

# 免震要素としての皿ばねの力学的特性の検討

(皿ばねの曲げ剛性に関する構造解析手法の検討)

平成8年12月

動力炉・核燃料開発事業団  
大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせ下さい。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター

システム開発推進部・技術管理室

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section, O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Nareta-machi, O-arai-machi, Higashibaraki, Ibaraki-ken 311-13, Japan.

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation) 1996

# 免震要素としての皿ばねの力学的特性の検討

(皿ばねの曲げ剛性に関する構造解析手法の検討)

坂井哲也\*，月森和之\*，森下正樹\*

## 要　旨

機器上下免震構造の一連の研究開発において、上下免震の要素として大型の皿ばねの適用を検討している。ここで、上下免震された機器に水平地震動が入力された場合、系には水平とロッキングの連成振動が生じ、皿ばねには曲げモーメントが負荷される。このため、その際の皿ばねの力学的特性を明らかにする必要がある。そこで本報においては、皿ばね上面にコサイン分布した強制変位を負荷する荷重条件で3次元シェルモデルによるFEM解析を実施し、皿ばねの曲げ荷重による力学的特性の検討を行うと共に、現状において整備されていない皿ばねの曲げ剛性評価手法を新たに開発して、FEM解をリファレンスにその記述性を検討した。以下に、解析的に得られた皿ばねの曲げ荷重に対する力学的特性の知見と、提案した曲げ剛性手法及びその記述性についての検討結果の概要を示す。

1. 曲げ変位を皿ばねに負荷した場合、軸荷重の増加に伴うたわみの変化は引張り側と圧縮側の「軸荷重-たわみ」関係の非対称性に起因して軸荷重（軸反力）が生じる。よって、振動特性を設計する際には、上部構造重量による軸荷重の他にロッキングの際に生じる軸荷重分も考慮に入れて上下方向の皿ばねの剛性を評価する必要がある。
2. 上下免震構造には上下方向以外の剛性を確保することが求められるが、皿ばねは大きな曲げ剛性を有していることが確認でき、その条件に有効と言える。
3. 皿ばねの「曲げモーメント-たわみ角」関係においては、全般に非線形性が弱いが、 $h/t$  ( $h$ :自由高さ、 $t$ :板厚) の大きい皿ばねほどたわみ角の進行に伴って曲げ剛性が大きくなっていく挙動を示す。これは設計の明快さ、あるいは安全性の面から考えて好都合と言える。
4. 皿ばねに加わる曲げ荷重を、周方向に細分割した微少区間において等分布な軸荷重ととらえ、等価円筒半径の概念と「軸荷重-たわみ」関係に関する設計公式を用いて微少区間における軸荷重、及びモーメントを求め、それらを全周に渡り積算することで皿ばねの曲げ荷重に対する「軸荷重-たわみ角」関係、及び「曲げモーメント-たわみ角」関係を求める曲げ評価式を開発した。
5. 曲げ評価式をFEM解をリファレンスとして検討した結果、適切な等価円筒半径を設定することにより、非常に良好な記述性を有していることが確認できた。

## INVESTIGATION OF MECHANICAL CHARACTERISTIC OF CONED DISH SPRING AS A VERTICAL ISOLATION DEVICE

(Investigation of structural analysis method of coned dish spring to bending load)

T. Sakai\*, K. Tsukimori\* and M. Morishita\*

### Abstract

In the series of R&D on vertical seismic isolation at equipment level, large bore coned dish springs are applied as isolation devices. When the isolated component is subjected to horizontal seismic excitation, a coupled response both in transverse and rocking motion takes place, and the dish springs are loaded with bending moment. Therefore it is necessary to make clear the mechanical characteristic of coned dish springs on against bending moment, which this report is concerned with. The results of the study are summarized as below.

- (1) When a bending moment is applied a coned dish spring, axial reaction force arises, because of difference of axial load and deflection relationship in compression and tension. Therefore, it is necessary to take this axial load into account in designing vibration characteristic of vertical isolation structure.
- (2) Vertical seismic isolation devices are required to have large stiffness in the directions other than axial deflection. About stiffness of rotation among them, it was confirmed that coned dish springs have large rotational stiffness, which is favored as vertical isolation devices.
- (3) The relation between bending moment and deflection angle of coned dish springs generally has linear characteristic. In addition, it was revealed from the close investigation that high h/t (height to thickness ratio) coned dish spring has characteristic that the stiffness of rotation increases with the advance of deflection angle. This tendency is good from clear and safe design standpoint.
- (4) Equations which estimate stiffness of rotation of coned dish spring was developed using a concept of equivalent cylinder radius.
- (5) It was confirmed that those equations can describe rotational stiffness of cone dish spring to a reasonable accuracy, when the equivalent cylinder radius is adequately suitably defined.

---

\* Structure and Material Research Section, O-arai Engineering Center, PNC

## 目 次

・要旨 .....	I
・図表リスト .....	IV
 1. 緒言 .....	1
 2. FEM 解析による皿ばねの曲げ荷重解析 .....	2
2.1 目的と方法 .....	2
2.2 解析条件及び解析ケース .....	2
(1) 解析方法 .....	2
(2) 解析対象 (モデル名と形状寸法) .....	2
(3) 材料定数 .....	3
(4) 境界条件 .....	4
(5) 有限要素モデル .....	4
(6) 荷重条件 .....	5
2.3 解析結果 .....	6
(1) 引張り軸荷重による皿ばねの力学的挙動 .....	6
(2) 曲げ変位による皿ばねの力学的挙動 .....	13
 3. 曲げ剛性評価手法 .....	23
3.1 曲げ剛性評価式導出にあたっての基本的な考え方 .....	23
3.2 等価円筒半径 $R_e$ の概念の導入 .....	25
3.3 曲げ剛性評価式の導出 .....	26
3.4 曲げ剛性評価式の記述性の検討 .....	28
 4. 考察 .....	37
 5. 結言 .....	40
 ・参考文献 .....	41
 ・APPENDIX	
> JIS B 2706-1995 皿ばね概説 .....	A-1

## List of Tables

Table. 2. 2. 1	皿ばねモデル名と形状寸法	3
Table. 2. 2. 2	材料定数	3
Table. 2. 2. 3	境界条件	4

## List of Figures

Fig. 2. 2. 1	皿ばね断面の概念図	3
Fig. 2. 2. 2	境界条件図	4
Fig. 2. 2. 3	有限要素モデル図	4
Fig. 2. 2. 4	曲げ荷重概念図	5
Fig. 2. 3. 1	荷重・境界条件	7
Fig. 2. 3. 2(a)	MODEL1における「軸荷重-たわみ」関係	8
Fig. 2. 3. 2(b)	MODEL1における「周方向応力-たわみ」関係	8
Fig. 2. 3. 3(a)	MODEL2における「軸荷重-たわみ」関係	9
Fig. 2. 3. 3(b)	MODEL2における「周方向応力-たわみ」関係	9
Fig. 2. 3. 4(a)	MODEL3における「軸荷重-たわみ」関係	10
Fig. 2. 3. 4(b)	MODEL3における「周方向応力-たわみ」関係	10
Fig. 2. 3. 5	全荷重範囲における「軸荷重-たわみ」関係の 形状パラメータによる比較	11
Fig. 2. 3. 6	圧縮範囲における「軸荷重-たわみ」関係の 形状パラメータによる比較	12
Fig. 2. 3. 7	引張り範囲における「軸荷重-たわみ」関係の 形状パラメータによる比較	12
Fig. 2. 3. 8(a)	MODEL1：「軸荷重-たわみ角」関係	15
Fig. 2. 3. 8(b)	MODEL1：「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係	15
Fig. 2. 3. 9(a)	MODEL2：「軸荷重-たわみ角」関係	16
Fig. 2. 3. 9(b)	MODEL2：「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係	16
Fig. 2. 3. 10(a)	MODEL3：「軸荷重-たわみ角」関係	17
Fig. 2. 3. 10(b)	MODEL3：「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係	17
Fig. 2. 3. 11	形状パラメータによる正規化「軸荷重-たわみ角」関係	18
Fig. 2. 3. 12	形状パラメータによる正規化「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係	18
Fig. 2. 3. 13(a)	MODEL1：「曲げモーメント-たわみ角」関係	19
Fig. 2. 3. 13(b)	MODEL1：「曲げ接線剛性-たわみ角」関係	19
Fig. 2. 3. 14(a)	MODEL2：「曲げモーメント-たわみ角」関係	20

## List of Figures (cont'd)

Fig. 2.3.14(b)	MODEL2：「曲げ接線剛性－たわみ角」関係	20
Fig. 2.3.15(a)	MODEL3：「曲げモーメント－たわみ角」関係	21
Fig. 2.3.15(b)	MODEL3：「曲げ接線剛性－たわみ角」関係	21
Fig. 2.3.16	形状パラメータによる正規化「曲げモーメント－たわみ角」関係	22
Fig. 2.3.17	形状パラメータによる正規化「曲げ接線剛性－たわみ角」関係	22
Fig. 3.1.1	曲げ荷重載荷時の皿ばね微少区間 $d\theta$ における 軸荷重とたわみの関係の考え方	24
Fig. 3.2.1	回転角と最大たわみの関係	25
Fig. 3.3.1	軸荷重と曲げ荷重が重畠した場合の皿ばねの変形挙動	27
Fig. 3.4.1(a)	MODEL1：「軸荷重－たわみ角」関係	31
Fig. 3.4.1(b)	MODEL1：「曲げモーメント－たわみ角」関係	31
Fig. 3.4.2(a)	MODEL1：Re 値をパラメータとした軸荷重評価式値の FEM 値に対するフィティング傾向	32
Fig. 3.4.2(b)	MODEL1：Re 値をパラメータとした曲げ荷重評価式値の FEM 値に対するフィティング傾向	32
Fig. 3.4.3(a)	MODEL2：「軸荷重－たわみ角」関係	33
Fig. 3.4.3(b)	MODEL2：「曲げモーメント－たわみ角」関係	33
Fig. 3.4.4(a)	MODEL2：Re 値をパラメータとした軸荷重評価式値の FEM 値に対するフィティング傾向	34
Fig. 3.4.4(b)	MODEL2：Re 値をパラメータとした曲げ荷重評価式値の FEM 値に対するフィティング傾向	34
Fig. 3.4.5(a)	MODEL3：「軸荷重－たわみ角」関係	35
Fig. 3.4.5(b)	MODEL3：「曲げモーメント－たわみ角」関係	35
Fig. 3.4.6(a)	MODEL1：Re 値をパラメータとした軸荷重評価式値の FEM 値に対するフィティング傾向	36
Fig. 3.4.6(b)	MODEL2：Re 値をパラメータとした曲げ荷重評価式値の FEM 値に対するフィティング傾向	36
Fig. 4.1	軸荷重載荷における皿ばね各モデルの「荷重－たわみ」関係	39

## 1. 緒言

『建屋水平免震を前提とし、これに機器レベルでの上下免震を組合わせることでプラント全体としての3次元免震を実現する』ことを最終的な目標において、『原子炉容器と一次系機器を搭載する共通スラブ構造（コモンデッキ）を、各機器廻りで機器と同心円状の大型皿ばねを用いた免震要素で上下方向に免震支持する』構造の研究開発を進めている。この中で上下免震要素として皿ばねを適用するにあたっては、皿ばねの強度評価の考え方を明確にする必要がある。

軸荷重に対する皿ばねの力学的特性評価については、皿ばねの軸荷重とたわみの関係式、軸荷重と（周方向）応力に関する式が Almen-Laszlo の式<sup>(1)</sup>をもとにして JIS<sup>(2)</sup>に記載されている（APPENDIX 1 参照）。また、他に Wempner<sup>(3)</sup>または浜田、瀬口<sup>(4)</sup>のエネルギー法による解がある。

一方、上下免震された機器に水平地震動が入力されると系は水平とロッキングの連成振動を生じる。ロッキング振動によって免震要素の上下応答や機器下部の水平応答が増幅されるばかりでなく、例えば地震時に原子炉容器の水平が確保されないなど種々の悪影響が懸念されることから、免震要素である皿ばねにはロッキングによる曲げ荷重に対し、高い剛性が求められる。よって本報においては、皿ばね上面にコサイン分布した強制変位を負荷する荷重条件で3次元シェルモデルによるFEM解析を行って、皿ばねの曲げ変位に対する力学的特性を明らかにするとともに、現状において整備されていない皿ばねの曲げ剛性評価手法を開発し、FEM解との比較によりその記述性の検討を行った結果について報告する。

地震時の皿ばねには本来、コモンデッキの重量とコモンデッキに搭載された原子炉容器及び一次系機器の重量である軸荷重とロッキングによる曲げ荷重の重畠した荷重が加わることになるが、今回の検討においては、皿ばねの持つ曲げに対する力学的特性を個別に把握するため、曲げ荷重のみ載荷されるケースを想定して検討を進めている。

また、対象とする皿ばねについては、軸荷重に対する非線形なばね特性が、自由高さ  $h$  と板厚  $t$  の比 ( $h/t$ ) が  $\sqrt{2}$  の値を境に3つの様相に分類される<sup>(5)</sup>ことを参考にし、それぞれの様相を代表する形状の皿ばね3種類を設定し、これらについて力学的評価を行うこととした。

## 2. FEM 解析による皿ばねの曲げ荷重解析

### 2.1 目的と方法

皿ばねの曲げ荷重に対する力学的挙動を把握するため、有限要素法による曲げ荷重解析を実施した。

1. 緒言に示したように皿ばねの曲げに対する力学的挙動を個別に把握するため、曲げ荷重が単独に載荷される荷重条件を設定する。具体的には、皿ばね座面の軸方向の自由度を拘束した上で、皿ばね上面の周方向に  $\cos\theta$  分布する変位制御による軸荷重を与える。そして皿ばねの曲げ剛性に関する力学的挙動として、その際の剛性に係わる皿ばね上面のたわみ角（回転角） $\phi$ に対する軸反力（軸荷重）及び曲げ荷重の関係を評価するものとする。なお、ここでの軸荷重（軸反力）は、皿ばね座面の節点反力の合計値とし、曲げ荷重については、皿ばね座面の各節点反力をそれぞれ回転中心からのモーメントアームを乗じ、それらを積算して算定するものとしている。以下の節に解析条件の詳細を示す。

### 2.2 解析条件及び解析ケース

FEM 解析による皿ばねの曲げ荷重解析において、設定した解析条件及び解析ケースを以下に示す。なお、解析は汎用非線形構造解析システム「F I N A S」を用いて行なった。

#### (1) 解析方法

皿ばねは非線形ばね剛性を有することから、解析は幾何学的非線性を考慮した弾性大変形解析にて実施した。

#### (2) 解析対象（モデル名と形状寸法）

皿ばねは軸荷重に対する剛性の非線形挙動が、自由高さ  $h$  と板厚  $t$  の比 ( $h/t$ ) により以下のように分類される。<sup>(5)</sup>

$h/t > \sqrt{2}$  : 荷重  $P$  の極大極小に相当するたわみ  $\delta$  が存在し、その間ではばね定数が負。

$h/t = \sqrt{2}$  :  $\delta = h$  の一点で「軸荷重-たわみ」曲線の傾きが 0.

$h/t < \sqrt{2}$  : 常にばね定数は正。

上記軸荷重に対する非線形ばね特性を参考にして、これらの分類を代表する形状の皿ばねとして Table 2.2.1 に示す 3 モデルを設定し、曲げ荷重解析を実施した。

Table 2.2.1 皿ばねモデル名と形状寸法

モデル名	外径 D(mm)	内径 d(mm)	板厚 t(mm)	高さ h(mm)	h/t
MODEL 1	650	500	12.5	9.4	0.75
MODEL 2	650	500	12.5	17.7	1.41
MODEL 3	650	500	12.5	25.0	2.00

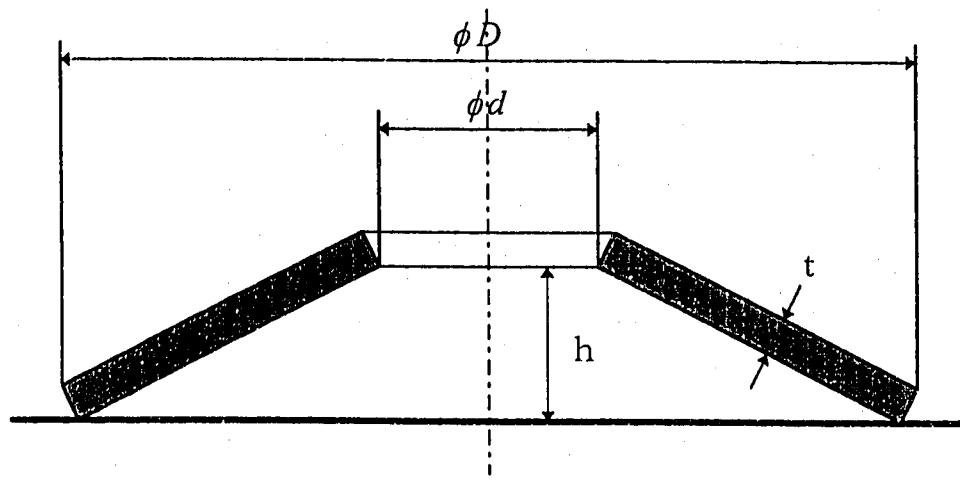


Fig. 2.2.1 皿ばね断面の概念図

## (3) 材料定数

解析に用いた材料定数を、Table 2.2.2 に示す。

Table 2.2.2 材料定数

材料特性し種類	Value	単位
縦弾性係数 E	$2.1 \times 10^4$	kgf/mm <sup>2</sup>
ポアソン比 ν	0.30	

## (4) 境界条件

設定した境界条件を Table 2.2.3 に示す。 (Fig. 2.2.2 参照)

Table 2.2.3 境界条件

node \ 自由度	r	z	$\beta$
上面 i	Free	Free	Free
底面 j	Free	Fix	Free

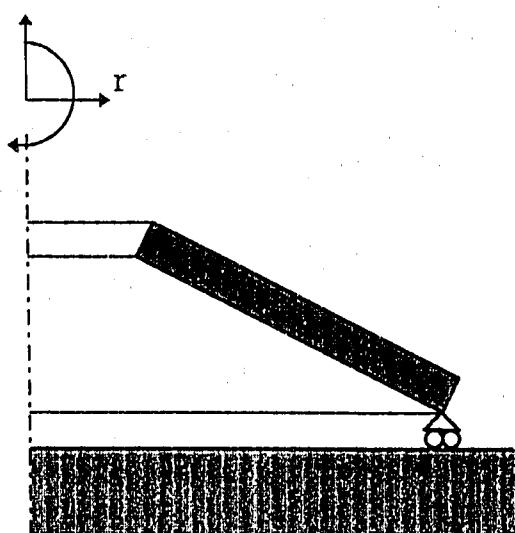


Fig. 2.2.2 境界条件図

## (5) 有限要素モデル

有限要素モデルにおいては、適用要素として 4 節点四辺形シェル低減積分要素 QFLA4RT を用いて、曲げ荷重の対称性から 3 次元  $180^\circ$  モデルとする。 (Fig. 2.2.3 参照)

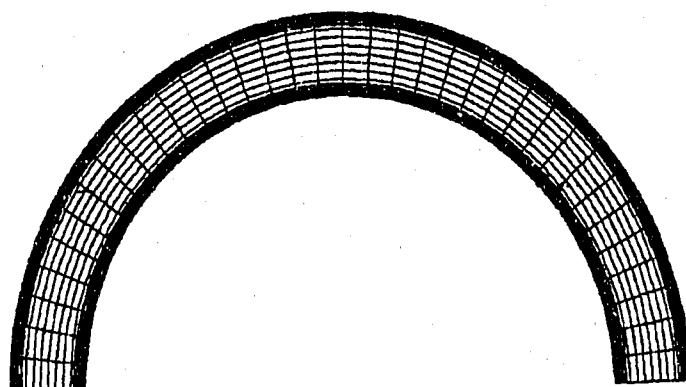


Fig. 2.2.3 有限要素モデル図

## (6) 荷重条件

皿ばねの曲げに対する力学的挙動を把握するため、曲げ荷重が単独に載荷される荷重条件を設定する。具体的には、皿ばね座面の軸方向の自由度を拘束した上で、皿ばね上面の周方向に  $\cos\theta$  分布する変位制御による軸荷重を与える。(Fig. 2.2.4 参照)

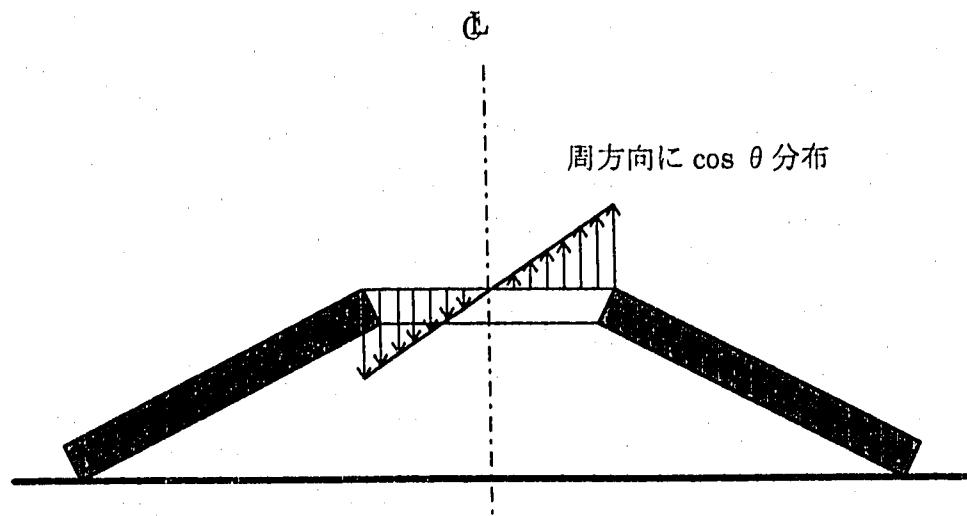


Fig. 2.2.4 曲げ荷重概念図

## 2.3 解析結果

### (1) 引張り軸荷重載荷による皿ばねの力学的挙動

皿ばねの曲げ剛性評価における曲げ荷重は、2.2 (5) の荷重条件のところで示したように、皿ばね上面の周方向に  $\cos \theta$  分布する軸荷重を変位制御で与えるものである。これは皿ばね上面の  $90^\circ$ ~ $270^\circ$  ラインを対称軸として、圧縮側と引張り側の軸荷重領域が対称に設定されるものである。ここで圧縮側に作用する軸荷重についての皿ばねの力学的挙動は、JIS 等に設計公式が記載されており (APPENDIX 1 参照) 、明らかである。一方、引張り側に作用する軸荷重についての皿ばねの力学的挙動について検討されたものは見当たらず、曲げ剛性を評価する前段階としてこれらについて設計公式及び解析による検討を行なった。

対象とする皿ばねは Table 2.2.1 に示した 3 モデルとし、荷重条件及び境界条件は Fig. 2.3.1 に示すように、皿ばね底面の鉛直方向のみ拘束した上で、自由高さ  $h$  に対し  $0.75 h$ までの鉛直上方への変位制御による軸荷重を皿ばね上面に与える。他の解析における条件は 2.2 節で示した条件と同じである。

Fig. 2.3.2 ~ Fig. 2.3.4 に各モデルごとの「軸荷重ーたわみ」関係と皿ばね断面の 4 つのかど点における「周方向応力ーたわみ」関係について、設計公式の解と解析結果を併記して示している。なお、ここでは参考として圧縮側の結果も含めて示している。また、Fig. 2.3.5 ~ Fig. 2.3.7 に形状パラメータによる「軸荷重ーたわみ」関係として 3 モデルを比較した結果を、引張り側から圧縮側に渡る全荷重領域、圧縮領域、引張り領域のそれぞれについて示している。ここでは、 $0.75 h$  における荷重及びたわみ量を基準とした正規化荷重と正規化たわみの関係として表している。

最初に引張り荷重下における「軸荷重ーたわみ」関係、及び「周方向応力ーたわみ」関係について設計公式値と解析解を比較すると、一部を除き 3 モデルのいずれについても設計公式値は解析値に比べ幾分剛性及び発生応力を大きく評価する傾向にあるが、両者はほぼ一致した結果となっており、これから皿ばねの引張り荷重に対する力学的特性は、ここで示される挙動をとるものと判断できる。

次に「軸荷重ーたわみ」関係の圧縮側と引張り側の挙動を比較すると、どのモデルにおいても対称な挙動とはなっておらず、Fig. 2.3.5 から判断されるように、モデルによりその程度の差はあるがその曲線の傾きから、圧縮側がたわみ量の増加に伴って剛性が小さくなっていく傾向にあるのに対し、引張り側においては逆に剛性が増していく傾向となっていることが確認できる。また剛性自体の大きさも対応する同じたわみ量に対して引張り側の方が圧縮側に比べて大きいことがわかる。なお、3 モデルの挙動を比べると  $h/t$  ( $t$  は板厚) の大きな皿ばね (MODEL1, MODEL2, MODEL3 の順に  $h/t$  の値は大きくなる) ほど、たわみに対する剛性の非線形性が大きくなっている。

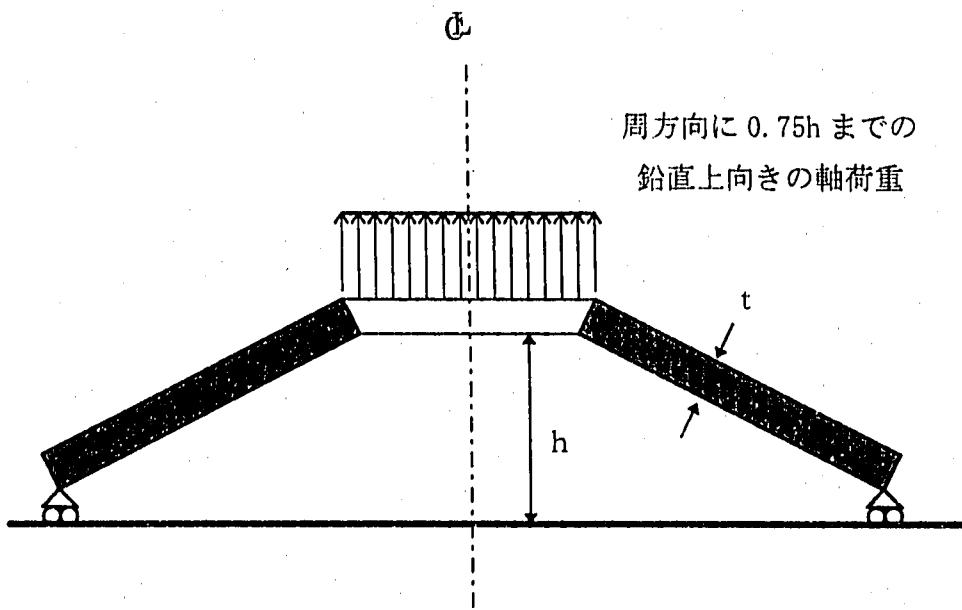


Fig. 2.3.1 荷重・境界条件

Fig. 2.3.2(a) MODEL1における「軸荷重ーたわみ」関係

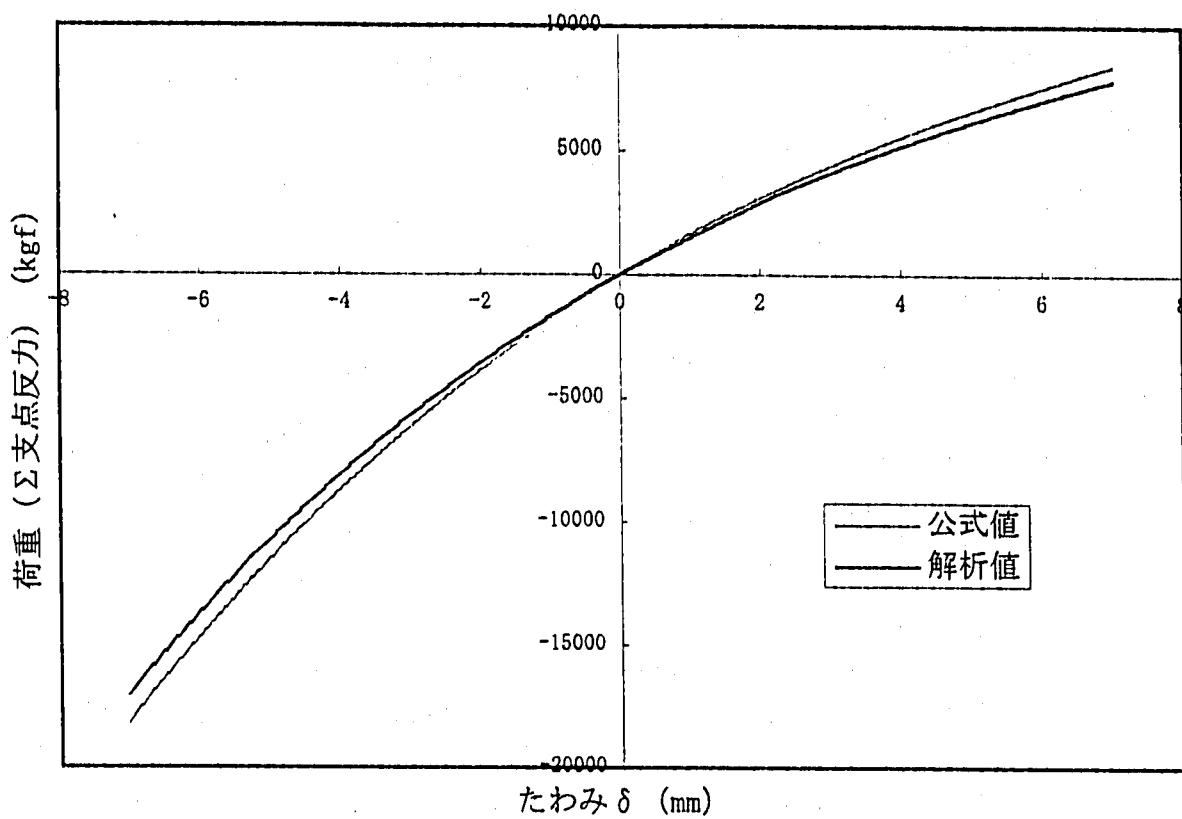
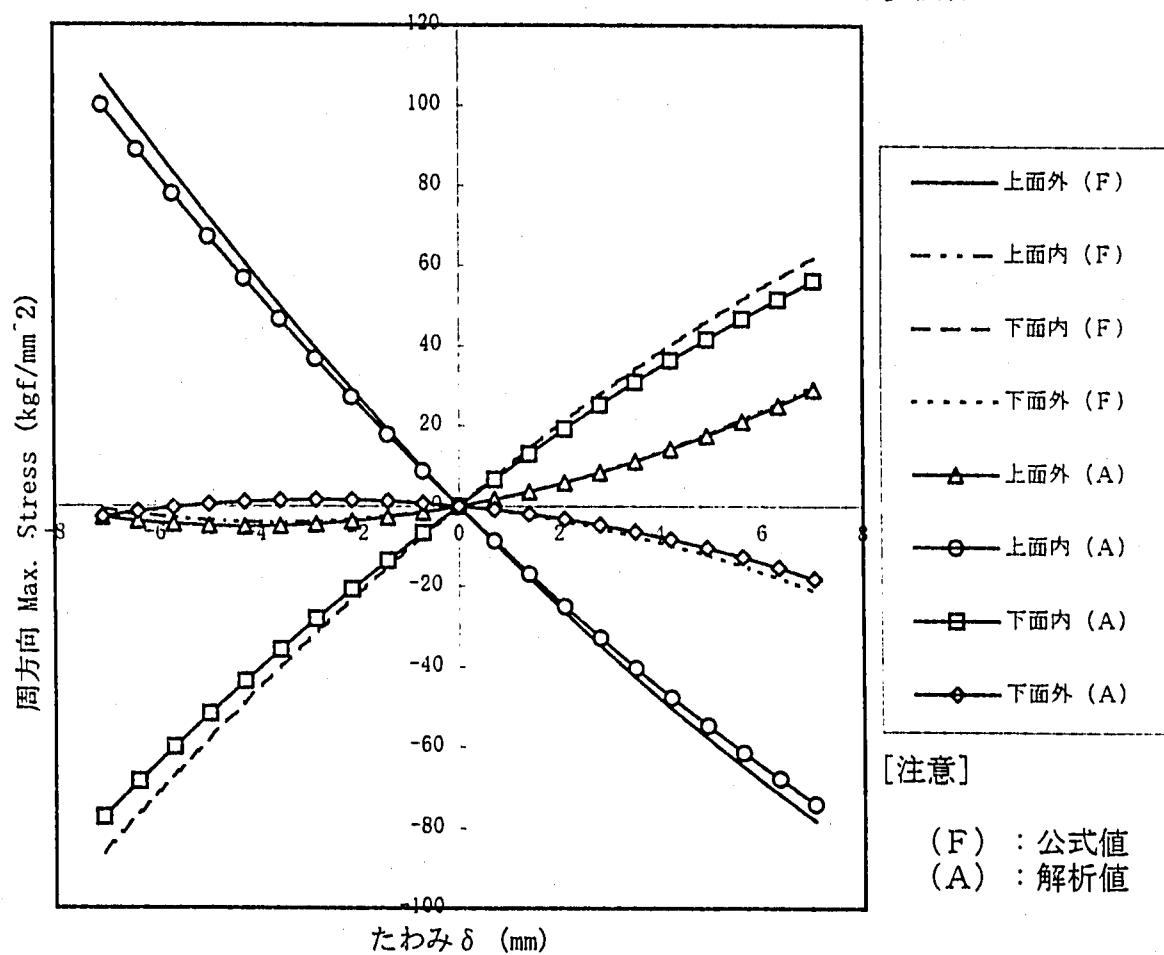


Fig. 2.3.2(b) MODEL1における「周方向応力ーたわみ」関係



[注意]

(F) : 公式値

(A) : 解析値

Fig. 2.3.3(a) MODEL2における「軸荷重ーたわみ」関係

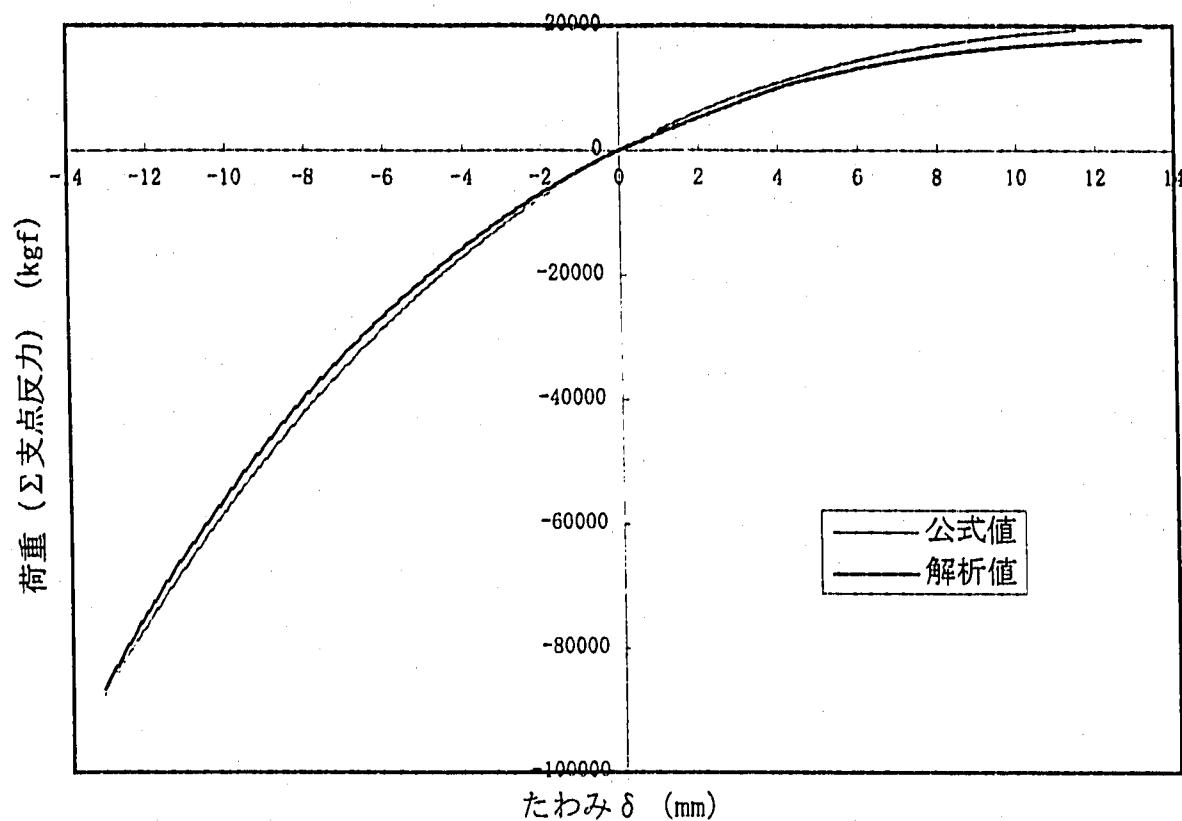


Fig. 2.3.3(b) MODEL2における「周方向応力ーたわみ」関係

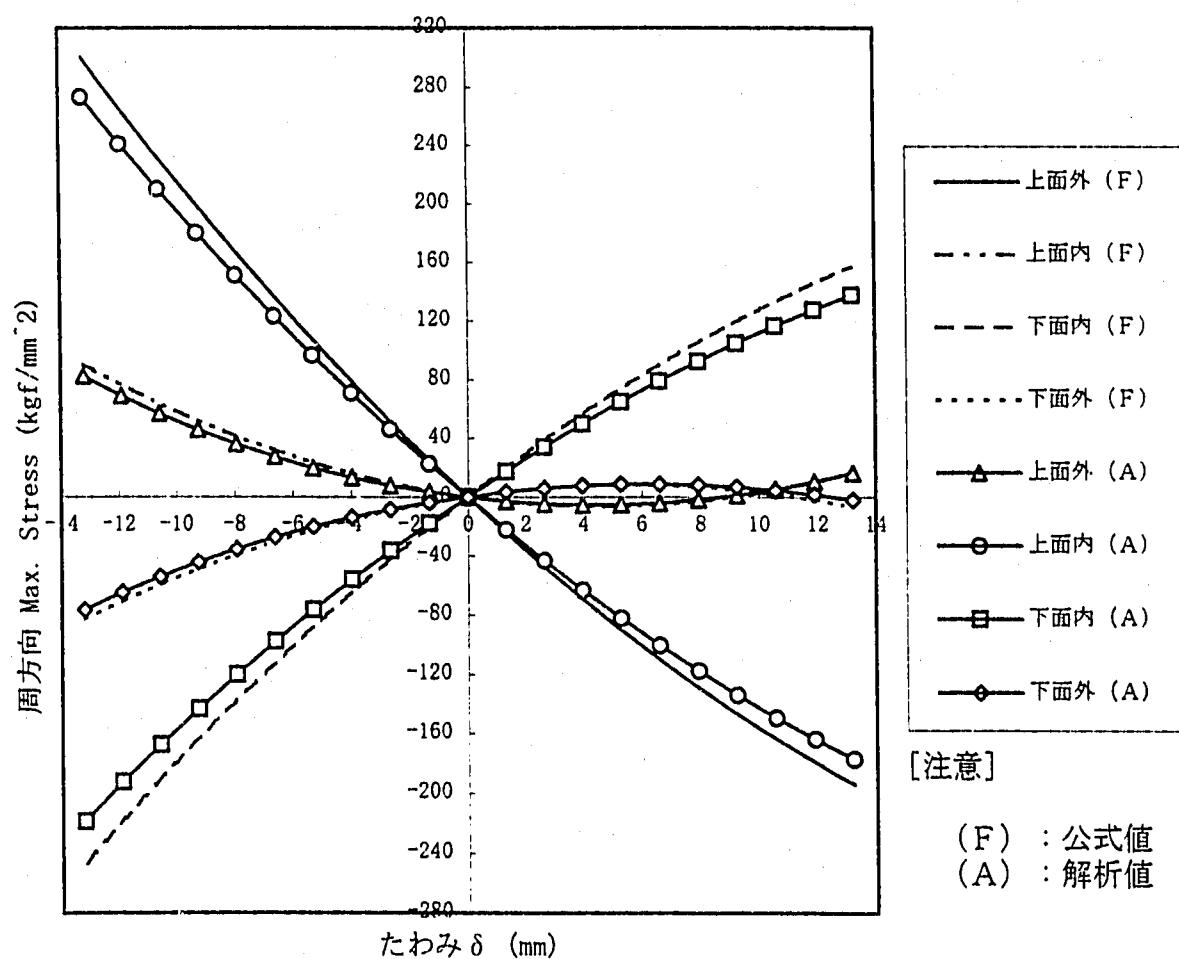


Fig. 2.3.4(a) MODEL3における「軸荷重ーたわみ」関係

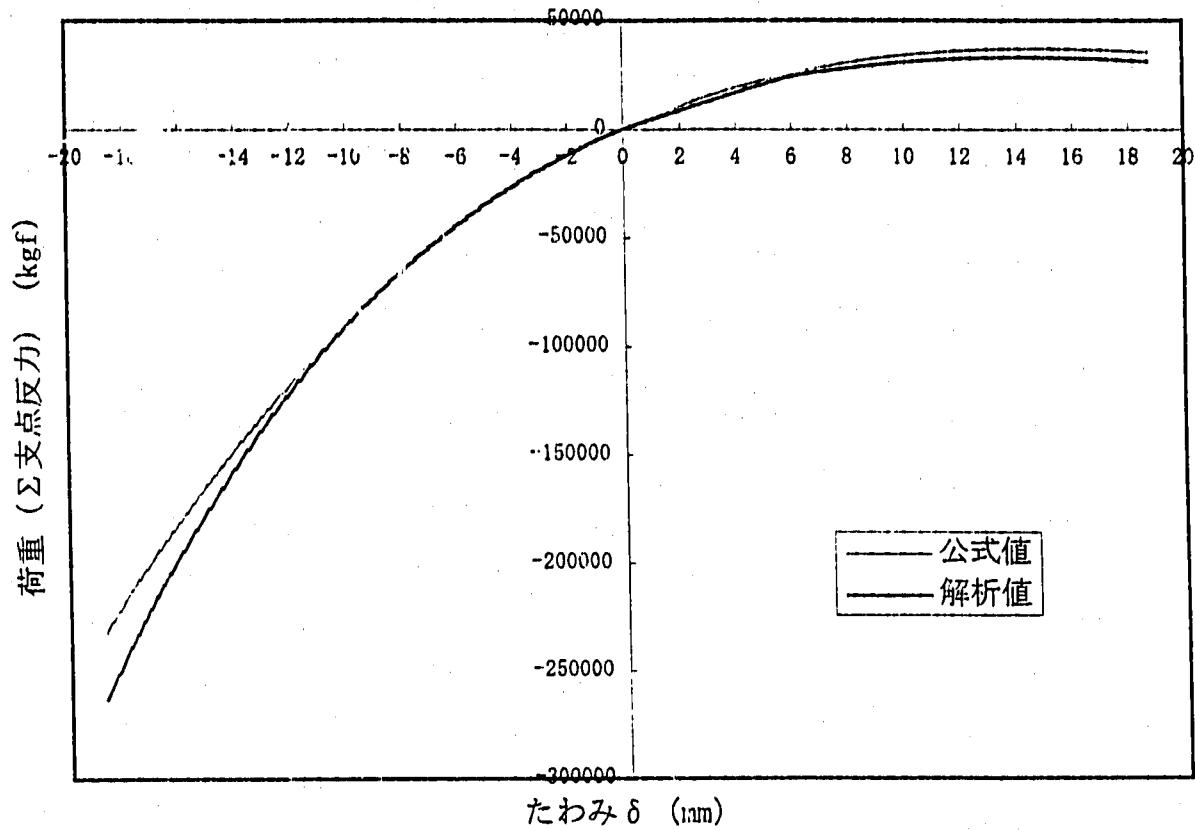


Fig. 2.3.4(b) MODEL3における「周方向応力ーたわみ」関係

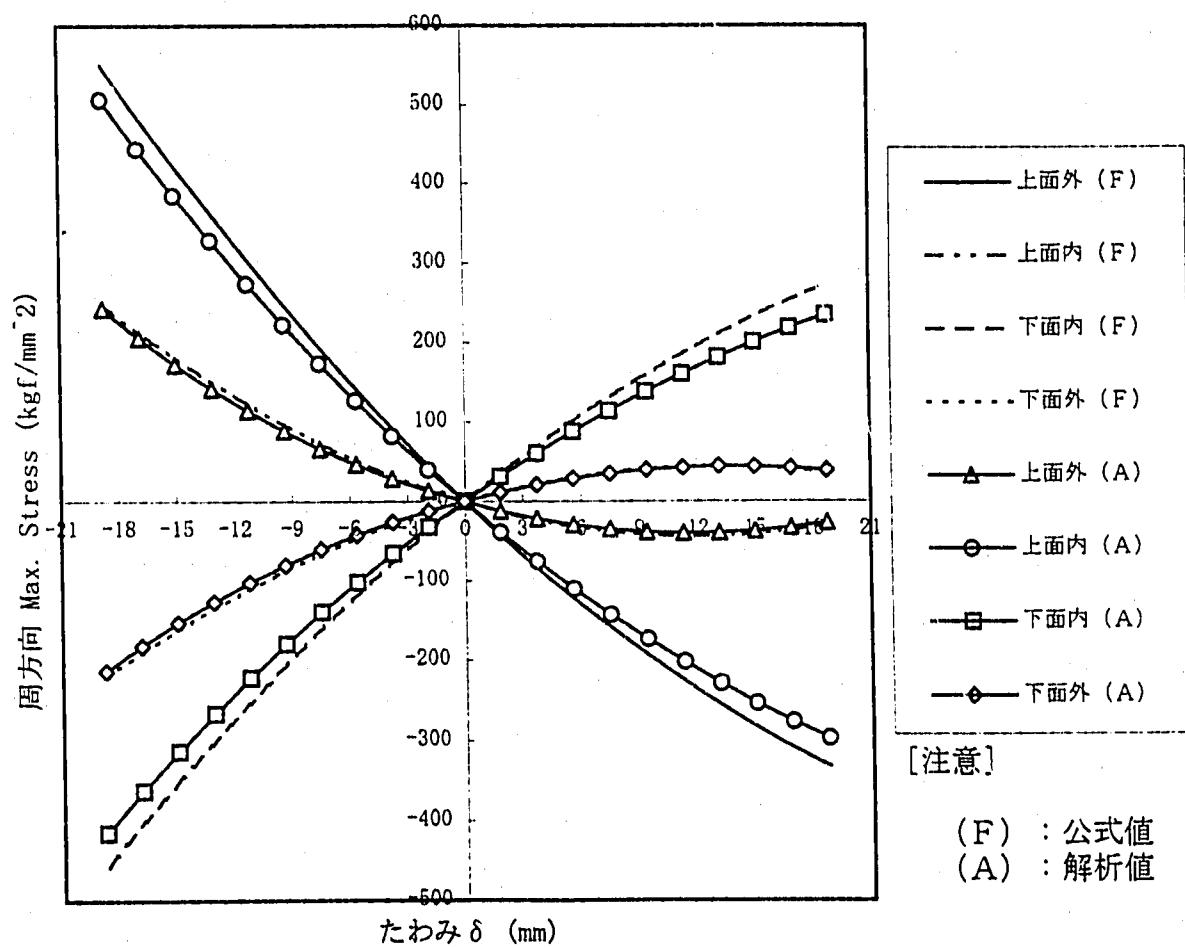


Fig. 2.3.5 全荷重範囲における「軸荷重-たわみ」関係の  
形状パラメータによる比較

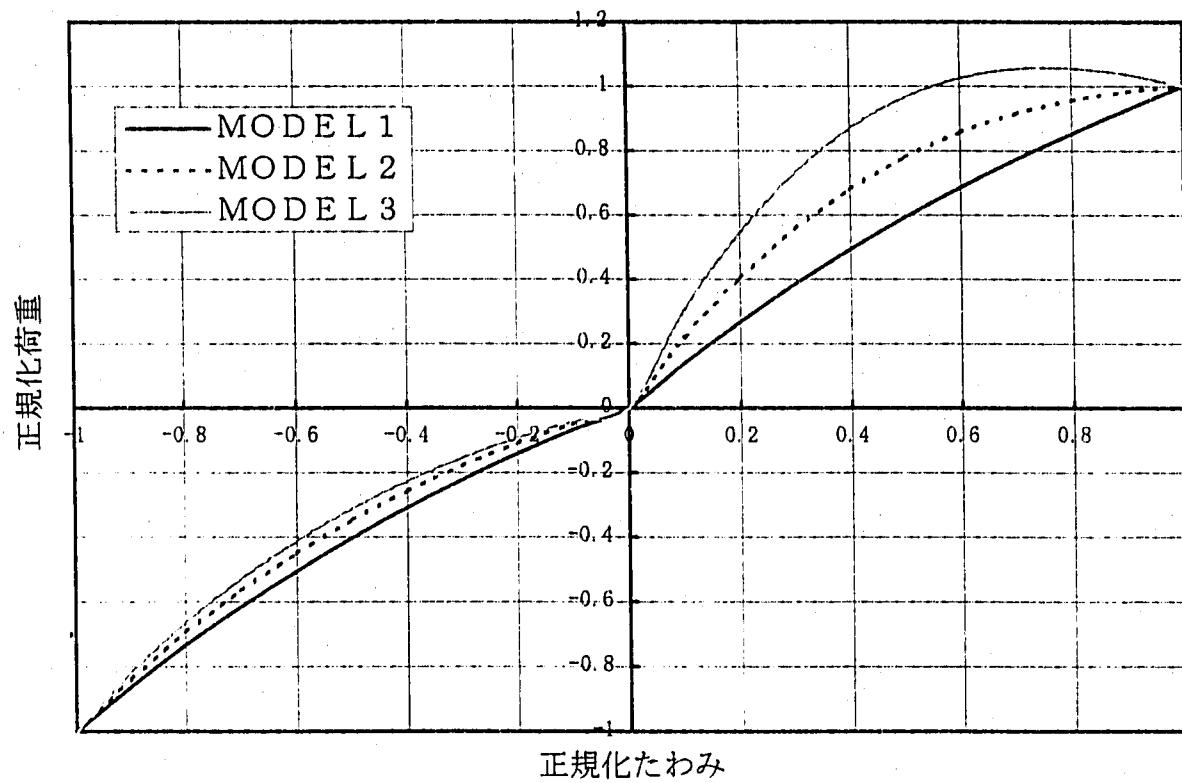


Fig. 2.3.6 圧縮範囲における「軸荷重ーたわみ」関係の  
形状パラメータによる比較

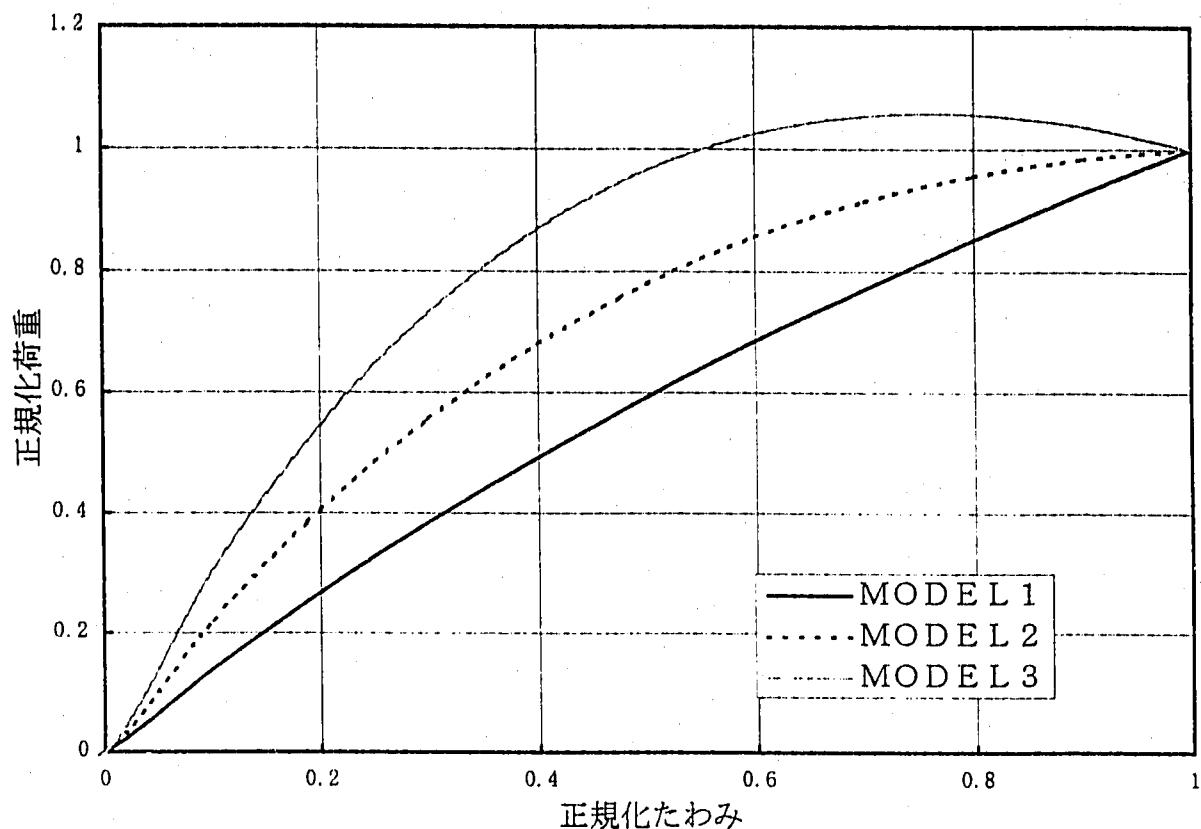
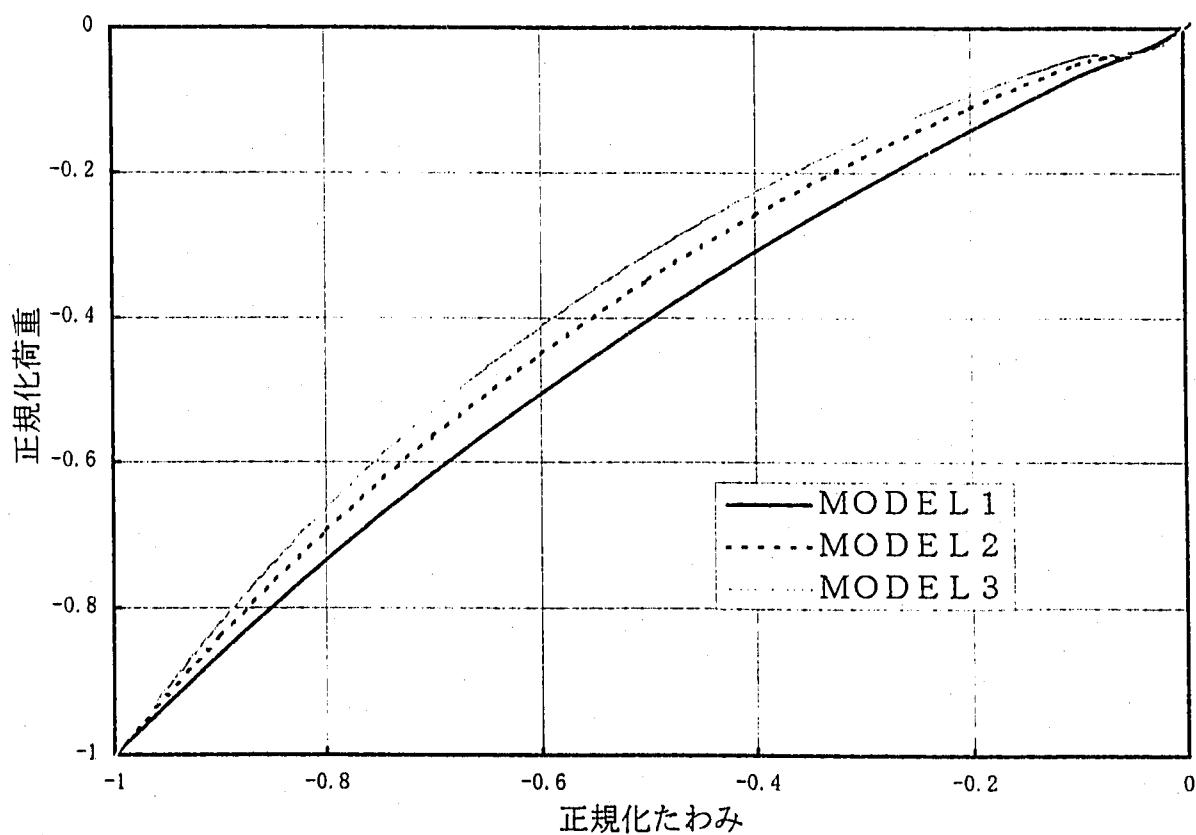


Fig. 2.3.7 引張り範囲における「軸荷重ーたわみ」関係の  
形状パラメータによる比較



## (2) 曲げ変位による皿ばねの力学的挙動

2.1節の目的と方法に示したように曲げ荷重が単独に載荷される条件、すなわち皿ばね座面の軸方向の自由度を拘束した上で皿ばね上面の周方向に  $\cos\theta$  分布する変位制御による軸荷重を与える条件下において、皿ばね上面のたわみ角（回転角） $\phi$ に対する軸荷重（軸反力）及び曲げ荷重の関係を、皿ばねの曲げ剛性の挙動として評価する。ここで軸荷重（軸反力）は、皿ばね座面の節点反力の合計値とし、曲げ荷重については、皿ばね座面の各節点反力を回転中心（90°-270° ライン）からのそれぞれのモーメントアームを乘じ、それらを積算して算定するものとしている。皿ばねの曲げ剛性として「軸荷重（軸反力）-たわみ角」の関係を評価の対象としたのは、前節 2.3(1) 引張り軸荷重による皿ばねの力学的挙動の検討において示した軸方向変位に対する皿ばね反力が、引張り側と圧縮側とでは対称な挙動とはならない結果に起因し、曲げ荷重として与える皿ばね上面の 90°-270° ラインに対称な周方向に  $\cos\theta$  分布する軸方向強制変位に対しても、周方向にトータルな軸方向反力は 0 とならないことが判明したことによる。

解析モデルである MODEL1 ~ MODEL3 に対する「軸荷重-たわみ角」関係、及び「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係をそれぞれ Fig. 2.3.8 ~ Fig. 2.3.10 に示す。また、形状パラメータ比較として前記 3 モデルについて比較した、正規化した「軸荷重-たわみ角」関係を Fig. 2.3.11 に、「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係を Fig. 2.3.12 に示す。ここで正規化した「軸荷重-たわみ角」関係とは、強制変位として与える皿ばね上面の  $\cos\theta$  分布する変位の内、最大となる 0°-180° ラインのたわみ量が  $0.75h$  ( $h$ : 皿ばね自由高さ) になった際のたわみ角及び軸荷重を基準として各たわみ角段階の軸荷重の関係をとったものである。

各モデルの「軸荷重-たわみ角」関係は、どれも変位制御によるたわみ角の増加に伴って軸荷重が放物線状に増しており、Fig. 2.3.11 の正規化した「軸荷重-たわみ」関係の各モデルのグラフ線がほぼ重なっていることから、正規化したたわみ角の各段階における剛性の変化率は  $h/t$  の形状パラメータによらず一定の傾向を示している。そして各モデルの「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係のグラフでわかるようにその剛性は、ほぼ線形に変化することがわかる。一方、Fig. 2.3.12 の形状パラメータによる「軸荷重接線剛性-たわみ角」関係のグラフから、同たわみ角における軸荷重接線剛性は、 $h/t$  の大きな皿ばねほど大きいことがわかる。最大たわみ量  $0.75h$  時の各モデルの最大軸剛性値  $K_n$  は、 $h/t=0.75$  の MODEL1 が  $K_n = -2.542 \times 10^3 \text{ kgf}/^\circ$  、 $h/t=1.41$  の MODEL2 が  $K_n = -7.888 \times 10^3 \text{ kgf}/^\circ$  、 $h/t=2.0$  の MODEL3 が  $K_n = -17.952 \times 10^3 \text{ kgf}/^\circ$  となっている。

次に、Fig. 2.3.13 ~ Fig. 2.3.15 に MODEL1 ~ MODEL3 それぞれに対する「曲げモーメント-たわみ角」関係、及び「曲げ接線剛性-たわみ角」関係を示す。また、形状パラメータ比較として前記 3 モデルについて比較した、正規化した「曲げモーメント-たわみ角」関係を Fig. 2.3.16 に、「曲げ接線剛性-たわみ角」関係を Fig. 2.3.17 に示す。ここでの

正規化した「曲げモーメントーたわみ角」関係は、前記 Fig. 2.3.11 の正規化した「軸荷重ーたわみ」関係と同様に最大たわみ量  $0.75h$  ( $h$  : 盆ばね自由高さ) になった際のたわみ角及び曲げモーメントを基準として各たわみ角段階の曲げモーメントの関係をとったものである。

まず Fig. 2.3.13 ~ Fig. 2.3.15 の各モデルの「曲げモーメントーたわみ角」関係をみると、両者の関係は、モデルによる程度の違いはあるが全体的にはほぼ線形に近い関係にあることがわかる。そのモデルによる違いは、Fig. 2.3.16 の形状パラメータによる正規化した「曲げモーメントーたわみ角」関係をみると、 $h/t$  の小さい盆ばねほど、その線形性の度合いは大きく、 $h/t$  が大きくなるに従って次第に非線形性を帯びていく傾向にあることがわかる。詳細にこれら曲げ剛性の変化を把握するため、Fig. 2.3.13 ~ Fig. 2.3.15 の各モデルの「曲げ接線剛性ーたわみ角」関係をみると、 $h/t$  の大きなモデルほどたわみ角が増すに従って剛性も増す傾向にあることがわかる。次に Fig. 2.3.17 の形状パラメータによる「曲げ接線剛性ーたわみ角」関係をみると、同じたわみ角においては、 $h/t$  の大きな盆ばねほど曲げ剛性が大きくなることがわかる。最大たわみ量  $0.75h$  の範囲における各モデルの曲げ剛性値  $K_m$  は、 $h/t=0.75$  の MODEL1 が  $K_m=0.963 \times 10^6 \sim 1.011 \times 10^6 \text{ kgfmm}/^\circ$  、 $h/t=1.41$  の MODEL2 が  $K_m=1.512 \times 10^6 \sim 2.019 \times 10^6 \text{ kgfmm}/^\circ$  、 $h/t=2.0$  の MODEL3 が  $K_m=2.337 \times 10^6 \sim 4.020 \times 10^6 \text{ kgfmm}/^\circ$  となっている。

Fig.2.3.8 (a) MODEL1 : 「軸荷重ーたわみ角」関係

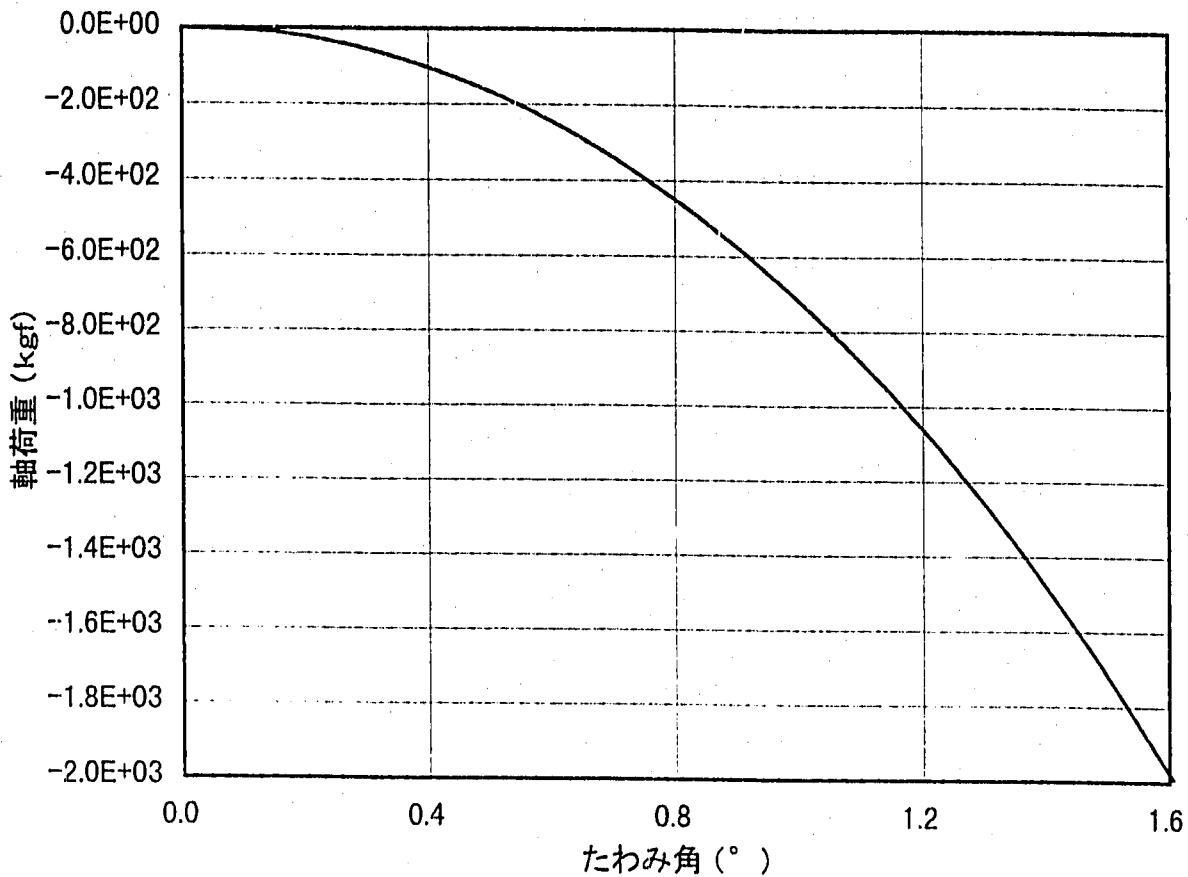


Fig.2.3.8 (b) MODEL1 : 「軸荷重接線剛性ーたわみ角」関係

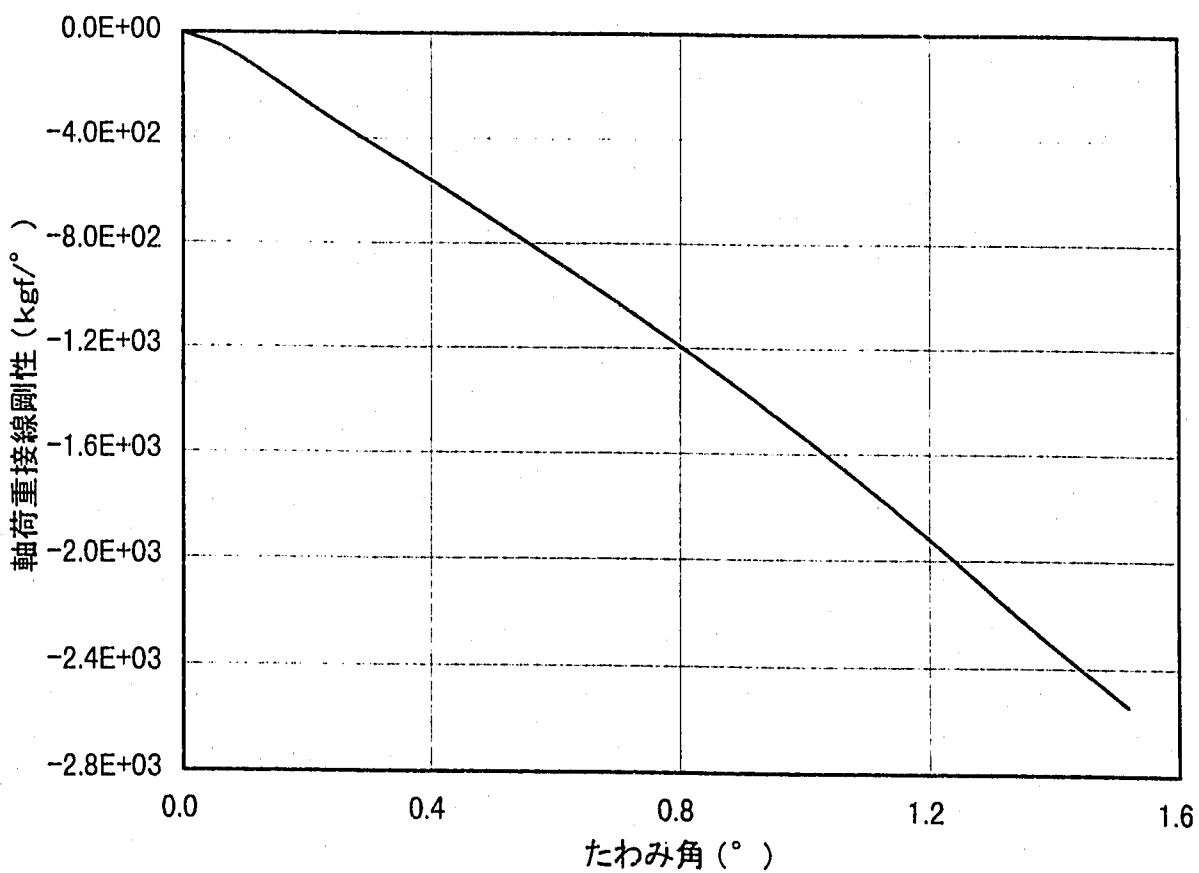


Fig.2.3.9 (a) MODEL2 : 「軸荷重ーたわみ角」関係

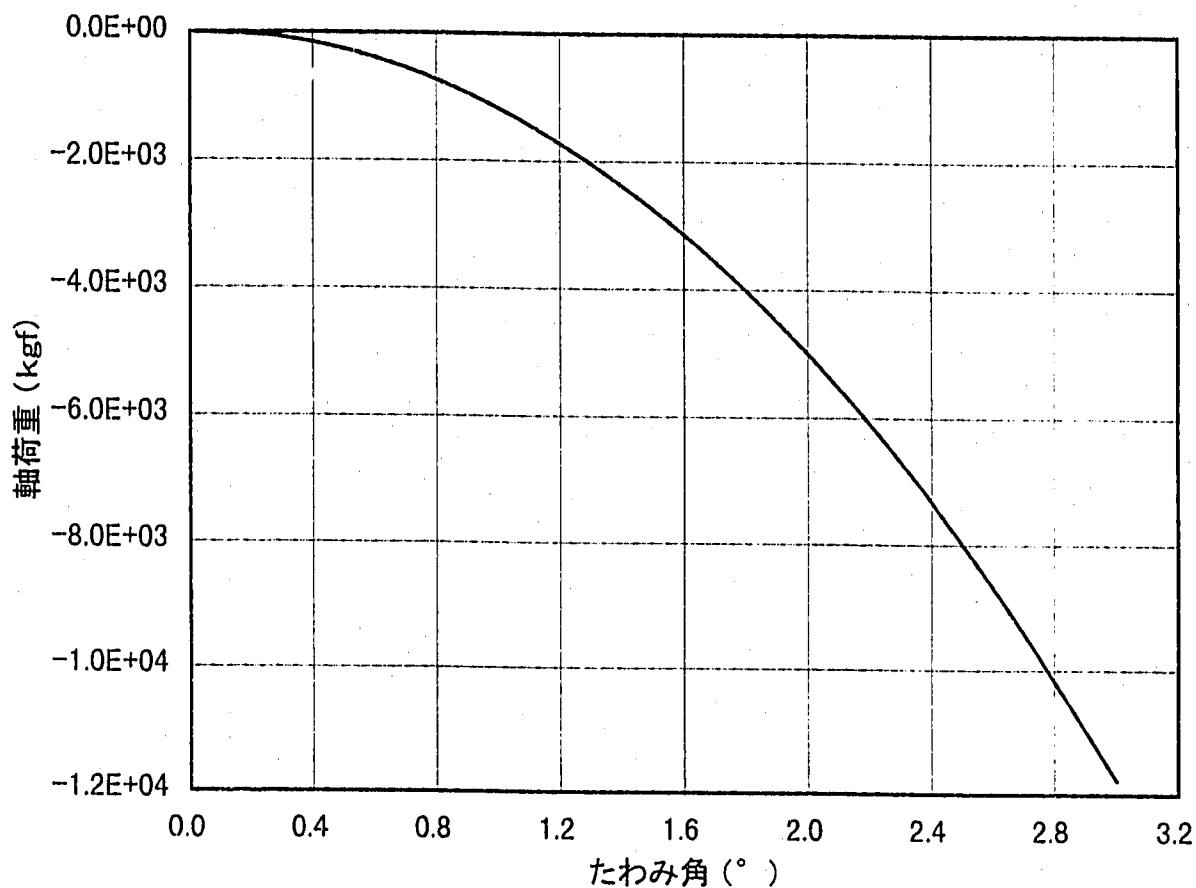


Fig.2.3.9 (b) MODEL2 : 「軸荷重接線剛性ーたわみ角」関係

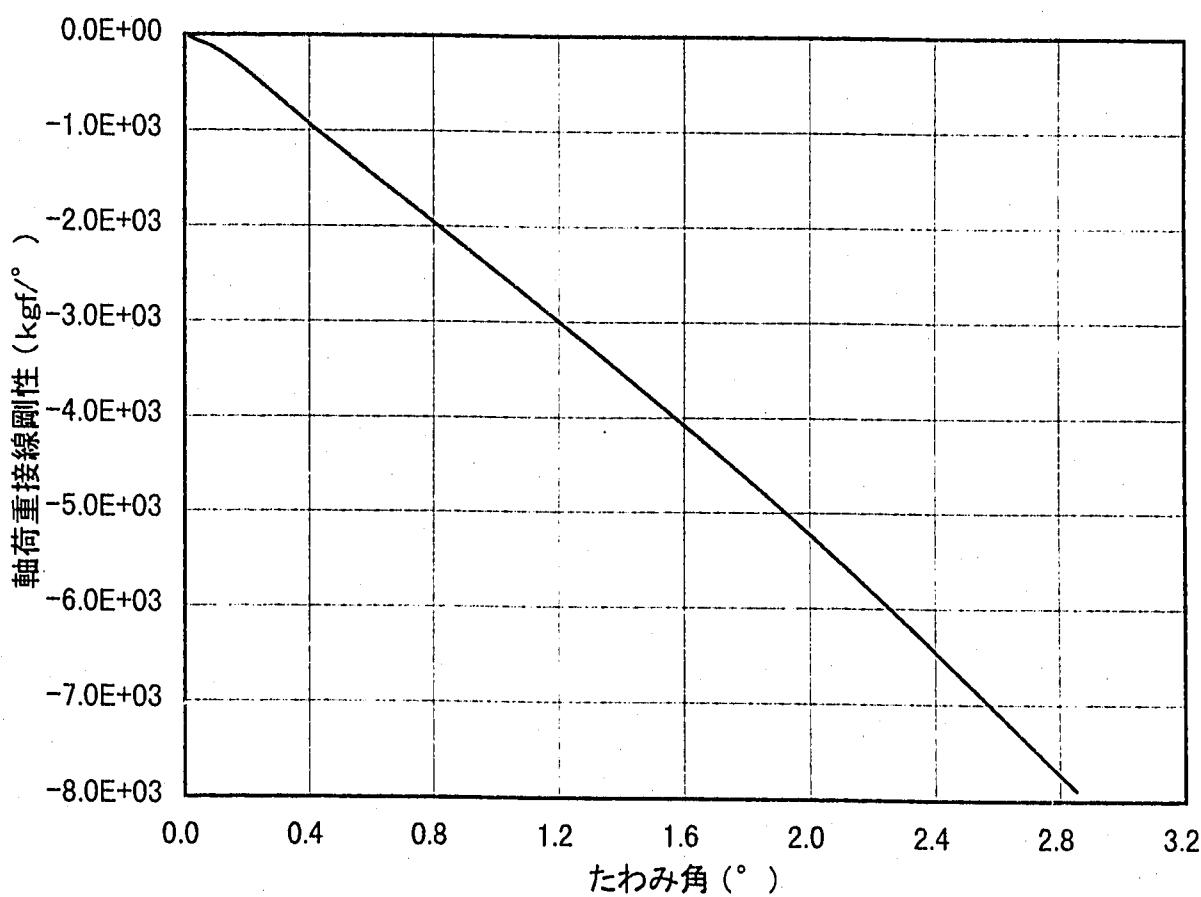


Fig.2.3.10 (a) MODEL3 : 「軸荷重ーたわみ角」関係

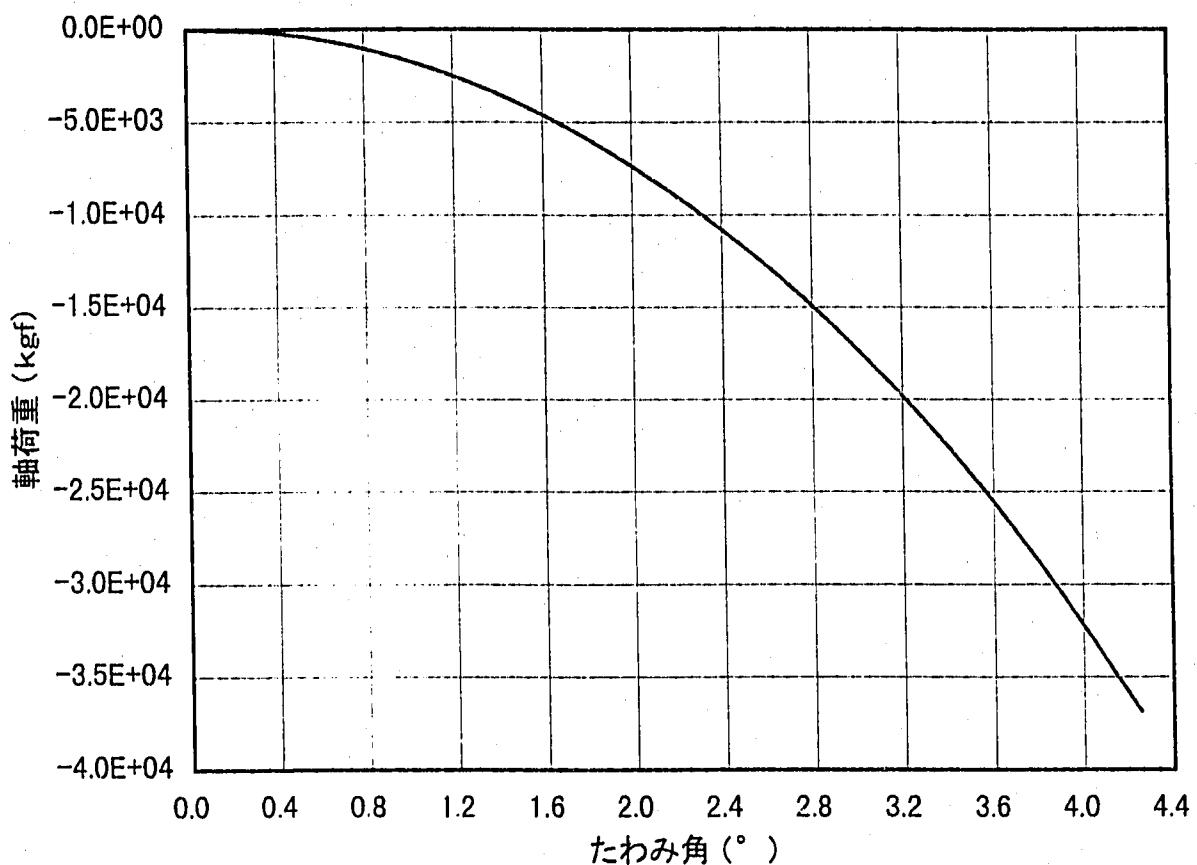


Fig.2.3.10 (b) MODEL3 : 「軸荷重接線剛性ーたわみ角」関係

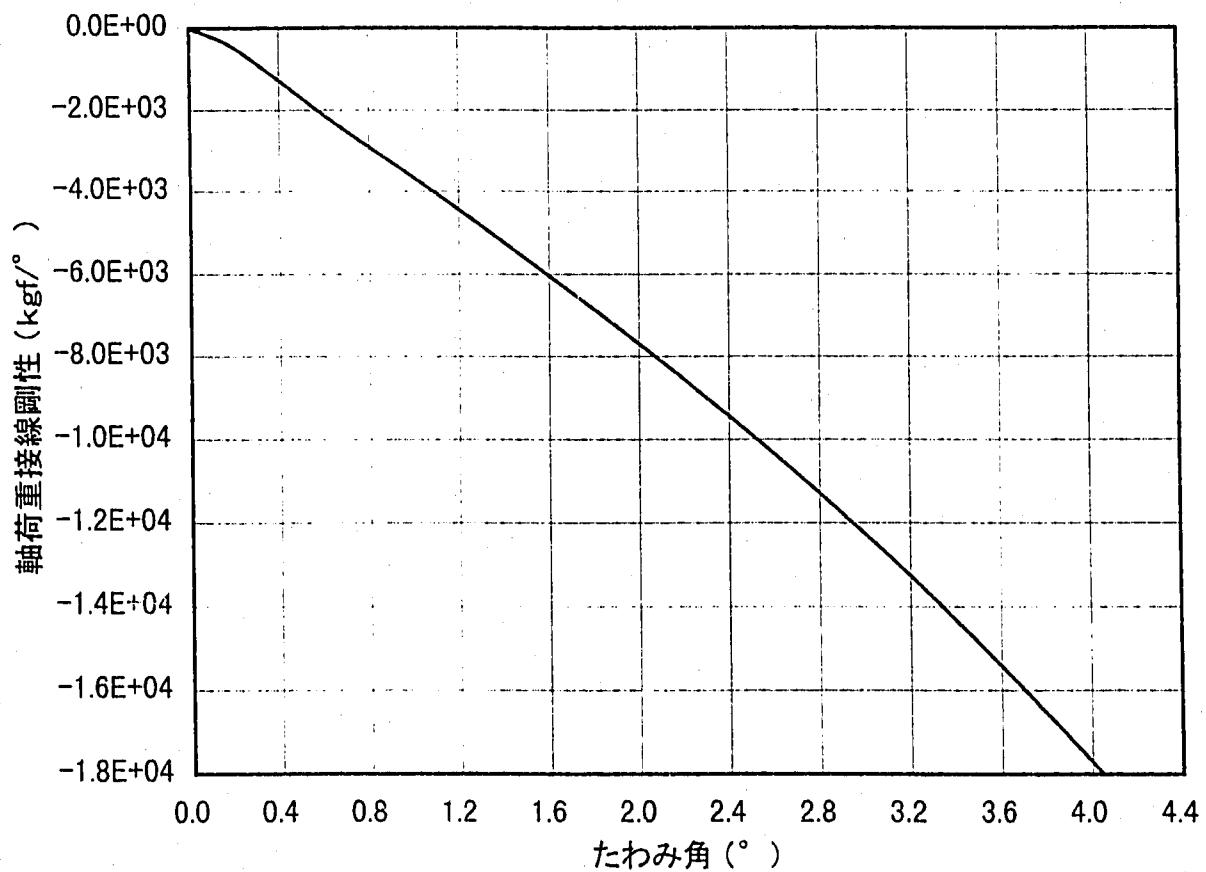


Fig.2.3.11 形状パラメータによる 正規化「軸荷重－たわみ角」関係

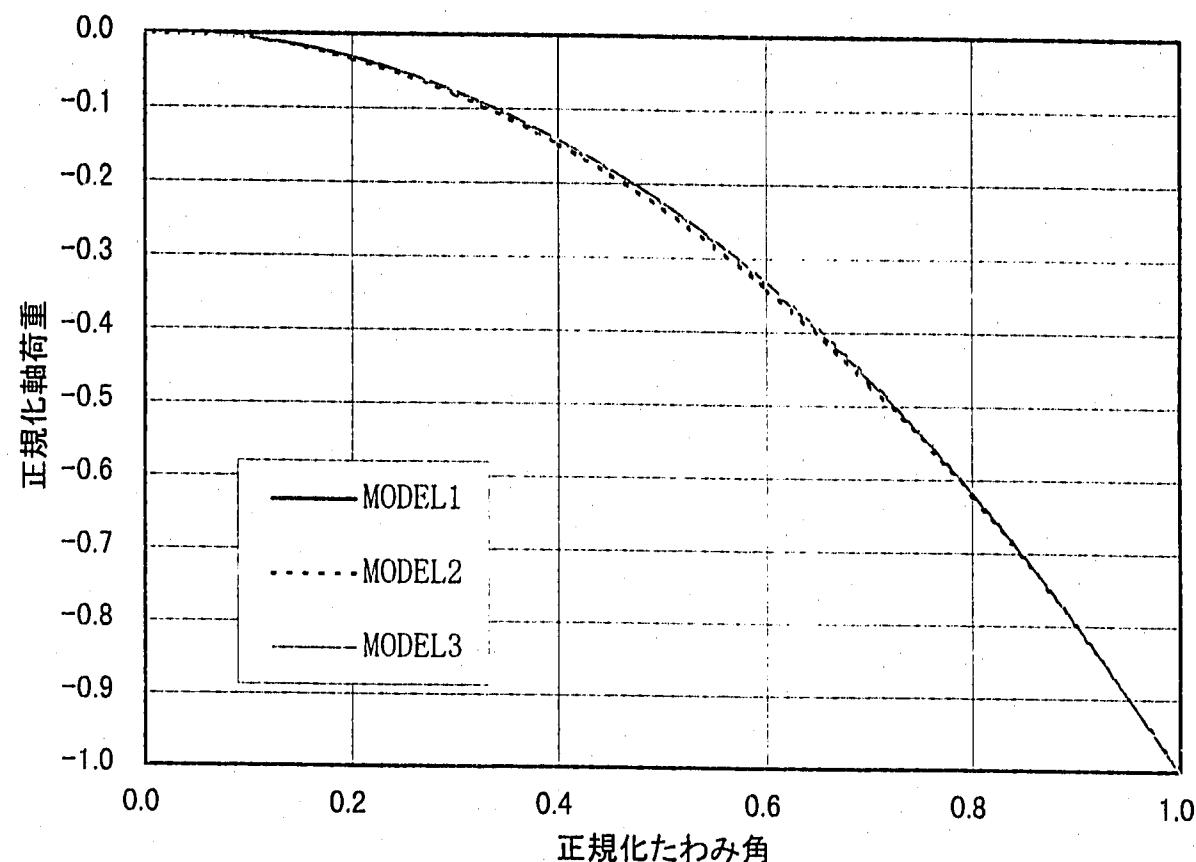


Fig.2.3.12 形状パラメータによる「軸荷重接線剛性－たわみ角」関係

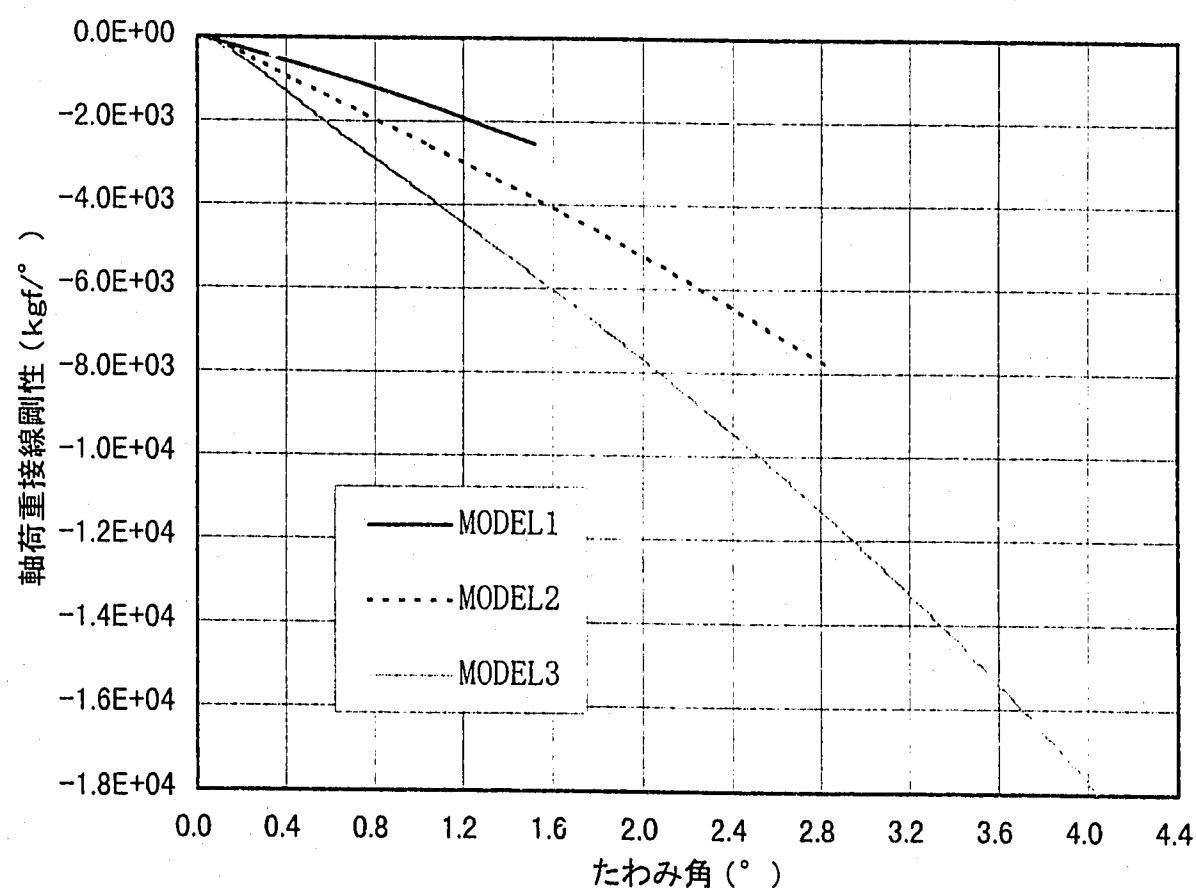


Fig.2.3.13 (a) MODEL1 : 「曲げモーメントーたわみ角」関係

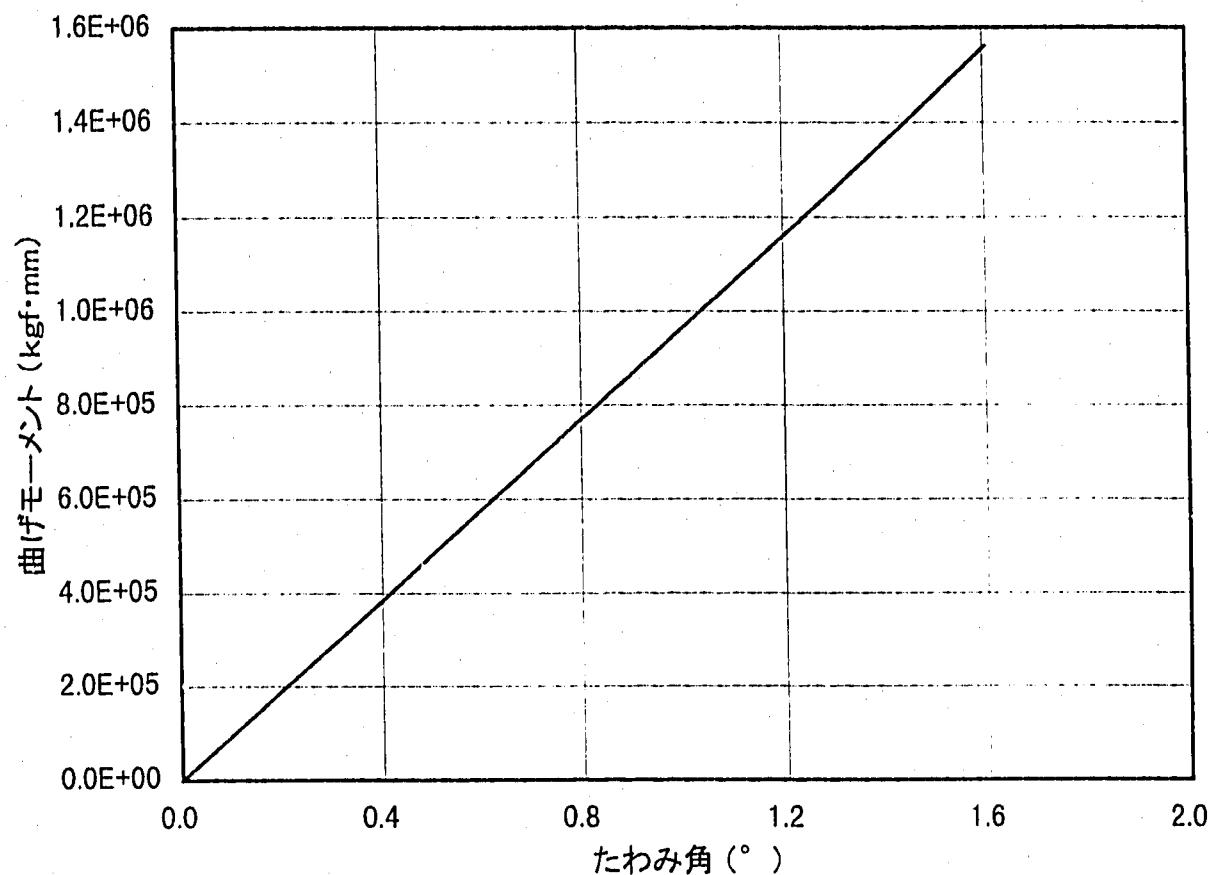


Fig.2.3.13 (b) MODEL1 : 「曲げ接線剛性ーたわみ角」関係

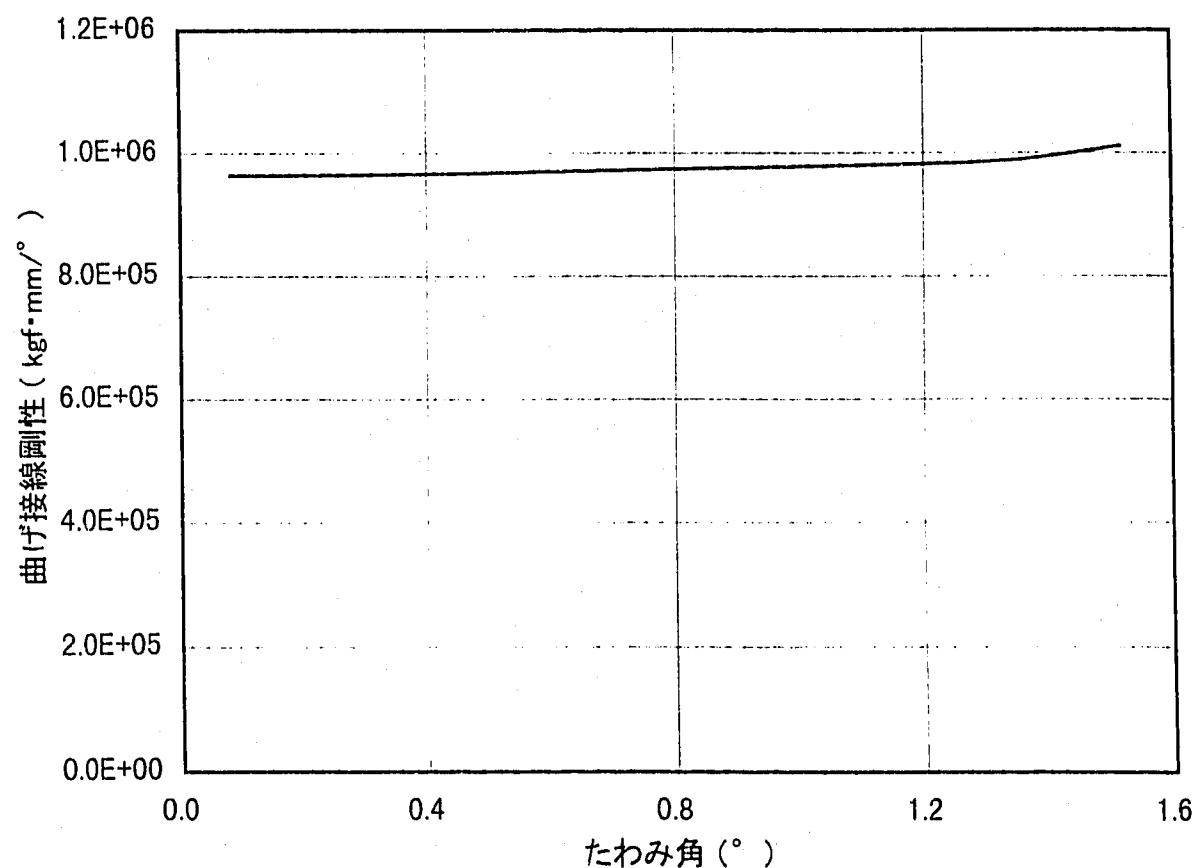


Fig.2.3.14 (a) MODEL2 : 「曲げモーメントーたわみ角」関係

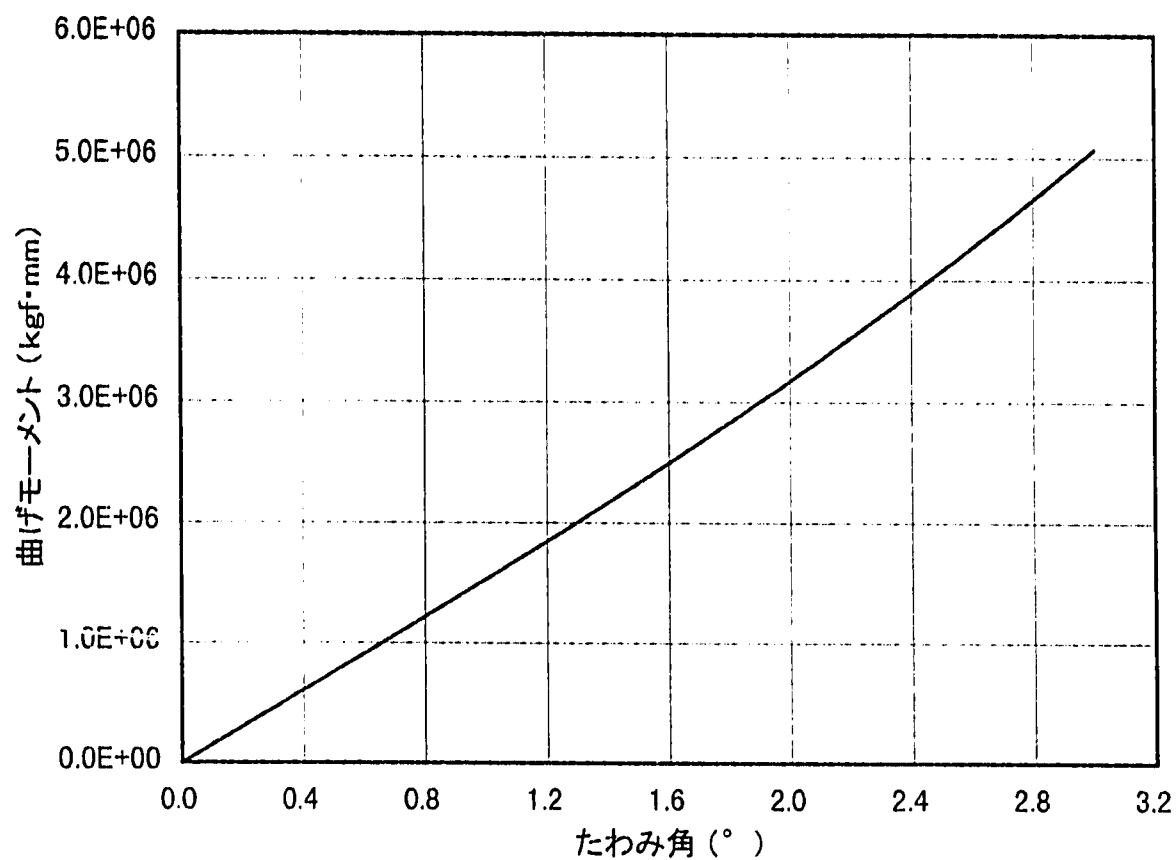


Fig.2.3.14 (b) MODEL2 : 「曲げ接線剛性ーたわみ角」関係

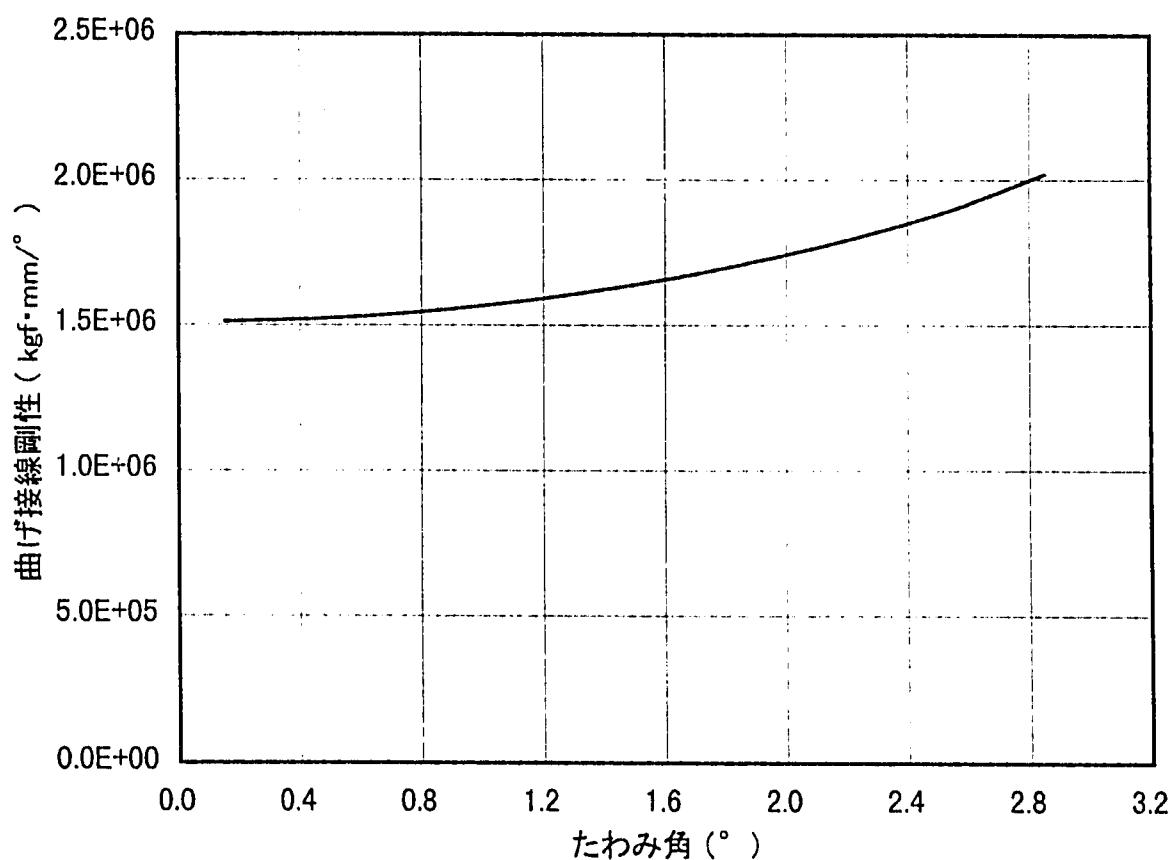


Fig.2.3.15 (a) MODEL3 : 「曲げモーメントーたわみ角」関係

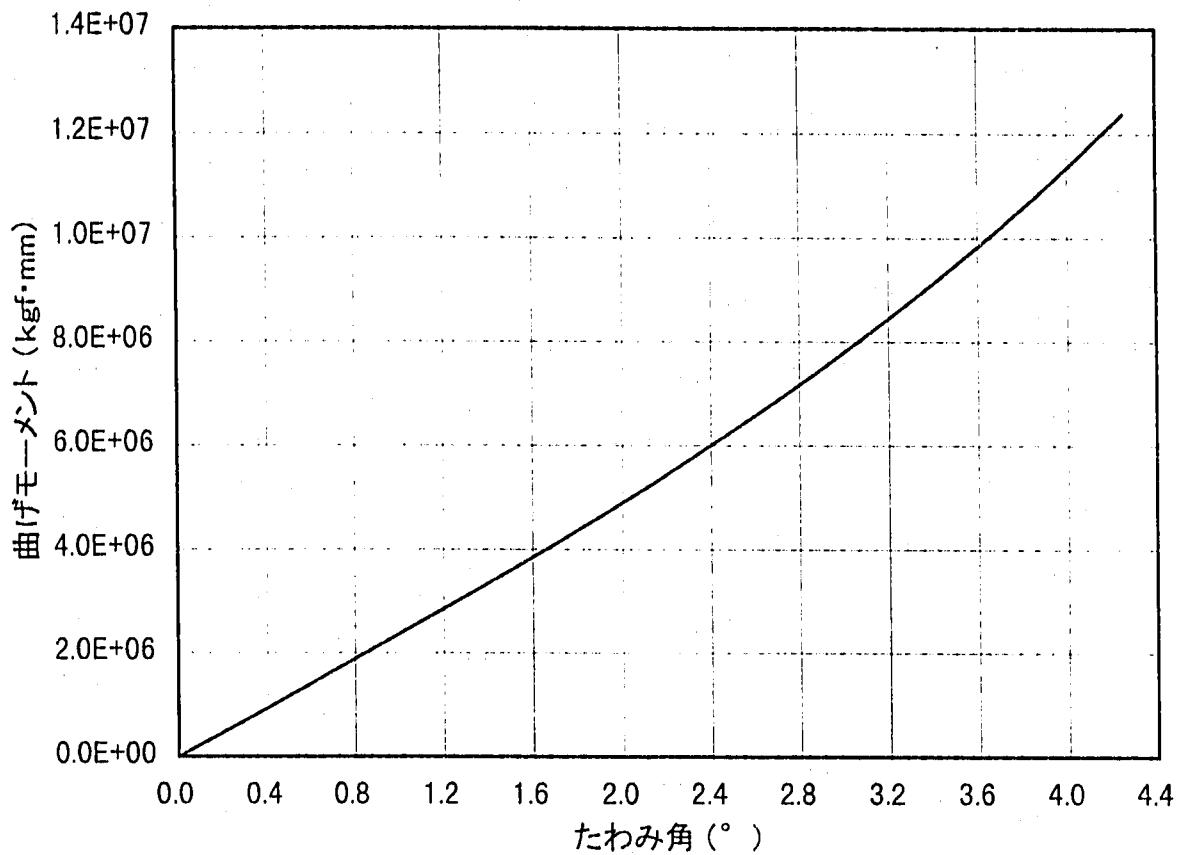


Fig.2.3.15 (b) MODEL3 : 「曲げ接線剛性ーたわみ角」関係

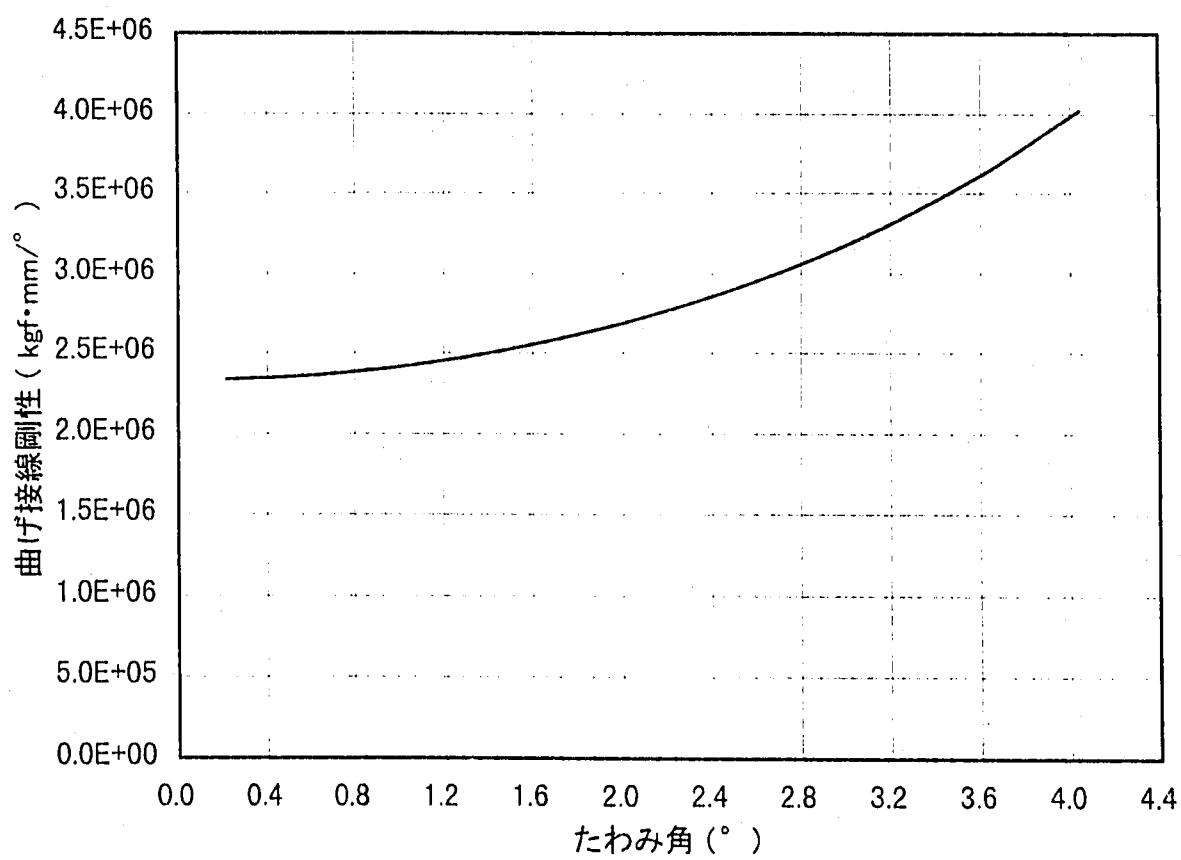


Fig.2.3.16 形状パラメータによる正規化「曲げモーメントーたわみ角」関係

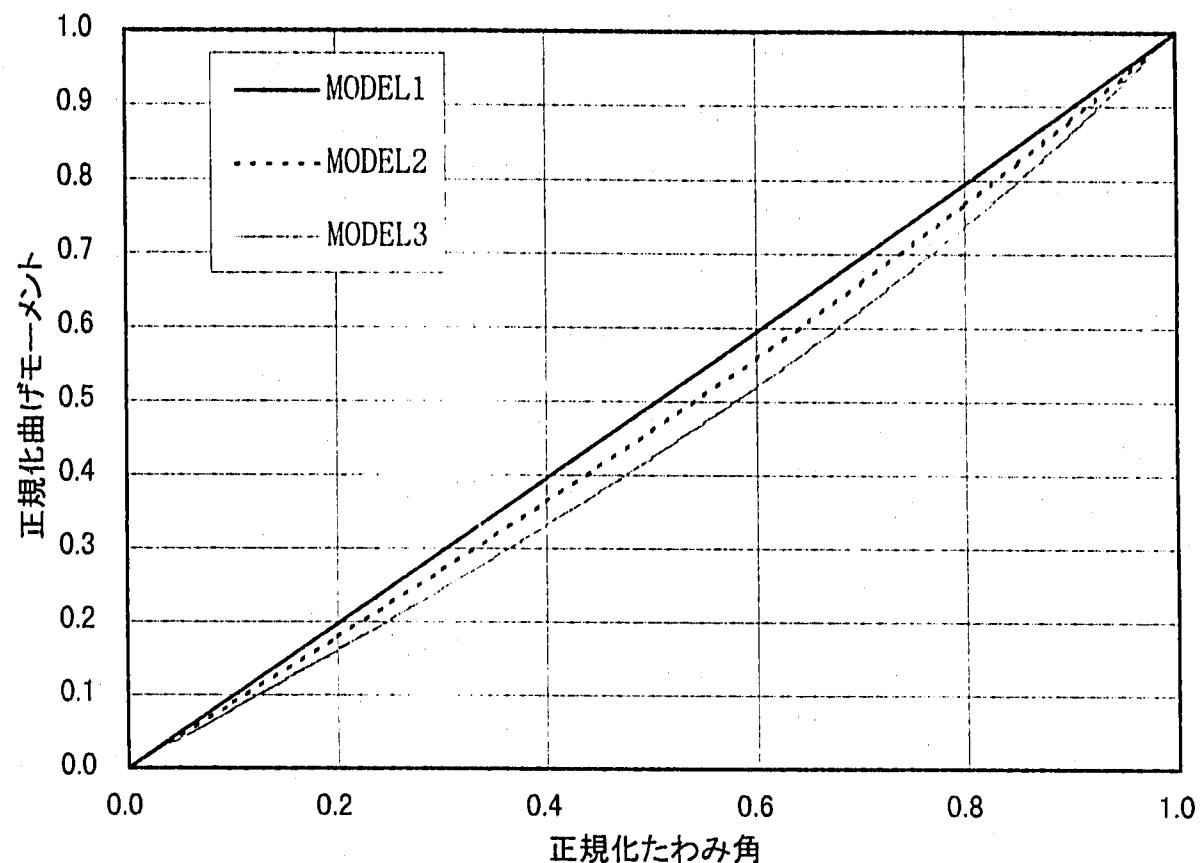
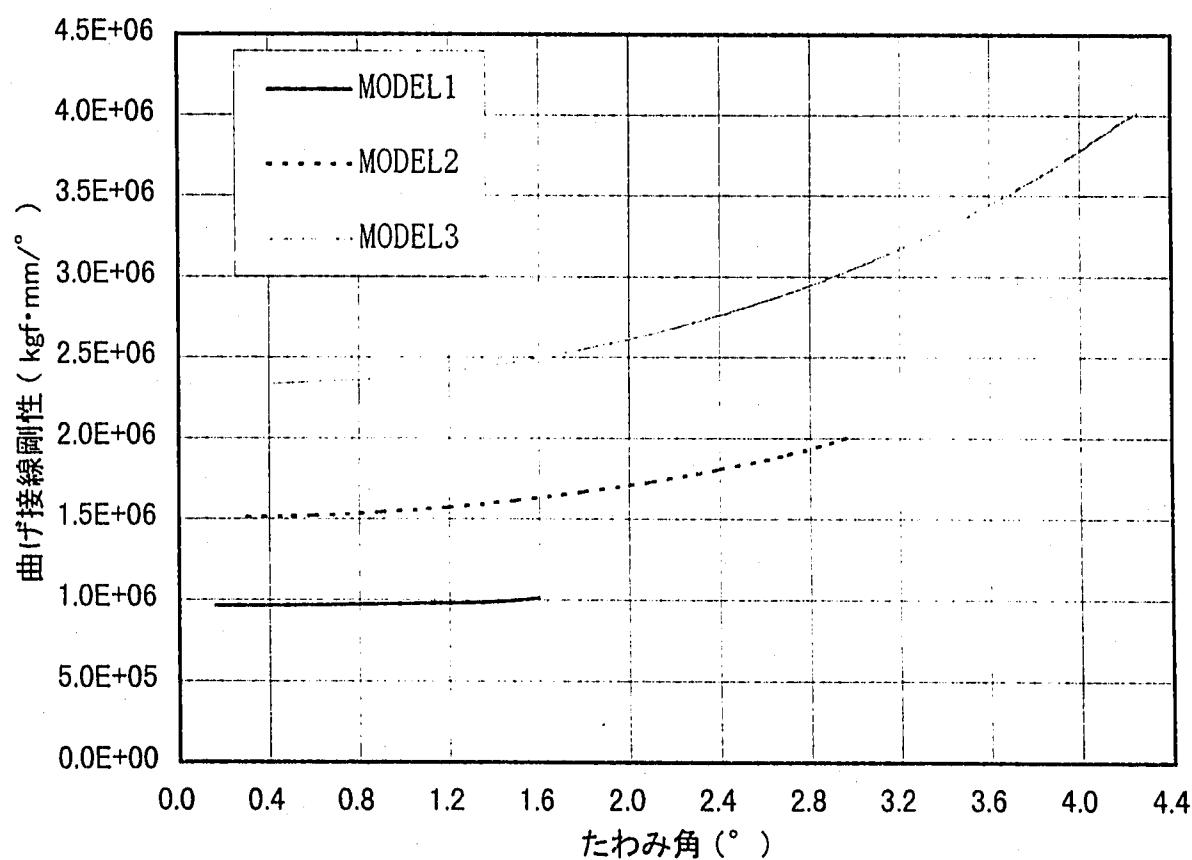


Fig.2.3.17 形状パラメータによる「曲げ接線剛性ーたわみ角」関係



### 3. 曲げ剛性評価手法

2.3節において曲げ荷重に対する皿ばねの力学的挙動を解析的に分析を行なったが、現在のところ皿ばねの曲げ荷重に対する力学的特性を記述するような設計公式は存在しない。そこでここでは、軸力に対する設計公式（APPENDIX 1 参照）を応用した皿ばねの曲げ剛性評価式を提示し、その評価式を2.2節の3つの皿ばねモデルに適用してそれらの力学的挙動を求め、解析結果との比較を行なうことによって提示した曲げ剛性評価式の適用性の検討を行なうこととする。

#### 3.1 曲げ剛性評価式導出にあたっての基本的な考え方

2.2(5)の解析における荷重条件で示したように皿ばねに作用する曲げ荷重は、皿ばね上面の周方向に  $\cos \theta$  分布する変位制御による軸荷重と考えることができる。3.3節で提示する皿ばねの曲げ剛性評価式は、その点に着目し以下に示す基本的な考え方に基づいて導出している。（Fig. 3.1.1 参照）

- (1) 皿ばね上面の周方向に  $\cos \theta$  分布する軸方向変位を周方向に細分割し、その微少区間  $d\theta$  においての軸方向変位は一律なたわみとみなすことができる。
- (2) 微少区間  $d\theta$  においての「軸荷重－たわみ」関係は、皿ばねの軸力に対する設計公式から求めることができる。
- (3) 曲げ変位負荷時の皿ばねの力学的特性評価に皿ばねの軸力に対する設計公式を用いるにあたり、等価円筒半径  $R_e$  の概念を導入する。（詳細は3.2節を参照）
- (4) 上記(2)のようにして求めた各区間のたわみ量に対する軸荷重（軸反力）を全区間（等価円筒半径  $R_e$  に対応した全周分）積算することで曲げ変位を負荷した際に生じる軸荷重を求めることができる。
- (5) 回転中心（90°～270° ライン）から各微少区間  $d\theta$  までのモーメント・アームにその区間の軸荷重（軸反力）を乗じて、それらの値を全区間（等価円筒半径  $R_e$  に対応した全周分）積算することで、皿ばねに加わる曲げモーメントの値を求めることができる。
- (6) 曲げ変位負荷時における皿ばねの力学的挙動として、皿ばね上面の回転角  $\phi$  と(4)で求めた軸荷重（軸反力）及び(5)で求めた曲げモーメントから、「軸荷重－たわみ角」関係、「曲げモーメント－たわみ角」関係を表す。

上記(2)では引張り側の微少区間においても皿ばねの軸力に対する設計公式から「軸荷重－たわみ」関係を求めることになるが、先の2.3(1)引張り軸荷重における皿ばねの力学的挙動の検討で示したように、設計公式は引張り軸荷重に対しても皿ばねの力学的挙動をよく記述するものと判断できたことから、この点について問題はないと考えた。

一方、上記(4)及び(5)において、曲げ剛性評価の一つとして「軸荷重－たわみ角」関係を求めるとしたのは、同じく先の2.3(1)引張り軸荷重における皿ばねの力学的挙動の検討から、圧縮側と引張り側の「軸荷重－たわみ」関係が対称とならないことから皿ばねの場合、曲げ荷重載荷時にも軸方向反力が生じることが判明したことによる。

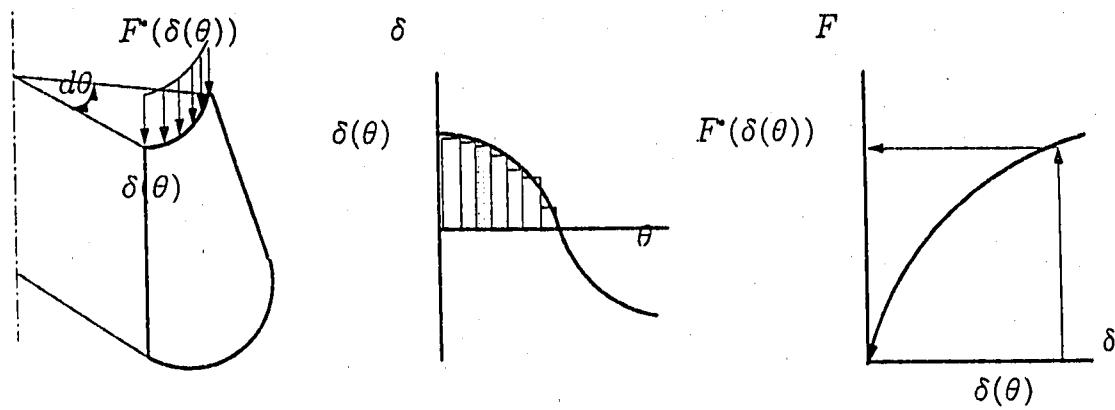


Fig. 3.1.1 曲げ荷重載荷時の皿ばね微少区間  $d\theta$ における軸荷重とたわみの関係の考え方

### 3. 2 等価円筒半径 $Re$ の概念の導入

曲げ荷重が加わった場合の構造の力学的特性評価の一つとして、曲げモーメントとそれにより発生するたわみ角（回転角）の関係をとらえるのが一般的である。しかし、皿ばねの曲げ剛性評価式の導出にあたっては、先の 3.1 節の基本的な考え方で示したように、曲げ荷重を皿ばね上面の  $\cos \theta$  分布する軸方向変位による軸荷重ととらえ、細分化した微少区間  $d\theta$ において皿ばねの設計公式を用いて「軸荷重－たわみ」を求め、それらを全周方向に積算することで最終的な皿ばねの「軸荷重－たわみ角」関係及び「曲げモーメント－たわみ角」関係を求める段階を踏むため、曲げ荷重により発生するたわみ角とたわみの関係を定義する必要性が生じる。

ここで同じ回転角  $\phi$ を、半径  $r$  の円筒と上面半径  $a$ 、底面半径  $b$  の皿ばねにそれぞれ与えることを考える。そして、その与え方として円筒及び皿ばねの底面を鉛直方向に拘束し、それぞれの上面に回転角  $\phi$ を与える場合と、それとは逆に円筒及び皿ばねの上面を鉛直方向に拘束しそれぞれの底面に回転角  $\phi$ を与える場合の 2 ケースを考える。（Fig. 3.2.1 参照）これは同じ回転角  $\phi$ を与えているため、この 2 ケースは同じ曲げ荷重を円筒及び皿ばねに与えていることを意味する。ここでそれぞれのモデルに発生する最大たわみ  $\delta_{\max}$  に着目すると、円筒の場合どちらのケースにおいても  $\delta_{\max} = r\phi$  になりたわみ角とたわみの関係が 1 対 1 に対応する。一方、皿ばねの場合回転角  $\phi$ を上面で与えた場合  $\delta_{\max} = a\phi$ 、底面で与えた場合  $\delta_{\max} = b\phi$  と異なる最大たわみとなり、同じ曲げ荷重に対し、たわみは一律には決まらない。

よって皿ばねの場合、 $\delta_{\max} = Re\phi$ となる皿ばねの代表半径を意味する等価円筒半径  $Re$  という概念を創出し、細分化した微少区間  $d\theta$ において設計公式を用いて「軸荷重－たわみ」を求める際に適用する。この際、等価円筒半径  $Re$  は、 $a \leq Re \leq b$ を目安にしてパラメトリックに変化させて、「軸荷重－たわみ角」関係及び「曲げモーメント－たわみ角」関係において導出された評価式と解析解のフィッティングの度合いから、等価円筒半径  $Re$  の設定に関して考察することとした。

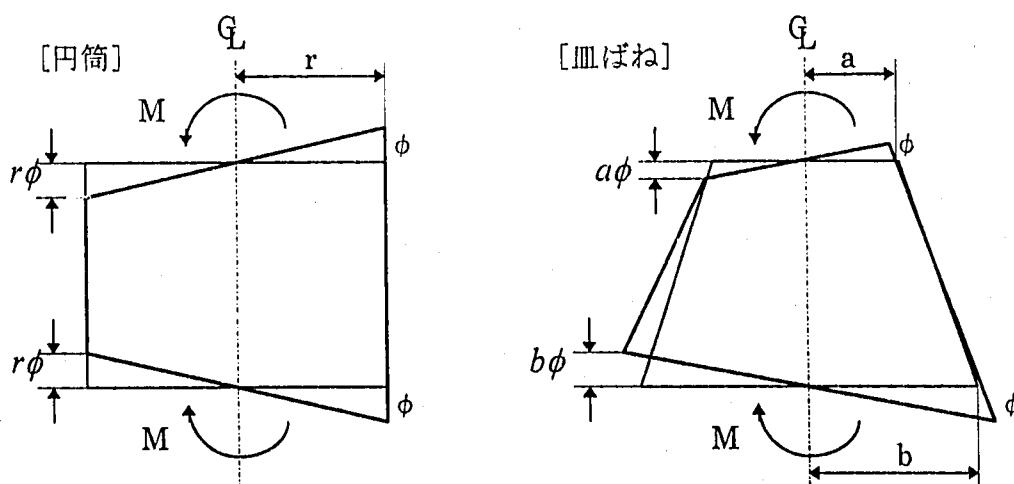


Fig. 3.2.1 回転角と最大たわみの関係

### 3. 3 曲げ剛性評価式の導出

3.1 曲げ剛性評価式導出にあたっての基本的な考え方に基づき、以下に皿ばねの曲げ剛性評価式を導出する。ここでは、Fig. 3.3.1 に示すような皿ばねに軸荷重（軸荷重によるたわみ  $\delta_0$ ）と曲げ荷重（曲げ荷重によるたわみ角  $\phi$ ）が同時に作用するような一般的な場合を考える。

いま、ある周方向に一律なたわみ  $\delta$  状態にある皿ばねにおいて、作用している分布荷重を  $f(\delta)$  とし、周方向のトータルな軸荷重を  $F(\delta)$ とした場合、 $f(\delta)$  は 3.2 節で示した等価円筒半径  $R_e$  を用いて、

$$F(\delta) = \int_0^{2\pi} R_e \cdot f(\delta) d\theta = R_e \cdot f(\delta) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot R_e \cdot f(\delta) \quad \text{----- (1) より}$$

$$f(\delta) = \frac{F(\delta)}{2\pi \cdot R_e} \quad \text{----- (2)}$$

と表すことができる。

一方、軸荷重（軸荷重によるたわみ  $\delta_0$ ）と曲げ荷重（曲げ荷重によるたわみ角  $\phi$ ）が重畠しているときの周方向（ $\theta$  方向）に分布するたわみ  $\delta(\theta)$  は、同じく等価円筒半径  $R_e$  を用いて以下のように表すことができる。

$$\delta(\theta) = \delta_0 + \phi \cdot R_e \cos \theta \quad \text{----- (3)}$$

上記、周方向に  $\cos \theta$  分布するたわみ  $\delta(\theta)$  が生じているときに作用する周方向にトータルな軸荷重  $F(\delta(\theta))$  は、周方向に細分割し、その微少区間  $d\theta$  においての軸荷重が等分布荷重とみなすことができるとの考えに基づき、(2)式を適用して、

$$F(\delta(\theta)) = F_{(\delta_0, \phi)} = \int_0^{2\pi} R_e \cdot f(\delta(\theta)) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\delta(\theta)) d\theta \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\delta(\theta_i)) \quad (4)$$

と表すことができる。なお、上式における  $N$  は周方向の分割数である。ここで各微少区間における軸力  $F(\delta(\theta_i))$  は、その区間において等分布荷重とみなした  $\delta(\theta_i)$  から、APPENDIX に示した皿ばねの「軸荷重 - たわみ」関係における設計公式を用いて算出する。

また、周方向に  $\cos \theta$  分布するたわみ  $\delta(\theta)$  が生じているときに作用している曲げ荷重  $M(\delta(\theta))$  は、周方向  $\theta$  位置における微少区間  $d\theta$  のモーメント・アームが  $R_e \cos \theta$  であり、軸荷重の導出時と同じように(2)式を適用することにより、

$$\begin{aligned}
 M(\delta(\theta)) &= M_{(\delta_0, \phi)} = \int_0^{2\pi} R_e^2 \cdot f(\delta(\theta)) \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{R_e}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\delta(\theta)) \cos \theta d\theta \approx \frac{R_e}{N} \sum_{i=1}^N F(\delta(\theta_i)) \cdot \cos \theta_i \quad \text{--- (5)}
 \end{aligned}$$

と表すことができる。軸荷重導出の際と同様に、各微少区間における軸力  $F(\delta(\theta_i))$  は、その区間において等分布荷重とみなした  $\delta(\theta_i)$  から、APPENDIX 1 に示した皿ばねの「軸荷重 - たわみ」関係における設計公式を用いて算出する。

これまでに示した、(4)式、及び(5)式を曲げ荷重が加わる場合の皿ばねの曲げ剛性評価式とし、その適用性の検討を次節において行なう。

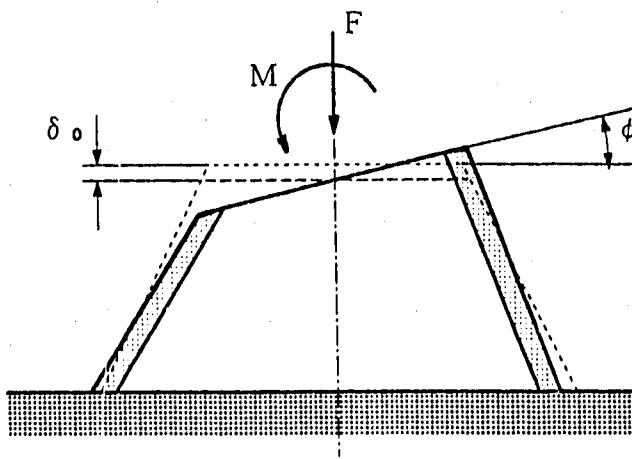


Fig. 3.3.1 軸荷重と曲げ荷重が重畠した場合の皿ばねの変形挙動

### 3.4 曲げ剛性評価式の記述性の検討

3.3 節で導出した皿ばねの曲げ剛性評価式の記述性を検討することを目的として、曲げ剛性評価式である「軸荷重-たわみ角」関係の(4)式、及び「曲げモーメント-たわみ角」関係である(5)式を、FEM解析を行なった2.2節に示した3つのケースに適用し、その結果と解析結果との比較を行なう。両者の比較においては、3.2節で記したように等価円筒半径  $Re$  を  $a \leq Re \leq b$  ( $a$ : 皿ばね上面半径,  $b$ : 皿ばね底面半径) を一応の目安としてパラメトリックに変化させ、FEM解とのフィッティングの傾向に着目する。ここで、等価円筒半径  $Re$  を  $Re = k \cdot a + (1 - k) \cdot b$  :  $0 \leq k \leq 1$  のように定義して、パラメータ値である  $Re$  値の代わりに  $k$  値を比較検討のための代表パラメータ値とし、曲げ剛性評価式の記述性をみていく。

最初に MODEL1 について、解析値をリファレンスにして  $k$  値をいろいろ変化させたときの、評価式による「軸荷重-たわみ角」関係を Fig. 3.4.1(a) に示す。等価円筒半径  $Re$  が皿ばね上面の半径となる  $k = 0$  の評価式値においては、解析値の剛性より小さな評価となっており、等価円筒半径  $Re$  が皿ばね底面の半径となる  $k = 1$ 、及びそれを超える  $k = 1.6$  の評価式値においては、逆に解析値の剛性より大きく評価していることがわかる。そして、それらの間の  $k = 0.8$  において評価式値と解析値は良くフィッティングし、評価式値は「軸荷重-たわみ角」関係の非線形性（たわみ角が増すにつれ剛性も増していく様相）を非常に良く表している。

Fig. 3.4.1(b) に Fig. 3.4.1(a) で示した同じ  $k$  値における「曲げモーメント-たわみ角」関係を示す。まず、どの  $k$  値についても評価式値は解析値と同じくほぼ線形に近い関係を示していることがわかる。次に「軸荷重-たわみ角」関係と同様に、等価円筒半径  $Re$  が皿ばね上面の半径となる  $k = 0$  の評価式値においては、解析値の剛性より小さな評価となっており、 $k$  値を大きくしていく（このとき  $Re$  値も大きくなっていく）と曲げ剛性も増していく。しかし「軸荷重-たわみ角」関係で良いフィッティングを示した  $k = 0.8$  においては、まだ解析値に比べ曲げ剛性を小さく評価しており、最終たわみ角である  $1.6^\circ$  における曲げモーメントの値は、解析値の約 84% に留まっている。 $k = 1$  においてもなお、評価式の曲げ剛性は小さく、最初に想定した  $0 \leq k \leq 1$  の範囲を越えた  $k = 1.2$  のとき、解析値と評価式値は良いフィッティングを示した。なお、 $k = 1.2$  における「軸荷重-たわみ角」関係の評価式値は解析値の剛性より高くなり、最終たわみ角 ( $1.6^\circ$ ) における評価式値は解析値の約 113% となっている。

次に、 $k$  値を変化させた場合の軸荷重、及び曲げモーメントにおける解析値と評価値のフィッティング度の変化をそれぞれ Fig. 3.4.2(a)、Fig. 3.4.2(b) に示す。ここでは、下式に示すように軸荷重、あるいは曲げモーメントの同たわみ角における解析値と評価式値の差の平均二乗和をフィッティングのしきい値としている。

- ・「軸荷重-たわみ角」におけるフィッティングしきい値 :  $\sum_{i=1}^n \sqrt{(F_{Ai} - F_{Ei})^2} / n$
  - ・「曲げモーメント-たわみ角」におけるフィッティングしきい値 :  $\sum_{i=1}^n \sqrt{(M_{Ai} - M_{Ei})^2} / n$
- $\therefore F_{Ai}$  :  $i$  たわみ角時の解析における軸荷重値  
 $F_{Ei}$  :  $i$  たわみ角時の評価式における軸荷重値  
 $M_{Ai}$  :  $i$  たわみ角時の解析における曲げモーメント値  
 $M_{Ei}$  :  $i$  たわみ角時の評価式における曲げモーメント値  
 $n$  : 比較するたわみ角ポイント点数

これらのグラフから、先の示した「軸荷重-たわみ」関係においては  $k = 0.8$ 、「曲げモーメント-たわみ角」関係においては  $k = 1.2$  において一番良いフィッティングを示すことがわかり、記述性のよい評価式における等価円筒半径  $Re$  は、「軸荷重-たわみ角」関係と「曲げモーメント-たわみ角」関係では異なったものになっている。

上記 MODEL1 の結果評価と同様の観点で、次に MODEL2 及び MODEL3 の結果をみていく。

MODEL2 について、解析値をリファレンスにして  $k$  値をいろいろ変化させたときの、評価式による「軸荷重-たわみ角」関係を Fig. 3. 4. 3(a) に示す。解析値の剛性は、評価式において等価円筒半径  $Re$  を皿ばね上面の半径となる  $k = 0$  としたときの剛性値と皿ばね底面の半径となる  $k = 1$  としたときの剛性値の中間にあり、 $k = 0.6$  において評価式値と解析値は良くフィッティングする。

次に、MODEL2 の「曲げモーメント-たわみ角」関係において解析値と評価式値を比較したグラフを Fig. 3. 4. 3(b) に示す。ここでもまず、どの  $k$  値についても評価式値は解析値と同じくほぼ線形に近い関係を示していることがわかる。次に、「軸荷重-たわみ角」関係と同様、等価円筒半径  $Re$  が皿ばね上面の半径となる  $k = 0$  の評価式値においては、解析値の剛性より小さな評価となり、 $k$  値を大きくしていくと曲げ剛性も増して  $k = 0.8$  のとき両者は良いフィッティングを示す。そして、 $k = 1$  において評価式値は解析値の曲げ剛性を上回っている。なお、「軸荷重-たわみ角」関係で良いフィッティングを示した  $k = 0.6$  における評価式値は、解析値に比べ曲げ剛性を小さく評価しており、最終たわみ角である  $3.0^\circ$  における曲げモーメントの値は、解析値の約 90% となっている。

Fig. 3. 4. 2(a)、Fig. 3. 4. 2(b) にそれぞれ  $k$  値に対する軸荷重、及び曲げモーメントにおける解析値と評価値のフィッティング度の変化を示す。これらのグラフから一番良いフィッティングを示す  $k$  値は、「軸荷重-たわみ」関係においては  $k = 0.6$ 、「曲げモーメント-たわみ角」関係においては  $k = 0.8$  と異なっていることがわかるが、MODEL1 の場合に比べるとどちらの  $k$  値も小さくなっており、また両者の差も小さいことがわかる。

MODEL3 について、「軸荷重-たわみ角」関係、「曲げモーメント-たわみ角」関係において解析値と評価式値の比較した結果をそれぞれ Fig. 3. 4. 5(a)、Fig. 3. 4. 5(b) に示す。ま

た Fig. 3.4.6(a)、Fig. 3.4.6(b)には、それぞれ  $k$  値に対する軸荷重、及び曲げモーメントにおける解析値と評価値のフィッティング度の変化を示す。これらの結果をみると、 $k$  値の変化に伴う評価式の剛性は、解析値に対して前記 MODEL1、MODEL2 の場合と同様の傾向を示している。しかし、MODEL3 の場合は評価式値が解析値に一番良いフィッティングを示した  $k$  値が、「軸荷重 - たわみ角」関係、「曲げモーメント - たわみ角」関係の両方に対して  $k = 0.7$  のときと一致しているのが特徴である。

以上 3 つの皿ばねモデルについて、解析値をリファレンスとして評価式値の結果をみてきたが、等価円筒半径  $R_e$  をモデルにより適切に設定することで、評価式は皿ばねの曲げ荷重に対する力学的特性を良く記述するものであることが確認された。

Fig.3.4.1(a) MODEL1 : 「軸荷重ーたわみ角」関係

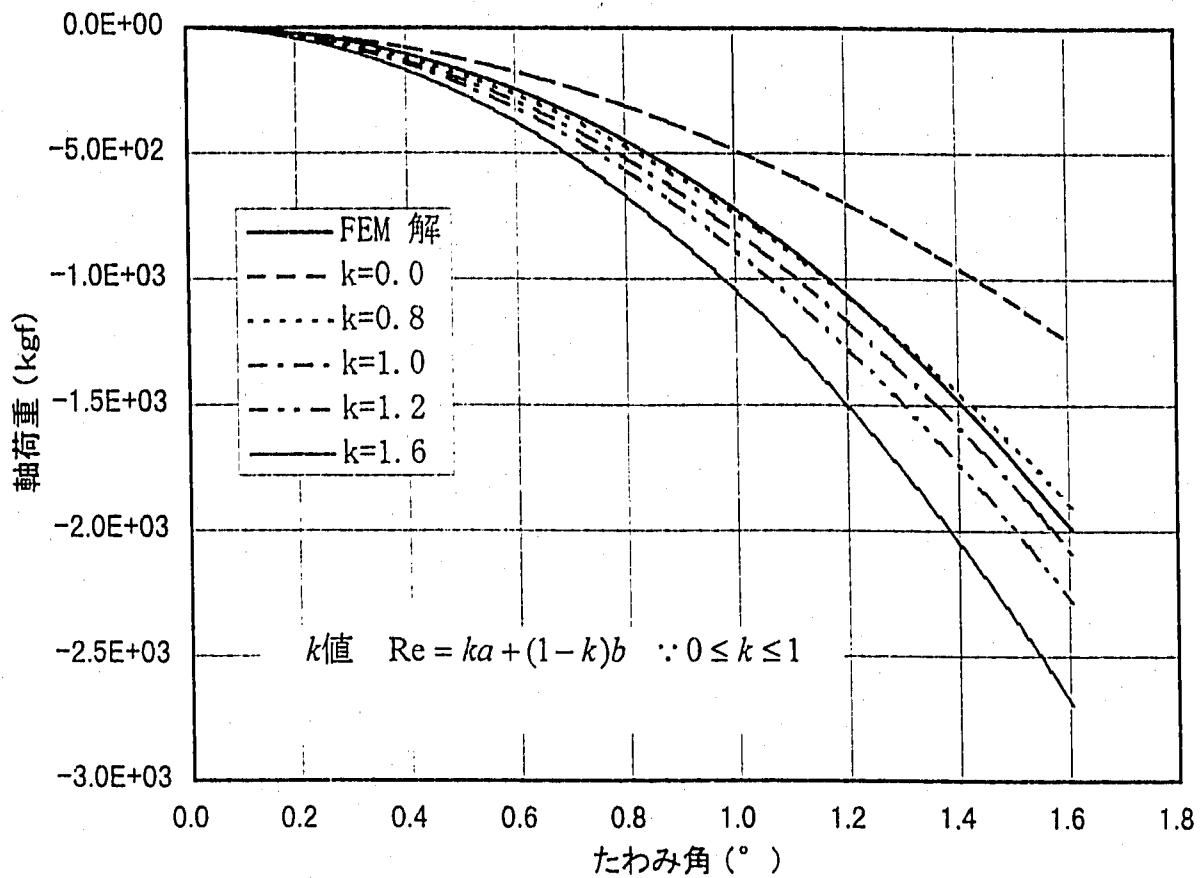


Fig.3.4.1(b) MODEL1 : 「曲げモーメントーたわみ角」関係

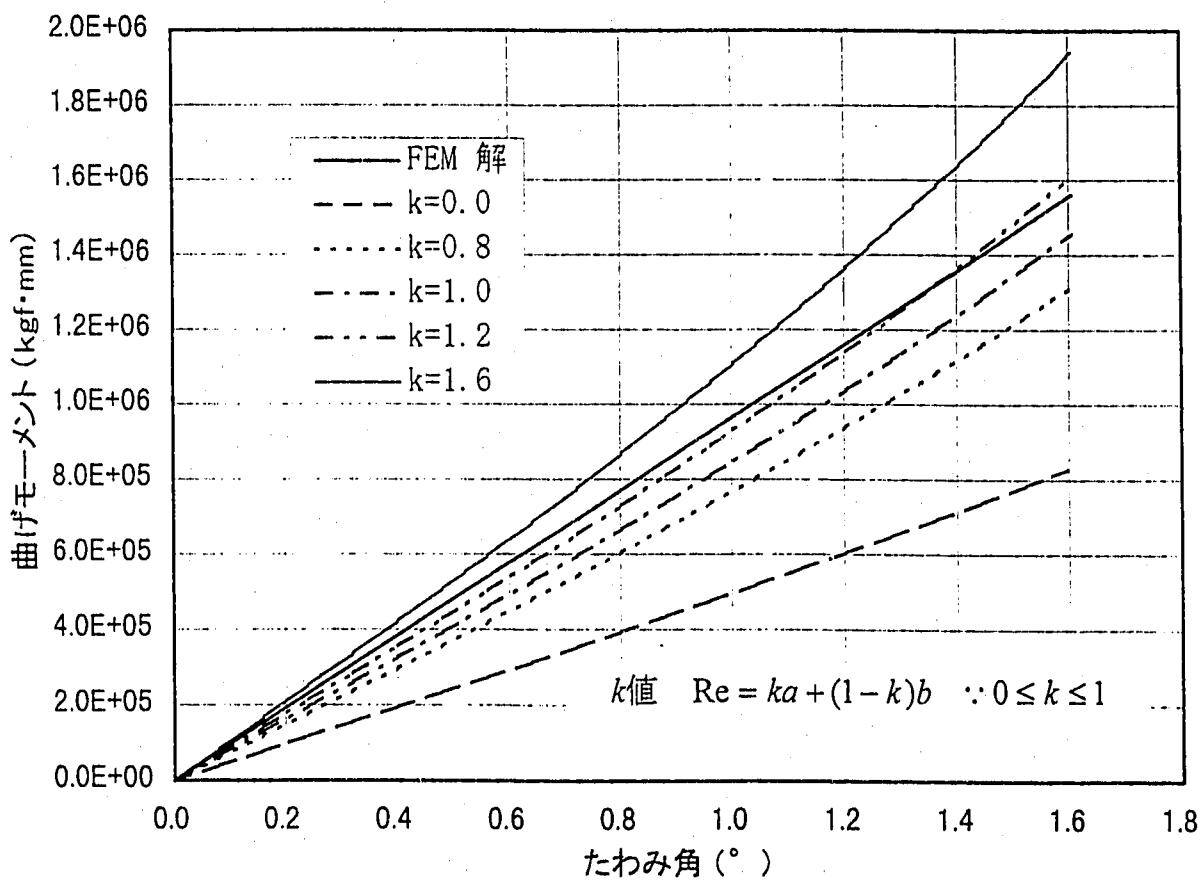


Fig.3.4.2(a) Model1 : Re値をパラメータとした軸荷重評価式値の  
FEM値に対するフィッティング傾向

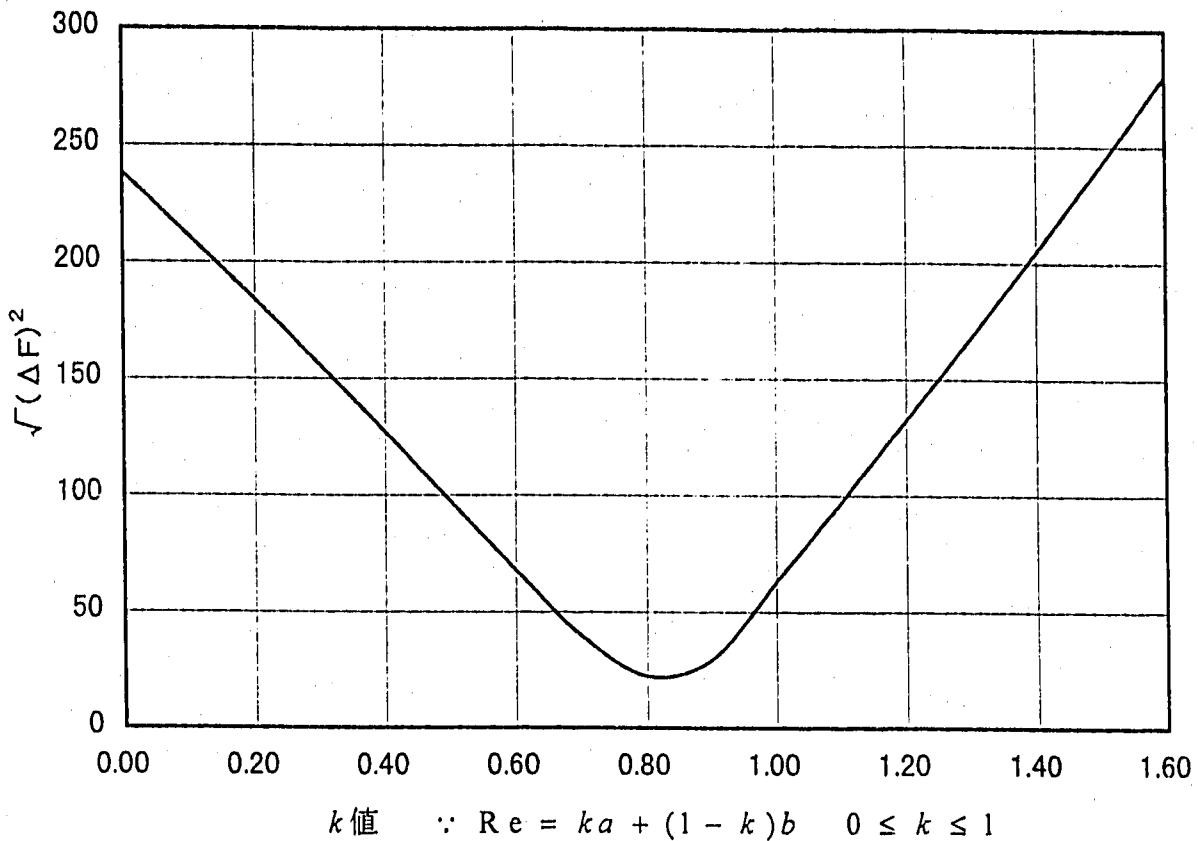


Fig.3.4.2(b) Model1: Re値をパラメータとした曲げ荷重評価式値の  
FEM値に対するフィッティング傾向

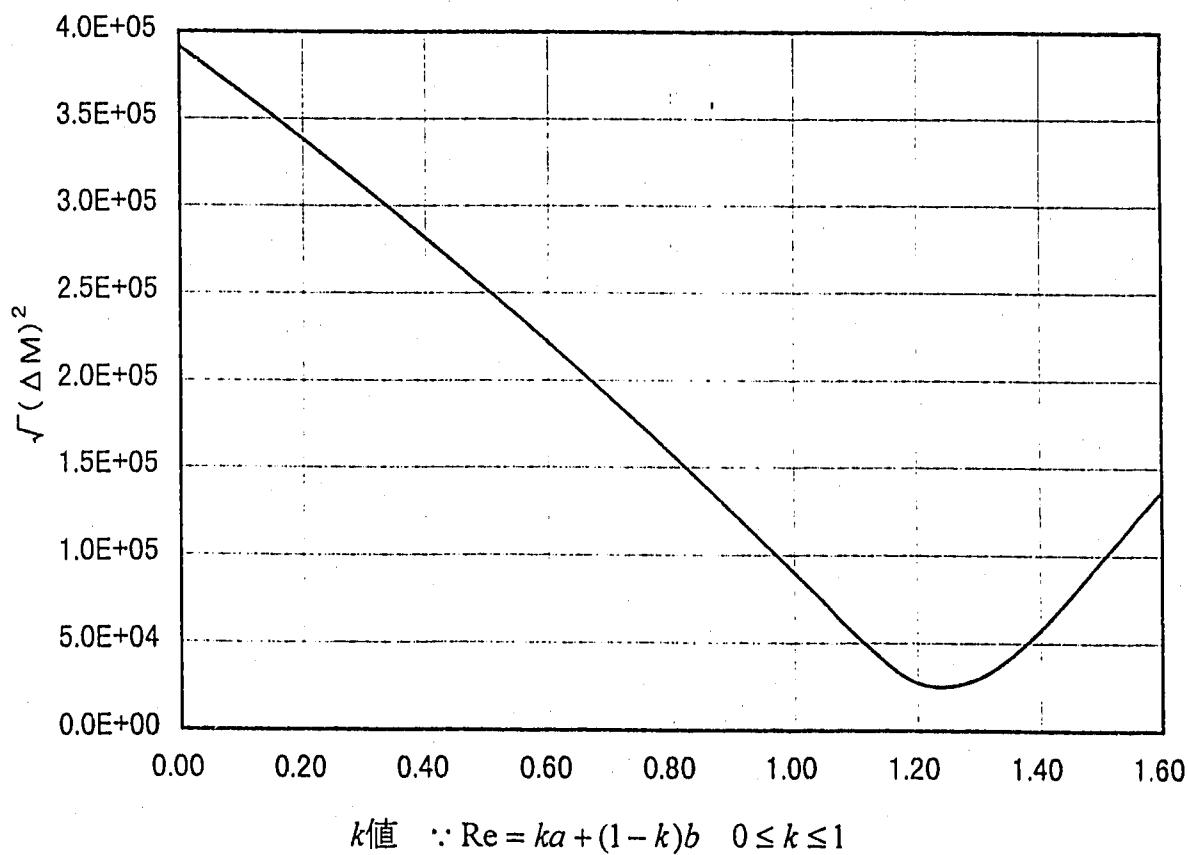


Fig.3.4.3(a) MODEL2 : 「軸荷重ーたわみ角」関係

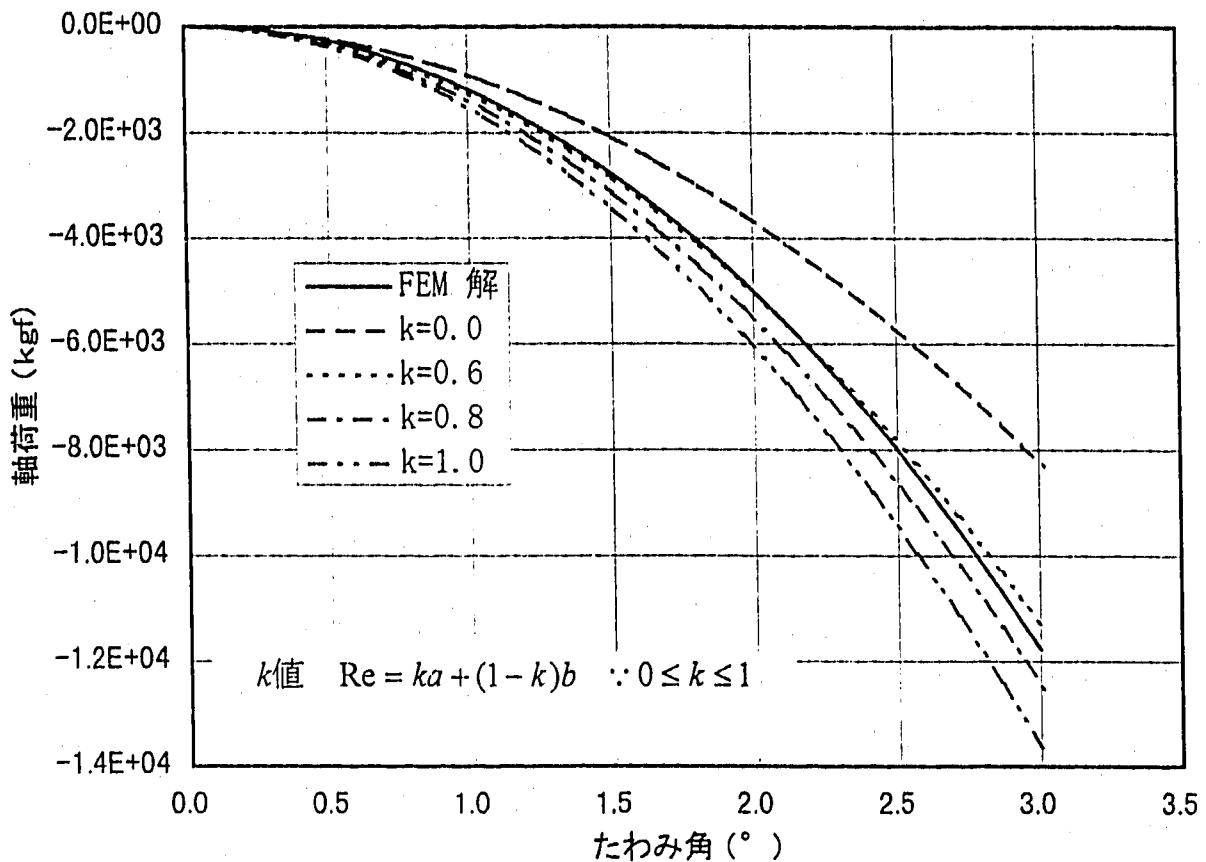


Fig.3.4.3(b) MODEL2 : 「曲げモーメントーたわみ角」関係

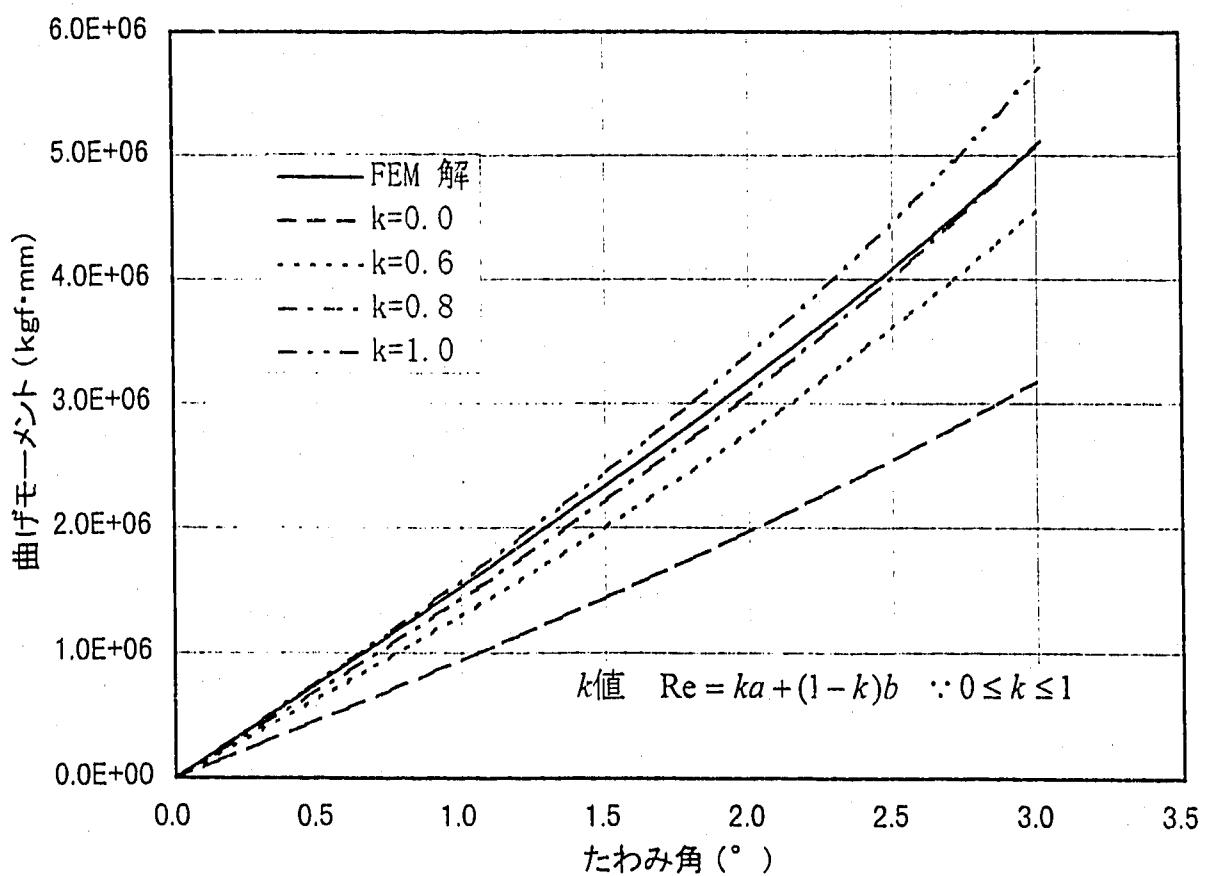


Fig.3.4.4(b) Model2 : Re値をパラメータとした軸荷重評価式値の  
FEM値に対するフィッティング傾向

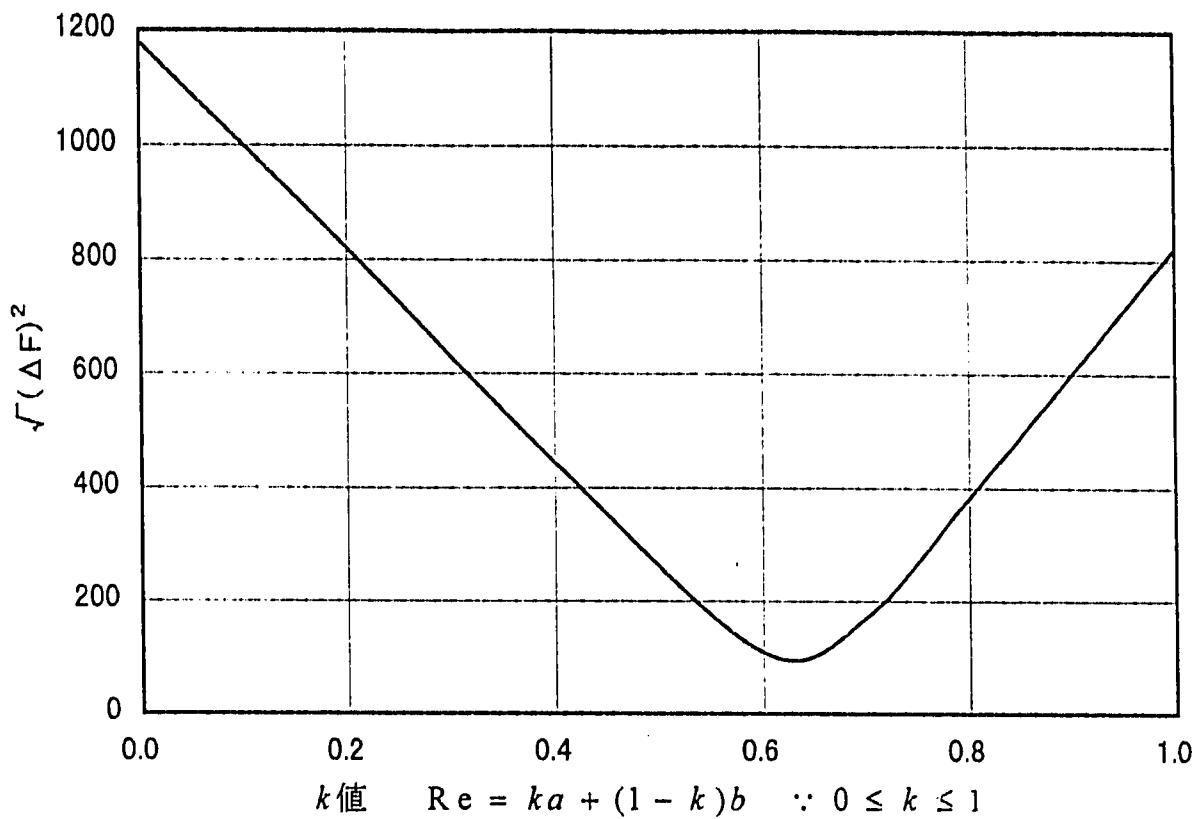


Fig.3.4.4(b) Model2 : Re値をパラメータとした曲げ荷重評価式値の  
FEM値に対するフィッティング傾向

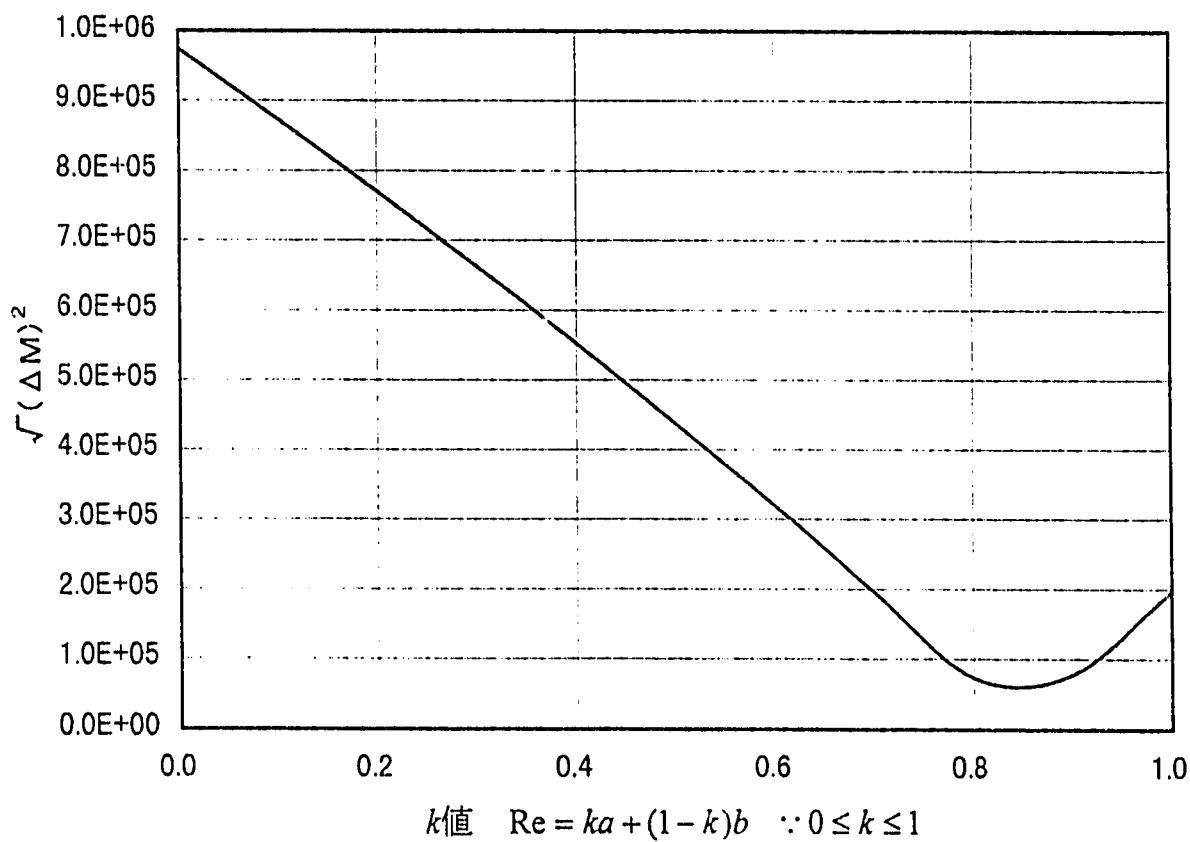


Fig.3.4.5(a) MODEL3 : 「軸荷重ーたわみ角」関係

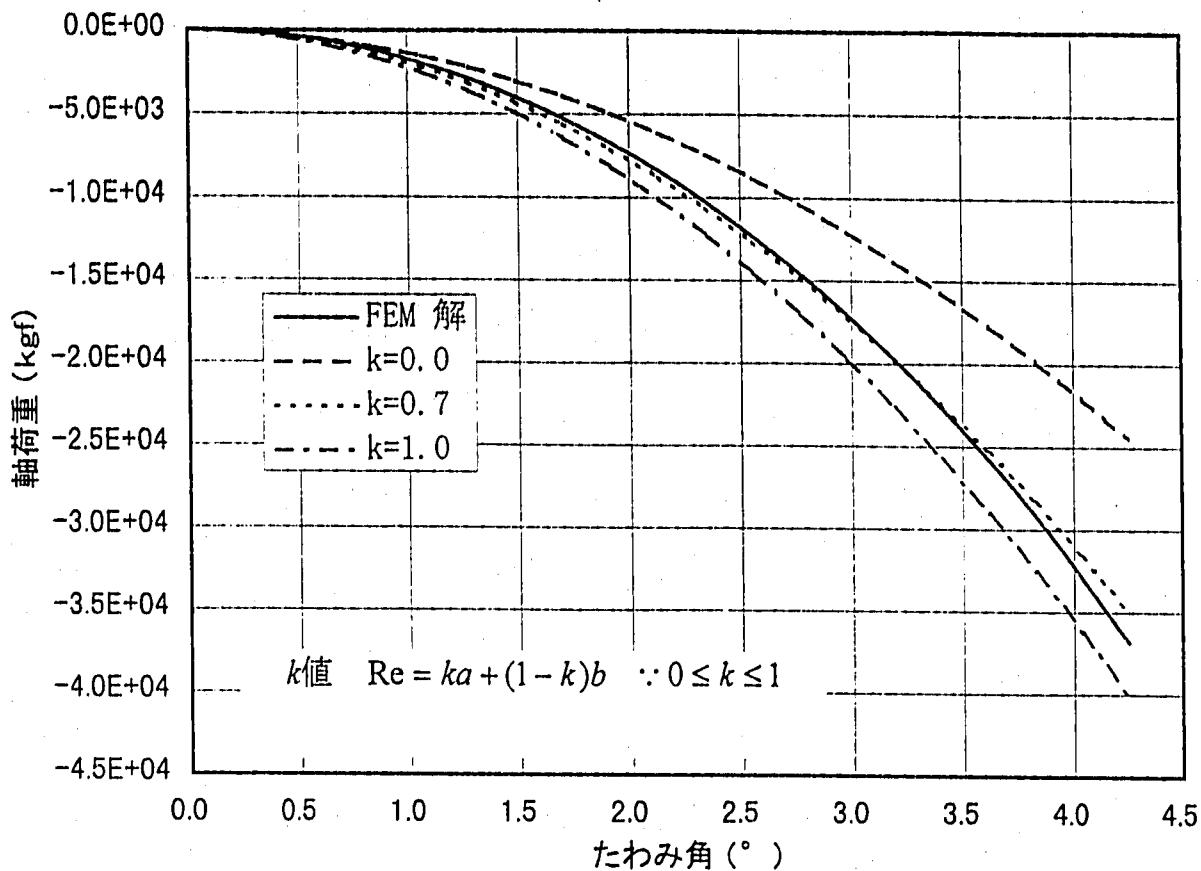


Fig.3.4.5(b) MODEL3 : 「曲げモーメントーたわみ角」関係

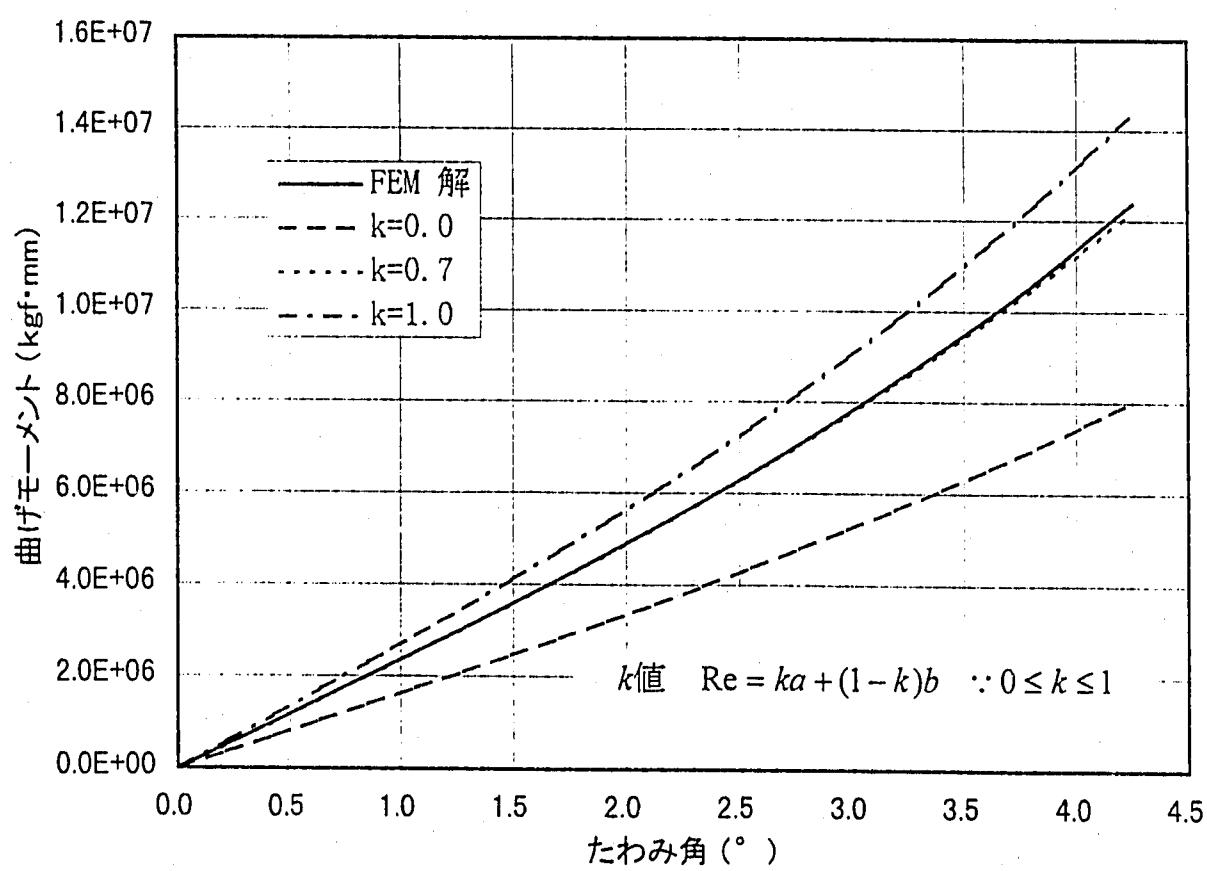


Fig.3.4.6(b) Model3 : Re値をパラメータとした軸荷重評価式値の  
FEM値に対するフィッティング傾向

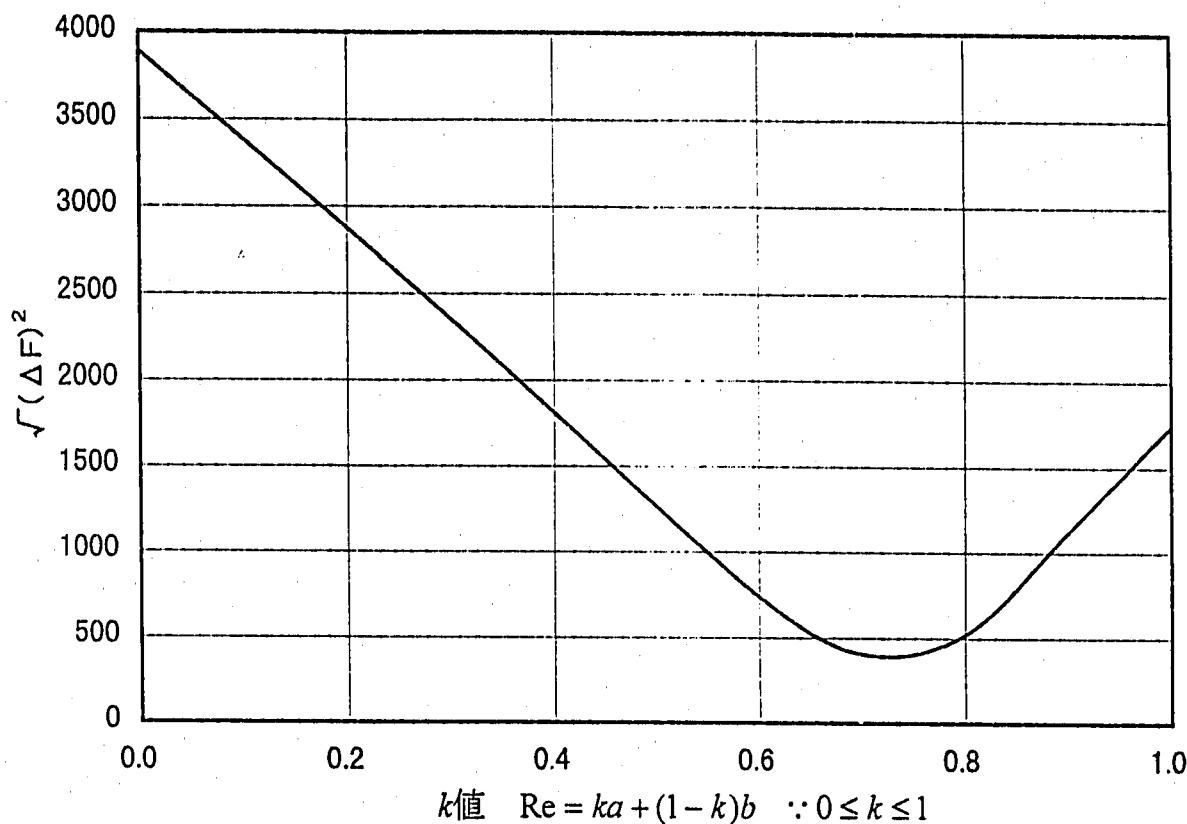
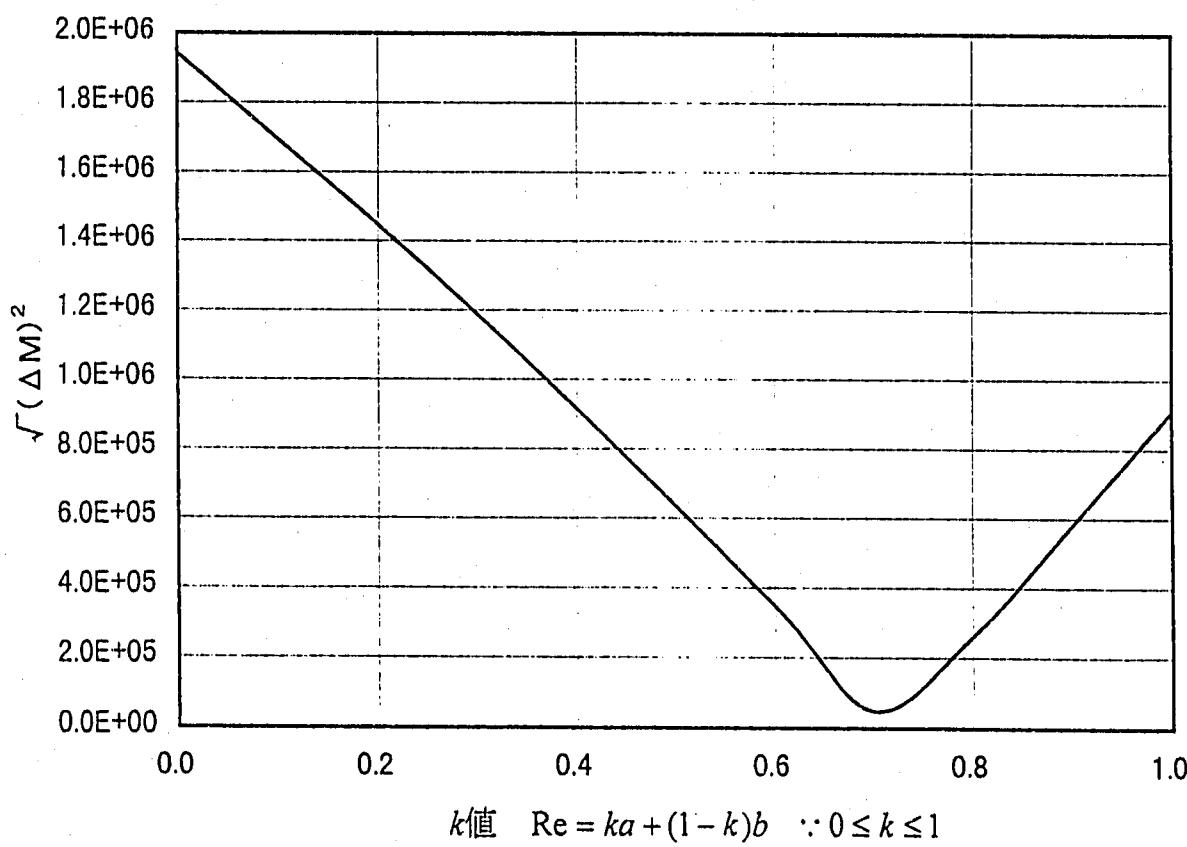


Fig.3.4.6(b) Model3 : Re値をパラメータとした曲げ荷重評価式値の  
FEM値に対するフィッティング傾向



#### 4. 考察

第2章において皿ばねの曲げ荷重による力学的特性の検討を、皿ばね上面に軸方向にコサイン分布した強制変位を負荷する荷重条件で3次元シェルモデルによるFEM解析を実施して解析的に行なったが、そこで得られた知見の要約を以下に整理する。

- ・曲げ変位負荷による皿ばねの力学的特性の検討の準備として行なった「引張り軸荷重－たわみ」関係の検討においては、設計公式とFEM解は良く一致し、引張り軸荷重に対する皿ばねの力学的挙動が把握できた。
- ・上記検討においては、軸荷重の増加に伴うたわみの変化は引張り側と圧縮側とでは異なることが明らかとなった。
- ・引張り側と圧縮側との皿ばねの軸剛性の違いから、曲げ荷重を単独で皿ばねに載荷した場合においても、軸荷重（軸反力）が生じる。
- ・上記曲げ荷重により発生する軸荷重は、曲げ荷重によるたわみ角の進行に伴ってその剛性も、ほぼ線形に大きくなっていく。
- ・ $h/t$  の違いによらず、曲げ荷重を載荷した際の正規化した「軸荷重－たわみ角」関係は同じとなる。
- ・曲げによって発生する軸荷重は、同たわみ角において  $h/t$  ( $h$ :自由高さ、 $t$ :板厚) の大きな皿ばねほど大きい。つまり、 $h/t$  の大きな皿ばねほど軸剛性は大きくなる。
- ・「曲げモーメント－たわみ角」関係においては、皿ばねは線形性の高い挙動を示すが、 $h/t$  の大きい皿ばねほどたわみ角の進行に伴って曲げ剛性が大きくなっていく挙動を示す。
- ・皿ばねの曲げ剛性は、同たわみ角においては  $h/t$  ( $h$ :自由高さ、 $t$ :板厚) の大きな皿ばねほど大きくなる。

以上の得られた知見を設計への反映の観点から考慮すると、まず曲げ荷重により発生する軸荷重の大きさは、各モデルの最大たわみ角における値でみると Fig. 2.3.8(a), Fig. 2.3.9(a), Fig. 2.3.10(a) から読み取ると MODEL1: 約 2,000 kgf, MODEL2: 約 11,800 kgf, MODEL3: 約 36,800 kgf となっている。一方、2章(1)節の引張り軸荷重載荷による皿ばねの力学的挙動の検討の中で示した単軸荷重載荷時の皿ばねの「軸荷重－たわみ」関係のうち、各モデルの解析解における圧縮側の挙動を Fig. 4.1 にまとめている。このグラフにおいて  $0.75h$  ( $h$ :皿ばね自由高さ) の最終たわみの際の軸荷重値をみると MODEL1: 約 7,900 kgf, MODEL2: 約 18,000 kgf, MODEL3: 約 31,200 kgf となっており、曲げ荷重載荷時により発生する軸荷重は、単軸荷重載荷時と同じオーダーにあることがわかる。よって、上下方向の免震剛性を評価する際には上部構造による軸荷重の他に、ロッキングの際生じる軸荷重分も考慮にいれて振動特性を設計する必要があると考えられる。

上下免震構造として要求される条件の一つに上下方向以外の剛性を確保することが上げられる。そこで「曲げモーメント-たわみ角」関係から求められた各モデルの接線曲げ剛性に着目すると、最大たわみ量  $0.75h$  の範囲において、MODEL1:  $0.963 \times 10^6 \sim 1.011 \times 10^6 \text{ kgfmm}^\circ$  、MODEL2:  $1.512 \times 10^6 \sim 2.019 \times 10^6 \text{ kgfmm}^\circ$  、MODEL3:  $2.337 \times 10^6 \sim 4.020 \times 10^6 \text{ kgfmm}^\circ$  であるように大きな曲げ剛性を有していることが確認でき、皿ばねは先の条件を満たしていると言える。また、曲げ剛性が  $h/t$  の小さい皿ばねにおいては、たわみ角の進行による変化が小さく、 $h/t$  の大きな皿ばねにおいてもたわみ角の進行に伴って剛性が増して行く挙動を示すことは、設計の明快さ及び安全性の面から考えて好都合と言える。

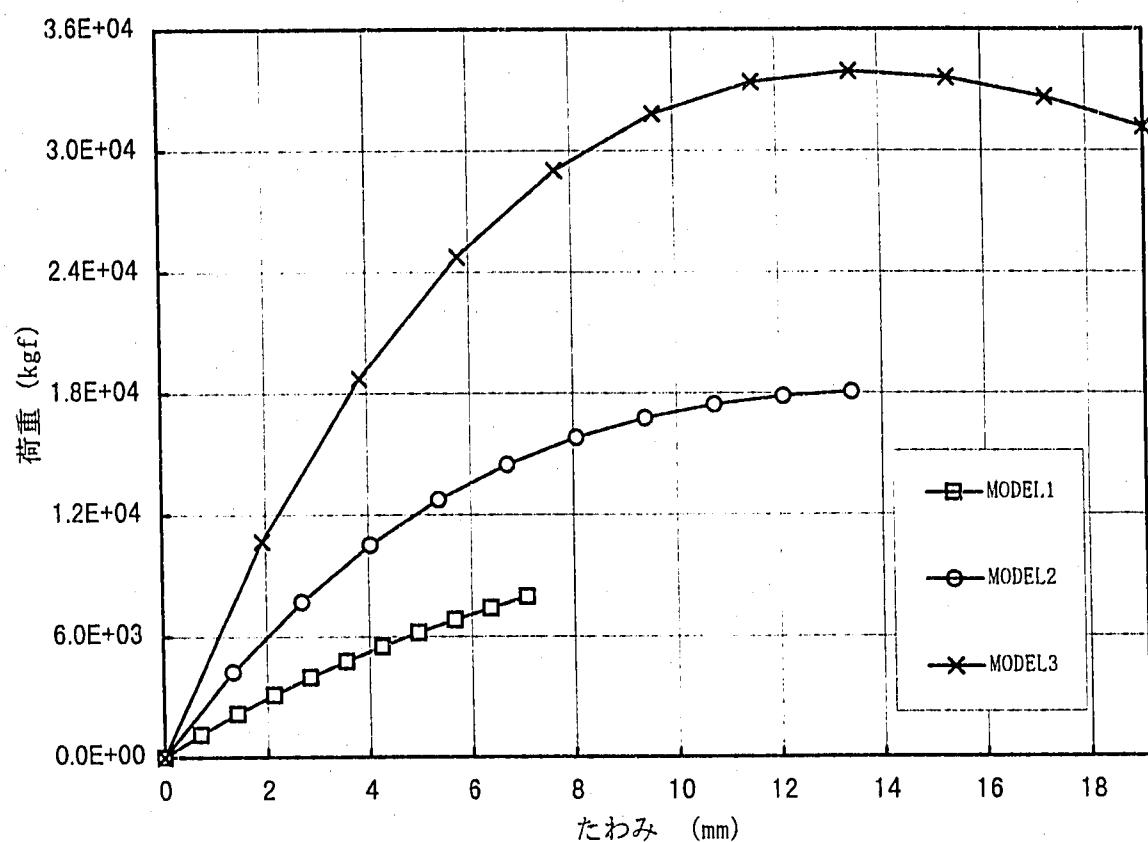
次に、軸荷重における「荷重-たわみ」関係の設計公式を応用し新たに導出した皿ばねの曲げ剛性評価手法を、FEM解をリファレンスとしてその記述性を検討した結果、等価円筒半径  $Re$  を適切に設定することにより、曲げ荷重載荷により発生する軸荷重とたわみ角の関係、及び曲げモーメントとたわみ角の関係を精度良く記述することが確認された。そこで、適切な等価円筒半径  $Re$  をどのように設定するかがポイントとなる。 $h/t$  に関する形状をパラメータとしたFEM解との比較から、「軸荷重-たわみ角」関係と「曲げモーメント-たわみ角」関係とは異なった  $Re$  の設定が必要になり、またその差は  $h/t$  が大きな皿ばねほど小さくなる傾向にある等が確認された。本報による検討の範囲において適切な等価円筒半径  $Re$  の設定の指針を示すことはむずかしく、今後、適切なパラメトリックな解析、あるいは実験値との比較によりその点を明らかにしていことが必要と考える。しかし、今回のFEM解との比較から、等価円筒半径  $Re$  を皿ばね上面半径  $a$  から底面半径  $b$  の範囲を一応の目安にしてパラメトリックに設定してみたところ、底面半径  $b$  付近に最適値がある傾向があった。よって、最大たわみ角において仮に  $Re = b$  とおいて算出した評価式値を同たわみ角のFEM解比較してみると、「軸荷重-たわみ角」関係では、MODEL1: 約 105 %、MODEL2: 約 115 %、MODEL3: 約 108 %であり、「曲げモーメント-たわみ角」関係においては、MODEL1: 約 93 %、MODEL2: 約 112 %、MODEL3: 約 116 %となっており、±20%の範囲に収まっている。曲げ剛性がロッキングの振動特性に与える効果の面から考えると、下式に示すように系の振動を1質点系で考えた場合、系の固有振動数  $f$  は、ばね剛性のルートの値で定まるところから、ばね剛性の±20%の誤差範囲は±4.5%以下の誤差範囲に収まり、ばね剛性自体の誤差範囲よりも小さくなることがわかる。

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore f: \text{系の固有振動数}, k: \text{ばね剛性}, m: \text{質量}$$

これを整理すると、現状における新たに導出した皿ばねの曲げ剛性に対する記述性は、等価円筒半径  $Re$  を皿ばね底面半径  $b$  と定めたとき、ばね剛性は±20%、ばね剛性から算出される系の固有振動数は±4.5%の誤差範囲にあると言える。

今後、上記等価円筒半径  $Re$  の精緻化の他に、上部構造の自重にあたる初期軸荷重を与えた上で曲げ荷重を載荷した場合の皿ばねの挙動に対して、今回提案した曲げ剛性評価式の記述性も検討する必要があると考える。

Fig. 4.1 軸荷重載荷における皿ばね各モデルの「荷重ーたわみ」関係



## 5. 結言

上下免震された機器に水平地盤動が入力された場合、系には水平とロッキングの連成振動を生じる。よって、免震要素として皿ばねの適用を考えた場合、曲げモーメントを負荷した際の皿ばねの力学的特性を明らかにする必要が生じる。そこで、本報においては、皿ばね上面にコサイン分布した強制変位を負荷する荷重条件で3次元シェルモデルによるFEM解析を実施し、皿ばねの曲げ荷重による力学的特性の検討を行うと共に、現状において整備されていない皿ばねの曲げ剛性評価手法を新たに開発して、FEM解をリファレンスとしてその記述性を検討した。以下に、解析的に得られた皿ばねの曲げ荷重に対する力学的特性の知見・考察と提案した曲げ剛性手法及びその記述性についての概略をまとめる。

1. 曲げ変位を皿ばねに負荷した場合、軸荷重の増加に伴うたわみの変化は引張り側と圧縮側の「軸荷重-たわみ」関係の非対称性に起因して軸荷重（軸反力）が生じる。よって、振動特性を設計する際には上部構造重量による軸荷重の他に、ロッキングの際に生じる軸荷重分も考慮に入れて上下方向の免震剛性を評価する必要がある。
2. 上下免震構造は、上下方向以外の剛性を確保することが求められるが、皿ばねは大きな曲げ剛性を有していることが確認でき、その条件に有効と言える。
3. 皿ばねの「曲げモーメント-たわみ角」関係においては、全般に非線形性が弱く、 $h/t$  ( $h$ :自由高さ、 $t$ :板厚) の大きい皿ばねになるほどたわみ角の進行に伴って曲げ剛性が大きくなっていく挙動を示す。これは、設計の明快さ、あるいは安全性の面から考えて好都合と言える。
4. 皿ばねに加わる曲げ荷重を、周方向に細分割した微少区間において等分布な軸荷重とらえ、等価円筒半径の概念と「軸荷重-たわみ」関係に関する設計公式を用いて微少区間における軸荷重、及びモーメントを求め、それらを全周に渡り積算することで皿ばねの曲げ荷重に対する「軸荷重-たわみ角」関係、及び「曲げモーメント-たわみ角」関係を求める曲げ評価式を創出した。
5. この曲げ評価式をFEM解をリファレンスとして検討した結果、適切な等価円筒半径を設定することにより、非常に良好な記述性を有していることが確認できた。

今後の課題として、適切な等価円筒半径  $R_e$  の設定法の案出、および上載荷重による軸荷重と曲げ荷重の重畠したときの皿ばねの力学的特性の把握が上げられる。

## 参考文献

- (1) J. O. Almen and A. Laszlo, "The Uniform-Section Disk Spring", Trans ASME, 58, (1936), pp305-314
- (2) JIS B 2706 -1973
- (3) G. A. Wempner ; Proc. Third U. S. National Congr. App. Mech. (1958) 473.
- (4) 浜田実、瀬口靖幸；日本機械学会論文集 31-232 (1965) 又は、ばね論文集(1967)
- (5) 第3版 ばね ばね技術研究会編, 丸善

### 皿 ば ね 解 説

この解説は、本体に規定した事柄、参考に記載した事柄、及びこれらに関連した事柄を説明するもので、規格の一部ではない。

#### I. 1995年の改正の要点

- (1) 今回(1995年)の改正の経緯 今回の改正は、1990年6月1日の第399回標準会議において、“日本工業規格における国際単位系(SI)の導入の方針”が決定されたのに基づき、SI導入を行ったものである。  
また、JIS Z 8301(規格表の様式)が1990年3月に改正されたのに伴い、それとの整合化を図る必要が生じたため規格表の様式を変更した。  
今回の改正は、実質的な変更点ではなく形式的な改正であり、この規格の改正原案は、工業技術院事務局によって作成されたもので、1994年10月の日本工業標準調査会機械要素部会の審議を経て、平成7年2月1日付けて通商産業大臣によって改正された。
- (2) 今回(1995年)の主な改正点 今回の主な改正点は、次のとおりである。
  - (a) SI単位だけを規格値とし、従来単位(kgf/mm<sup>2</sup>など)を参考値として併記した。
  - (b) JIS Z 8301の改正に伴い、規格様式を見直した。
  - (c) 規定事項(引用規格名称など)を最新のJISと整合させた。
- (3) その他 今回の改正は、実質的な変更点ではなく形式的な改正にとどまっているので、解説も前回(1978年)改正時のものを一部修正し、次のとおり引用掲載することにした。

#### 規定項目の補足説明

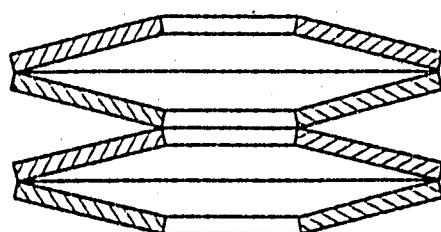
**制定の経過** 皿ばねは規格本体の図に示すような中央に穴のあいた皿状のばねで、この特長とするところは小さい空間のところで大きな負荷容量を得ることができる。

このばねは1970年ごろから急速に需要が増し、当時はDIN 2093によることが多かった。このためDINを基準としたJISを制定することが混乱を起こすことがないので1972年内、外径をDINを採用した規格を制定した。このとき皿ばねの板厚として標準数列を使用した日本ばね工業会規格によっていた。このため一部ではDINと相違したばねが制定されていたが、種々の面で不都合なことが多く昭和51年度の改正にあってはばねの使用板厚を一部改正した原案を日本ばね工業会において審議し、日本工業標準調査会機械要素部会皿ばね専門委員会の議を経て、所定の手続きによって昭和53年7月1日に改正された。

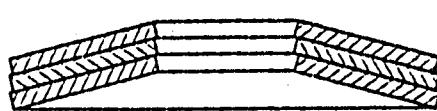
この解説では、以下に制定した皿ばねの特性及び計算式について述べるものである。

**適用範囲について** 皿ばねは、これを単独で使用する場合もあるが、積み重ねを種々にすることによってばね特性を変化させることができる。解説図1のような重ね方を直列と呼び、解説図2のような重ね方を並列と呼んでおり、積み重ね方によって解説図3に示すように種々なばね定数を得ることができる。

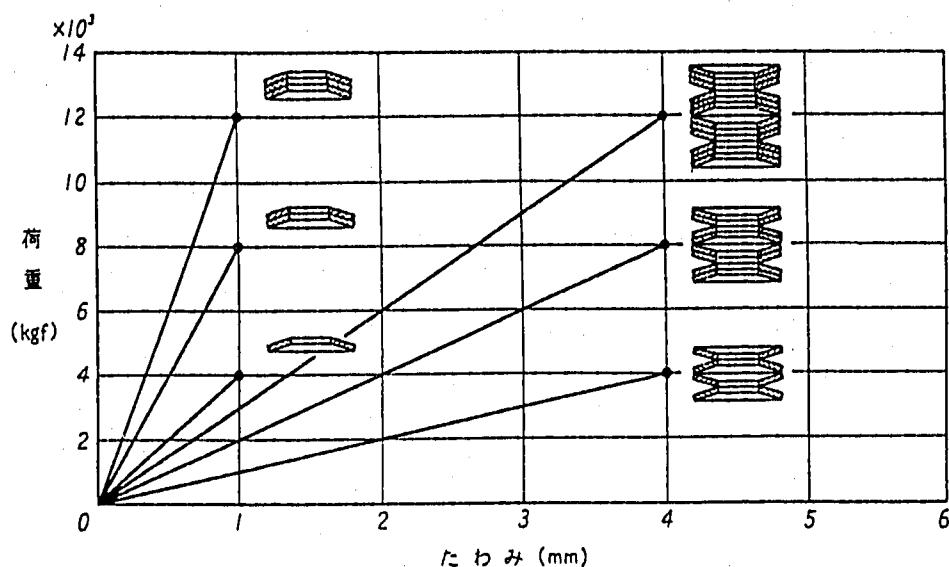
解説図1 直列



解説図2 並列



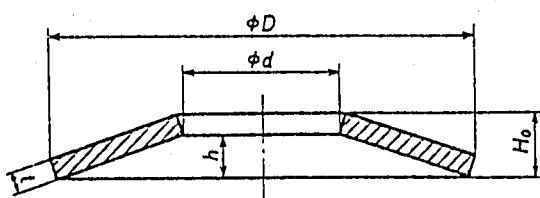
解説図3



また、このばねは後述のように円すいの高さと板厚の比によってばね特性を非線形化することも可能である。しかし反面高さ及び板厚のわずかな相違によってばね特性が変化するので製作に注意が必要があり、使用上でも気をつけなければならない。

#### 計算式

解説図4



皿ばねの荷重とたわみとの関係式、荷重と応力に関する式については一般にAlmen-Laszloの式と称される形が多く使用されている。

解説図4を参照して、記号を次のように定める。

$D$ : 外径 (mm)

$d$ : 内径 (mm)

$t$ : 板厚 (mm)

$h$ : 皿ばねの全高さ  $H_0$ から板厚  $t$ を引いた値 (mm)

$\delta$ : ばねのたわみ (mm)

$P$ : 作用荷重 (kgf)

$E$ : 縦弾性係数 (鋼の場合  $2.1 \times 10^4$  kgf/mm<sup>2</sup>) $\nu$ : ポアソン比 (鋼の場合 0.3) $\alpha$ :  $D/d$  直径比

$$P = \frac{4E\delta C}{(1-\nu^2) D^2} \left\{ \left( h - \frac{\delta}{2} \right) t + t^3 \right\} \quad (1)$$

ここで、

$$C = \left( \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2}{\ln \alpha} \right) \pi \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^2 \quad (2)$$

を示し、解説図5のような値である。上の式で明らかなように、 $\delta = h$  のとき、

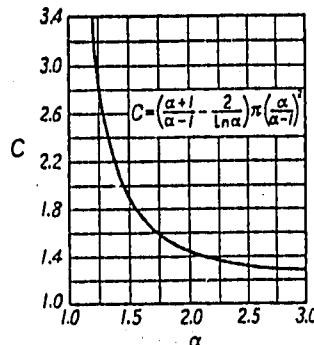
$$P_{\delta=h} = \frac{4ECHt^3}{(1-\nu^2) D^2} \quad (3)$$

と表される。一般に

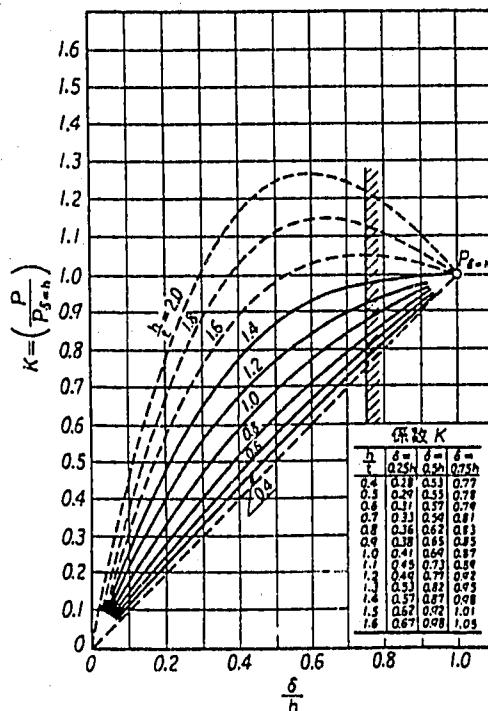
$$P = k P_{\delta=h} \quad (4)$$

と書き表すと  $k$  は  $h/t$  によって相違して解説図6のように示される。

解説図5



解説図6



一般に  $\delta = 0.75l$  のときを最大荷重とすることが多く、本体裏面には  $\delta = 0.5l$ ,  $\delta = 0.75l$  のときの荷重値を参考として示している。皿ばねの特徴の一つである荷重とたわみとの非線形があげられる。

すなわち、ばね定数 $k$ は、

さて、皿ばねの応力については、円周方向応力としてかなり高い応力が発生する。一般に皿ばねの上面では圧縮応力を生じ、下面で引張応力が生ずる。解説図7に示す皿ばねの内周上面1の位置での応力 $\sigma_1$ は

$$\sigma_1 = \frac{4E}{1-\mu^2} \cdot \frac{C}{D^2} \delta \left\{ -\beta \left( h - \frac{\delta}{2} \right) - \gamma t \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

内周下面の応力 $\sigma_{\text{II}}$ は

$$\sigma_{ii} = \frac{4E}{1-\nu^2} \cdot \frac{C}{D^2} \delta \left\{ -\beta \left( h - \frac{\delta}{2} \right) + \gamma t \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

外周下面の応力の時は

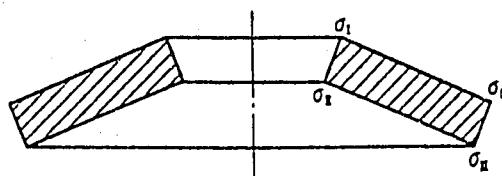
$$\sigma_{\text{in}} = \frac{4E}{1-\nu^2} \cdot \frac{C}{D^2} \cdot \frac{\delta}{\sigma} \left\{ (2\gamma - \beta) \left( h - \frac{\delta}{2} \right) + \gamma t \right\} \dots \quad (8)$$

外周上面での応力 $\sigma_{\text{fl}}$ は

と書される。ここで

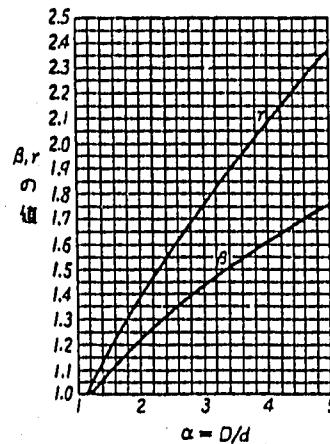
8.  $r$ の値を表示すると解説表1のようで、図示したのが解説図8である。

解説図7



解説表1  $\beta, \gamma$  の値

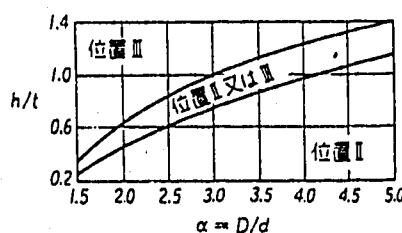
$\alpha = D/d$	$\beta$	$\gamma$
1.2	1.02	1.05
1.4	1.07	1.14
1.6	1.12	1.22
1.8	1.17	1.30
2.0	1.22	1.38
2.2	1.26	1.45
2.4	1.31	1.53
2.6	1.35	1.60
2.8	1.39	1.67
3.0	1.43	1.74
3.2	1.46	1.81
3.4	1.50	1.88
3.6	1.54	1.94
3.8	1.57	2.00
4.0	1.60	2.07
4.2	1.64	2.13
4.4	1.67	2.19
4.6	1.70	2.25
4.8	1.73	2.31
5.0	1.76	2.37

解説図8  $\beta, \gamma$  の値

最大応力は主として内周の上面すなわちの圧縮応力であるが、ばねの疲労による折損では引張応力の最大が問題となり、規格中には  $\delta=0.5h$  と  $\delta=0.75h$  に対する引張りの最大応力値を参考として示した。

DIN 2092では動荷重を受けるばねで  $h/t$  及び  $D/d$  によって最大引張応力発生位置を解説図9のように示している。

解説図9



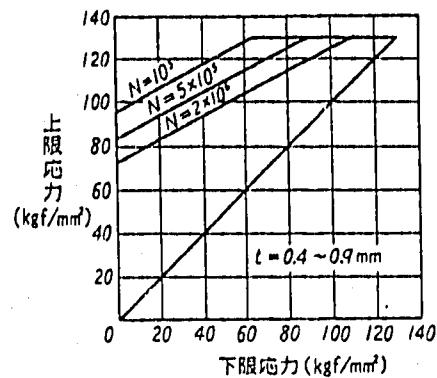
なお、皿ばねの計算式として以上のAlmen-Laszloの式に対し、Wempner<sup>(1)</sup> 又は浜田、瀬口<sup>(2)</sup> のエネルギー法による解がある。

注<sup>(1)</sup> G.A.Wempner : Proc. Third U.S. National Congr. App. Mech. (1958) 473.

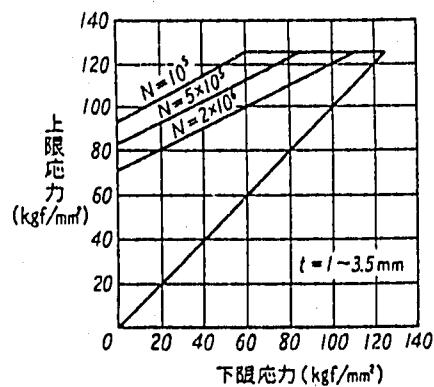
<sup>(2)</sup> 浜田実、瀬口靖幸：日本機械学会論文集 31-232 (1965) 又はばね論文集 (1967)

DIN 2092では板厚区分に従って解説図10~12に示すような疲労限度曲線を与えており。図中のNの値は繰返し回数を示すものである。この図はCr-V鋼について得られた線図であるので、JISで示すSK5Mを使用した場合の皿ばねでは、これらの図の80%位と見直したほうが安全である。

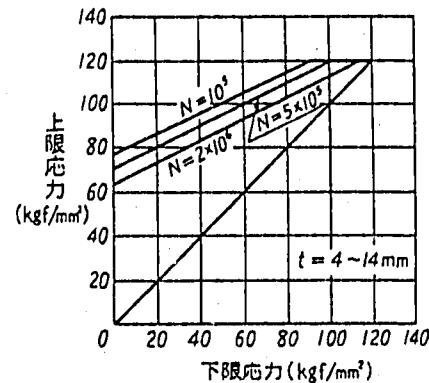
解説図10



解説図11



解説図12



なお、参考として、DIN 2093の寸法を解説表2として示す。

解説表2

重荷重用:  $\frac{D}{t} \approx 18$ ,  $\frac{h}{t} \approx 0.4$ 軽荷重用:  $\frac{D}{t} \approx 28$ ,  $\frac{h}{t} \approx 0.75$ 

グルーブ	D h12	d H12	t	h	Ho	P	$\delta$	$H_o - \delta$	$\sigma$	グルーブ	D h12	d H12	t	h	Ho	P	$\delta$	$H_o - \delta$	$\sigma$
1	8	4.2	0.4	0.2	0.60	21	0.15	0.45	125	1	8	4.2	0.3	0.25	0.55	12	0.19	0.36	135
	10	5.2	0.5	0.25	0.75	34	0.19	0.56	125		10	5.2	0.4	0.3	0.70	21	0.22	0.43	131
	12.5	6.2	0.7	0.3	1.00	67	0.22	0.78	142		12.5	6.2	0.5	0.35	0.85	30	0.26	0.59	114
	14	7.2	0.8	0.3	1.10	81	0.22	0.88	134		14	7.2	0.5	0.4	0.90	28	0.30	0.60	113
	16	8.2	0.9	0.35	1.25	103	0.26	0.99	134		16	8.2	0.6	0.45	1.05	42	0.34	0.71	114
2	18	9.2	1	0.4	1.40	128	0.30	1.10	133	2	18	9.2	0.7	0.5	1.20	58	0.37	0.83	114
	20	10.2	1.1	0.45	1.55	155	0.34	1.21	132		20	10.2	0.8	0.55	1.35	76	0.41	0.94	115
	22.5	11.2	1.25	0.5	1.75	195	0.37	1.38	133		22.5	11.2	0.8	0.65	1.45	72	0.49	0.96	111
	25	12.2	1.5	0.55	2.05	298	0.41	1.64	146		25	12.2	0.9	0.7	1.60	88	0.52	1.08	105
	28	14.2	1.5	0.65	2.15	290	0.49	1.66	131		28	14.2	1	0.8	1.80	113	0.60	1.20	112
	31.5	16.3	1.75	0.7	2.45	398	0.52	1.93	133		31.5	16.3	1.25	0.9	2.15	194	0.67	1.48	122
	35.5	18.3	2	0.8	2.80	528	0.60	2.20	137		35.5	18.3	1.25	1	2.25	173	0.75	1.50	110
	40	20.4	2.25	0.9	3.15	660	0.67	2.48	136		40	20.4	1.5	1.15	2.65	267	0.86	1.79	117
	45	22.4	2.5	1	3.50	790	0.75	2.75	133		45	22.4	1.75	1.3	3.05	372	0.97	2.08	118
	50	25.4	3	1.1	4.10	1220	0.82	3.28	146		50	25.4	2	1.4	3.40	485	1.05	2.35	117
3	56	28.5	3	1.3	4.30	1150	0.97	3.33	131	3	56	28.5	2	1.6	3.60	452	1.20	2.40	112
	63	31	3.5	1.4	4.90	1530	1.05	3.85	133		63	31	2.5	1.75	4.25	730	1.31	2.94	112
	71	36	4	1.6	5.60	2100	1.20	4.40	124		71	36	2.5	2	4.50	690	1.50	3.00	108
	80	41	5	1.7	6.70	3500	1.28	5.42	127		80	41	3	2.3	5.30	1070	1.72	3.58	117
	90	46	5	2	7.00	3200	1.50	5.50	122		90	46	3.5	2.5	6.00	1450	1.88	4.12	114
	100	51	6	2.2	8.20	4900	1.65	6.55	127		100	51	3.5	2.8	6.30	1330	2.10	4.20	108
	112	57	6	2.5	8.50	4500	1.88	6.62	117		112	57	4	3.2	7.20	1830	2.40	4.80	119
	125	64	8	2.6	10.60	8800	1.95	8.65	126		125	64	5	3.5	8.50	3100	2.65	5.85	127
	140	72	8	3.2	11.20	8700	2.40	8.80	130		140	72	5	4	9.00	2850	3.00	6.00	122
	160	82	10	3.5	13.50	14000	2.60	10.90	132		160	82	6	4.5	10.50	4200	3.40	7.10	122
3	180	92	10	4	14.00	12800	3.00	11.00	122	3	180	92	6	5.1	11.10	3800	3.80	7.30	115
	200	102	12	4.2	16.20	18700	3.15	13.05	120		200	102	8	5.6	13.60	7800	4.20	9.40	125
	225	112	12	5	17.00	17500	3.75	13.25	115		225	112	8	6.5	14.50	7200	4.85	9.65	119
	250	127	14	5.6	19.60	25000	4.20	15.40	123		250	127	10	7	17.00	12200	5.25	11.75	126