

TY

PNC #Y8603 96-001
96WA-2251E-0010C

本資料は 年 月 日付で登録区分、
変更する。

[技術情報室]

多成分分離理論に関する研究

(共同研究報告書)

1996年3月

名古屋大学 工学部
動力炉・核燃料開発事業団

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせ下さい。

〒319-11 茨城県那珂郡東海村大字村松 4 - 33

動力炉・核燃料開発事業団 東海事業所

技術開発推進部 技術管理室

本資料の全部または一部を複製・複製・転載する場合は、下記にお問い合わせください。

〒319-1184 茨城県那珂郡東海村大字村松4番地49
核燃料サイクル開発機構
技術展開部 技術協力課

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to:
Technical Cooperation Section,
Technology Management Division,
Japan Nuclear Cycle Development Institute
4-49 Muramatsu, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki, 319-1184
Japan

essed to:

I Nuclear Fuel
I, Ibaraki-ken

Development

© 核燃料サイクル開発機構 (Japan Nuclear Cycle Development Institute)



多成分分離理論に関する研究

山本一良*¹;
小池 進*², 青木英二*²

要 旨

回収ウラン等の多成分系混合ガスの分離特性を評価するため、多成分系分離理論に関する研究を実施した。

(1) 分離理論研究

多成分分離理論について基礎的検討を行い、研究方針及び研究課題を摘出した。

- ① 多成分系での物性値、特に拡散計数の調査
- ② 多成分分離パワーの評価

(2) 応用解析研究

多成分混合ガスの分離特性を解析するために必要な基礎的解析手法を開発し、Xe ガス (9 成分) の試計算を実施した。

本報告書は、動力炉・核燃料開発事業団と名古屋大学が実施した共同研究の研究成果である。

契約番号：074-F014

事業団担当部課室及び担当者： 核燃料技術開発部 遠心法設計開発室 (青木英二)

*1： 名古屋大学工学部 原子核工学科

*2： 動力炉・核燃料開発事業団 核燃料技術開発部 遠心法設計開発室

目 次

1. はじめに	1
2. 分離理論	2
2.1 多成分分離要素性能解析	2
2.2 多成分系の物性	3
2.3 多成分分離カスケード解析	3
2.4 多成分系分離の評価	4
2.5 本節のまとめ	4
3. 応用解析	5
3.1 解析理論	5
3.2 数値解法	8
3.3 多成分系分離計算	12
3.4 本節のまとめ	12
4. まとめ	14
記号表	15
参考文献	16
Appendix A	17

多成分系分離理論

1. はじめに

原子炉から取り出した回収ウランは、U-235、U-238以外に、U-232、U-234、U-236を含む多成分系のウランである。この回収ウラン中のU-235を再濃縮し再び燃料として使用するためには被曝低減の観点から放射性の強いU-232を分離、除去することが望ましい。このため、これらの分離特性を把握するための分離理論が必要とされているが従来の分離理論はU-235、U-238からなる2成分ガスに対する理論であり、回収ウランのように成分が複数ある場合には適用できないため、このような場合にも適用できる分離理論を確立し、着目成分を効率的に分離する技術を開発する。

(1) 分離理論研究

分離解析の基礎となる多成分分離理論及び拡散係数等の多成分ガスの物性評価に関する研究を実施する。

(2) 応用解析研究

多成分系混同ガスの分離特性を解析するために必要な基礎的な解析手法を開発する

2. 分離理論

多成分混合物を分離するプラントを設計するためには、分離要素の性能解析、ならびに、分離要素を組み合わせたカスケードの分離性能解析の両者から検討を行う必要がある。本節ではそのための問題点を摘出する。

2.1 多成分分離要素性能解析

ガス遠心分離機、蒸留塔、熱拡散塔などの分離装置を、まとめて分離要素と呼ぶ。分離要素の性能解析は、最終的には供給組成と抜き出し組成がどれだけ変化するか、その程度が幾何条件、運転条件でどのように影響を受けるかを把握することを目的としている。そのためには、分離要素内の組成分布を知ればよい。

分離要素内の組成変化は、混合物を圧力勾配下（遠心分離機）、温度勾配下（熱拡散塔）などの場におくことで、圧力拡散、熱拡散流束などを生じさせることによって得られる。また、蒸留、化学交換法のように、気相、液相（あるいは液相、固相）の2相間で、混合物の分布状態が異なることを利用して組成変化を生じせしめている場合もある。同位体混合物の場合には、通常このような外力場から受ける効果、分布状態の差は小さく、分離要素内で、これら小さい分離効果を積み重ねる工夫がなされている。遠心機、熱拡散塔では、塔内での自然対流を生じさせることで、蒸留、化学交換法では、充填物などを用いて、素現象が繰り返し生ずるようにして分離効果を積み重ねている。また、対流を向流状態で生成させることによって積み重ね効果を大きくし、また、気・液、液・固などの2相は要素内で向流接触するように工夫させる。このような工夫で、分離の程度は積み重ねられるが、これにも限度がある。それは、分離要素内で形成された組成分布、すなわち濃度分布を打ち消す方向に通常拡散現象が生じてしまうからである。圧力拡散、熱拡散など外部から与えた場で生じ、積み重ねられた組成の変化は、通常拡散によって押し戻され、それらがつり合ったところで組成分布が決まる。

上で述べた現象を支配するのは、移流・拡散方程式である。これは、移流、すなわち、分離要素内部の流れで運ばれる量と、遠心力場、温度勾配下などで生ずるフラックス、濃度温度勾配を打ち消す向きの通常フラックスとのつり合いを表現している。分離要素内部の流れ場の方程式 (Navier-Stokes Eq.) と、その解を入力とする移流・拡散方程式が解ければ、濃度・組成分布が得られることになる。

したがって、これらの式を解く際に必要な情報が何かを理解することが、多成分分離性

能解析を遂行するために必要である。

流れ場を支配するのは、多成分混合物の密度、粘性係数、熱伝導度であり、濃度勾配を支配するのはフラックスの駆動力である ∇P (圧力勾配)、 ∇T (温度勾配)、 ∇x (濃度勾配) からフラックスを評価するための係数、即ち輸送係数である。物質の移動に関しては、この中で、通常拡散係数が最も重要である。上記の輸送係数は、ほとんどが拡散係数を用いて定義されているからである。

2.2 多成分系の物性

純物質気体の物性については、気体分子運動論などの理論解析から、圧力・温度依存性などが明らかにされているものも多く、実際に測定されたデータも豊富である。測定データがない物質でも、他の物質の測定データと理論解析から、ある程度の類推が可能である。

これに対して、混合物の物性値に関しては、気体分子運動論からの表式があるものの、極めて複雑で、実際には理論的式は用いられず、もっぱら近似的な経験式が使用されているようである。粘性係数、熱伝導係数に関してはWilkeの半実験式が有名であるが、この式から得られる値は、ほとんど純物質物性値を組成平均した値と同じになる。したがって、実際の解析に用いる時には、組成平均を採用するのが、式も単純で見通しがよいと思われる。

しかしながら、拡散係数に関してはそれほど容易ではない。多成分系における拡散フラックスの定義、拡散係数の定義に関しても、有名な理論体系だけに限ってもChapman-Cowling流とHirschfelder流の2方式がある。これらの差異は2成分系では消失するので問題はないが、3成分系以上では、拡散係数の性質までも異なる。更に、2成分系の拡散係数では考える必要のない組成依存性が多成分系には存在することも問題を複雑にしている。2成分系で測定された拡散係数をそのまま多成分系で用いるためには、よくよくの吟味が必要となる。

分離装置内の濃度、組成分布は、拡散係数に大きく依存するのであるから、拡散係数については他の物性に対するよりも厳密に調べる必要がある。

2.3 多成分分離カスケード解析

カスケードを構成する分離要素の性能が与えられると、カスケードの性能計算が可能である。カスケード計算に必要な分離要素の性能は、具体的には、多成分系各成分間の

全分離係数である。どの成分対に着目してカスケード段間混合点の存在比を一致させるかを定めると、2成分系の場合の理想カスケードに相当するカスケードを構成することができる。

多成分系カスケードの計算方法については、共同研究者の山本によって開発された方法があり、学会誌論文にも発表されているが、1979年に提出された学位論文にまとめられている。参考のために、付録に該当部分を掲載する。

2.4 多成分系分離の評価

ウラン濃縮カスケードの性能評価のために作られた分離パワーの概念は、分離要素の性能評価およびカスケードの構成に極めて有用である。2成分系の分離パワーについて、数学的構造、分離パワーを表現する関数の物理的意味、などについては、共同研究者の山本により明らかにされ、前述の学位論文にまとめられている。更に、多成分系に対しても、理論が拡張され、その数学的構造が明らかにされたが、その中に、数学的要請だけからでは決定することのできない定数があることが分かった（付録参照）。この定数は、分離対象によって、工学的要請から決定すべきものであり、この点の検討は十分なされているとは言いがたい。これらから、種々の例題を解析しながらこれらの決定法を考察していく必要があると考える。

2.5 本節のまとめ

本節では、多成分系分離理論に関して、これから研究すべき問題を抽出した。特に以下の2点：

- (1) 多成分系での物性値，特に拡散係数について調べること
- (2) 多成分系での分離性能評価法について、多成分系分離パワーの未定定数の決定法について考察すること

が重要であることが明らかとなった。

3. 応用解析

3.1 解析理論

Harink-Snijders⁽¹⁾ の多成分系拡散方程式に基づいて解析する。

第k成分の同位体について、半径方向の輸送を ϕ_r 、軸方向の輸送を ϕ_z と表わす。

$$\begin{aligned}\phi_r &= -D \frac{\partial \rho_k}{\partial r} + D \frac{M_k}{RT_0} \frac{\partial \rho_k}{\partial r} + \rho_k V_r \\ \phi_z &= -D \frac{\partial \rho_k}{\partial z} + \rho_k V_z\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、第一項は拡散によるもので、逆拡散と圧力拡散を示し、最後の項は対流項を示す。気体は理想気体とし、等温挙動を示すものとする。

定常保存式は次式で表わされる。

$$\operatorname{div} \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_r) + \frac{\partial}{\partial z} \phi_z \quad (2)$$

遠心機の回転胴内で遠心力に対する平衡圧力分布が成り立っているとすると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_k}{\partial r} &= \rho_k \Omega^2 r \\ \rho_k &= \rho N_k\end{aligned}\quad (3)$$

であるから、式(3)は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ -Dr \frac{\partial}{\partial r} (\rho N_k) + Dr \rho N_k \frac{M_k \Omega^2 r}{RT_0} + r \rho N_k V_r \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -D \frac{\partial}{\partial z} (\rho N_k) + \rho N_k V_z \right\} = 0 \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} (\rho N_k) &= \rho \frac{\partial N_k}{\partial r} + \rho N_k \sum_{j=1}^n M_j N_j \frac{\Omega^2 r}{RT_0} \\ \frac{\partial}{\partial z} (\rho N_k) &= \rho \frac{\partial N_k}{\partial z} + N_k \frac{\partial \rho}{\partial z}\end{aligned}\quad (5)$$

であるから、式(4)は次式のようになる。

$$-\rho D \frac{\partial^2 N_k}{\partial z^2} - \rho D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial N_k}{\partial r} - \frac{\Omega^2 r^2}{RT_0} \left(M_k - \sum_{j=1}^n M_j N_j \right) N_k \right\} + \rho V_z \frac{\partial N_k}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

ここで、 ρD は一定、 $\rho V_r \frac{\partial N_k}{\partial r}$ 、 $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ は無視できると仮定した。

また、境界条件として以下の条件を与える。

回転胴の壁及び中心軸で半径方向輸送はないことより

$$r = a \quad \frac{\partial N_k}{\partial r} - \frac{\Omega^2 a}{RT_0} \left(M_k - \sum_{j=1}^n M_j N_j \right) N_k = 0$$

$$r=0 \quad \frac{\partial N_k}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

回転胴の両端で軸方向の輸送は一定値となる。

$$Z=0 : \int_0^a \phi_z 2\pi r dr = \int_0^a \left(-\rho D \frac{\partial N_k}{\partial z} + \rho V_z N_k \right) 2\pi r dr = -F(1-\theta)N_{wk} \quad (8)$$

$$Z=Z_H : \int_0^a \phi_z 2\pi r dr = \int_0^a \left(-\rho D \frac{\partial N_k}{\partial z} + \rho V_z N_k \right) 2\pi r dr = F\theta N_{pk} \quad (9)$$

式(6)をSoubbaramayerと同様に次の変換を行って解く。

$$\eta = \frac{z}{a}, \quad \xi = A^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (10)$$

$$\eta_H = \frac{Z_H}{a}, \quad \eta_F = \frac{Z_F}{a}, \quad \phi_{pk} = \frac{F_k \theta}{\pi a \rho D}, \quad \phi_{wk} = \frac{F_k (1-\theta)}{\pi a \rho D}$$

k成分の同位体モル分率

$$\bar{N}_k = \left(\int_0^a N_k \cdot 2\pi r dr \right) / \pi a^2 \quad (11)$$

また、次式を定義し

$$\Psi = \int_0^r \rho V_z r' dr'$$

$$J_1(\eta) = \frac{\pi}{\pi a \rho D} \cdot \frac{1}{A^2} \int_0^{A^2} \Psi d\xi \quad (12)$$

$$J_2(\eta) = \left(\frac{\pi}{\pi a \rho D} \right)^2 \cdot \frac{1}{A^2} \int_0^{A^2} \frac{\Psi^2}{1 - \frac{\xi}{A^2}} d\xi$$

式(6)は次式となる。

$$\phi_{pk} N_{pk} = \bar{N}_k \left\{ \phi_{pk} - \frac{\Omega^2 a^2}{RT_o} \left(M_k - \sum_{j=1}^n M_j \bar{N}_j \right) J_1(\eta) \right\} - [1 + J_2(\eta)] \frac{d\bar{N}_k}{d\eta} \quad (13)$$

$$\eta = \eta_H : \bar{N}_k = N_{pk} \quad (14)$$

$$\eta = \eta_F : \bar{N}_k = N_{ok}$$

式(13)の解は

$$\bar{N}_k(\eta) = e^{F(\eta)} \left\{ N_{ok} - \phi_{pk} N_{pk} \int_{\eta_F}^{\eta} \frac{e^{-F(\eta')}}{1 + J_2(\eta')} d\eta' \right\} \quad (15)$$

ここで

$$F = \int_{\eta_F}^{\eta} \frac{\phi_{pk} - \frac{\Omega^2 a^2}{RT_o} \left(M_k - \sum_{j=1}^n M_j \bar{N}_j \right) J_1(\eta')}{1 + J_2(\eta')} d\eta' \quad (16)$$

式 (14) の境界条件を用いて、k 成分の濃度は

$$\frac{N_{pk}}{N_{ok}} = \frac{1}{e^{-F(\eta_H)} + \phi_{pk} \int_{\eta_F}^{\eta_H} \frac{e^{-F(\eta)}}{1+J_2(\eta)} d\eta} \quad (17)$$

回収域に対しても同様にして解くことができる。

式 (13) に対応する拡散方程式は

$$-\phi_{wk} N_{wk} = \bar{N}_k \left\{ -\phi_w - \frac{\Omega^2 \alpha^2}{RT_o} \left(M_k - \sum_{j=1}^n M_j \bar{N}_j \right) J_1(\eta) \right\} - [1 + J_2(\eta)] \frac{d\bar{N}_k}{d\eta} \quad (18)$$

$$\eta = \eta_F : \bar{N}_k = N_{ok} \quad (19)$$

$$\eta = 0 : \bar{N}_k = N_{wk}$$

この解は

$$\frac{N_{wk}}{N_{ok}} = \frac{1}{e^{G(\eta_F)} \left\{ 1 + \phi_{wk} \int_{\eta_F}^{\eta} \frac{e^{G(\eta')}}{1+J_2(\eta')} d\eta' \right\}} \quad (20)$$

$$G(\eta) = \int_{\eta_F}^{\eta} \frac{-\phi_w - \frac{\Omega^2 \alpha^2}{RT_o} \left(M_k - \sum_{j=1}^n M_j \bar{N}_j \right) J_1(\eta')}{1 + J_2(\eta')} d\eta' \quad (21)$$

となる。

3.2 数値解法

濃度方程式をルンゲークッターシル法により解く。

(1) 回収域

$$\frac{dX_k}{d\eta} = \left[\frac{\frac{\Omega^2 \alpha^2}{RT} \left(\sum_{j=1}^n M_j X_j - M_k \right) J_1 - \phi_{wk}}{1 + J_2} \right] \cdot X_k + \frac{\phi_{wk} \cdot X_{wk}}{1 + J_2} \quad (22)$$

ここで、

$$\Psi = \int_0^r \rho V_z r' dr'$$

$$J_1 = \frac{\pi}{\pi a \rho D} \cdot \frac{1}{A^2} \int_0^{A^2} \Psi d\xi$$

$$J_2 = \left(\frac{\pi}{\pi a \rho D} \right)^2 \cdot \frac{1}{A^2} \int_0^{A^2} \frac{\Psi^2}{1 - \frac{\xi}{A^2}} d\xi$$

(2) 濃縮域

$$\frac{dX_k}{d\eta} = \left[\frac{\frac{\Omega^2 \alpha^2}{RT_0} \left(\sum_{j=1}^n M_j X_j - M_k \right) J_1 + \phi_{pk}}{1 + J_2} \right] X_k - \frac{\phi_{pk} \cdot X_{pk}}{1 + J_2} \quad (23)$$

ここで、

$$\Psi = \int_0^r \rho V_z r' dr'$$

$$J_1 = \frac{\pi}{\pi a \rho D} \cdot \frac{1}{A^2} \int_0^{A^2} \Psi d\xi$$

$$J_2 = \left(\frac{\pi}{\pi a \rho D} \right)^2 \cdot \frac{1}{A^2} \int_0^{A^2} \frac{\Psi^2}{1 - \frac{\xi}{A^2}} d\xi$$

また、物質バランスより

$$N_{kf} \cdot F = N_{kp} \cdot P + N_{kaw} \cdot W \quad (24)$$

回転胴内部のフローパターンは、流れ関数 Ψ で表わされる。本来フローパターンは詳細な流動解析により決定すべきものであるが、ここでは図3-1に示すごとくシンフローでモデル化する。スクープ流、エクマン層流、ステワートソン層流の流量をそれぞれ G_X , G_E , G_S とし、プロダクト流量、ウエスト流量を P , W とすると、各領域における流れ関数は次のようになる。

回収域の流れ関数

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= 0 & (0 \leq r < r_1) \\
 \Psi_2 &= \frac{1}{2\pi} (G_X) & (r_1 \leq r \leq r_2) \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{2\pi} (G_X + G_E) & (r_2 \leq r < r_3) \\
 \Psi_4 &= \frac{1}{2\pi} (G_X + G_E + G_S) & (r_3 \leq r < r_a) \\
 \Psi_5 &= -W & (r = r_a)
 \end{aligned} \tag{25}$$

濃縮域の流れ関数

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= 0 & (0 \leq r < r_1) \\
 \Psi_2 &= \frac{1}{2\pi} (F + G_X) & (r_1 \leq r < r_2) \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{2\pi} (F + G_X + G_E) & (r_2 \leq r < r_3) \\
 \Psi_4 &= \frac{1}{2\pi} (F + G_X + G_E + G_S) & (r_3 \leq r < r_a) \\
 \Psi_5 &= \frac{1}{2\pi} (P) & (r = r_a)
 \end{aligned} \tag{26}$$

式(22), (23)の濃度方程式の解は、 n 変数に対するNewton-Raphson法により収束解として求める。濃度方程式の積分はルンゲクッタ法により行う。

以下に計算手順を示す。

- (1) 回転胴の形状 (a, Z_H) と速度 (Ω , 又は A^2) を定める。同様にフィード濃度 N_F 、カット $\theta = P/F$ 、流量 $F = P + W$ を定める。

- (2) 流動解析により、濃縮域、回収域における流型を求め、流れ関数を定める。
- (3) $N_{k,p}(k=1 \sim n)$ の値を推定する。
- (4) 仮定した N_p に対する $N_{k,w}(k=1 \sim n)$ の値を全体の物質バランス、式 (24) から求める。

$$N_{k,F} \cdot F = N_{k,p} \cdot P + N_{k,w} \cdot W$$

- (5) 式 (22) を数値的に $\eta=0$ からフィード点 η_F まで積分する。
- (6) 濃縮部において積分を継続する。式 (23) を用いて遠心機の頭部 ($\eta=1$) まで積分する。
- (7) ステップ 6 で計算した濃度をステップ 3 の推定値と比較する。これらの 2 つが十分に一致しなければ、推定した初期値を修正し、計算をくり返す。
- (8) 推定したプロダクト濃度と計算したプロダクト濃度が十分に一致した場合は分離パワーを次式で計算する。2 成分の場合の分離パワーは次式で計算される。

$$\delta U = F\{\theta V(N_p) + (1-\theta)V(N_w) - V(N_F)\}$$

ここで $V(N)$ は 価値関数であり次式で定義される。

$$V(N) = (2N-1)l_n \frac{N}{1-N}$$

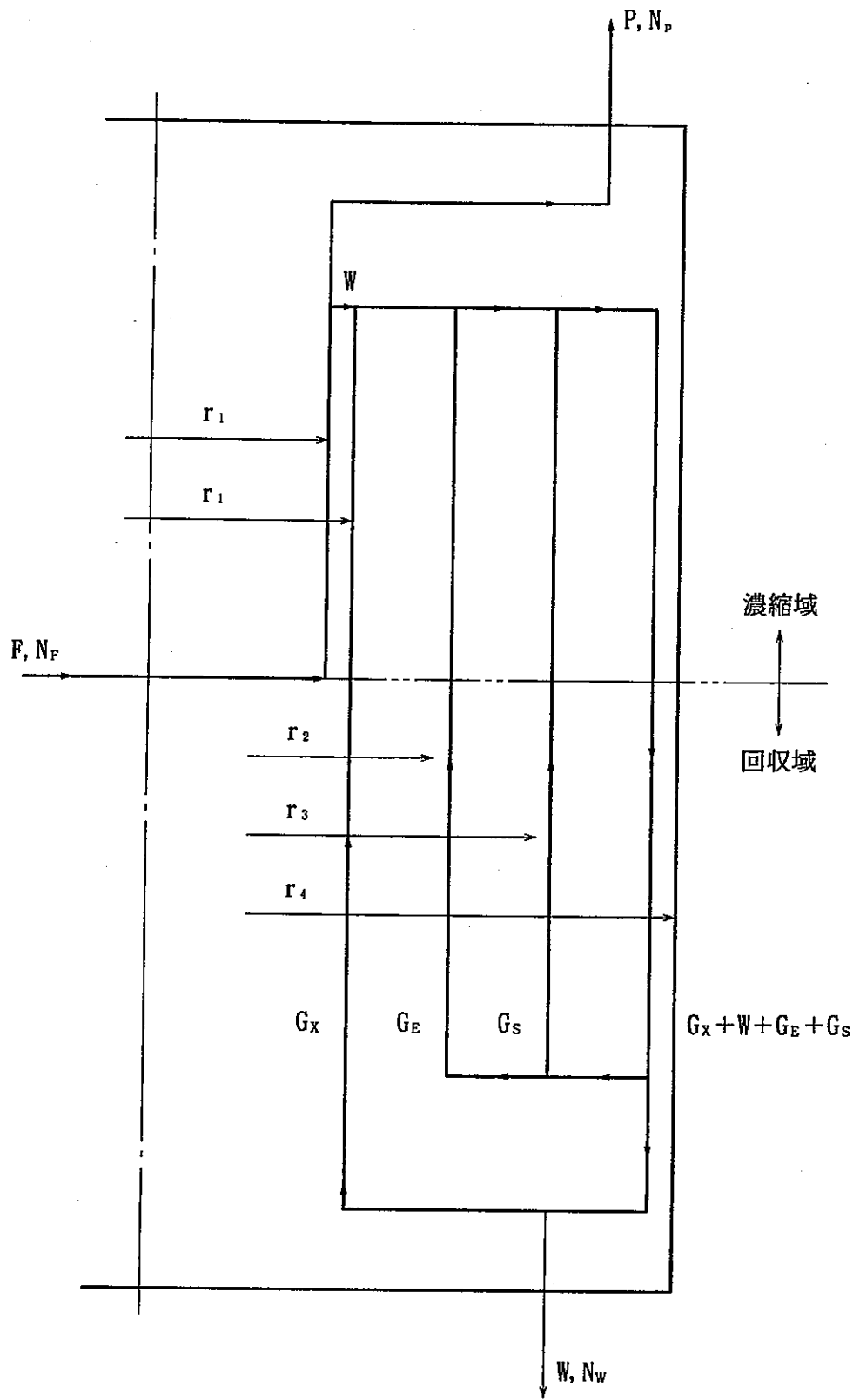


図3-1 内部流動モデル

3.3 多成分系分離計算

多成分系解析機能の検証を行うため9成分系Xeの分離解析を行った。現在のところ多成分系分離に関する試験データがないため、以下の検証計算においては定性的にアルゴリズムに異常のないことを確認するにとどめる。

遠心機モデルは、遠心機性能評価に関する国際会議で提案された評価モデル(ROMB-MODEL)⁽²⁾とした。

(1) 計算条件

① 遠心機条件

周速	600 m/s
回転胴	φ500 × 5000 mm

② 流動条件

流量	6.0 g/min
カット	0.50

③ 同位体条件

Xe-124	0.09 %
Xe-126	0.09 %
Xe-128	1.92 %
Xe-129	26.44 %
Xe-130	4.080 %
Xe-131	21.180 %
Xe-132	26.890 %
Xe-134	10.440 %
Xe-136	8.870 %

拡散係数(ρD)
 3.2×10^{-4} (g/cm-s)

(2) 計算結果

図3-2 にガスが遠心機一台を通過する場合の製・廃品濃度を示した。軽成分がブロダクト側に、重成分は廃品側に濃縮される様子が計算され、定性的には妥当な結果が得られている。

3.4 本節のまとめ

多成分混合ガスの分離特性を解析するために必要な基礎的な解析手法を開発し、Xe ガス(9成分)の試計算を実施した。

- 1: Xe-124
- 2: Xe-126
- 3: Xe-128
- 4: Xe-129
- 5: Xe-130
- 6: Xe-131
- 7: Xe-132
- 8: Xe-134
- 9: Xe-136

供給濃度

- 1 .000900
- 2 .000900
- 3 .019200
- 4 .264400
- 5 .040800
- 6 .211800
- 7 .268900
- 8 .104400
- 9 .088700

製品濃度

- 1 .001113
- 2 .001057
- 3 .021319
- 4 .284999
- 5 .042648
- 6 .214471
- 7 .263492
- 8 .095491
- 9 .075410

廃品濃度

- 1 .000687
- 2 .000743
- 3 .017081
- 4 .243801
- 5 .038952
- 6 .209129
- 7 .274308
- 8 .113309
- 9 .101990

図 3 - 2 9成分Xe ガスの分離解析結果

4. まとめ

(1) 分離理論研究

多成分分離理論について基礎的検討を行い、研究方針及び研究課題を抽出した。

① 多成分系での物性値、特に拡散係数の調査

② 多成分分離パワーの評価

(2) 応用解析研究

多成分混合ガスの分離特性を解析評価するために必要な基礎的な解析手法を開発し、Xe ガス（9成分）の試計算を実施した。

記号表

a	:	回転胴半径(cm)
A	:	スピードパラメータ(-)
D	:	拡散係数(cm ² /sec)
F	:	供給流量(mol/sec)
G _x	:	スクープ流量(mol/sec)
G _E	:	エクマン流量(mol/sec)
G _S	:	ステワートソン流量(mol/sec)
M	:	分子量(g/mol)
N	:	モル分率(-)
P	:	製品流量(mol/sec)
R	:	一般ガス定数(=8.314×10 ⁷ erg/mol k)
T ₀	:	温度(k)
V _r	:	半径方向速度(cm/sec)
V _z	:	軸方向速度(cm/sec)
W	:	廃品流量(mol/sec)
Z	:	軸方向座標(cm)
Z _H	:	回転胴長さ(cm)
Z _F	:	廃品側からの供給位置(cm)
θ	:	カット(-)
ρ	:	密度(mol/cm ³)
η	:	無次元軸方向座標(-)
ξ	:	無次元半径方向座標(-)
Ψ	:	流れ関数(mol/sec)
Ω	:	回転角速度(rad/sec)

添字

P	:	製品
W	:	廃品
F	:	供給
k	:	成分番号
r	:	半径方向

参考文献

- (1) H. G. M. Harink-Snijders: Solving the diffusion equation for mult-isotope mixtures.
In Proc. Third International Workshop on Separation Phenomena in Liquids and
Gases, Charlottesville (ed. Huston G. Wood) (1992) p. 19
- (2) Proceedings of the Fifth Workshop on Gases in Strong Rotation, Charlottesville
(ed. Huston G. Wood) (1983)

Appendix A

多成分系分離理論

A.1 多成分分離カスケード流量方程式

A.1.1 緒言

前章までは、2成分間の分離について論じたが、実際には、多成分間の分離が必要になることも多い。たとえば、原子炉から取り出した使用済燃料を再処理して、再び濃縮する場合には U-235, 236, 238 の3成分同位体分離となり、また、再処理工場の廃棄ガス処理では、 N_2, O_2, Ar, Kr, Xe などの多成分分離が必要になると考えられている。

2成分系の同位体分離理論を最初に多成分系に拡張したのは、Oak Ridge の de la garza¹⁾²⁾ らである。彼らは、ガス拡散ウラン濃縮プラントを対象として、U-236 を含む再処理済ウランの濃縮コスト算出ならびに、タンゲステン 184 の濃縮を目的として議論を展開した。ガス拡散プラントは、微小差分分離プロセスで構成されているから、その議論も微小差の近似が成立する範囲に限られている。けれども彼らの考えだした2成分系の理想カスケードに対応する‘存在比一致カスケード’ (Matched-R cascade) の概念は、2成分系の式 (第2章 [I]2 の式 (8)) を拡張したものであり、3成分の濃度をそれぞれ $x, y, 1-x-y$ とする時

$$\frac{dx}{ds} = \psi_1 x(1-x) - \psi_2 xy - \frac{P}{L'}(x_P - x) \quad (A.1)$$

$$\frac{dy}{ds} = \psi_2 y(1-y) - \psi_1 xy - \frac{P}{L'}(y_P - y) \quad (A.2)$$

但し、

$$\psi_1 \equiv (\alpha\beta)_x - 1, \quad \psi_2 \equiv (\alpha\beta)_y - 1$$

である。式 (1) において $y=0$ を代入すれば、2成分系の場合と一致している。更に、多成分系の場合には、ある成分 x_k を基準とした存在比

$$R_k \equiv x_j/x_k \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (A.3)$$

を用いて書き換え、微小差分分離の近似を用いて単純化して

$$\frac{dR_j}{ds} = \psi_j R_j - \left(\frac{P}{L'}\right) \frac{\sum_{j=1}^k R_j}{\sum_{j=1}^k R_j^P} (R_j^P - R_j) \quad (A.4)$$

の基礎式を与えた。そして、ある成分 i に関しては、流れの混合点において存在比が一致するという条件から

$$\frac{dR_i}{ds} = \frac{\psi_i}{2} R_i \quad (\text{A.5})$$

が成立するとし、(“存在比 R_i 一致カスケード” の条件) これを式 (1.4) に代入することにより、 dR_i/ds を消去して上昇流量 L' を求めている。彼らは、 k 個の成分以外にダミー成分を加えることによって、カスケードの流量を最小化する計算法も示しており、微小差分分離工程で構成されたカスケードの解析には、充分完成された議論であると思われる。

ウラン濃縮プラントにおける微量同位体 (U-234, U-236) の挙動を保障措置 (Safeguards) に用いるための技術: MIST (Minor Isotope Data as a Safeguards Technique) として用いるために、Higashi³⁾ は、3 成分分離カスケードの動特性を解析する方法を提案している。この方法は微小差分分離プロセスのみならず、遠心分離のような分離係数の大きいプロセスで構成されたカスケードに対しても有効である。けれども、各段の流量が計算の入力として使用されており、前もってカスケードの形がわかっている必要がある。第3成分が微量である場合には、カスケードの形は2成分分離の場合のカスケードと同じであるとみなされるから、MIST を目的とする限り、この方法で充分である。

本節では、分離係数が大きい場合でも、供給流の組成がどのような場合にでも有効な、多成分分離の一般式を導く。それは第1章、第2章で述べた2成分系の議論を拡張することによりなされる。

A.1.2 多成分分離要素

k 個の成分から成る混合物を考える。それぞれの濃度を N_j ($j = 1, 2, \dots, k$) とすれば、

$$\sum_{j=1}^k N_j = 1 \quad (\text{A.6})$$

である。図1で示すような分離要素が、流量 L の混合物を上昇流 L' 、下降流 L'' に分けるとする。上昇流、下降流に関する量をプライム (') (") で、それぞれ示すことにすれば、当然

$$\sum_{j=1}^k N_j' = \sum_{j=1}^k N_j'' = 1 \quad (\text{A.7})$$

が成立しなければいけない。流量 L 中の各成分の流量をそれぞれ G_j と書くことにすれば、

$$L = \sum_{j=1}^k G_j, \quad L' = \sum_{j=1}^k G_j', \quad L'' = \sum_{j=1}^k G_j'' \quad (\text{A.8})$$

であり、濃度 N_j は

$$N_j = G_j/L \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.9})$$

となる。更に供給流、上昇流、下降流との間に物質収支の関係

$$G_j = G_j' + G_j'' \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.10})$$

$$L = L' + L'' \quad (\text{A.11})$$

が成立している。

また、ある基準の成分（ここでは第 k 番目の成分に選ぶ）と他の成分との存在比 R_j を、

$$R_j \equiv G_j/G_k = N_j/N_k \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (\text{A.12})$$

で定義する。上昇流、下降流への存在比の変化を分離係数

$$\alpha_j \equiv R'_j/R_j \quad (\text{A.13})$$

$$\beta_j \equiv R_j/R''_j \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (\text{A.14})$$

で定義する。基準成分の選び方によっては、 α, β が共に 1 以下となることもあり得る。式 (12)~(14) を式 (8) に代入すれば、

$$L = G_k \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j \right] \quad (\text{A.15})$$

$$L' = G'_k \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j R_j \right] \quad (\text{A.16})$$

$$L'' = G''_k \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j/\beta_j \right] \quad (\text{A.17})$$

となる。

供給流に対する上昇流の比をカット θ と呼ぶ。また、供給流に対する下降流の比を $\bar{\theta}$ と記す。

$$\theta = L'/L, \quad \bar{\theta} = L''/L \quad (\text{A.18})$$

また、各成分に関するカットを基準成分を除いて、

$$\eta_j \equiv G'_j/G_j, \quad \bar{\eta}_j \equiv G''_j/G_j \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (\text{A.19})$$

と定義し、基準成分に関しては、

$$\zeta \equiv G'_k/G_k, \quad \bar{\zeta} \equiv G''_k/G_k \quad (\text{A.20})$$

と定義する。

各成分に関するカットが、2 成分系の場合のように分離係数で表現できれば、流量を支配する式も 2 成分系の場合と同様になって都合がよい。そこで、各成分に関するカットと分離係数との関係を考察する。

式 (13)(14) で、 $2(k-1)$ 個の分離係数が定義されているが、これらは独立に決めることは不可能である。それは次の理由による。式 (15)~(17) を式 (11) へ代入して整理すれば、

$$\sum_{j=1}^{k-1} (G_k - \alpha_j G'_k - G''_k/\beta_j) R_j = 0 \quad (\text{A.21})$$

を得る。ところで、存在比 R_j は任意であるから、式 (21) が常に成立するためには R_j の係数がゼロでなければならない。そこで

$$G_k - \alpha_j G'_k - G''_k/\beta_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (\text{A.22})$$

である。式 (10) に注意して G_k'' を消去すれば、上式は

$$\zeta \equiv \frac{G_k'}{G_k} = \frac{\beta_j - 1}{\alpha_j \beta_j - 1} = (j \text{ の値によらない}) \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (\text{A.23})$$

と同等である。式 (23) は、基準成分が供給流から上昇流に移る割合 (基準成分に関するカット) をあらわしており、その割合は $j-k$ 成分対 ($j = 1, 2, \dots, k-1$) のどの対で定義される分離係数で表現しても同じ値をとることを示している。これは、当然の結果であって $(2k-1)$ 個の分離係数が満足すべき条件式である。

基準成分以外の成分に関するカットは

$$\begin{aligned} \eta_j &= \frac{G_j'}{G_j} = \frac{G_k}{G_j} \cdot \frac{G_j'}{G_k} \cdot \frac{G_k'}{G_k} = \frac{R_j'}{R_j} \zeta \\ &= \alpha_j \zeta = \frac{\alpha_j (\beta_j - 1)}{\alpha_j \beta_j - 1} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

と求められ、更に

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \frac{\beta_j (\alpha_j - 1)}{\alpha_j \beta_j - 1} = (j \text{ の値によらない}) \\ \bar{\eta}_j &= \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j \beta_j - 1}, \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

が得られる。式 (23)~(25) は、2 成分分離の場合と全く同じ形をしており、2 成分分離の場合の自然な拡張になっている⁴⁾。

A.1.3 流量方程式

各成分に関するカットが、式 (23)~(25) によって与えられたから、カスケード内各段の流量は、第 2 章 II 節で論じた方法で求めることができる。一般に m -up n -down タイプのカスケードならば

$$\begin{aligned} (G_j)_i &= (\eta_j)_{i-m} (G_j)_{i-m} + (\bar{\eta}_j)_{i+n} (G_j)_{i+n} + \delta_{if} (G_j)_F, \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \\ (G_k)_i &= (\zeta)_{i-m} (G_k)_{i-m} + (\bar{\zeta})_{i+n} (G_k)_{i+n} + \delta_{if} (G_k)_F \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

を解けばよい。但し $(G_j)_i$ は、第 i 段へ供給される流量のうち、第 j 成分の量を示し、 $(G_j)_F$ はカスケード全体への供給量のうち、第 j 成分の量を示す。各段の分離係数が与えられていれば、式 (23)~(25) より、式 (26) の $(G_j)_{i-m}$ などの係数が求められ、式 (26) は (G_j) に関する連立 1 次方程式群となる。計算機を用いれば数値解を得るのは容易である。

図 2 に示すようなふつうタイプの 1-up 1-down タイプのカスケードでは、式 (26) に $m = n = 1$ を代入して、

$$\left. \begin{aligned} (G_j)_i &= (\eta_j)_{i-1} (G_j)_{i-1} + (\bar{\eta}_j)_{i+1} (G_j)_{i+1} + \delta_{if} (G_j)_F, \\ (G_k)_i &= (\zeta)_{i-1} (G_k)_{i-1} + (\bar{\zeta})_{i+1} (G_k)_{i+1} + \delta_{if} (G_k)_F \end{aligned} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \right\} \quad (\text{A.27})$$

を得る。各段で $\eta + \bar{\eta} = 1$, $\zeta + \bar{\zeta} = 1$ が成立していれば、式 (27) の解は次のように求められる。

1-up 1-down 多成分・分離カスケードの流量

1. プロダクト

$$(G_j)_P = (G_j)_F \frac{1 + \sum_{l=1}^{f-1} \left(\prod_{s=1}^l v_{js} \right)}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\prod_{s=1}^l v_{js} \right)} \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.28})$$

2. 濃縮部

$$\left. \begin{aligned} (i = n) \\ (G_j)_n &= (G_j)_F (1 + v_{jn}) \frac{1 + \sum_{l=1}^{f-1} \left(\prod_{s=1}^l v_{js} \right)}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\prod_{s=1}^l v_{js} \right)} \\ (i = f, f+1, \dots, n-1) \\ (G_j)_i &= (G_j)_F (1 + v_{ji}) \\ &\frac{\left[1 + \sum_{l=1}^{f-1} \left(\prod_{s=1}^l v_{js} \right) \right] \left[1 + \sum_{l=i+1}^n \left(\prod_{s=i+1}^l v_{js} \right) \right]}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\prod_{s=1}^l v_{js} \right)} \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.29})$$

3. 回収部

$$\left. \begin{aligned} (i = 2, 3, \dots, f-1) \\ (G_j)_i &= (G_j)_F \left(1 + \frac{1}{v_{ji}} \right) \\ &\frac{\left[1 + \sum_{l=f+1}^n \left(\prod_{s=l}^n \frac{1}{v_{js}} \right) \right] \left[1 + \sum_{l=1}^{i-1} \left(\prod_{s=l}^{i-1} \frac{1}{v_{js}} \right) \right]}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\prod_{s=l}^n \frac{1}{v_{js}} \right)} \\ (i = 1) \\ (G_j)_1 &= (G_j)_F \left(1 + \frac{1}{v_{j1}} \right) \frac{1 + \sum_{l=f+1}^n \left(\prod_{s=l}^n \frac{1}{v_{js}} \right)}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\prod_{s=l}^n \frac{1}{v_{js}} \right)} \end{aligned} \right\} (j = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.30})$$

4. ウエイスト

$$(G_j)_W = (G_j)_F \frac{1 + \sum_{l=f+1}^n \left(\prod_{s=l}^n \frac{1}{v_{js}} \right)}{1 + \sum_{l=1}^n \left(\prod_{s=l}^n \frac{1}{v_{js}} \right)} \quad (\text{A.31})$$

上記の方程式で v_{js} は次のように定義されている.

$$v_{js} \equiv \frac{(\bar{\eta}_j)_s}{(\eta_j)_s} = \frac{(\alpha_j)_s - 1}{(\alpha_j)_s [(\beta_j)_s - 1]} \quad (\text{A.32})$$

$$(j = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$v_{ks} \equiv \frac{\bar{\zeta}_s}{\zeta_s} = \frac{(\beta_j)_s [(\alpha_j)_s - 1]}{(\beta_j)_s - 1} \quad (\text{A.33})$$

$$= (j \text{ の値によらない})$$

$$(S = 1, 2, \dots, n)$$

各成分の各成分の流量が求められたから, 第 i 段への流量 L_i , 各成分の濃度 $(N_j)_i$, 存在比 $(R_j)_i$ はそれぞれ

$$L_i = \sum_{j=1}^k (G_j)_i \quad (\text{A.34})$$

$$(N_j)_i = (G_j)_i / L_i \quad (\text{A.35})$$

$$(R_j)_i = (G_j)_i / (G_k)_i \quad (\text{A.36})$$

と求められる.

存在比一致カスケード

de la Garza らは, 2 成分分離における理想カスケードに対して, 多成分分離に“存在比一致カスケード” (Matched Abundance Ratio Cascade) の概念¹⁾²⁾を提案した. ある $j-k$ 成分対に着目する時, それらの存在比が異なる流れの混合が, 内部のどのような混合点でも起こらないカスケードである. すなわち, カスケードの各段において

$$(R_j)_i = (R_j)'_{i-1} = (R_j)''_{i+1} \quad (\text{A.37})$$

が成立することが必要である. 式 (37) を実現するために, 分離係数が満足しなければならない条件を求める.

多成分系においても, 存在比, 分離係数は任意の 2 成分間で定義されている. そこで, 式 (37) の成立する条件も, 2 成分分離における理想カスケードの条件と同じである. したがって, 第 4 章 IV 節で述べたように,

$$(\alpha_j)_i = (\beta_j)_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{A.38})$$

が満足されていれば、式 (37) が成立する。この時

$$(R_j)_i = \left[\prod_{s=f}^{i-1} (\alpha_j)_s \right] (R_j)_F \quad (A.39)$$

($i = f, f+1, \dots, n$)

$$(R_j)_i = (R_j)_F / \left[\prod_{s=i+1}^f (\beta_j)_s \right]$$

$$= (R_j)_F / \left[\prod_{s=1}^{f-1} (\alpha_j)_s \right] \quad (A.40)$$

($i = 1, 2, \dots, f-1$)

である。

存在比一致カスケードは、2成分系の理想カスケードに対応しているのだから、式 (38) の成立する $j-k$ 対に対しては、無駄なく分離操作が行われていることになる。もし、 $j-k$ 対以外に、 $l-k$ 対にも式 (38) が成立するならば、複数の対に対して理想カスケードが構成できる。これが可能ならば、多成分分離に関して極めて都合がよい。けれども、実際には以下に示すようにうまくいかない。今、第 i 段、 $i+1$ 段の分離係数が、

	$j-k$ 対		$l-k$ 対		
	α	β	α	β	ζ
第 i 段	1.5	1.2	2	1.5	0.25
第 $i+1$ 段	1.2	1.5	1.3	2	1.625

満足しているとする。式 (38) は、 $j-k$ 対、 $l-k$ 対の両方に対して成立しており、分離係수에課せられる条件、式 (23) をも満たしている。これを見れば、複数の対に対して、理想カスケードが構成できるように思われる。けれども、第 $i+2$ 段の $j-k$ 対に対する分離係数が第 5 段のそれらと同じであるとすれば、 $l-k$ 対に対しては

	$j-k$ 対		$l-k$ 対		
	α	β	α	β	ζ
第 $i+2$ 段	1.5	1.2	1.692...	1.3	0.25

となって、第 i 段のそれらとは一致しない。第 i 段と第 $i+2$ 段の構成要素が異なる分離原理に基づいていれば、この不一致も可能であるが、同じ分離原理に従う限り、これらの値は第 i 段と $i+2$ 段で一致する必要がある。したがって、上記の例は不合理である。一般的には、次のように不可能であることが証明できる。

いま、 $j-k$ 対、 $l-k$ 対の分離係数に対して、存在比一致条件

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_j)_i &= (\beta_j)_{i+1} = x \\ (\alpha_l)_i &= (\beta_l)_{i+1} = u \end{aligned} \right\} \quad (A.41)$$

と共に、 $j-k$ 対に対しては、付加条件

$$(\alpha_j)_{i+1} = (\beta_j)_i = y \quad (A.42)$$

が成立しているとする. もし, $l-k$ 対に対しても

$$(\alpha_l)_{i+1} = (\beta_l)_i = v \quad (\text{A.43})$$

が成立するとすれば, 第 $i+2$ 段の分離係数も矛盾なく第 i 段のそれらと一致するはずである. これが可能であれば, 複数次対に対して存在比一致が達成できることになる. ここで, 式 (41)~(43) が共に成立すると仮定すれば分離係数に課せられる条件式 (23) から,

$$\frac{y-1}{xy-1} = \frac{v-1}{uv-1} = \zeta_i \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{x-1}{xy-1} = \frac{u-1}{uv-1} = \zeta_{i+1} \quad (\text{A.45})$$

となる. 式 (44)(45) の両式より

$$\frac{x-1}{y-1} = \frac{u-1}{v-1} = \frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i}$$

であるから,

$$u = \frac{\zeta_{i+1}}{\zeta_i}(v-1) + 1$$

となり, これを式 (44) に代入して, u を消去すれば

$$\zeta_{i+1}v^2 + (\zeta_i - \zeta_{i+1} - 1)v - (\zeta_i - 1) = 0 \quad (\text{A.46})$$

を得る. (式 (45) に代入しても同じ式が得られる.) これを解けば,

$$v = \begin{cases} 1 \\ 1 - \zeta_i \\ \zeta_{i+1} \end{cases}$$

であるが, $v=1$ は分離係数 = 1 を意味して不合理であるから除き, 結局

$$(u, v) = \left(\frac{1 - \zeta_{i+1}}{\zeta_i}, \frac{1 - \zeta_i}{\zeta_{i+1}} \right) \quad (\text{A.47})$$

となる. ところが, ζ_i, ζ_{i+1} を x, y であらわすと, 式 (47) は

$$(u, v) = (x, y) \quad (\text{A.48})$$

と同値であることがわかる. これは, $j-k$ 対と $l-k$ 対の分離係数が等しいことをあらわしており, j 成分と l 成分が全く同じであることを意味する. これは不合理であり, 異なった成分対に対して, 式 (42)(43) は両立しないことになる. したがって, 複数次対に対して, 存在比一致は達成できない.

分離係数が各段で変化しないカスケード

各段の分離係数が変化しない場合

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha_j)_s = \alpha_j \\ (\beta_j)_s = \beta_j \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (j = 1, 2, \dots, k-1) \\ (s = 1, 2, \dots, n) \end{array} \quad (\text{A.49})$$

を考える。式(28)~(31)は、次のようになる。

◀ 分離係数が各段で変化しない多成分分離カスケードの流量 ▶

(1) プロダクト

$$(G_j)_F = \frac{1 - v_j^f}{1 - v_j^{n+1}} (G_j)_F \quad (28')$$

(2) 濃縮部 ($i = f, f+1, \dots, n$)

$$(G_j)_i = \frac{1 + v_j}{1 - v_j} \cdot \frac{(1 - v_j)(1 - v_j^{n-f+1})}{1 - v_j^{n+1}} (G_j)_F \quad (29')$$

(3) 回収部 ($i = 1, 2, \dots, f-1$)

$$(G_j)_i = \frac{1 + v_j}{1 - v_j} \cdot \frac{(1 - v_j^i)(1 - v_j^{n-f+1})}{1 - v_j^{n+1}} v_j^{f-i} (G_j)_F \quad (30')$$

(4) ウェイスト

$$(G_j)_W = \frac{1 - v_j^{n-f+1}}{1 - v_j^{n+1}} v_j^f (G_j)_F \quad (31')$$

以上の諸式は、 $j = 1, 2, \dots$ 、に対して成立し、

$$v_j \equiv \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j(\beta_j - 1)}, \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (32')$$

$$v_k \equiv \frac{\beta_j(\alpha_j - 1)}{\beta_j - 1} = (j \text{ の値によらない}) \quad (33')$$

である。(但し、 v_j は 1 でないとする。 $v_j = 1$ の場合には、第 2 章 II 節参照)

$j-k$ 成分に対して、存在比一致カスケードが成立している場合には、式(37)

$$(R_j)_{i-1}' = (R_j)_i = (R_j)_{i+1}''$$

が成立する必要があるが、この時 α_j, β_j が満足すべき条件を求める。濃縮部 ($i = f, f+1, \dots, n$) の場合も、回収部 ($i = 1, 2, \dots, f-1$) の場合も、計算は同様であるから濃縮部の方だけ示す。式(29')より、第 i 段における j 成分の k 成分に対する存在比は、

$$(R_j)_i \equiv \frac{(G_j)_i}{(G_k)_i} = A \cdot \frac{1 - v_j^{n-i+1}}{1 - v_k^{n-i+1}} (R_j)_F \quad (\text{A.50})$$

と求められる。ここで、式中の A は段数 i によらぬ定数で

$$A \equiv \frac{1 + v_j}{1 + v_k} \cdot \frac{1 - v_k}{1 - v_j} \cdot \frac{1 - v_j^f}{1 - v_k^f} \cdot \frac{1 - v_k^{n+1}}{1 - v_j^{n+1}}$$

と定義される。更に、上式の i に $i-1, i+1$ を代入すれば、

$$\left. \begin{array}{l} (R_j)_{i-1} = A \cdot \frac{1 - v_j^{n-i+2}}{1 - v_k^{n-i+2}} (R_j)_F \\ (R_j)_{i+1} = A \cdot \frac{1 - v_j^{n-i}}{1 - v_k^{n-i}} (R_j)_F \end{array} \right\} \quad (\text{A.51})$$

のように $i \pm 1$ 段の存在比が得られる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} (R_j)'_{i-1} &= \alpha_j (R_j)_{i-1} \\ (R_j)''_{i+1} &= (R_j)_{i+1} / \beta_j \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.52})$$

に注意して、式 (37) に代入すれば

$$\frac{1}{\beta_j} \cdot \frac{1 - v_j^{n-i}}{1 - v_k^{n-i}} = \frac{1 - v_j^{n-i+1}}{1 - v_k^{n-i+1}} = \alpha_j \frac{1 - v_j^{n-i+2}}{1 - v_k^{n-i+2}} \quad (\text{A.53})$$

となる。左の等式に式 (32')(33') を代入して整理すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} &\alpha_j^x (\beta_j - 1)^{2x} - \beta_j (\alpha_j - 1)^{2x} \\ &+ (\alpha_j - \beta_j) (\alpha_j - 1)^{x-1} (\beta_j - 1)^{x-1} [(\alpha_j \beta_j)^x - 1] = 0 \\ &x \equiv \begin{cases} n - i + 1 & (i = f + 1, \dots, n - 1) \\ i & (i = 2, 3, \dots, f - 1) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.54})$$

右の等式からも同じ式が得られ、回収部の場合も式中の x の値が上記のようにかわるだけである。一連の $x = 2, 3, \dots$ に対する式 (54) の共通の解は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j - \beta_j &= 0 \\ \alpha_j \beta_j - 1 &= 0 \\ \alpha_j \beta_j - 2\alpha_j + 1 &= 0 \\ \alpha_j \beta_j - 2\beta_j + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

の 4 個であるが、最初の解を除いて、他は無意味である。2 番目は $\alpha_j > 1, \beta_j > 1$ に反し、3 番目からは、

$$\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j (\beta_j - 1)} \equiv v_j = 1$$

4 番目からは

$$\frac{\beta_j (\alpha_j - 1)}{\beta_j - 1} \equiv v_k = 1$$

が得られるからである。式 (28')~(33') は、 $v_j \neq 1, v_k \neq 1$ を前提として与えられているから、これらは両立しない。結局、式 (37) を満足する式 (54) の解は、

$$\alpha_j = \beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, k - 1) \quad (\text{A.55})$$

のみである。したがって、 $j - k$ 成分に関する存在比一致カスケードでは、濃縮側、減損側分離係数が等しい必要がある。もし、 $j - k$ 成分について式 (55) が満足されると、他の $l - k$ 成分対に関しては、式 (23) の制限により

$$\alpha_l \neq \beta_l \quad (l \neq j, l = 1, 2, \dots, k - 1) \quad (\text{A.56})$$

となる。そこで、式 (55) を満足できるのは $k - 1$ 個の対のうち、ただ 1 つだけである。そこで、式 (55) を満足するカスケードのことを“ $j - k$ 成分理想カスケード”または略して“ j -成分理想カスケード”と呼んでもよい。

A.2 多成分系における分離パワー

A.2.1 緒言

微小差分離プロセスに対して、2成分系における分離パワー、価値関数の議論を最初に3成分系に拡張したのは de la Garza ら¹⁾である。

3成分の濃度をそれぞれ N_1, N_2, N_3 とすれば存在比 $R_{ij} \equiv N_i/N_j$ を用いて、分離要素の分離係数 α_{ij} が定義される。

$$\frac{R'_{ij}}{R''_{ij}} \equiv (\alpha\beta)_{ij} \equiv 1 + \varepsilon_{ij} \quad (\text{A.57})$$

ここで、微小差分離プロセスならば、 M を質量数として、

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0(M_j - M_i) \quad (\text{A.58})$$

の近似が許される。但し、 ε_0 は分離要素、同位体元素の性質によって定まる単位質量差あたりの分離効果である。de la Garza らの議論は、U-236 を含んだ濃縮ウランのコスト算定を例題として扱っているが、U-235, U-236, U-238 をそれぞれ 1,2,3 と書き、存在比を U-238 基準で定義するとすれば、 $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0, \varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$ となる。

彼らは、微小差プロセスのみを扱ったので、カットは 0.5 と近似して、次のような分離パワーを定義した。

$$L \left[\frac{1}{2} V(N_1 + \delta N_1, N_2 + \delta N_2) + \frac{1}{2} V(N_1 - \delta N_1, N_2 - \delta N_2) - V(N_1, N_2) \right] = \frac{1}{8} \varepsilon_1^2 L \quad (\text{A.59})$$

ここで、 $\delta N_1, \delta N_2$ は、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いて次のように近似できる。

$$\left. \begin{aligned} 2\delta N_1 &= g(N_1, N_2) \\ &\equiv \varepsilon_1 N_1(1 - N_1 - N_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) N_1 N_2, \\ 2\delta N_2 &= h(N_1, N_2) \\ &\equiv \varepsilon_2 N_2(1 - N_1 - N_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) N_1 N_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.60})$$

式(59)中の $V(N_1, N_2)$ は価値関数であるが、2成分系の場合と同じように Taylor 展開すれば、価値関数の満足すべき偏微分方程式

$$g^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial N_1^2} \right) + 2gh \left(\frac{\partial^2 V}{\partial N_1 \partial N_2} \right) + h^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial N_2^2} \right) = \varepsilon_1^2 \quad (\text{A.61})$$

が得られる。de la Garza らは、この偏微分方程式を解き、次の価値関数を得た。

$$V(N_1, N_2) = C_0 + C_1 N_1 + C_2 N_2 + C_3 H(N_1, N_2) + V(N_1, N_2) \quad (\text{A.62})$$

ここで、 V は基本的価値関数 (elementary value function)、 H は同次関数 (homogeneous function) と呼ばれ、次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} k \equiv \varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1/2 \text{ の時} \\ H(N_1, N_2) &= N_2 \ln R, \\ v(N_1, N_2) &= \left[2N_1 + \frac{N_2}{2} \ln R - 1 \right] \ln R, \\ k \neq 1/2 \text{ の時} \\ H(N_1, N_2) &= N_2 R^{-(2k-1)}, \\ V(N_1, N_2) &= \left[2N_1 + \frac{2k}{2k-1} N_2 - 1 \right] \ln R \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.63})$$

ここで、式 (63) 中の R は $R \equiv N_1/N_3$ で定義される。式 (62)(63) で $N_2 = 0$ を代入すれば、2 成分系の場合の価値関数と一致する。

1969 年になって、イスラエルのソレク原子核研究センターの Y. Lehrer-Ilamed が分離係数の大きい場合へ理論を拡張した²⁾。

今、濃度が $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ の k 個の成分を含む混合物を濃度 $\vec{N}' = (N'_1, N'_2, \dots, N'_k)$ のもの θ 、濃度 $\vec{N}'' = (N''_1, N''_2, \dots, N''_k)$ のもの $1 - \theta$ に分けるとする。その分離要素の単位流量あたりの分離パワー φ と価値関数 $V(\vec{N})$ は次の関数方程式

$$\varphi = [\theta V(\vec{N}') + (1 - \theta)V(\vec{N}'') - V(\vec{N})] \quad (\text{A.64})$$

を満足する必要がある。Lehrer-Ilamed は、式 (64) の解き方を示した。その解は、無限級数の形で与えられるが、それを求める数学的操作はかなり複雑であり、成分の数が増加すると解を求めることは事実上不可能となる。また、解を構成する項の意味も不透明である。けれども彼の議論は、式 (64) の一般解の与え方を示したのものとして、極めて優れている。

本節では、多成分系での分離パワー、価値関数を複雑な数学操作なしに導く。2 成分系における価値関数の構造 (3 章 III[4] で考察) からの類推をもとにしているために、多成分系価値関数の各項の持つ意味も理解しやすい。

A.3 各成分に関する分離パワー

図 1 に示す分離要素を考える。供給流 L は上昇流 L' と下降流 L'' に分割される。プライム (')'('') は、それぞれ上昇流、下降流を示すものとする。またプライムなしは供給流を示す。

k 個の成分を持つ混合物があり、その濃度、流量が $N_j, G_j (j = 1, 2, \dots, k)$ であるとする。

$$N_j = G_j / \sum_{l=1}^k G_l = G_j / L \quad (\text{A.65})$$

更に、ある基準成分 (第 k 要素を選ぶ) からみた存在比を

$$R_j \equiv G_j / G_k = N_j / N_k \quad (j = 1, 2, \dots, k - 1) \quad (\text{A.66})$$

のように定義する。 $j - k$ 成分対に関する分離係数は上昇流について

$$\alpha_j = R'_j / R_j \quad (\text{A.67})$$

下降流について

$$\beta_j = R_j / R''_j \quad (\text{A.68})$$

と定義される。また、分離係数を用いて、各成分に関するカットが基準成分を除いて

$$\eta_j \equiv \frac{G'_j}{G_j} = \frac{\alpha_j(\beta_j - 1)}{\alpha_j\beta_j - 1}, \quad (\text{A.69})$$

$$\bar{\eta}_j \equiv \frac{G''_j}{G_j} = \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j\beta_j - 1} \quad (j = 1, 2, \dots, k - 1) \quad (\text{A.70})$$

とあらわされ, 基準成分については

$$\zeta \equiv \frac{G'_k}{G_k} = \frac{\beta_j - 1}{\alpha_j \beta_j - 1} = (j \text{ の値によらない}), \quad (\text{A.71})$$

$$\bar{\zeta} \equiv \frac{G''_k}{G_k} = \frac{\beta_j(\alpha_j - 1)}{\alpha_j \beta_j - 1} = (j \text{ の値によらない}) \quad (\text{A.72})$$

とあらわされる. 更に, 混合物全体の普通の意味のカットは

$$\left. \begin{aligned} \theta &\equiv L'/L \\ \bar{\theta} &\equiv L''/L \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.73})$$

である.

第3章 III 節で議論したように, 2成分系での分離パワーは, 注目成分, 非注目成分の各々について定義できる. 多成分系においても, 分離係数は任意の2成分 ($j-k$) 対に対して定義されていて, 第 j 成分が注目成分, 第 k 成分 (基準成分) が非注目成分に対応している. そこで, 第 j 成分に関する分離パワー³⁾ を, 注目成分に関する分離パワーになら

$$\left. \begin{aligned} \delta U_j &= G_j \varphi_j(\alpha_j, \beta_j) \\ &= G_j [\eta_j V_b(\alpha_j R_j) + \bar{\eta}_j V_b(R_j/\beta_j) - V_b(R_j)] \\ V_b(R) &= \ln R \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.74})$$

と定義し, 基準成分に関する分離パワー³⁾ を

$$\left. \begin{aligned} (\delta U_k)_j &= G_k \varphi_a(\alpha_j, \beta_j) \\ &= G_k [\zeta V_a(\alpha_j R_j) + \bar{\zeta} V_a(R_j/\beta_j) - V_a(R_j)] \\ V_a(R) &= -\ln R \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.75})$$

と定義する. ここで, 式中の関数 φ_b, φ_a は,

$$\varphi_b(\alpha, \beta) = \varphi_a(\beta, \alpha) = \frac{\alpha(\beta - 1) \ln \alpha - (\alpha - 1) \ln \beta}{\alpha\beta - 1} \quad (\text{A.76})$$

である. したがって多成分混合物は, 分離要素を通過する際に, ($j-k$) 成分対に関して $\delta U_j, (\delta U_k)_j$ だけ価値を増すことになる.

多成分価値関数の合成

多成分系における価値関数は, 関数方程式 (64) の解として与えられる. 今, 式 (64) を存在比を用いて書き直せば

$$\varphi = \theta V(\overrightarrow{\alpha R}) + \bar{\theta} V(\overrightarrow{R/\beta}) - V(\overrightarrow{R}), \quad (\text{A.77})$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{\alpha R} &= (\alpha_1 R_1, \alpha_2 R_2, \dots, \alpha_{k-1} R_{k-1}) \\ \overrightarrow{R/\beta} &= (R_1/\beta_1, R_2/\beta_2, \dots, R_{k-1}/\beta_{k-1}) \\ \overrightarrow{R} &= (R_1, R_2, \dots, R_{k-1}) \end{aligned} \right\}$$

となる。価値関数 $V(\vec{R})$ は、式 (77) の右辺が \vec{R} に依存せず α, β のみの関数になるように決めてやればよい。Lehrer-Ilamed は上の関数方程式の解き方を示したが、その数学的操作は複雑であった。そこで、ここでは 2 成分系の議論からの類推により解を導く。

2 成分系での価値関数は次のように求められた。2 成分混合物が分離要素を通過する時、注目成分については、 $\delta U_b = G_b \varphi_b(\alpha, \beta)$ だけ価値が増加し、非注目成分については $\delta U_a = G_a \varphi_a(\alpha, \beta)$ だけ増加する。もし、濃縮側分離係数 α と減損側分離係数 β との値が異なると、単位流量の注目成分、非注目成分に関する価値増加 $\varphi_b(\alpha, \beta), \varphi_a(\alpha, \beta)$ の値は異なる。そこで、注目成分、非注目成分を区別しないで、その合計の L に関する価値増加を定義しようとするれば、上の価値増加の差を何らかの操作で打ち消してやる必要がある。最も単純な方法は

$$\frac{\delta U_b}{\varphi_b(\alpha, \beta)} = G_b, \quad \frac{\delta U_a}{\varphi_a(\alpha, \beta)} = G_a \quad (\text{A.78})$$

のように価値増加で割ってやればよい。したがって、 L に関する価値増加 $\varphi(\alpha, \beta)$ は

$$\begin{aligned} \delta U &= \varphi(\alpha, \beta) \cdot L = \varphi(\alpha, \beta)[G_b + G_a] \\ &= \varphi(\alpha, \beta) \left[\frac{\delta U_b}{\varphi_b(\alpha, \beta)} + \frac{\delta U_a}{\varphi_a(\alpha, \beta)} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

の関係を満足する必要がある、式 (79) を与える価値関数も上に対応して

$$V(R) = \varphi(\alpha, \beta) \left[\frac{1}{\varphi_b(\alpha, \beta)} \frac{R}{1+R} - \frac{1}{\varphi_a(\alpha, \beta)} \frac{1}{1+R} \right] \ln R \quad (\text{A.80})$$

と求められる。

多成分の場合にも、 $(j-k)$ 成分対について $\delta U_j, (\delta U_k)_j$ だけ価値が増加し、単位量あたりの価値増加量 $\varphi_b(\alpha_j, \beta_j), \varphi_a(\alpha_j, \beta_j)$ の値も異なっている。更に、基準成分については 2 成分対の相手によっても価値増加量が異なっている。したがって、多成分系における分離パワーは

$$\begin{aligned} \delta U &= \varphi L = \varphi \left[\sum_{l=1}^{k-1} G_l + G_k \right] \\ &= \varphi \left[\sum_{l=1}^{k-1} (G_l + C_l G_k) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} C_l = 1 \quad (\text{A.82})$$

と定義すればよい。ここで、係数 C_l は基準成分の寄与を分離係数を定義する 2 成分対の相手に分配するための係数であり、(82) 式を満足すれば、どのような値をとってもよい。式 (74)(75) に注意すれば、

$$\delta U = \varphi \sum_{l=1}^{k-1} \left[\frac{\delta U_l}{\varphi_b(\alpha_l, \beta_l)} + C_l \frac{(\delta U_k)_l}{\varphi_a(\alpha_l, \beta_l)} \right] \quad (\text{A.83})$$

となる。したがって、式 (83) を与える価値関数³⁾ は

$$\left. \begin{aligned} V(\vec{R}) &= \varphi \sum_{l=1}^{k-1} W_l(R_l), \\ W_l(R_l) &= \left[\frac{1}{\varphi_b(\alpha_l, \beta_l)} \cdot \frac{R_l}{1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j} - \frac{C_l}{\varphi_a(\alpha_l, \beta_l)} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j} \right] \ln R_l \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.84})$$

と求められる。但し

$$\left. \begin{aligned} G_l &= L \cdot N_l = L \cdot \frac{R_l}{1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j}, \\ G_k &= L \cdot N_k = L \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{k-1} R_j} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.85})$$

の關係を用いてある。式(84)を存在比ではなく、濃度表記にすれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} V(\vec{N}) &= \varphi \sum_{l=1}^{k-1} W_l \left(\frac{N_l}{N_k} \right), \\ W_l \left(\frac{N_l}{N_k} \right) &= \left[\frac{N_l}{\varphi_b(\alpha_l, \beta_l)} - \frac{C_l N_k}{\varphi_a(\alpha_l, \beta_l)} \right] \ln \frac{N_l}{N_k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.86})$$

式(86)は、上の導出からも明らかなように、関数方程式(77)の解の1つである。Lehrer-Ilamedが示したように、式(77)の解は他にもいくつかある。たとえば、3成分系に対するLehrer-Ilamedの第1次解(the first degree Solution)は次のようである。表記法はここで用いたものに変更してある。

$$V(\vec{N}) = \sum_{j=1}^k N V_j(\vec{N}), \quad (k=3) \quad (\text{A.87})$$

ここで

$$\begin{aligned} V_j(\vec{N}) &= V_j(a_j, b_j, c, R_1, R_2) \\ &= C \ln R_1 + \frac{H - C(a_j \ln \alpha_1 - b_j \ln \beta_1)}{a_j \ln \alpha_2 - b_j \ln \beta_2} \ln R_2 \\ &= \begin{cases} C \ln R_1 + \frac{H - C \varphi_b(\alpha_1, \beta_1)}{\eta_1 \ln \alpha_2 - \bar{\eta}_1 \ln \beta_2} \ln R_2, & (j=1) \\ C \ln R_1 + \frac{H - C(\eta_2 \ln \alpha_1 - \eta_2 \ln \beta_1)}{\varphi_b(\alpha_2, \beta_2)} \ln R_2, & (j=2) \\ C \ln R_1 + \frac{H - C \varphi_a(\alpha_1, \beta_1)}{\varphi_a(\alpha_2, \beta_2)} \ln R_1, & (j=3) \end{cases} \end{aligned}$$

である。Lehrer-Ilamedの解は、 $\ln(N_i/N_{i+1}) (i=1, 2, \dots, k-1)$ と $\ln(N_k/N_l)$ に関する m 次($m=1, 2, \dots$)の多項式で構成されており、上の解はその1次の部分である。1次解は、関数 φ_b, φ_a の導入で、その構造がかなり見やすくなるが、高次解は、それを求めることも、またその解の意味を知ること、ほとんど無理である。そこで、これらの高次解は、数学的には興味があるが、実際問題では考慮する必要はなさそうである。

ところで、式(86)で与えられた価値関数は、2成分系の場合の自然な拡張となっており、また各項の意味も明快である。また、各成分に関する分離パワーの概念をも併用することによって、多成分系の分離の評価に用いることもできる。

分離パワーの加算性

分離係数が段毎に変化しないカスケードを考える。これらの流量については、前節 [5] で議論したが、カスケード全体にわたる各成分の流量の総和は、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (G_j)_i &= \frac{v_j + 1}{v_{j-1}} [-(n-f+1)(G_j)_P + f(G_j)_W], \\ \text{但し} \quad v_j &\equiv \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j(\beta_j - 1)}, \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \\ v_k &\equiv \frac{\beta_j(\alpha_j - 1)}{\beta_j - 1} = (j \text{ の値によらない}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.88})$$

と求められる。ここで、 $j-k$ 成分対に対して存在比一致が達成されているとすれば、 $\alpha = \beta$ であるから、他の $l-k$ 成分対に対しては $\alpha_l \neq \beta_l$ となる。

まず、 $j-k$ 成分対について考える。存在比一致が成立しているから

$$(R_j)_i = \alpha_j^{i-f} (R_j)_F, \quad (\text{A.89})$$

$$(R_j)_P = \alpha_j^{n-f+1} (R_j)_F \equiv (\alpha_T)_j (R_j)_F, \quad (\text{A.90})$$

$$(R_j)_W = (R_j)_F / \alpha_j^f \equiv (R_j)_F / (\beta_T)_j \quad (\text{A.91})$$

である。更に、 $v_j = 1/\alpha_j$, $v_k = \alpha_j$ であるから、式 (88) に代入すれば

$$\sum_{l=1}^n (G_j)_l = \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j - 1} [(n-f+1)(G_j)_P - f(G_j)_W], \quad (\text{A.92})$$

$$\sum_{l=1}^n (G_k)_l = \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j - 1} [-(n-f+1)(G_k)_P + f(G_k)_W] \quad (\text{A.93})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} (G_j)_P &= \frac{\alpha_j^{n-f+1} (\alpha_j^f - 1)}{\alpha_j^{n+1} - 1} (G_j)_F \\ &= \frac{(\alpha_T)_j [(\beta_T)_j - 1]}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} (G_j)_F, \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

$$(G_j)_W = \frac{(\alpha_T)_j - 1}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} (G_k)_F, \quad (\text{A.95})$$

$$(G_k)_P = \frac{(\beta_T)_j - 1}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} (G_k)_F \quad (\text{A.96})$$

$$(G_k)_W = \frac{(\beta_T)_j [(\alpha_T)_j - 1]}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} (G_k)_F \quad (\text{A.97})$$

に注意すれば、式 (92)(93) はそれぞれ、次のように整理できる。

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n (G_j)_l &= \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j - 1} \cdot \frac{1}{\ln \alpha_j} \cdot (G_j)_F \\ &\quad \left[\frac{(\alpha_T)_j [(\beta_T)_j - 1]}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} \ln(\alpha_T)_j - \frac{(\alpha_T)_j - 1}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} \ln(\beta_T)_j \right] \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

$$\sum_{l=1}^n (G_k)_l = \frac{\alpha_j + 1}{\alpha_j - 1} \cdot \frac{1}{\ln \alpha_j} \cdot (G_k)_F$$

$$\left[\frac{(\beta_T)_j [(\alpha_T)_j - 1]}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} \ln(\beta_T)_j - \frac{(\beta_T)_j - 1}{(\alpha_T)_j (\beta_T)_j - 1} \ln(\alpha_T)_j \right] \quad (\text{A.99})$$

したがって、関数 φ_b, φ_a の表記法を導入すれば、

$$\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j + 1} \ln \alpha_j \sum_{l=1}^n (G_j)_l$$

$$= (G_j)_F \varphi_b((\alpha_T)_j, (\beta_T)_j) = (\delta U_j)_T, \quad (\text{A.100})$$

$$\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j + 1} \ln \alpha_j \sum_{l=1}^n (G_k)_l$$

$$= (G_k)_F \varphi_a((\alpha_T)_j, (\beta_T)_j) = (\delta U_{kj})_T \quad (\text{A.101})$$

であることがわかる。式(100)、式(101)の左辺にあらわれる α の関数が

$$\frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j + 1} \ln \alpha_j = \varphi_b(\alpha_j, \alpha_j) = \varphi_a(\alpha_j, \alpha_j) \quad (\text{A.102})$$

であることに注意すれば、式(100)(101)は分離パワーの加算性

$$(\delta U_j)_T = \sum_{l=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j + 1} \ln \alpha_j (G_j)_l$$

$$= \sum_{l=1}^n (\delta U_j)_l, \quad (\text{A.103})$$

$$(\delta U_k)_T = \sum_{l=1}^n \frac{\alpha_j - 1}{\alpha_j + 1} \ln \alpha_j (G_k)_l$$

$$= \sum_{l=1}^n (\delta U_{kj})_l \quad (\text{A.104})$$

をあらわしている。

次に、存在比一致の成立しない $l-k$ 成分対について考える。 v_l, v_k の定義より

$$\frac{\beta_l(\alpha_l - 1)}{\beta_l - 1} = \alpha_j, \quad v_l = \frac{\alpha_j}{\alpha_l \beta_l} \quad (\text{A.105})$$

が求められる。そこで、プロダクト、ウエイストの流量は

$$(G_l)_P = \frac{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n-f+1} [(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^f - 1]}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n+1} - 1} (G_l)_F \quad (\text{A.106})$$

$$(G_l)_W = \frac{[(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n-f+1} - 1]}{[(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n+1} - 1]} (G_l)_F \quad (\text{A.107})$$

となり、カスケード全体の $l-k$ 成分対に関する分離係数は

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_T)_l &\equiv \frac{(R_l)_P}{(R_l)_F}, & (\beta_T)_l &\equiv \frac{(R_l)_F}{(R_l)_W} \\ \text{但し,} & & & \\ (R_l)_P &= (G_l)_P / (G_k)_P \\ (R_l)_W &= (G_l)_W / (G_k)_W \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.108})$$

と求められる。実際に式 (108) を計算すると

$$(\alpha_T)_l = (\alpha_l \beta_l / \alpha_l)^{n-f+1} \cdot \frac{(\alpha_j)^{n+1} - 1}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n+1} - 1} \cdot \frac{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^f - 1}{(\alpha_j)^f - 1}, \quad (\text{A.109})$$

$$(\beta_T)_l = (\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^f \cdot \frac{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n+1} - 1}{(\alpha_j)^{n+1} - 1} \cdot \frac{(\alpha_j)^{n+1} - (\alpha_j)^f}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n+1} - (\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^f} \quad (\text{A.110})$$

が得られる。\$l-k\$ 成分対については、存在比一致が成立していないので、各段の分離パワー \$(\delta U_l)_i\$ の総和は、カスケード全体の分離パワー

$$(\delta U_l)_T \equiv (G_l)_F \varphi_b((\alpha_T)_l, (\beta_T)_l) \quad (\text{A.111})$$

よりも小さくなる。すなわち不等式

$$\sum_{i=1}^n (\delta U_l)_i > (G_l)_F \varphi_b((\alpha_T)_l, (\beta_T)_l) \quad (\text{A.112})$$

が常に成立する。上記の不等式は数値的にはすぐに確認できるが、解析的に証明するのは困難である。

参考のために、次の関係式を挙げるにとどめる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (G_l)_i &= \left[\frac{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) - 1}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) + 1} \ln \left(\frac{\alpha_l \beta_l}{\alpha_j} \right) \right]^{-1} \varphi_b(A, B) (G_j)_F, \\ A &\equiv (\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^{n-f+1}, \quad B \equiv (\alpha_l \beta_l / \alpha_j)^f, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.113})$$

$$\left. \begin{aligned} (\delta U_l)_T &= (G_l)_F [\varphi_b(A, B) + c], \\ C &\equiv \frac{A(B-1)}{AB-1} \left[\ln \frac{B-1}{AB-1} - \ln \frac{(\alpha_j)^f - 1}{(\alpha_j)^{n+1} - 1} \right] \\ &\quad + \frac{A-1}{AB-1} \left[\ln \frac{B(A-1)}{AB-1} - \ln \frac{(\alpha_j)^f [(\alpha_j)^{n-f+1} - 1]}{(\alpha_j)^{n+1} - 1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.114})$$

$$\left. \begin{aligned} (\delta U_l)_i &= (G_l)_i \varphi_b(\alpha_l, \beta_l) \\ \varphi_b(\alpha_l, \beta_l) &= \frac{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) - 1}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) + 1} \ln \left(\frac{\alpha_l \beta_l}{\alpha_j} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) + 1} \ln \left(\frac{\alpha_l \beta_l}{\alpha_j} \right) + \frac{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j)}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) + 1} \ln \alpha_j \\ &\quad + \ln \frac{(1/\alpha_j) + 1}{(\alpha_l \beta_l / \alpha_j) + 1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.115})$$

同様に \$l-k\$ 成分対における基準成分の分離パワーについても、不等式

$$\begin{aligned} (\delta U_{kl})_T &= (G_k)_F \varphi_a((\alpha_T)_l, (\beta_T)_l) \\ &< \sum_{i=1}^n (\delta U_{kl})_i \end{aligned} \quad (\text{A.116})$$

が成立している。