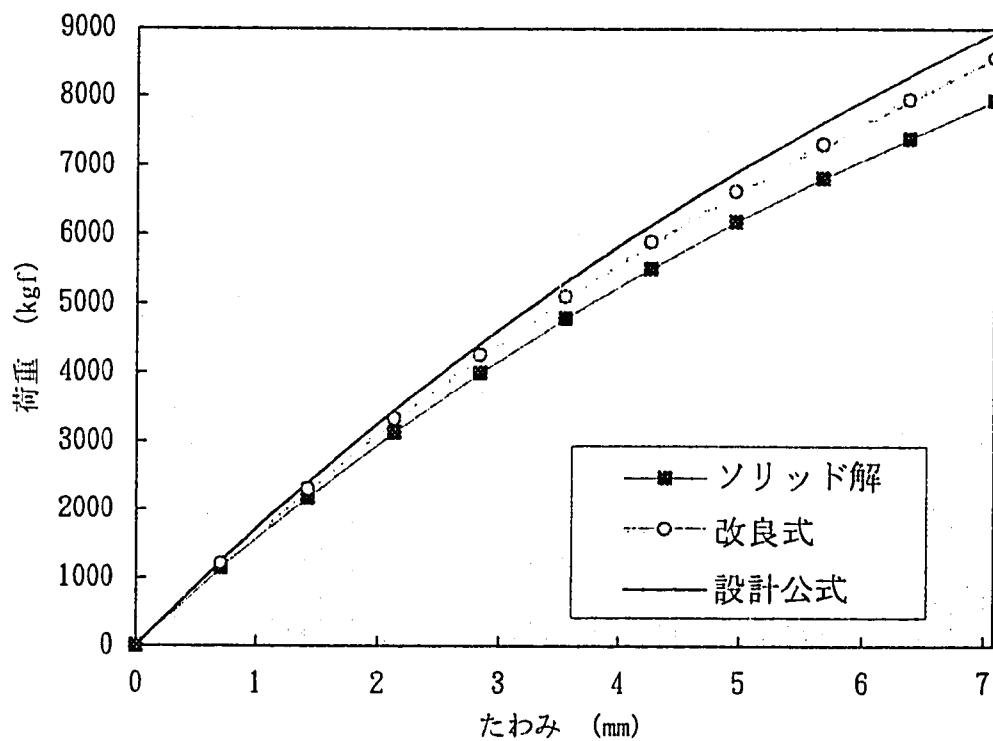


図 4.2.1 設計公式の補正「たわみ一荷重」関係
(Model 1-0)

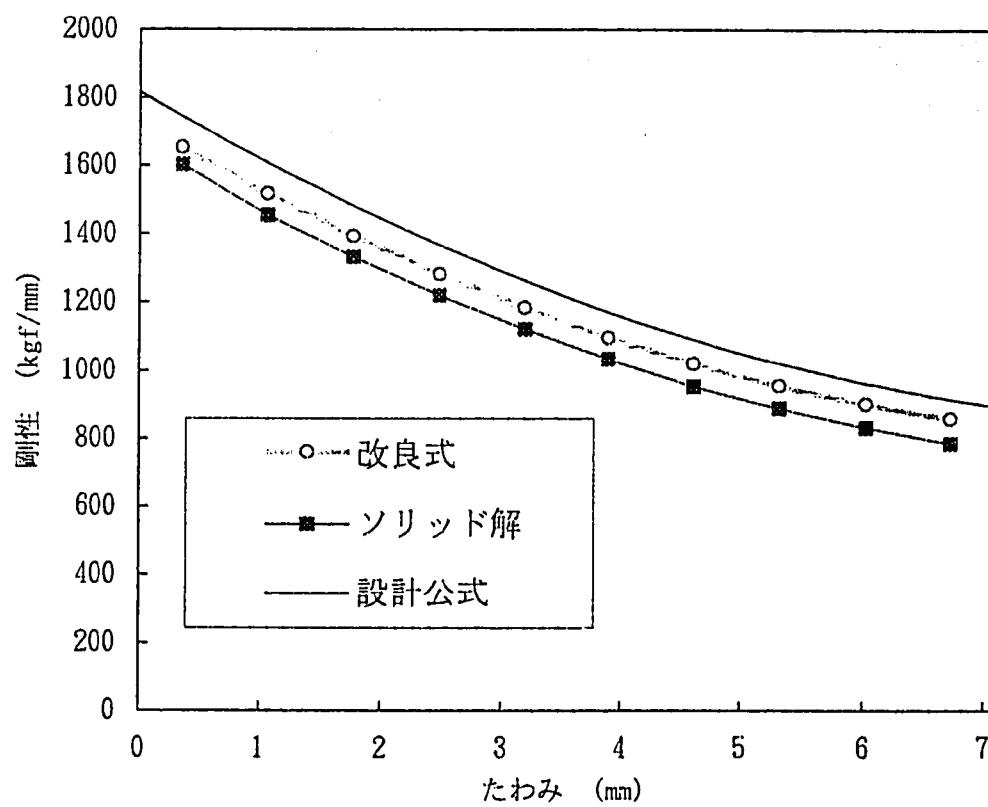


図 4.2.2 設計硬式の補正「たわみ一剛性」関係
(Model 1-0)

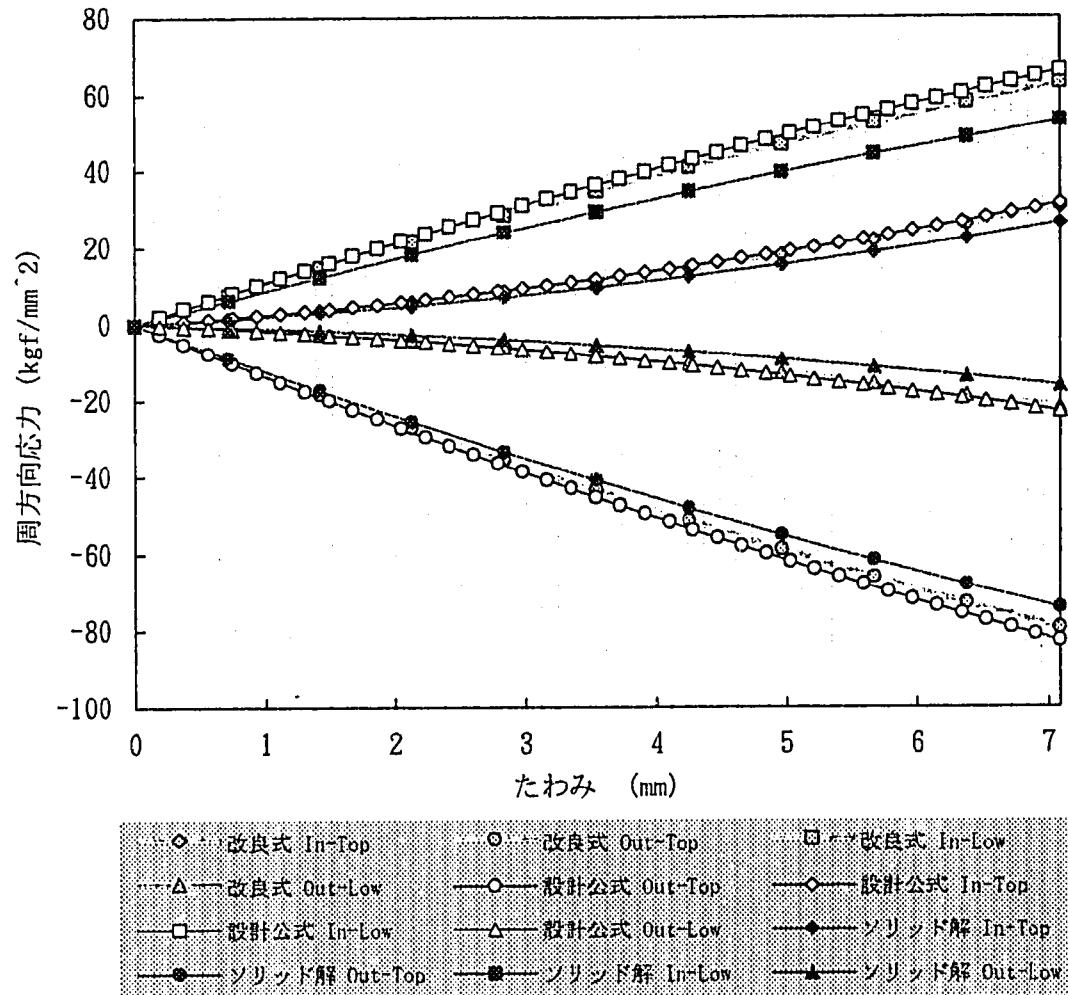


図 4.2.3 設計硬式の補正「たわみー剛性」関係
(Model 1-0)

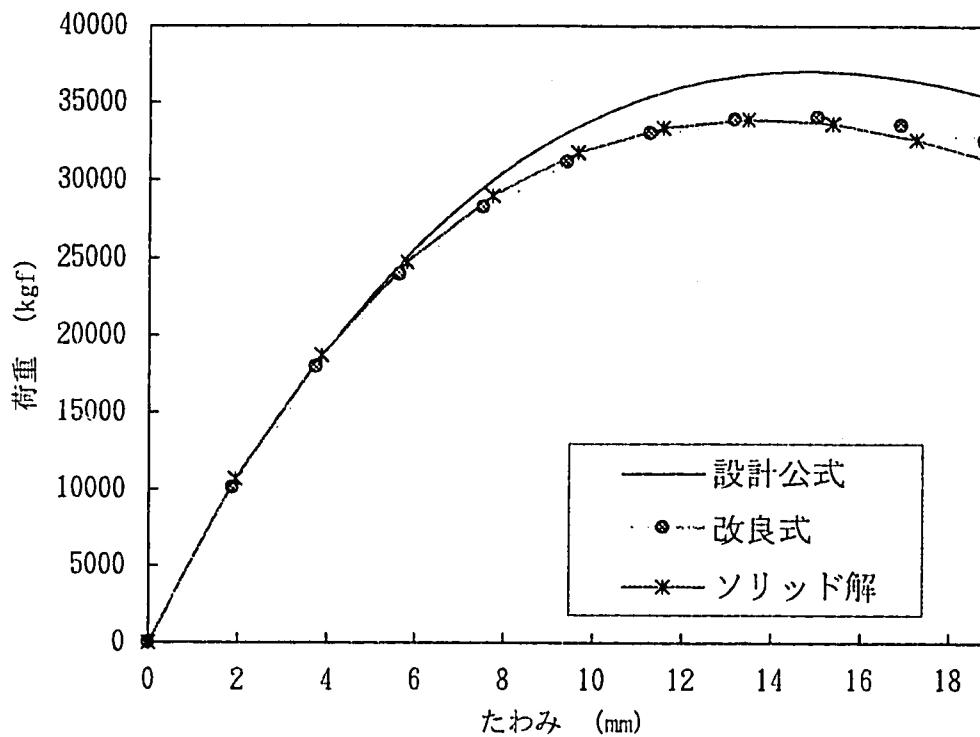


図 4.2.4 設計公式の補正「たわみ一荷重」関係
(Model 1-4)

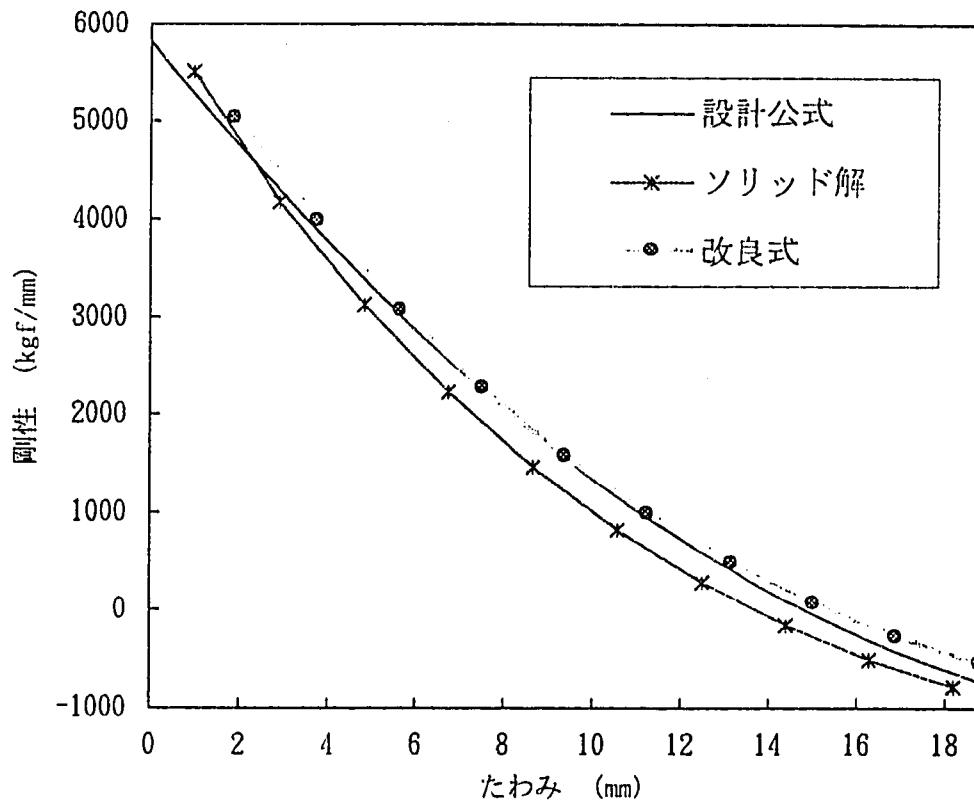


図 4.2.5 設計硬式の補正「たわみ一剛性」関係
(Model 1-4)

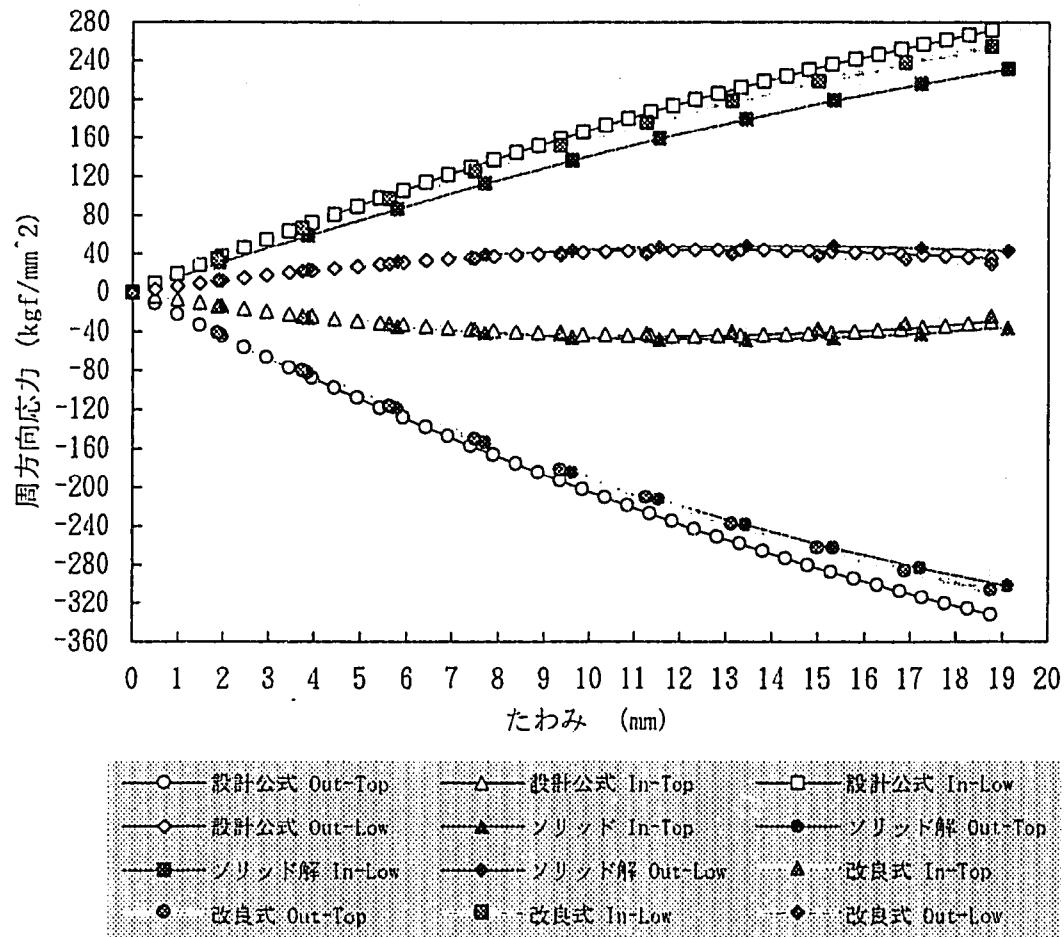


図 4.2.6 設計硬式の補正「たわみー剛性」関係
(Model 1-4)

4.3 盤ばねの支持条件による影響の評価

盤ばねによる免震構造がガタ系となることを防止するためには、盤ばねに最適な境界条件を設定する必要があるが、盤ばねの支持条件が軸荷重を受ける盤ばねの剛性及び発生応力に及ぼす影響を確認するため、前章 3.5節の「境界条件の違いによる比較」において、境界条件をパラメータとした応力解析を実施した。

盤ばねの拘束自由度を増していくと、当然ばね剛性 k は高くなっていく。これは同時に盤ばねの固有振動数 f も増していく^{*} ことを意味する。一方、免震盤ばねは系として 2.5 Hz の固有振動数を持つことを目標としている。⁽⁶⁾ よって免震盤ばねの境界条件の設定に当たっては、境界条件によるばね剛性の増減を形状(h/t)によるばね剛性の増減により調整し、目標とする固有振動数を与えるばね剛性を持つ盤ばねに対して「荷重 - たわみ」関係、「ばね剛性 - たわみ」関係及び「周方向応力 - たわみ」関係等の力学的特性について検討する必要がある。今回の境界条件による影響の評価においては、前記免震要素としての盤ばねの境界条件設定に関する検討の第 1 段階として、境界条件による盤ばねの固有振動数の変化については考慮せず、同一盤ばね Model 1-0 ($h/t=0.75$) について、たわみ量 0.75hにおける最大荷重値、及び発生周方向応力（応力値及び引張り応力、圧縮応力の発生箇所の変化）に対する境界条件の影響について考察する。以下に 0.75h のたわみの範囲において、盤ばね座面の鉛直方向のみを拘束したケースの結果をリファレンスとして、他の境界条件ケースの結果を考察する。

境界条件パラメータ解析の結果を全体的にみると、盤ばね下端の回転をフリーにした条件のモデル（ケース 1, 2）と固定したモデル（ケース 3, 4, 5）に区分できる。たわみ量 $\delta = 0.75 h$ に対する最大荷重値は、前者のグループであるケース 1 及び 2 では、それぞれ 7.68E+03 kgf, 9.94E+03 kgf であるのに対し、後者のグループであるケース 3, 4, 5 については、それぞれ 2 オーダー以上高い 3.62E+05 kgf, 3.90E+05 kgf, 1.44E+06 kg となっている。また周方向応力に対しては、前者が盤ばねの内側が引張り、外側が圧縮（最大応力発生点については両ケースともに最大引張り応力：内側下端、最大圧縮応力：外側上端）となっているのに対し、後者は内側上端及び外側下端が引張り、内側下端及び外

側上端が圧縮となっている。さらに後者のグループを詳細に分析すると、最終荷重値がケース5がケース3, 4に比べ1オーダー高いこと、最大周方向応力の発生点が引張り応力圧縮応力ともにケース3, 4では皿ばね下端側であるのに対し、ケース5では皿ばね上端側となっていることから上端の回転自由度をフリーとしたものと固定したものとの力学的特性の違いが見られる。このように皿ばね上下端の回転自由度に対する拘束条件が、皿ばねの最大荷重及び発生周方向応力等の力学的特性の大きな支配因子であることが明らかとなつた。

上記考察を踏まえ、今後は皿ばねの固有振動数を考慮した上で境界条件設定に対する皿ばねの力学的特性の把握が必要となる。また境界条件により、皿ばね剛性の非線形性の度合（たわみの進行に伴うばね剛性の変化率）、及び断面内の応力分布の様相も異なってくる為、皿ばね形状 (h/t) との関係も考慮して、今後この部分の整理が必要となる。

* : ばね剛性 k と固有振動数 f の関係

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

m : 質量

5. 結言

免震要素として用いる大型皿ばねを採用するに当っては、JIS 等に記載されている皿ばね設計公式をそのまま適用してよいのか、皿ばね要素を用いた免震構造がガタ系となるのをどう防止するか等の課題を有している。本研究においては、皿ばね設計公式の免震皿ばねに対する適用性の検証、及び境界条件の違いによる皿ばね力学的特性に与える影響の把握を目的として、軸荷重による免震皿ばねの力学的特性の検討を、皿ばね単体の特性試験と FEM 解析によるパラメータサーベイにより行い、以下の (1)～(6) に示す結果及び知見を得た。

- (1) 皿ばね特性試験による「たわみ－荷重」履歴の結果と FEM 解析結果を比較することにより、FEM 解析の信頼性が確認された。
- (2) FEM 解析による皿ばね断面内に発生する応力分布を検討し、卓越成分が周方向応力であり、その周方向応力は曲げが主たる成分で皿ばねコーナー部が高応力部となることを確認した。
- (3) ソリッド解とシェル解を比較検討した結果、皿ばね自由高さの小さいモデルについてはシェル解の妥当性が確認された一方、自由高さの大きいモデルについては、軸荷重の載荷位置及び拘束位置のモデル化の非厳密性からシェル解は実際の挙動と有意な差を生じることが明らかになった。
- (4) 形状 h/t (h : 皿ばね自由高さ、 t : 板厚) パラメータ解析を行い、設計公式値との比較検討を行なった。その結果、設計公式はマクロ的にみると単軸荷重に対する免震皿ばねの荷重とたわみの非線形性及び内部に発生する周方向応力の傾向について良く捕らえているが、詳細に検討すれば設計公式値は、皿ばね剛性及び最大周方向応力について FEM 解より大きく評価される傾向にあり、たわみが進行するほどまた皿ばねの自由高さ h の高いモデルほどその傾向は顕著となることが明らかとなった。
- (5) 上記(4) に示した傾向を補正する設計公式の改良式を、設計公式導出に当っての仮定を見直すことにより導出し、その改良式が単軸荷重に対する皿ばねの力学的特性をより精度良く表現するものであることを確認した。
- (6) 皿ばね境界条件のパラメータ解析を行い、境界条件による皿ばね固有振動数の変化を考慮しない条件のもとで、皿ばねのたわみ量 $0.75h$ における最大荷重及び発生周方向応力を検討した結果、皿ばね上下端の回転自由度に対する拘束条件が、皿ばね力学的特性を決定する大きな支配因子であることが明らかとなった。

参考文献

- (1) PNC ZN9410 94-311 機器上下免震構造に関する研究 - 第1報 研究開発計画及び基礎的調査検討 -, 1994年11月
- (2) 機器上下免震構造に関する研究 - 第6報 Phase 2 研究開発計画 実機構造設計の改良 1 -, 報告書作成中
- (3) JIS B 2706 -1978
- (4) J. O. Almen and A. Laszlo, "The Uniform-Section Disk Spring", Trans ASME, 58, (1936), pp305-314
- (5) 機器上下免震構造に関する研究 - 第8報 コモンデッキ方式上下免震構造の振動試験 その1), 報告書作成中
- (6) 機器上下免震構造の開発 - 第5報 最適免震特性の設定に関する検討 -, 1995年4月
- (7) 第3版 ばね ばね技術研究会編, 丸善

Appendix A JIS B 2706-1995

皿 ばね 解説

この解説は、本体に規定した事柄、参考に記載した事柄、及びこれらに関連した事柄を説明するもので、規格の一部ではない。

I. 1995年の改正の要点

- (1) 今回(1995年)の改正の経緯 今回の改正は、1990年6月1日の第399回標準会議において、“日本工業規格における国際単位系(SI)の導入の方針”が決定されたのに基づき、SI導入を行ったものである。
また、JIS Z 8301(規格表の様式)が1990年3月に改正されたのに伴い、それとの整合化を図る必要が生じたため規格表の様式を変更した。
今回の改正は、実質的な変更点はなく形式的な改正であり、この規格の改正原案は、工業技術院事務局によって作成されたもので、1994年10月の日本工業標準調査会機械要素部会の審議を経て、平成7年2月1日付けで通商産業大臣によって改正された。
- (2) 今回(1995年)の主な改正点 今回の主な改正点は、次のとおりである。
 - (a) SI単位だけを規格値とし、従来単位(kgf/mm²など)を参考値として併記した。
 - (b) JIS Z 8301の改正に伴い、規格様式を見直した。
 - (c) 規定事項(引用規格名称など)を最新のJISと整合させた。
- (3) その他 今回の改正は、実質的な変更点はなく形式的な改正にとどまっているので、解説も前回(1978年)改正時のものを一部修正し、次のとおり引用掲載することにした。

規定項目の補足説明

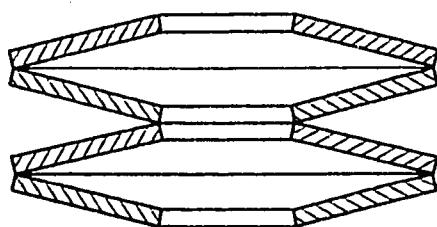
制定の経過 皿ばねは規格本体の図に示すような中央に穴のあいた皿状のばねで、この特長とするところは小さい空間のところで大きな負荷容量を得ることができる。

このばねは1970年ごろから急速に需要が増し、当時はDIN 2093によることが多かった。このためDINを基準としたJISを制定することが混乱を起こすことがないので1972年に内、外径をDINを採用した規格を制定した。このとき皿ばねの板厚として標準数列を使用した日本ばね工業会規格によっていた。このため一部ではDINと相違したばねが制定されていたが、種々の面で不都合なことが多く昭和51年度の改正にあってはばねの使用板厚を一部改正した原案を日本ばね工業会において審議し、日本工業標準調査会機械要素部会皿ばね専門委員会の議を経て、所定の手続きによって昭和53年7月1日に改正された。

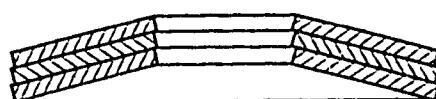
この解説では、以下に制定した皿ばねの特性及び計算式について述べるものである。

適用範囲について 皿ばねは、これを単独で使用する場合もあるが、積み重ねを種々にすることによってばね特性を変化させることができる。解説図1のような重ね方を直列と呼び、解説図2のような重ね方を並列と呼んでおり、積み重ね方によって解説図3に示すように種々なばね定数を得ることができる。

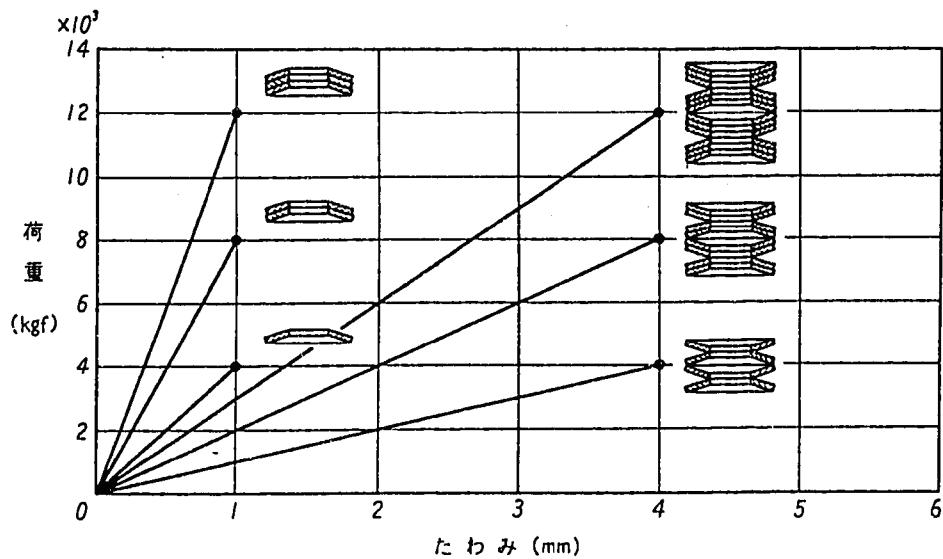
解説図1 直列



解説図2 並列



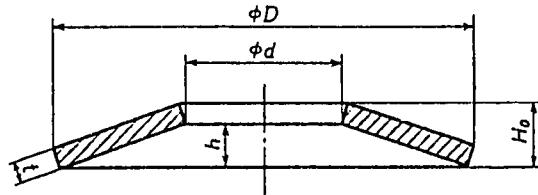
解説図3



また、このばねは後述のように円すいの高さと板厚の比によってばね特性を非線形化することも可能である。しかし反面高さ及び板厚のわずかな相違によってばね特性が変化するので製作に注意が必要があり、使用上でも気をつけなければならない。

計算式

解説図4



皿ばねの荷重とたわみとの関係式、荷重と応力に関する式については一般にAlmen-Laszloの式と称される形が多く使用されている。

解説図4を参照して、記号を次のように定める。

D : 外径 (mm)

d : 内径 (mm)

t : 板厚 (mm)

h : 皿ばねの全高さ H_0 から板厚 t を引いた値 (mm)

δ : ばねのたわみ (mm)

P : 作用荷重 (kgf)

E : 縦弾性係数 (鋼の場合 2.1×10^4 kgf/mm²)

ν : ポアソン比 (鋼の場合 0.3)

α : D/d 直径比

$$P = \frac{4E\delta C}{(1-\nu^2) D^2} \left[(h-\delta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) t + t^3 \right] \quad (1)$$

ここで、

$$C = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2}{\ln \alpha} \right) \pi \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 \quad (2)$$

を示し、解説図5のような値である。上の式で明らかなように、 $\delta=h$ のとき、

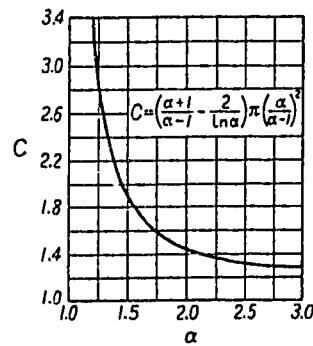
$$P_{\delta=h} = \frac{4ECht^3}{(1-\nu^2) D^2} \quad (3)$$

と表される。一般に

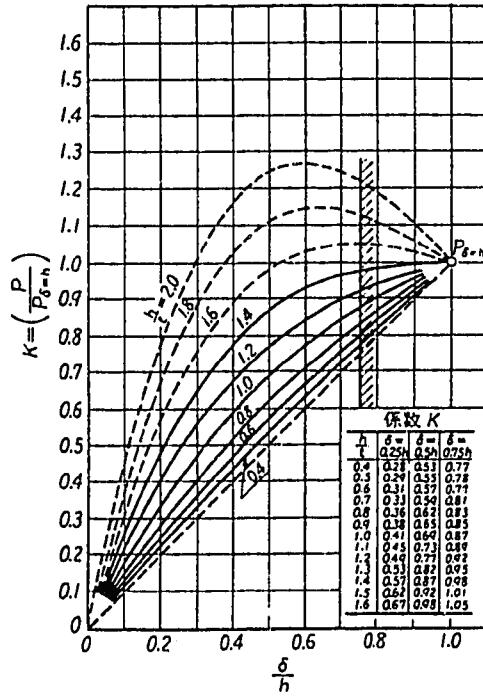
$$P = k P_{\delta=h} \quad (4)$$

と書き表すと k は h/t によって相違して解説図6のように示される。

解説図5



解説図6



一般に $\delta = 0.75h$ のときを最大荷重とすることが多く、本体裏中には $\delta = 0.5h$, $\delta = 0.75h$ のときの荷重値を参考として示している。皿ばねの特徴の一つである荷重とたわみとの非線形があげられる。

すなわち、ばね定数 k は、

さて、皿ばねの応力については、円周方向応力としてかなり高い応力が発生する。一般に皿ばねの上面では圧縮応力を生じ、下面で引張応力が生ずる。解説図7に示す皿ばねの内周上面1の位置での応力のひ

$$\sigma_1 = \frac{4E}{1-\nu^2} \frac{C}{D^2} \delta \left\{ -\beta \left(h - \frac{\delta}{2} \right) - \gamma t \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

内周下面の応力 σ_{ll} は

$$\sigma_{\parallel} = \frac{4E}{1-\nu^2} \frac{C}{D^2} \delta \left\{ -\beta \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + \gamma l \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

外周下面の応力 σ_{III} は

$$\sigma_{\text{III}} = \frac{4E}{1-\nu^2} - \frac{C}{D^2} \frac{\delta}{\alpha} \left\{ (2\gamma - \beta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + \gamma t \right\} \dots \quad (8)$$

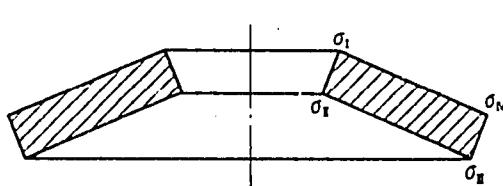
外周上面での応力のばらつき

$$\sigma_{\text{IV}} = \frac{4E}{1-\nu^2} - \frac{C}{D^2} \frac{\delta}{\sigma} \left\{ (2\gamma - \beta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) - \gamma t \right\} \dots \quad (9)$$

と表される。ここで

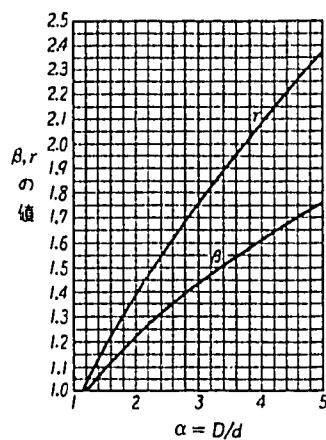
2. の値を表示する)解説書のとおり、図示したのと解説図2でも2

卷之二



解説表1 β, γ の値

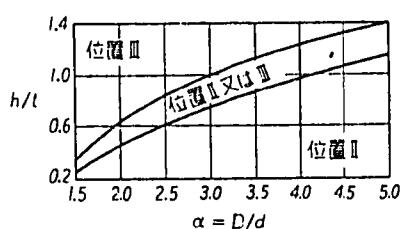
$\alpha = D/d$	β	γ
1.2	1.02	1.05
1.4	1.07	1.14
1.6	1.12	1.22
1.8	1.17	1.30
2.0	1.22	1.38
2.2	1.26	1.45
2.4	1.31	1.53
2.6	1.35	1.60
2.8	1.39	1.67
3.0	1.43	1.74
3.2	1.46	1.81
3.4	1.50	1.88
3.6	1.54	1.94
3.8	1.57	2.00
4.0	1.60	2.07
4.2	1.64	2.13
4.4	1.67	2.19
4.6	1.70	2.25
4.8	1.73	2.31
5.0	1.76	2.37

解説図8 β, γ の値

最大応力は主として内周の上面すなわちの圧縮応力であるが、ばねの疲労による折損では引張応力の最大が問題となり、規格中には $\delta=0.5h$ と $\delta=0.75h$ に対する引張りの最大応力値を参考として示した。

DIN 2092では動荷重を受けるばねで h/t 及び D/d によって最大引張応力発生位置を解説図9のように示している。

解説図9



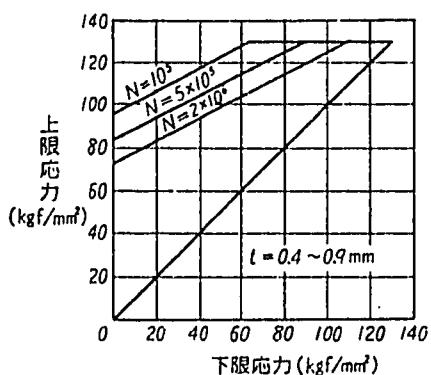
なお、皿ばねの計算式として以上のAlmen-Laszloの式に対し、Wempner⁽¹⁾又は浜田、瀬口⁽²⁾のエネルギー法による解がある。

注⁽¹⁾ C.A.Wempner; Proc. Third U.S. National Congr. App. Mech. (1958) 473.

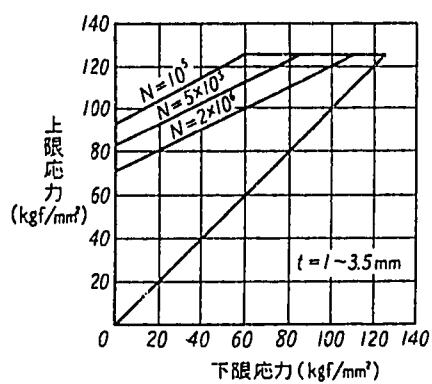
(2) 浜田実、瀬口靖幸：日本機械学会論文集 31-232 (1965) 又はばね論文集 (1967)

DIN 2092では板厚区分に従って解説図10～12に示すような疲労限度曲線を与えており。図中の N の値は繰返し回数を示すものである。この図はCr-V鋼について得られた線図であるので、JISで示すSK5Mを使用した場合の皿ばねでは、これらの図の80%位と見直したほうが安全である。

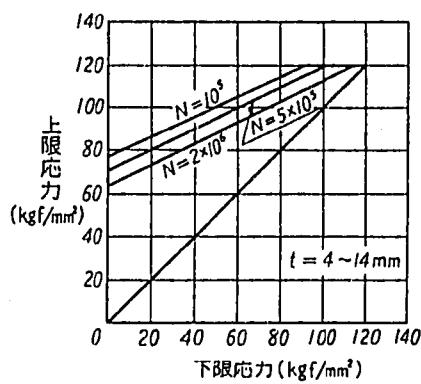
解説図10



解説図11



解説図12



なお、参考として、DIN 2093の寸法を解説表2として示す。

解説表2

重荷重用 : $\frac{D}{t} \approx 18, \frac{h}{t} \approx 0.4$ 軽荷重用 : $\frac{D}{t} \approx 28, \frac{h}{t} \approx 0.75$

グル ア	D h12 mm	d H12 mm	t mm	h mm	Ho mm	P kgf	δ $\delta \approx 0.75h$	$H_o - \delta$ mm	σ kgf/mm ²	グル ア	D h12 mm	d H12 mm	t mm	h mm	Ho mm	P kgf	δ $\delta \approx 0.75h$	$H_o - \delta$ mm	σ kgf/mm ²
1	8	4.2	0.4	0.2	0.60	21	0.15	0.45	125	1	8	4.2	0.3	0.25	0.55	12	0.19	0.36	135
	10	5.2	0.5	0.25	0.75	34	0.19	0.56	125		10	5.2	0.4	0.3	0.70	21	0.22	0.48	131
	12.5	6.2	0.7	0.3	1.00	67	0.22	0.78	142		12.5	6.2	0.5	0.35	0.85	30	0.26	0.59	114
	14	7.2	0.8	0.3	1.10	81	0.22	0.88	134		14	7.2	0.5	0.4	0.90	28	0.30	0.60	113
	16	8.2	0.9	0.35	1.25	103	0.26	0.99	134		16	8.2	0.6	0.45	1.05	42	0.34	0.71	114
	18	9.2	1	0.4	1.40	128	0.30	1.10	133		18	9.2	0.7	0.5	1.20	58	0.37	0.83	114
	20	10.2	1.1	0.45	1.55	155	0.34	1.21	132		20	10.2	0.8	0.55	1.35	76	0.41	0.94	115
	22.5	11.2	1.25	0.5	1.75	195	0.37	1.38	133		22.5	11.2	0.8	0.65	1.45	72	0.49	0.96	111
	25	12.2	1.5	0.55	2.05	298	0.41	1.64	146		25	12.2	0.9	0.7	1.60	88	0.52	1.08	105
	28	14.2	1.5	0.65	2.15	290	0.49	1.66	131		28	14.2	1	0.8	1.80	113	0.60	1.20	112
2	31.5	16.3	1.75	0.7	2.45	398	0.52	1.93	133		31.5	16.3	1.25	0.9	2.15	194	0.67	1.48	122
	35.5	18.3	2	0.8	2.80	528	0.60	2.20	137		35.5	18.3	1.25	1	2.25	173	0.75	1.50	110
	40	20.4	2.25	0.9	3.15	660	0.67	2.48	136		40	20.4	1.5	1.15	2.65	267	0.86	1.79	117
	45	22.4	2.5	1	3.50	790	0.75	2.75	133		45	22.4	1.75	1.3	3.05	372	0.97	2.08	118
	50	25.4	3	1.1	4.10	1220	0.82	3.28	146		50	25.4	2	1.4	3.40	485	1.05	2.35	117
	56	28.5	3	1.3	4.30	1150	0.97	3.33	131		56	28.5	2	1.6	3.60	452	1.20	2.40	112
	63	31	3.5	1.4	4.90	1530	1.05	3.85	133		63	31	2.5	1.75	4.25	730	1.31	2.94	112
	71	36	4	1.6	5.60	2100	1.20	4.40	124		71	36	2.5	2	4.50	690	1.50	3.00	108
	80	41	5	1.7	6.70	3500	1.28	5.42	127		80	41	3	2.3	5.30	1070	1.72	3.58	117
	90	46	5	2	7.00	3200	1.50	5.50	122		90	46	3.5	2.5	6.00	1450	1.88	4.12	114
3	100	51	6	2.2	8.20	4900	1.65	6.55	127		100	51	3.5	2.8	6.30	1330	2.10	4.20	108
	112	57	6	2.5	8.50	4500	1.88	6.62	117		112	57	4	3.2	7.20	1830	2.40	4.80	119
	125	64	8	2.6	10.60	8800	1.95	8.65	126		125	64	5	3.5	8.50	3100	2.65	5.85	127
	140	72	8	3.2	11.20	8700	2.40	8.80	130		140	72	5	4	9.00	2850	3.00	6.00	122
	160	82	10	3.5	13.50	14000	2.60	10.90	132		160	82	6	4.5	10.50	4200	3.40	7.10	122
	180	92	10	4	14.00	12800	3.00	11.00	122		180	92	6	5.1	11.10	3800	3.80	7.30	115
	200	102	12	4.2	16.20	18700	3.15	13.05	120		200	102	8	5.6	13.60	7800	4.20	9.40	125
	225	112	12	5	17.00	17500	3.75	13.25	115		225	112	8	6.5	14.50	7200	4.85	9.65	119
	250	127	14	5.6	19.60	25000	4.20	15.40	123		250	127	10	7	17.00	12200	5.25	11.75	126

Appendix B 盤ばねの荷重-たわみ関係式の導出

$$P = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)Ma^2} [(h-\delta)(h-\delta/2)t + t^3]$$

【出典】

J.O. Almen and A. Laszlo, "The Uniform-Section Disk Spring", Trans ASME, 58, (1936), pp305-314

【記号】

a	=	盤ばねの外半径
b	=	盤ばねの内半径
c	=	中立軸と中心の距離
α	=	外径／内径比 a/b
β	=	盤ばねの初期円錐角
ψ	=	荷重 P による円錐角の変化
P	=	円周上の等分布軸荷重
h	=	盤ばねの自由高さ
δ	=	盤ばねの軸変位
E	=	弾性係数
σ	=	最大応力
r	=	ばね定数
V	=	ひずみエネルギー
ζ	=	弾力性 (たわみ性) (resilience)
ν	=	ポアソン比
ε_1	=	子午線方向ひずみ (radial strain)
ε_2	=	接線方向ひずみ (tangential strain)
κ_1	=	子午線方向の曲率変化
κ_2	=	接線方向の曲率変化
D	=	曲げ剛性 (flexural rigidity)

B.1 一般的なケース：初期形状が円錐状の皿ばね

解析に当たって以下の仮定を設ける。

- 1) 子午線方向の応力は無視出来る。
- 2) 皿ばねの断面は変形しない。
- 3) 皿ばねは図4.2に示す中立点Oの廻りに回転するのみ。

(a) 荷重と変形

皿ばねの周方向に $d\theta$ の部分を考え、この中で点Oを原点として距離xの所に微小部分 dx をとる。皿ばねが角度 ϕ だけ変形すると、この微小部分は図4.2に破線で示した位置まで移動する。その結果生じる接線方向ひずみは、半径方向変位 dr と回転 ϕ によるものとして解析出来るだろう。これらのうち、前者は（断面内の各点における皿ばね中心までの距離の微小な変化を無視すれば）板厚内に一定のひずみを生じる。一方、後者は接線方向の曲げひずみを生じ、これは上下面で最大、中立面でゼロとなる。これら二つのひずみ成分によって生じる接線方向応力は点Oの廻りの子午線方向モーメントを生むが、これが外力によるモーメントに抵抗することになる。

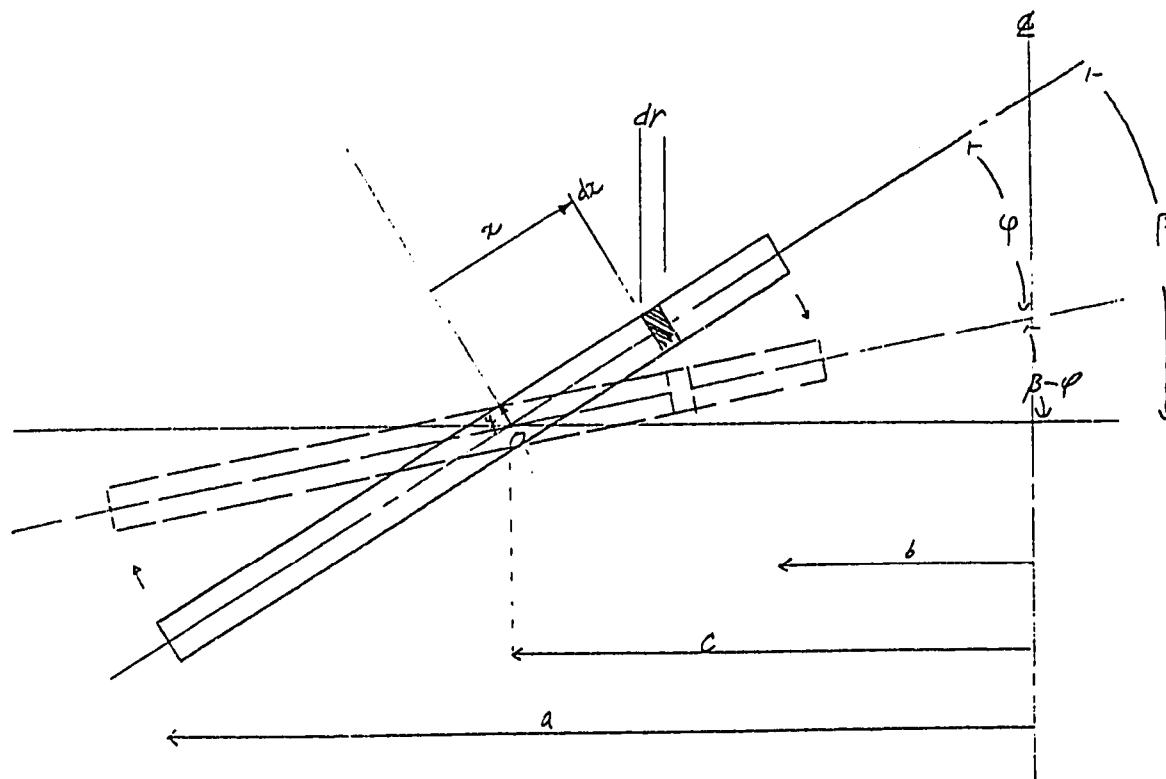


図 B.1 皿ばね断面図

半径方向変位による接線方向ひずみ・応力の計算

変形前の微小部分 dx の（周方向）長さは；

$$l_1 = d\theta[c - x \cos \beta] \quad [\text{B. } 1]$$

変形後は；

$$l_2 = d\theta[c - x \cos(\beta - \phi)] \quad [\text{B. } 2]$$

長さの変化は；

$$l_1 - l_2 = d\theta[-x \cos \beta(1 - \cos \phi) + x \sin \beta \sin \phi] \quad [\text{B. } 3]$$

角度 β , ϕ が微小であるとして、

$$\cos \beta = 1, \quad \sin \beta = \beta, \quad \sin \phi = \phi, \quad 1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \frac{\phi}{2} = \frac{\phi^2}{2}$$

を代入すると、

$$l_1 - l_2 = d\theta x \phi (\beta - \phi/2) \quad [\text{B. } 4]$$

となるから、接線方向ひずみは近似的に次式で表される。

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1 - l_2}{l_1} = \frac{x \phi (\beta - \phi/2)}{c - x} \quad [\text{B. } 5]$$

接線方向応力は

$$\sigma_2' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \quad [\text{B. } 6]$$

であるが、子午線方向応力は無視出来ると仮定しているから、

$$\sigma_2' = \frac{E \varepsilon_2}{(1 - \nu^2)} = \frac{E x \phi (\beta - \phi/2)}{(1 - \nu^2)(c - x)} \quad [\text{B. } 7]$$

接線方向力による点O廻りの半径方向モーメントの計算

$$dM_1' = \sigma_2' t dx d\theta x \sin(\beta - \phi) \quad [B. 8]$$

$\sin(\beta - \phi) = \beta - \phi$ と式 [B. 7] をこれに代入して、

$$dM_1' = \frac{E t d\theta \phi (\beta - \phi)(\beta - \phi/2) x^2 dx}{(1 - \nu^2)(c - x)} \quad [B. 9]$$

これを、 $x = c-a$ から $x = c-b$ まで積分すると、

$$M_1' = \frac{E t d\theta \phi (\beta - \phi)(\beta - \phi/2)}{1 - \nu^2} \left[\frac{1}{2} (a^2 - b^2) - 2c(a - b) + c^2 \log \frac{a}{b} \right] \quad [B. 10]$$

曲げひずみによる接線方向応力の計算

単位長さ当たりの接線方向曲げモーメントは；

$$M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1) \quad [B. 11]$$

円錐殼が高さを減じる方向に変形する場合には曲率の変化は正であるから、上式も正となる。子午線方向断面内の曲げを無視すると、微小部分 dx について、

$$dM_2 = D \kappa_2 dx = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \kappa_2 dx \quad [B. 12]$$

変形前の皿ばねの接線方向曲率は近似的に；

$$\frac{\sin \beta}{c - x \cos \beta} \approx \frac{\beta}{c - x} \quad [B. 13]$$

変形後は；

$$\frac{\sin(\beta - \phi)}{c - x \cos(\beta - \phi)} \approx \frac{\beta - \phi}{c - x} \quad [B. 14]$$

従って曲率の変化は；

$$\kappa_2 = \frac{\beta - (\beta - \phi)}{c - x} = \frac{\phi}{c - x} \quad [B.15]$$

モーメントは；

$$dM_2 = \frac{Et^3\phi dx}{12(1-\nu^2)(c-x)} \quad [B.16]$$

板厚表面での接線方向応力は；

$$\sigma_2'' = (dM_2/Z) = \frac{6dM_2}{t^2dx} = \frac{E\phi}{(1-\nu^2)(c-x)} \frac{t}{2} \quad [B.17]$$

中立軸から距離 y にある点では；

$$\sigma_2'' = \frac{E\phi}{(1-\nu^2)(c-x)} y \quad [B.18]$$

微小区間 $d\theta$ におけるモーメント dM_2 の子午線方向成分は；

$$dM_1 = 2dM_2 \frac{d\theta}{2} = \frac{Et^3\phi d\theta dx}{12(1-\nu^2)(c-x)} \quad [B.19]$$

これを， $x = c-a$ から $x = c-b$ まで積分すると，

$$M_1'' = \frac{Et^3\phi d\theta}{12(1-\nu^2)} \int_{c-a}^{c-b} \frac{dx}{c-x} = \frac{Et^3\phi d\theta}{12(1-\nu^2)} \log \frac{a}{b} \quad [B.20]$$

合モーメントの計算

半径方向モーメントの和をとると、(式 [B.10] 及び [B.20])

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1' + M_1'' \\ &= \frac{E\phi d\theta}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{1}{2}(a^2 - b^2) - 2c(a-b) + c^2 \log \frac{a}{b} \right) (\beta - \phi) \left(\beta - \frac{\phi}{2} \right) t + \frac{t^3}{12} \log \frac{a}{b} \right] \end{aligned} \quad [\text{B.21}]$$

中立点 c の決定

微小断面の力の釣合い、即ち断面に作用する垂直力の総和がゼロでとなる条件から求め
る。曲げによる応力は接線方向成分が無いから、半径方向変位による成分のみ考えれば良
い。

$$\int_{c-a}^{c-b} \sigma_2' t dx = 0 \quad [\text{B.22}]$$

式 [B. 7] を代入すると、

$$\int_{c-a}^{c-b} \frac{x dx}{c-x} = 0 \quad [\text{B.23}]$$

であり、これから、

$$c = \frac{a-b}{\log \frac{a}{b}} \quad [\text{B.24}]$$

を得る。

外力モーメントとの釣合いによる荷重～変位関係の導出

式 [B.24] を [B.21] に代入すると、

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{E\phi d\theta}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{1}{2}(a^2 - b^2) - 2 \frac{(a-b)^2}{\log \frac{a}{b}} + \frac{(a-b)^2}{\log \frac{a}{b}} \right) \right. \\ &\quad \left. (\beta - \phi) \left(\beta - \frac{\phi}{2} \right) t + \frac{t^3}{12} \log \frac{a}{b} \right] \end{aligned} \quad [\text{B.25}]$$

微小区間 $d\theta$ での外力モーメントは；

$$\frac{P(a-b)d\theta}{2\pi} \quad [B.26]$$

これが内力モーメントに等しいから、

$$P = \frac{2\pi M_1}{(a-b)d\theta} \quad [B.27]$$

ここで、

$$\beta = \frac{h}{a-b}, \quad \phi = \frac{\delta}{a-b}, \quad \frac{a}{b} = \alpha \quad [B.28]$$

とし、さらに M_1 の式 ([B.25]) を代入すると、

$$P = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)a^2} \left\{ \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2}{\log \alpha} \right] \pi \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 t(h-\delta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{t^3}{6} \pi \log \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 \right\} \quad [B.29]$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} & \left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2}{\log \alpha} \right] \pi \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^2 = \frac{1}{M} \\ & \text{及び} \\ & \frac{\pi}{6} \log \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 = \frac{1}{N} \end{aligned} \right\} \quad [B.30]$$

と書くことになると、式 [B.29] は、

$$P = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)a^2} \left[(h-\delta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) \frac{t}{M} + \frac{t^3}{N} \right] \quad [B.31]$$

図B.2 に示すように実用的な範囲で M と N の値はほぼ等しいから,

$$P = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)Ma^2} \left[(h-\delta) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) t + t^3 \right] \quad [B.31]$$

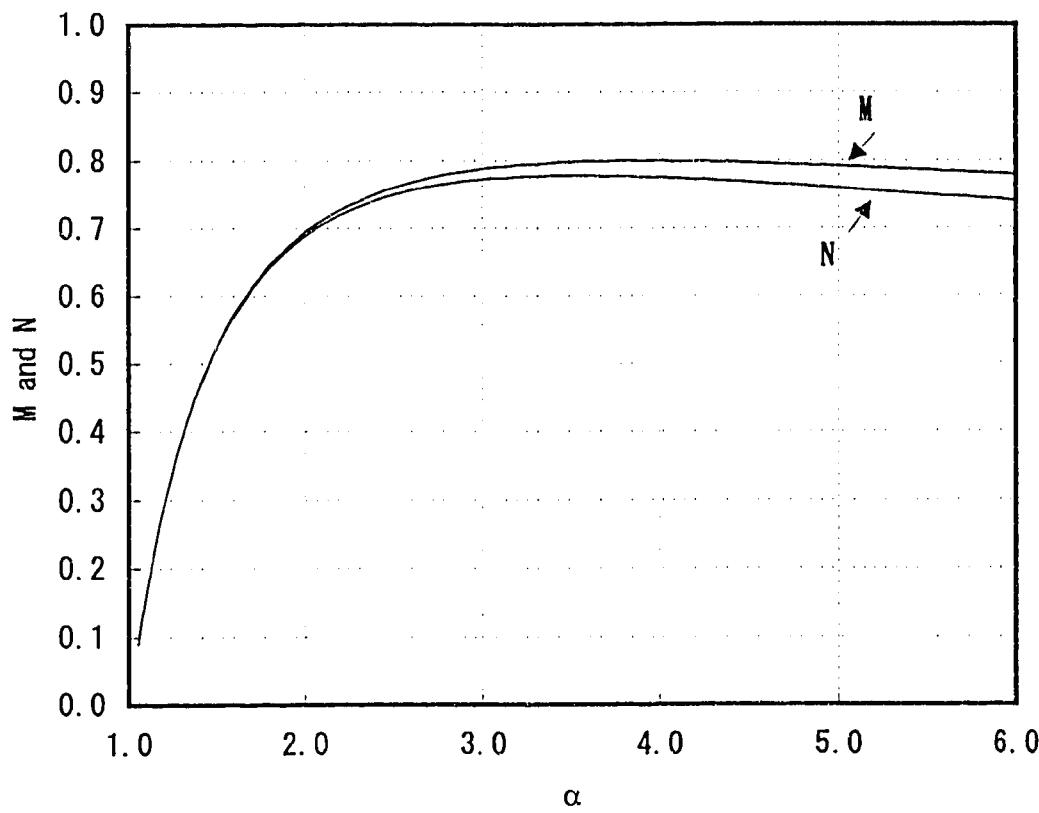


図 B.2 “外径／内径”に対する M と N

応力の算出

接線方向応力は σ_2' と σ_2'' の和であるから、式 [B. 7] 及び [B.18] から、

$$\sigma = \sigma_2' + \sigma_2'' = \frac{E\phi}{(1-\nu^2)(c-x)} \left[x \left(\beta - \frac{\phi}{2} \right) + y \right] \quad [B.32]$$

応力が最大値をとるのは $y = t/2$ 及び $x = c-b$ の場合であって、この時、

$$\sigma = \frac{E\phi}{(1-\nu^2)b} \left[(c-b) \left(\beta - \frac{\phi}{2} \right) + \frac{t}{2} \right] \quad [B.33]$$

式 [B.28] を用いると、

$$\sigma = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)(a-b)^2} \left[\left(\frac{c}{b} - 1 \right) \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{t}{2} \frac{a-b}{b} \right] \quad [B.34]$$

さらに、式 [B.24] 及び [B.28] を代入すると、

$$\sigma = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)a^2} \left[\left(\frac{\alpha-1}{\log \alpha} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + \frac{\alpha-1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 t \right] \quad [B.35]$$

ここで、

$$C_1 = \left(\frac{\alpha-1}{\log \alpha} - 1 \right) \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 M = \left(\frac{\alpha-1}{\log \alpha} - 1 \right) \frac{6}{\pi \log \alpha} \quad [B.36]$$

$$C_2 = \frac{\alpha-1}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 M = \frac{\alpha-1}{2} \frac{6}{\pi \log \alpha} = \frac{3(\alpha-1)}{\pi \log \alpha} \quad [B.37]$$

ただし、

$$M = N = \frac{6}{\pi \log \alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^2 \quad [B.38]$$

とおくと、

$$\sigma = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)a^2} \left[C_1 \left(h - \frac{\delta}{2} \right) + C_2 t \right] \quad [B.39]$$

図B.3 に、外径／内径比に対する C_1 , C_2 の値をプロットしておく。

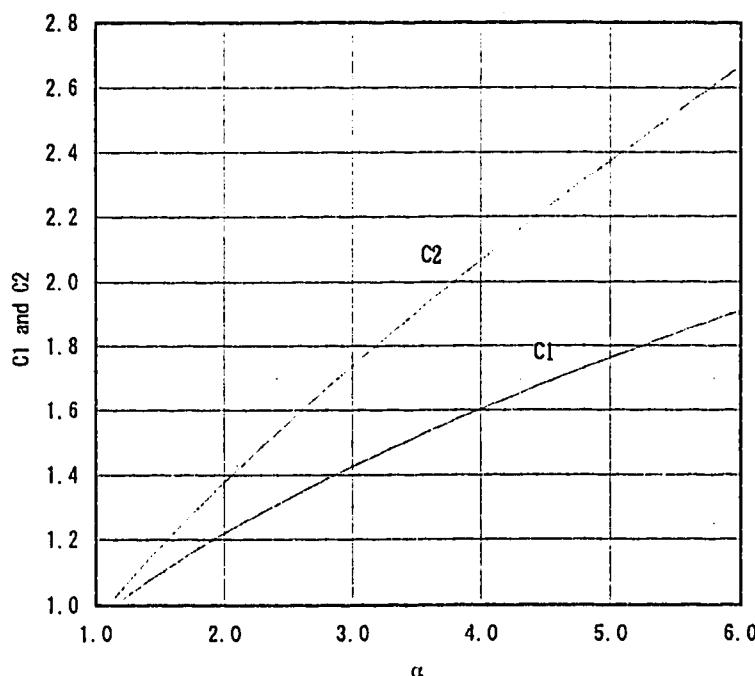


図 B.3 “外径／内径”に対する C_1 と C_2

皿ばねの下端の応力を求める場合には、式 [A.32] に $-t/2$ を代入すればよく、この場合

$$\sigma = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)a^2} \left[C_1 \left(h - \frac{\delta}{2} \right) - C_2 t \right] \quad [B.40]$$

式 [B.39] 及び [B.40] は両方とも [] 内が正の場合に圧縮応力を表す。これらの応力は両方とも負（引張り）になり得る。

式 [B.39] と [B.40] を等置すると、たわみが $\delta = 2h$ の場合に下端の応力の絶対値が上端の応力に等しくなることが分かる。従って、最大応力は；

$\delta < 2h$: 式 [B.39], 皿ばね上端における圧縮応力

$\delta > 2h$: 式 [B.40], 皿ばね下端における引張応力

となる。

ばね定数の算定

いまばねのばね定数を r とすると、

$$r = \frac{Et}{(1-\nu^2)Ma^2} \left(h^2 - 3\delta h + \frac{3}{2}\delta^2 + t^2 \right) \quad [\text{B.41}]$$

上式の () 内をゼロと置くことで、ばね定数がゼロとなるたわみ、即ち荷重変化無しでたわみが増加する点を求めることが出来る。

$$\delta = h \pm \sqrt{\frac{h^2}{3} - \frac{2t^2}{3}}$$

Appendix C 盤ばね設計公式の改良式の導出

○半径方向変位 $d r$ による子午線方向モーメント M_1' の導出

- 接線方向ひずみ

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1 - l_2}{l_1} = \frac{x \sin \beta \sin \phi - x \cos \beta (1 - \cos \phi)}{c - x \cos \beta}$$

- 接線方向応力

$$\sigma_2' = \frac{E \varepsilon_2}{(1 - \nu^2)} = \frac{Ex[\sin \beta \sin \phi - \cos \beta (1 - \cos \phi)]}{(1 - \nu^2)(c - x \cos \beta)}$$

- 微小区間 dx における点 o 回りの半径方向モーメント

$$dM_1 = \sigma_2' t dx d\theta x \sin(\beta - \phi) = \frac{Et d\theta \sin(\beta - \phi) [\sin \beta \sin \phi - \cos \beta (1 - \cos \phi)] x^2 dx}{(1 - \nu^2)(c - x \cos \beta)}$$

- 接線方向力による点 o 回りの半径方向モーメント

$$\begin{aligned} M_1' &= \int \frac{\frac{c-b}{\cos(\beta-\phi)}}{\frac{c-a}{\cos(\beta-\phi)}} dM_1 dx \\ &= - \frac{Et d\theta \sin(\beta - \phi) \{ \sin \beta \sin \phi - \cos \beta (1 - \cos \phi) \}}{(1 - \nu^2) \cos \beta} \\ &\times \left\{ \frac{b^2 - 2c(b-a) - a^2}{2 \cos^2(\beta - \phi)} - \frac{A(b-a)}{\cos(\beta - \phi)} + A^2 \ln \frac{c-b-A \cos(\beta - \phi)}{c-a-A \cos(\beta - \phi)} \right\} \\ &\therefore A = \frac{c}{\cos \beta} \end{aligned}$$

○回転中による接線方向ひずみからの子午線方向モーメント M_1'' の導出

- 微小部分 dx の接線方向曲げモーメント

$$dM_2 = D \kappa_2 dx = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \left[\frac{\sin \beta}{c - x \cos \beta} - \frac{\sin(\beta - \phi)}{c - x \cos(\beta - \phi)} \right] dx$$

$$\therefore \text{曲率の変化: } \kappa_2 = \frac{\sin \beta}{c - x \cos \beta} - \frac{\sin(\beta - \phi)}{c - x \cos(\beta - \phi)}$$

・板厚表面での接線方向応力 σ_2''

$$\sigma_2'' = \frac{dM_2}{Z} = \frac{6dM_2}{t^2dx}$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\sin\beta}{c-x\cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c-x\cos(\beta-\phi)} \right] \cdot \frac{t}{2}$$

中立軸から y にある点においては、

$$\sigma_2'' = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\sin\beta}{c-x\cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c-x\cos(\beta-\phi)} \right] \cdot y$$

・微小区間 $d\theta$ におけるモーメント dM_2 の子午線方向成分 dM_1

$$dM_1 = 2dM_2 \frac{d\theta}{2} = \frac{Et^3 d\theta}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\sin\beta}{c-x\cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c-x\cos(\beta-\phi)} \right] dx$$

・回転 Φ による子午線方向モーメント

$$M_1'' = \int_{\frac{c-a}{\cos(\beta-\phi)}}^{\frac{c-b}{\cos(\beta-\phi)}} dM_1 dx$$

$$= -\frac{Et^3 d\theta}{12(1-\nu^2)} \times \left[\tan\beta \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} - \tan(\beta-\phi) \ln \frac{b}{a} \right]$$

$$\therefore A = \frac{c}{\cos\beta}$$

○子午線方向の合モーメント

$$M_1 = M_1' + M_1''$$

$$= -\frac{Ed\theta}{1-\nu^2} \left[\frac{t \cdot \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{\cos\beta} \right]$$

$$\times \left\{ \frac{b^2 - 2c(b-a) - a^2}{2\cos^2(\beta-\phi)} - \frac{A(b-a)}{\cos(\beta-\phi)} + A^2 \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} \right\}$$

$$+ \frac{t^3}{12} \left[\tan\beta \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} - \tan(\beta-\phi) \ln \frac{b}{a} \right]$$

○中立点 c

$$c = \frac{a-b}{\log \frac{a}{b}}$$

○外力モーメントとの釣り合いによる荷重 - 変位関係の導出

- ・微小区間 $d\theta$ での外力モーメント

$$\frac{P(a-b)d\theta}{2\pi}$$

○荷重 - 内力モーメント（子午線モーメント）式

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2\pi M_1}{(a-b)d\theta} \\
 &= -\frac{2\pi E}{(1-\nu^2)(a-b)} \left[\frac{t \cdot \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{\cos\beta} \right. \\
 &\quad \times \left. \left\{ \frac{b^2 - 2c(b-a) - a^2}{2\cos^2(\beta-\phi)} - \frac{A(b-a)}{\cos(\beta-\phi)} + A^2 \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} \right\} \right. \\
 &\quad + \left. \frac{t^3}{12} \left\{ \tan\beta \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} - \tan(\beta-\phi) \ln \frac{b}{a} \right\} \right] \\
 &\quad \therefore \beta = \arctan\left(\frac{h}{a-b}\right), \quad \phi = \beta - \arcsin\left(\frac{h-\delta}{l}\right)
 \end{aligned}$$

○ばね定数 k

$$k = \frac{\partial P}{\partial \delta} = -\frac{2\pi E \cdot (l_2 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2 + n)}{(1-\nu^2)(a-b)\sqrt{l^2 - (h-\delta)^2}}$$

$$\therefore l_1 = \frac{t \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{\cos\beta}$$

$$l_2 = \frac{t}{\cos\beta} [-\cos(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \} + \sin(\beta-\phi) \{ \sin\beta \cos\phi - \cos\beta \sin\phi \}]$$

$$m_1 = \left\{ \frac{b^2 - 2c(b-a) - a^2}{2\cos^2(\beta-\phi)} - \frac{A(b-a)}{\cos(\beta-\phi)} + A^2 \ln \frac{c-b-A\cos(\beta-\phi)}{c-a-A\cos(\beta-\phi)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \frac{(b^2 - 2c(b-a) - a^2) \sin 2(\beta-\phi)}{2\cos^4(\beta-\phi)} + \frac{A(b-a) \sin(\beta-\phi)}{\cos^2(\beta-\phi)} \\
 &\quad + \frac{A^3(a-b) \sin(\beta-\phi)}{(c-b-A\cos(\beta-\phi)) \{ c-a-A\cos(\beta-\phi) \}}
 \end{aligned}$$

$$n = \frac{t^3}{12} \left[\frac{(a-b) \cdot \tan\beta \cdot \sin(\beta-\phi)}{\{ c-b-A\cos(\beta-\phi) \} \{ c-a-A\cos(\beta-\phi) \}} + \sec^2(\beta-\phi) \cdot \ln \frac{b}{a} \right]$$

○周方向応力 σ

$$\sigma = \sigma_2' + \sigma_2''$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{x \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{c - x \cos\beta} + \left\{ \frac{\sin\beta}{c - x \cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c - x \cos(\beta-\phi)} \right\} \cdot y \right]$$

・内周の上面では、（通常圧縮応力）

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{(c-b) \sec(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{c - (c-b) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\sin\beta}{c - (c-b) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c - (c-b) \sec(\beta-\phi) \cos(\beta-\phi)} \right\} \cdot \frac{t}{2} \right]$$

$$\therefore x = (c-b) \sec(\beta-\phi), \quad y = -\frac{t}{2}$$

・内周の下面では、（通常引張応力）

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{(c-a) \sec(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{c - (c-a) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\sin\beta}{c - (c-a) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c - (c-a) \sec(\beta-\phi) \cos(\beta-\phi)} \right\} \cdot \frac{t}{2} \right]$$

$$\therefore x = (c-a) \sec(\beta-\phi), \quad y = -\frac{t}{2}$$

・外周の下面では、（通常引張応力）

$$\sigma_3 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{(c-a) \sec(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{c - (c-a) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\sin\beta}{c - (c-a) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c - (c-a) \sec(\beta-\phi) \cos(\beta-\phi)} \right\} \cdot \frac{t}{2} \right]$$

$$\therefore x = (c-a) \sec(\beta-\phi), \quad y = \frac{t}{2}$$

・外周の上面では、（通常圧縮応力）

$$\sigma_4 = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{(c-b) \sec(\beta-\phi) \{ \sin\beta \sin\phi - \cos\beta(1-\cos\phi) \}}{c - (c-b) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\sin\beta}{c - (c-b) \sec(\beta-\phi) \cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\phi)}{c - (c-b) \sec(\beta-\phi) \cos(\beta-\phi)} \right\} \cdot \frac{t}{2} \right]$$

$$\therefore x = (c-b) \sec(\beta-\phi), \quad y = \frac{t}{2}$$