

# 大出力クリストロンの高効率化に関する研究

—共同研究報告書—

1994年3月

京都大学原子エネルギー研究所  
動力炉・核燃料開発事業団  
大洗工学センター

複製又はこの資料の入手については、下記にお問い合わせください。

〒311-13 茨城県東茨城郡大洗町成田町4002

動力炉・核燃料開発事業団

大洗工学センター システム開発推進部・技術管理室

Enquires about copyright and reproduction should be addressed to: Technology Management Section O-arai Engineering Center, Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation 4002 Narita-cho, O-arai-machi, Higashi-Ibaraki, Ibaraki-ken, 311-13, Japan

動力炉・核燃料開発事業団 (Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation)

## 大出力クライストロンの高効率化に関する研究

吉川 潔\*、大西正視\*、山本 靖\*、督 壽之\*、  
平野耕一郎\*\*、佐久間実\*\*

### 要 旨

本報告書は、京都大学原子エネルギー研究所と動力炉・核燃料開発事業団が、「大出力クライストロンの高効率化」に関して、共同で実施した研究成果を取りまとめたものである。

本研究の目的は、加速器による消滅処理システムにおいて、電子加速に必要な高周波エネルギー発生用大出力・定常クライストロンの高効率化を図るための技術に関連して、電子ビーム輸送の物理モデル、コード検討・改良、及び電子ビーム直接発電基礎実験の予備的検討を行うことである。

クライストロン管における電子銃部設計では、差分法による E-GUN コードが複雑形状の電子銃設計には不向きなため、本研究では京都大学が開発した有限要素法 KUAD コードの改良で解決した。

電子ビームと高周波電磁場との相互作用は、本研究では現在最も進んだ差分法による FCI コードを参考に、より自由度・発展性の高い有限要素法を基礎とする高精度な計算モデル・計算アルゴリズムを完成させた。

電子ビーム直接発電基礎実験用直接変換器の予備的設計では、70%にも達する高い理論電気エネルギー回収効率を確かめ、本技術が「加速器による消滅処理システム」において重要な役割を担うことを示した。

以上の個別コードを改良し、クライストロン管内における全体的電子ビーム動特性が求められる総合化されたコード開発が今後の課題である。

---

\*京都大学原子エネルギー研究所

\*\*動力炉・核燃料開発事業団大洗工学センター技術開発部先進技術開発室

March, 1994

# Study on High Efficiency High Power Klystron

Kiyoshi Yoshikawa\*, Masami Ohnishi\*, Yasushi Yamamoto\*,  
Hisayuki Toku\*, Koichiro Hirano\*\*, and Minoru Sakuma\*\*

## Abstract

This paper is intended to examine and establish the methods to enhance overall efficiency of high power klystrons for the transmutation system, done collaboratively by Kyoto University and PNC.

We examined physics models and simulation codes for following items, and refined existing codes, and established a new algorism:

- (1) Electrons in the gun under space charge and magnetic fields,
- (2) Interaction of electrons with RF fields in the klystron tube,
- (3) Energy recovery from spent electron beam energy in collector.

The modified FEM-based KUAD code is found very effective for advanced electron gun design, and for collectors design with predicted recovery efficiencies as high as 70%. The FEM-based algorism developed in this study for nonlinear interaction of relativistic electrons with electromagnetic fields in the klystron tube is found also feasible for further 3-D extention. Integration of the individual code need to be warranted in the future.

---

\* Institute of Atomic Energy, Kyoto University

\*\*Frontier Technology Development Section

Power Reactor and Nuclear Fuel Development Corporation

## 目 次

1. まえがき .....	1
2. 電子ビームコードにおける物理モデルの調査・検討 .....	4
3. 電子ビーム輸送コードの改良 .....	12
4. 電子ビーム直接発電基礎実験の予備検討 .....	19
5. 考察 .....	25
6. あとがき .....	27
7. 謝辞 .....	29
引用文献 .....	30
付録 A .....	47
付録 B .....	52
付録 C .....	111
付録 D .....	112

## 表・図 目 次

表4.1 大出力クライストロン管(E3178)の特徴と定格	31
表4.1 E 3 7 1 8 (CWモード) 特性	32
図2.1 円筒状電子ビームによる発生電磁場	33
図2.2 動燃電子銃断面図	33
図2.3 動燃電子銃領域空間要素分割例	34
図3.1(a) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=0$ )	35
図3.1(b) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=100\text{Gauss}$ )	35
図3.1(c) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=200\text{Gauss}$ )	36
図3.1(d) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=300\text{Gauss}$ )	36
図3.1(e) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=400\text{Gauss}$ )	37
図3.2 RF空洞の等価回路	38
図4.1 直線状電子ビーム管におけるパワーフロー	39
図4.2 総合効率の電子効率依存	40
図4.3 E 3 7 1 8 管総合効率のコレクター回収効率依存	41
図4.4 E 3 7 1 8 管用コレクター形状の一例	42
図4.5 コレクター内の単色エネルギー (60keV) 電子軌道	43
図4.6 コレクター内のトップハット分布エネルギー $\approx$ 軌道 ( $60 \pm 35\text{keV}$ )電子軌道	44
図4.7 コレクター内の単色エネルギー (55keV) 電子軌道	45
図4.8 D- $^3\text{He}$ FRC核融合炉用ベネチアンブラインド型 プラズマ直接変換器におけるコレクター段数 右の回収効率、回収器長さへの効果	46

## 1. まえがき

我国が来るべき21世紀において世界の先進国として世界平和のために様々な分野で貢献することは国際的に強く期待されており、またそれは平和国家を標榜する日本国民たれしもの願いである。しかしながら、その活動、とりわけわが国に強く期待されている経済活動の基盤となるエネルギーの確保にかかわるいわゆるエネルギーセキュリティーの問題については、残念ながら未だ十分な答は出されていない。

現在の世界のエネルギー資源予測によれば、200年近い埋蔵量のある石炭以外の石油、天然ガスの可採年数はせいぜい40年、および60年程度と見積もられている。すなわち、21世紀においては、その全期間にわたって20世紀のようなエネルギー需給構造を維持することは不可能であり、さらに近年の化石燃料燃焼による地球温暖化抑制への要求とも関連して化石燃料依存からの脱却もより厳しく求められると考えられる。

このような状況にあって一次エネルギーのうち60%弱をも占める石油の100%を海外に依存している我が国が将来にわたり持続的に発展し、かつ国際貢献が可能かどうかはいつにエネルギーセキュリティーの確保にかかっている。我が国にとってこの歴史的ともいえる問題は他国とは比較にならぬほどの最も大きなアキレス腱となる可能性が高い。

我が国のエネルギー長期政策によれば、2010年度には1989年度に較べエネルギーは32%と増加するが、石油は3%の微増に留まり、その石油代替を主として原子力、石炭、天然ガスに求めた見通しをたてている。しかし、天然ガス資源の寿命を考慮すれば、核融合や太陽エネルギーなどの新エネルギーを経済的に利用可能とする画期的技術が確立されない限り、原子力と石炭を21世紀の主要エネルギー源とする環境整合性の極めて高いエネルギーシステムを構築せざるを得ず、開発に長期間かかることを考慮すれば早急にそのシステム構築に着手しておくことが肝要である。もし幸いにして画期的新エネルギー源が開発されればその時点で組み込めば良い。

以上のような状況にあって、原子力エネルギー利用には、間断なき安全性向上の努力が求められており、核分裂で発生する放射性物質の処理や無害化はその最も重要な課題のひとつである。

なかでも、TRUと共に核分裂数の6%の確率で発生する放射性<sup>137</sup>Csの処理技術の開発は緊急を要し、従来の原子炉による消滅処理法のほかにその処理時間が長いという欠点を克服する新しい方法として、高エネルギー陽子による核破碎や高エネルギー電子による(γ, n)反応を利用した核種変換による消滅方式の開発研究がオメガ計画として現在我が国で進められている。

これらはいずれも粒子（電子）加速器を使用するが、従来加速器は学術研究や軍事研究といった経済性においてあまり制約されない分野で主として使用されてきた経緯があるため、使用の方法によっては経済性の成立しない場合が多い。

産業界において現在これら加速器を積極的に使用して利潤を上げている産業は極めて高い付加価値を生み出す半導体産業などわずかにすぎない。しかも、半導体産業で使用されるビームの特性は、量的なものよりどちらかと言えばむしろ質的なものに特化されており、同じ粒子（電子）加速とはいえ、オメガ計画のようなビームの質とともに量的にもある程度の量（粒子束=電流量）が要請されるものとは大きく異なる点を明確に認識しておく必要がある。

確かに消滅処理の価値は人類にとっては計り知れないほど高いものであるが、自由電子レーザーによる高効率同位体分離技術が開発されるまでは残念ながら消滅処理後のプロダクトは流通商品としては対象外で、現在のところ超LSIなどとは全く比較にならない。

この点に加速器による消滅処理方式の弱点が存在し、また、それ故に本方式の高効率化がその成立性に極めて緊密にかかわってくるといえよう。

本報告書は、上記オメガ計画のうち動力炉・核燃料開発事業団が担当している電子ビームによる放射性<sup>137</sup>Csの消滅処理技術のうち加速器による

消滅処理システムにおいて、高エネルギー電子発生に不可欠の高周波エネルギー発生用高出力・定常クライストロン管の高効率化に関する方法・技術について、平成5年度に京都大学原子エネルギー研究所と「大出力クライストロンの高効率化に関する研究」という課題で共同研究を行った結果についての報告を記したものである。

加速器による消滅処理システムにおいては、電子を加速するための大電力・定常クライストロン管における未利用電子エネルギーの高効率電気エネルギー変換がシステム成立のためには不可欠である。

そこで、現状あるいは近未来技術を用いて大出力クライストロン管の高効率化を図るため、電子ビームの動特性を精度よく評価できる電子ビーム輸送コードにおける物理モデルの調査・検討、輸送コードの改良、および電子ビーム直接発電基礎実験の予備検討を行う。

## 2. 電子ビームコードにおける物理モデルの調査・検討

電子ビームのエネルギー回収効率は、コレクター部への入射電子の速度（エネルギー・空間）に強く依存するため、この分布を精度良く求めることが必要である。特にマイクロ波との相互作用後の電子ビームの場合、電子ビームのエネルギーに広がりができると同時に、速度成分についても複雑な分布を示すと考えられ、単純な分布関数により与えることは困難である。このため、電子とマイクロ波の相互作用部を含むクライストロン全体のシミュレーションコードの開発を行うこととした。

シミュレーションにおいては、計算領域をマイクロ波と電子ビーム間の相互作用の有無により、

- (a) 電子銃部
- (b) クライストロン電子・電磁場相互作用部
- (c) コレクター部

に分割することが可能である。(b)のクライストロン電子・電磁場相互作用部では、マイクロ波が存在するため電磁場は時間変化を考慮する必要があるが、(a), (c)では基本的に定常（あるいは周期的定常）問題として扱うことができる。以下に、各部における電子ビームの特性評価に関する物理モデルについて行った調査・検討の概要を記す。

### 2.1 電子銃部

電子銃部ではマイクロ波は存在しないので電子ビームの軌道は外部静電場と電子ビーム自身の空間電荷による電場と電流による磁場により定まる。

基本となる方程式は、以下の3式である。

$$\frac{d(\gamma mv)}{dt} = -e(E + v \times B) \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0 \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (2.1.3)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (2.1.4)$$

ここに、 $m$ ：電子の静止質量， $\gamma$ ：相対論係数，  
 $v$ ：速度， $e$ ：素電荷，  
 $E$ ：電場， $B$ ：磁場， $J$ ：電流密度，  
 $\varepsilon_0$ ：真空誘電率， $\mu_0$ ：真空透磁率

電子銃部の解析コードとしては、米国スタンフォード大学リニアアクセラレーター研究所（SLAC）で開発された Electron Trajectory Program (E gun) <sup>(1)</sup>があり、標準的な計算コードとして広く用いられているが、後述するようにいくつかの問題も指摘されている。そこで、京都大学で開発したKUAD (Kyoto University Advanced DART) コード <sup>(2)</sup>を改造して用いることを考え、E gunコードの物理モデル／計算手法を検討し、その問題点を明らかにするとともに、KUADコードの改造について検討を行った。

### 2.1.1 電子ビームの作る電磁場の効果の評価

物理モデルの詳細な検討に入る前にまず電子ビームの作る電磁場について簡単な評価を行った。

図2.1のような半径  $a$  の円筒状電子ビーム（電流値  $I$ ）がその外周上に作る半径方向電場  $E_r$ 、回転角方向磁場  $B_\theta$  は、

$$E_r = -\frac{I}{2\pi\varepsilon_0 a} \frac{1}{v_z} \quad (2.1.5)$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (2.1.6)$$

と表せる。また、この電磁場により最外縁部の電子が受ける半径方向の2つの力  $F_{sc}$ （空間電荷による外向きの力）および  $F_B$ （ビーム自身の電流による内向きのピンチ力）は各々、

$$F_{sc} = -e E_r = \frac{e I}{2\pi\varepsilon_0 a} \frac{1}{v_z} \quad (2.1.7)$$

$$F_B = -e v_z B_\theta = -\frac{e \mu_0 I}{2\pi a} v_z \quad (2.1.8)$$

と表すことができ、電子ビーム自身が自己の電荷・電流による受ける力の比  $F_{sc}/F_B$  は、

$$\left| \frac{F_B}{F_{sc}} \right| = \left| \frac{e \mu_0 I v_z}{2\pi a} \cdot \frac{2\pi \epsilon_0 a v_z}{e I} \right|$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 v_z^2 = (v_z/c)^2 = \beta_z^2 \quad (2.1.9)$$

なる。<sup>(2.1.9)</sup>式より、電子ビームの速度が光速に比べて小さいときには空間電荷効果が顕著でありビームは発散しようとするが、電子ビームの速度が光速に近づくと電流による磁場がビームの発散を抑制することがわかる。

図2.2に示す動燃加速器の入射部の場合を例に考えると、第2グリッド出口では、最大電流値  $I=400\text{mA}$ 、ビーム半径  $a=2\text{mm}$ 、ビームエネルギー  $W=20\text{keV}$  であるから、 $E_r \sim 44\text{kV/mm}$ 、 $B_\theta \sim 0.4\text{ gauss}$  となる。また、 $\beta_z = 0.272$  より  $F_B/F_{sc}=0.074$  となり、この領域では空間電荷効果の方がより優勢であることがわかる。

## 2.1.2 E gunコード

E gunコードについて、その利用者向け解説書<sup>(1)</sup>に基づいて検討を行った。

本コードは、スラブ形状及び円筒形状電子ビームを取り扱うことが可能であり、電磁場については2次元、ビーム軌道（位置・速度）は3次元のコードである。

計算手法としては、次の通りである。

(1) ポアソン方程式は、 $(r, z)$  方向等間隔の差分法により解く。

(2) 外部磁場については、ソレノイド磁場の多項式近似か、または他の

コードによる計算値の入力。

- (3) 電子ビーム自身の作る磁場については  $B_0$  のみを考慮する。ただし (2.1.6) 式において、電流値  $I$  としては計算する電子より内側にある電子ビームの持つ総電流値をとる。

以上が E gun の手法であるが、等間隔メッシュを用いているため、

- (1) 高輝度電子銃を設計するとき、問題となるカソード付近の細かい形状を入力することが困難でありその影響を高精度で評価できない。  
(2) 電子ビームが通過する近接部分とビームの通過しない他の部分のメッシュサイズが同じであるため、高い精度で比較的大きな装置設計を扱う場合、計算機性能による制約からメッシュを十分細かくとれない。

という問題がある。そのため、より高輝度な電子銃設計にあたっては、メッシュの形状が可変で、かつカソード形状の細かな入力が可能なコードが必要となる。

また、空間電荷の計算や磁界計算の方法にも、開発当時の計算機容量の制約によると思われる簡略化が見られ、高精度化には支障となる場合が想定される。

### 2.1.3 K U A D コード（付録A 参照）

K U A D コード<sup>(2)</sup>は、ビーム直接発電機（Beam Direct Energy Converter: B D C）の設計・解析用に開発された静電場中のイオンビームの軌道計算コードであり、スラブ形状及び円筒形状を取り扱うことが可能な電場・ビーム軌道（位置・速度）が共に2次元のコードである。

本コードでは、電場計算に2次元有限要素法（Finite Element Method: F E M）を用いており、三角要素を用いることで電極形状のより細かい入力を可能とするとともに、要素分割には半自動分割を採用している。B D Cの計算では、比較的高いビームパーティアンスのイオンビームの場合でも

安定した計算を行うことが可能であった。

さらに、FEMを用いているので、Egunコードで述べたような制約は基本的には無い。

図2.3に動燃加速器の入射部について空間要素の分割を行った例を示す（半径方向は軸方向に比べて5倍に拡大してある）。

Egunコードと比較して、追加する必要のある項目は、

- (1) 軌道計算における磁場の影響
- (2) ビーム電流による磁場の計算
- (3) ビームの質を評価するエミッタンスなどの計算
- (4) ビームの初期条件の計算

である。コードの改良については、3.1節で詳しく述べる。

## 2.2 クライストロン電子・電磁場相互作用部（付録B参照）

クライストロンの電子・電磁場相互作用部について、いくつかの既存のコードについて調査・検討を行った。その結果、以下に述べるように、JPN-DISK<sup>(3)</sup>などのビーム電流をディスクモデルとして扱うコードでは、電子ビームの半径方向の運動が考慮されていないため、コレクター部への入射条件を得られないことがわかった。このため、高エネルギー研究所の新竹氏による核融合のプラズマシミュレーションのための粒子モデルを用いたFCIコード<sup>(4)</sup>を参考することとした。

しかしながら、このコードは実行は可能であるが、ソースプログラムが公開されていないためコレクター部の計算に接続するために我々が必要とする形での情報を取り出すことは困難であることが判明した。そこで、FCIコードに関する論文・報告書を基に物理モデルを再度検討し、将来の3次元コードへの発展性も考慮して有限要素法を用いる新たな計算コー

ド (Kyoto University FCI code:K U F C I ) を開発することとした。

### 2.2.1 J P N - D I S K コード

J P N - D I S K コードは、1次元ディスクモデルで電子ビームを近似し、入力空洞から出力空洞までの全作用空間でのディスクの運動をtime-stepping法を用いて計算するクライストロン設計コードである。この手法では、クライストロンの効率・利得を評価・設計するのには十分な精度が得られるが、電子ビームの半径方向の運動が考慮されていないため、本コードはコレクタ一部への入射条件を計算するという本研究の目的には不十分である。

### 2.2.2 F C I コード

F C I コードについて、その論文・報告書に基づいて検討を行った。F C I コードは、ビーム自身の作る電磁界と高周波空洞共振器（以下、RF空洞と呼ぶ。）の作る電磁界、及び外部収束磁場の三つの電磁界成分を取り込みながら電子ビームの運動方程式を軸対称2次元（速度3次元）で解いて行くコードである。

計算手法は、次の通りである。

- (1) ビームの運動はドリフトチューブ領域でのみ計算する。電子錠部のビームの運動は取り扱わず、ドリフトチューブへの入射条件としてすべてのパラメータを外部から与える。
- (2) ビームの作る電磁界については、RF空洞のギャップを導体で塞いだ円筒領域で、スカラ及びベクトルポテンシャルを差分法により解く。
- (3) RF空洞の作る電磁界は基本モード ( $T M_{010}$ ) のみとする。その振幅については、RF空洞のパラメータ ( $\omega_0$ 、 $Q_0$ 、 $Q_1$ 、 $R/Q$ ) を外部から与えてRF空洞の等価回路を求め、等価回路に生じる電圧および

電流から基本モードの振幅を与える。

- (4) 外部収束磁場は、軸上のデータを外部から入力し、これを近似展開して用いる。

### 2.2.3 KUFICI コード（付録B）

F C I コードの計算手法におけるビームの作る電磁界の計算において、差分法の代わりに有限要素法（F E M）を用いる。F E Mの特長は以下の通りである。

- (1) 三角形メッシュを用いることにより、複雑な形状の境界線（面）に対応することができる。
- (2) メッシュサイズを位置によって変化させることができる。このため例えば、電子ビームの存在しない領域ではメッシュサイズを大きく、電子ビームの存在する領域ではメッシュを細かく取ることにより、一定の計算機容量の制約のもとでより精度の高い計算が可能である。
- (3) 将来の3次元コードへの発展が比較的容易である。

また、時間発展については、打ち切り誤差が時間刻み幅の5乗以下のルンゲクッタ法を用いる。

### 2.3 コレクター部

コレクター部へ入射される電子ビームの条件は時間的に変化するが、コレクター部ではマイクロ波との相互作用が無いので、個々の時間においては定常問題として扱うことができる。このため、計算コードに必要とされる計算モデルは電子銃部と同じである。しかし、取り扱う領域の大きさが電子銃部に比較して大きくなるため、実際の計算においてはメッシュ形状

等に工夫が必要である。

また、周期的に変化するエネルギー・速度分布を持つビームを効率よく回収するための最適な電極電圧設定方式の確立が重要となる。

### 3. 電子ビーム輸送コードの改良

京都大学で開発した電子ビーム輸送コード (Kyoto University Advanced DART Egun code: KUAD-E) の改良点を以下に項目別に記す。

#### 3.1 電子銃部／コレクター部

##### 3.1.1 外部ソレノイド磁場の導入

外部磁場としてはソレノイド磁場を考えることとした。

- (1) 透磁率は全領域で真空透磁率に等しい。
- (2) 磁石はすべて完全軸対称である。

と仮定すると、ソレノイドコイルによる磁場は各コイル（半径  $a$ ）を線素  $ds$  からなる微小空芯円環電流コイルの重ね合わせとして求めることができます。

ベクトルポテンシャルを用いれば、 $(r, \theta, z)$  座標系では方位角成分  $A_\theta$  のみを持ち、かつ積分を用いて次のように表せる。

$$A_\theta(r, z) = \sum_{\text{コイル数}} \iint_{\text{断面}} \frac{\mu_0 J}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right\} ds \quad (3.1.1)$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \quad (3.1.2)$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (3.1.3)$$

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2} \quad (3.1.4)$$

ここに、 $J$ ：各コイル断面でのソレノイド電流

また、軸方向磁場 ( $B_z$  : 一定値) のみの場合には電子銃内のベクトルボテンシャルは

$$A_\theta = \frac{r B_z}{2} \quad (3.1.5)$$

で与えることができる。

### 3.1.2 正準角運動量保存によるラウス関数の導入 ( $r - z$ 面と $\theta$ 面の運動方程式の分離)

式 (2.1.1) に示したように電磁場中で電荷  $q$  を持つ荷電粒子の運動方程式 (非相対論的) は、

$$\frac{d(mv)}{dt} = q(E + v \times B) \quad (3.1.6)$$

となる。一般化座標  $Q_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) によるラグランジエ方程式により、粒子の運動を表すと、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad (3.1.7)$$

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + qv \cdot A - q\phi \quad (3.1.8)$$

となる。

円筒座標系 ( $r, \theta, z$ ) を一般化座標として採用し、前節で記述したように軸対称円筒磁場では、 $A_r = A_z = 0, A_\theta = A_\theta(r, z)$  であることを考慮すると、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + qr\dot{\theta}A_\theta - q\phi \quad (3.1.9)$$

となる。電子銃部／コレクター部では、磁場に特異点は存在しないから、

式 (3.1.7) より正準角運動量の保存が成り立ち、

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} + q r A_\theta = \text{const.} \quad (3.1.10)$$

であり、 $\theta$  座標は周期的 (cyclic) である。ラウス関数、

$$R = L - \dot{Q}^{(c)} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^{(c)}} \quad (3.1.11)$$

を用いれば、周期的な座標および非周期的な座標に関してはそれぞれ以下の関係が成り立つ。

$$\frac{d P^{(c)}}{d t} = - \frac{\partial R}{\partial Q^{(c)}} = 0 \quad (3.1.12)$$

$$\frac{d Q^{(c)}}{d t} = \frac{\partial R}{\partial P^{(c)}} \quad (3.1.13)$$

$$\frac{d}{d t} \frac{\partial R}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial R}{\partial Q_i} \quad (3.1.14)$$

(3.1.11) 式は、(3.1.9), (3.1.10), (3.1.12) ~ (3.1.14) 式より、

$$R = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) - u \quad (3.1.15)$$

$$u = u^0 + q \phi \quad (3.1.16)$$

$$u^0 = \frac{1}{2m} \left( \frac{P_\theta}{r} - q A_\theta \right)^2 \quad (3.1.17)$$

となり、ラウス関数  $R$  は  $(r, z, \dot{r}, \dot{z})$  のみの関数となり、3 次元問題を 2 次元問題に帰着することができる。

この式と (3.1.12) 式の第 3 式より、粒子の運動方程式は、結局

$$m \ddot{r} = - \frac{\partial u}{\partial r} \quad (3.1.18)$$

$$m \ddot{z} = - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.1.19)$$

$$m \dot{\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{P_\theta}{r} - q A_\theta \right) \quad (3.1.20)$$

となる。ここで、 $P_\theta$  は初期条件  $\dot{\theta} (t=0)$  及び入射点における位置  $r$ ,  $A_\theta$  から (3.1.10) 式より求められる。

### 3.1.3 電子銃部の計算例

図2.2に示した動燃加速器の入射部について、上記の改良を行った K U A D コードを用いて行った計算例を図3.1(a)～(e)に示す。

計算条件は、

グリッド電圧	$V_{g1}=1.50\text{kV}$	$V_{g2}=20.0\text{kV}$	$V_{g3}=200\text{kV}$
電子ビーム電流	$I=100\text{ mA}$		

であり、外部の印加磁場 ( $B_z$ ) は一様な軸方向磁場として順に 0, 100, 200, 300, 400 Gauss を与えた。

計算結果によれば、磁場がない場合に発散していた電子ビームが軸方向磁場の印加により磁場に沿って進む様子、及び磁場強度によって半径方向の振幅が変化する様子が判る。また、これらの軌道計算より、出口部でのビームエミッタンス分布を容易に求めることができる。

## 3.2 クライストロン電子・電磁場相互作用部

クライストロンにおける電子ビームの運動を計算する際には、電子ビームと RF 空洞に立つ定在波との相互作用が重要になるので、電子の運動方程式と電磁界方程式を同時に解かなければならない。

すなわち、各時間ステップにおいて、電子ビームの電荷密度  $\rho$ 、電流密度  $J$  によって生じる電磁界  $E$ 、 $B$  を求め、さらにこれに RF 空洞内の作る電磁界および外部磁界を加えた電磁界  $E_b$ 、 $B_b$  のもとで電子の運動方程式を解き、次の時間ステップの  $\rho$ 、 $J$  を計算し、この繰り返し計算を周期定常解が得られるまで行うことになる。

クライストロン内の電磁界  $E$ 、 $B$  は、三つの要素に分けて考えることができる（付録B第1章参照）。

$$E = E_b + E_c \quad (3.2.1)$$

$$B = B_b + B_c + B_s \quad (3.2.2)$$

ここに、

$E_b$ 、 $B_b$ ：ビームの作る電磁界

$E_c$ 、 $B_c$ ：RF空洞の作る電磁界

$B_s$ ：外部収束磁場

で、 $E_b$ 、 $B_b$ はRF空洞が存在しない時にビームが作る電磁界であり、RF空洞のギャップを導体で閉じた円筒領域において、Maxwell方程式を解いて得られる。ここでは、ローレンツゲージのもとでのスカラおよびベクトルポテンシャルに関する偏微分方程式（軸対称形を仮定）、

$$\nabla^2 \phi_b - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2.3)$$

$$\nabla^2 A_{b,r} - \frac{A_{b,r}}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,r}}{\partial t^2} = -\mu_0 J_r \quad (3.2.4)$$

$$\nabla^2 A_{b,\theta} - \frac{A_{b,\theta}}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,\theta}}{\partial t^2} = -\mu_0 J_\theta \quad (3.2.5)$$

$$\nabla^2 A_{b,z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,z}}{\partial t^2} = -\mu_0 J_z \quad (3.2.6)$$

をFEMを用いて解き、

$$E_b = -\nabla \phi_b - \frac{\partial A_b}{\partial t} \quad (3.2.7)$$

$$B_b = \nabla \times A_b \quad (3.2.8)$$

で  $E_b$ 、 $B_b$  を計算する（付録B 第2章参照）。

RF空洞の作る電磁界  $E_c$ 、 $B_c$  については、RF空洞の固有モード  $E_n$ 、 $H_n$  を予め求めておいて、その振幅  $e_n$ 、 $h_n$  を各時間ステップで計算し、

$$E_c = \sum_n e_n E_n \quad (3.2.9)$$

$$B_c = \mu_0 H_c = \mu_0 \sum_n h_n H_n \quad (3.2.10)$$

より  $E_c$ 、 $B_c$  を求める。振幅  $e_n$ 、 $h_n$  は、図3.2に示すようなRF空洞の等価回路の電圧  $v$  および電流  $i$  に相当し、等価回路方程式を解いて  $v$  および  $i$  を求めることによって  $e_n$  および  $h_n$  が得られる。

等価回路の各量インダクタンス  $L$ 、キャパシタンス  $C$ 、コンダクタンス  $G$ 、結合係数  $\beta$  は、RF空洞の  $Q_1$ 、 $Q_0$ 、 $\omega_0$ 、 $R/Q$  の実測値を用いて次の式から求めることができる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.2.11)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (3.2.12)$$

$$Q_1 = \frac{\omega_0 C}{(1+\beta)G} \quad (3.2.13)$$

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (3.2.14)$$

また、RF電源の電力  $P_{in}$  は、 $\beta G$  と等しい負荷につないだときに負荷で消費される平均電力によって定義される。よって、

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta G} \left( \frac{I_g}{2} \right)^2 \quad (3.2.15)$$

したがってこの式から、 $P_{in}$  の測定値を用いて等価回路の  $i$  を求めること

ができる（付録B第3章参照）。

#### 4. 電子ビーム直接発電基礎実験の予備検討

##### 4.1.1 実験用定常クライストロンの性能調査・検討

表4.1に開発中の大電力クライストロン（東芝E3718）の特長と絶対最大定格を示す。

表4.1によれば、65%以上の目標効率で開発中の定常大出力クライストロンは、入力パワー1.87MW (= 85keV × 22A) のうち利用済みの電子ビームが有するエネルギーは0.65MWとなっている。これより、もし入力パワーのうち利用済み電子ビームの運動エネルギー以外の損失がなく、すべてRF出力になると仮定すれば、クライストロンの理論総合効率η<sub>v</sub>は

$$\eta_v = (1.87 - 0.65) / 1.87 = 0.65$$

となる。すなわち、目標として設定している効率65%はコレクターでの熱処理を行う構成での理論最大効率に相当し、以下に図4.1で示すさまざまな種類・部分での損失をほぼ理想的に零に近い値とした極めて完成度の高いクライストロンを目標としていることがわかる。

まず、クライストロンにおける各損失について検討する。図4.1はA.S. Gilmore<sup>(5)</sup>によるクライストロンを含む直線系電子ビーム管でのパワーフローの模式的な図で、記号はそれぞれ以下のとおりである。

P<sub>h</sub> = 陰極のヒーターパワー

P<sub>e</sub> = ガンからの電子ビームパワー

P<sub>int</sub> = ビーム衝突損失パワー

P<sub>cir</sub> = RF回路損失パワー（セラミック出力窓損失を含む）

P<sub>rf</sub> = 高調波、インター モードなどの励振損失パワー

P<sub>sol</sub> = ソレノイド磁場励磁パワー

P<sub>out</sub> = RF出力パワー

P<sub>sp</sub> = 利用済みビームパワー

$P_{heat}$  = コレクター発熱パワー

$P_{rec}$  = 回収電力パワー

このときエネルギー収支より、クライストロンの総合効率  $\eta_{ov}$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned}\eta_{ov} &= P_{out} / P_{in} \\ &= P_{out} / (P_{ot} - P_{rec})\end{aligned}\quad (4.1.1)$$

$$P_{in} = P_{ot} - P_{rec} = (P_o + P_h + P_{sol}) - P_{rec} \quad (4.1.2)$$

ここに、 $P_{ot}$  はクライストロンを動作させるに必要な全パワーである。

(4.1.1) 式より、総合効率は必要  $P_{ot}$  を小さくし、回収パワー  $P_{rec}$  を増加させることにより増加させることが可能となる。

また、コレクターにおける利用済み電子ビームパワー  $P_{sp}$  から電力エネルギーへの変換（回収）効率  $\eta_{sol}$  は次式で定義される。

$$\eta_{sol} = P_{rec} / P_{sp} \quad (4.1.3)$$

これより、回収パワー  $P_{rec}$  は次式で表される。

$$P_{rec} = \eta_{sol} (P_o - P_{int} - P_{cir} - P_{rf} - P_{out}) \quad (4.1.4)$$

ここで、電子ビームパワーの全高周波パワー ( $P_{out} + P_{rf}$ ) への変換効率（電子効率）  $\eta_e$ 、および発生高周波パワーのうち目的とする高周波の出力パワーへの割合を表す高周波回路効率  $\eta_{cir}$  を導入すれば、

$$P_{out} + P_{cir} = \eta_e P_o \quad (4.1.5)$$

$$P_{out} = \eta_{cir} (P_{out} + P_{cir}) = \eta_{cir} \eta_e P_o \quad (4.1.6)$$

と表される。一般に、 $\eta_e$  は数 % から 50% を越す範囲まで広がっているが、一方  $\eta_{cir}$  は通常 (75~90) % の範囲にある。

これらの効率を用いれば結局 (4.1.1) 式の総合効率  $\eta_{ov}$  は次のようにも表される。

$$\eta_{\text{ov}} = \eta_{\text{cir}} \eta_e / [P_{\text{tot}}/P_0 - \eta_{\text{cir}} \{1 - \eta_e - (P_{\text{int}} + P_{\text{rf}})/P_0\}] \quad (4.1.7)$$

図4.2に総合効率の電子効率 $\eta_e$ に対する依存を、それぞれのパラメータに對して示す。

現在開発中のクライストロン(E3718)における代表的数値(CW)(表4.2)より各効率は以下のように評価できる。

$$\eta_e = 64.2\%, \quad \eta_{\text{cir}} = 98.9\%$$

これより、総合効率 $\eta_{\text{ov}}$ の回収効率 $\eta_{\text{cir}}$ への依存は図4.3のようになる。すなわち、コレクターでの回収効率100%の時の理論最大総合効率は98.6%となり、また総合効率80%以上を達成するには、回収効率を60%以上にする必要がある。

#### 4.1.2 コレクター部形状

予備検討に用いる形状としては、大出力CWクライストロン管E3718の構造概略図をもとに、現在用いられているコレクターとほぼ同一の大きさとすることを基本として、図4.4のような半径13cm、長さ68.5cmの円筒形コレクターを例として選択した。

電子銃部から引き出されるときのビームエネルギーが60 keVであることから、マイクロ波との相互作用後のビームのエネルギーは60±35 keV程度あると推定され<sup>(6)</sup>、20kV刻みの5段のコレクターを配置した。また、電極の角度としては、従来のビーム直接発電機での計算<sup>(8)</sup>を参考に45度とした。

60 keVの単色電子ビームを入射した場合と60±35 keVのトップハット型エネルギー広がりのある電子ビームを入射した場合の計算結果をそれぞれ図4.5、図4.6に示す。なお、電子ビームの電流値は10Aであり、ビーム入射時の中心軸に対する角度として1度とした。これは、中心軸上では電場が軸に平行であるため、入射角度をつけない場合には高負電位により

反射されたビームがまっすぐクライストロン空洞に戻ることを避けるためである。実際のエネルギー回収器においては、磁場及び3次元的電極配置などを用いて軸上のビームを半径方向に曲げることが必要である。

単色ビームを入射した場合（図4.5）では、ビームが空間電荷により大きく広がるために外側のビームが電極の前面から衝突している。これは、衝突時に発生する2次電子が電場により加速されパワー損失をもたらすので望ましくない。

また、電場に反射されてクライストロン空洞に戻るいわゆるbackstream電流は約 140mAと大きなものとなっている。これは電極前面ではコレクター部入り口に対して凸面となっている等電位面が、電極直下から後方では凹面となっていることから、この部分で反射されるビームが中心軸に向かう収束力を受けているためと考えられる。

このことを確かめるために電極電圧より僅かに低い55 keVの単色ビームについての計算を行った。電流値は空間電荷効果を減少させるために5 Aに減らしている。図4.7に示すようにクライストロン空洞へ反射される電子はなくなっている、ほとんどの電子は電極後方より回収電極に入射している。この結果、2次電子による損失を含まないエネルギー回収効率は、43%から71%に大幅に向上している。

実際の場合には電極電圧に等しいエネルギーを持つビームは少なく、また電極電圧の設定により少なくできると考えられるが、等電位面がコレクター入口部に対して常に凸面となるように電極形状を工夫する必要があることが判明した。

さらに、計算結果では一部のビームが電極間の隙間を通過して外側に向かっている。この部分には電極を保持する絶縁体があるので電子ビームの侵入が抑制されるように形状を工夫する必要がある。

次にエネルギー広がりを持つビームに対する計算（図4.6）では、ビームがエネルギーにより分類されて各回収電極に回収されるようすが示されている。単一エネルギーの場合と同様な問題があることもわかる。全体と

しては、高エネルギーのビームが十分に広がっているのに対し、低エネルギーの電子ビームの広がり方が不十分である。そのため、2次電子を考慮しない段階での回収効率は47%であり、今後さらに最適化を図り効率を高める必要がある。

#### 4.1.3 2次電子放出抑制方式

コレクター電極からの電子の衝突により放出される2次電子が、コレクター部の電場により加速されるとエネルギー損失となる。そのため、2次電子の抑制は高効率エネルギー回収には不可欠である。京都大学で行つてきただ直接発電機の実験・シミュレーションでは、低電位の電極にその電極電位より僅かに電位の低いメッシュ状格子を取り付けることにより、実効的2次電子放出量の低減を行いエネルギー回収効率の大幅な改善に成功している<sup>(7)</sup>。

今回のクライストロン管における電子ビーム回収部設計での2次電子抑制方法の基本としては、電子ビームを高負電位により反射させ高負電位側より電極に回収することにより、放出された2次電子が電界により電極に押し戻される形を採用した。その上で問題のある部分についてはビーム直接発電機同様の2次電子抑制策を取るのが最適であると考えられる。

#### 4.1.4 最適コレクター電位設定方式 (付録C, D参照)

電荷 $Ze$ 、エネルギー $E$ 、電流 $I$ の入射ビームにおけるエネルギー分布関数 $f(E) = dI/dE$ が与えられたとき、全てのビーム粒子がそのエネルギーに最も近くかつ低い電位にある電極に回収されるとすると、N段の回収電極による回収エネルギー $P$ は次式で与えられる。

$$P = \sum_{m=1}^N V_m \int_{V_m}^{V_{m+1}} f(E^*) dE^*, \quad E^* = E / (Ze) \quad (4.1.7)$$

$$V_1 = E_{min}, \quad V_{N+1} = \infty \quad (4.1.8)$$

これより、Pを最大とする電極電圧  $V_k$  ( $k=1,2,\dots,N$ )、すなわち最適コレクター電位は

$$\partial P / \partial V_k = 0, \quad k=1,2,\dots,N \quad (4.1.9)$$

からなる方程式より求まる。

(4.1.7)～(4.1.9)式を用いた場合、エネルギー回収効率は回収電極の数を増やし回収電圧を最適化することで改善することができる。しかし、回収電極数を増加させるとコレクター部が複雑となるほか、電極電圧の設定・回収電流の循環などに必要な外部回路が増加するため、外部回路のコスト等を含めて最適化を行う必要がある。

一例として、本コレクターと類似の構造を持つD-<sup>3</sup>He FRC核融合炉用のベネチアンブラインド型プラズマ直接発電機の設計において、回収電極段数の回収効率・プラズマ直接発電機長さへの効果を図4.8に示す。

この例の場合、回収電極段数を5段以上にしても回収効率の改善はたかだか1%程度であるためプラズマ直接発電機長／外部回路の増加も考慮して5段の回収電極を選択している。今回のクライストロン管のエネルギー回収部の設計においても同様の評価・選択を行うことが不可欠である

## 5. 考察

現在オメガ計画用に開発中のクライストロン (E3718) を高性能化するためには、コレクター回収効率を 60% 以上にすれば、現在の目標値である高周波エネルギーへの総合変換効率 65% を 80% 以上にも改善することが可能である。さらに回収効率を上昇できれば、究極的にはコレクターでの回収効率が 100% の時、高周波エネルギーへの理論最大変換効率は 98.6% となり、消滅処理システムは実用化へ大きく進展することができる。

これを実現するためには、精度の高い電子ビーム機器設計研究用計算コードが不可欠となる。電子ビームのエネルギー回収効率は、コレクタ一部への入射電子の速度（エネルギー・空間）に強く依存するため、これらの分布を精度良く求めることが必要となる。とくにマイクロ波との相互作用後の電子ビームの場合、電子ビームのエネルギーに広がりができると同時に、速度成分についても複雑な分布を示すと考えられるので、単純な分布関数により与えることは困難である。

このため、電子とマイクロ波の相互作用部を含むクライストロン全体のシミュレーションコードの開発は本研究目的には必須となる。

シミュレーションにおいては、計算領域をマイクロ波と電子ビーム間の相互作用の有無により、(a) 電子銃部、(b) クライストロン電子・電磁場相互作用部、および (c) コレクタ一部、に分割することが現実的で、かつ可能である。実際、(b) のクライストロン電子・電磁場相互作用部では、マイクロ波が存在するため電磁場の時間変化を考慮する必要があるが、(a), (c) では基本的に定常（あるいは周期的定常）問題として扱うことができるので、電子ビームの特性評価に関する物理モデル、計算コードについても容易になる。

電子銃部やコレクタ一部用のコードでは、電場計算に 2 次元有限要素法 (Finite Element Method : FEM) による三角要素を用いることで電極形状のより細かい入力（半自動分割）が可能となり、また比較的高いビーム

バーピアンスのビームや、複雑形状の場合でも安定した計算を行うことが可能である。

さらに、追加する項目は若干あるものの、FEMを用いているのでEgunkコードに付随する空間等分割などの制約はない。これは大きな長所であり、3次元への拡張性はきわめて大きいといえる。

上記コードを用いたコレクター部における電子ビームのエネルギー回収予備計算によれば、単色エネルギーの場合70%程度の回収効率が可能で、今後さらに形状、電位設定などの最適化により、実際的な電子ビームに対しても相当高い回収効率の実現が期待できる。

ただ、実際のエネルギー広がりを持つ電子ビームの場合、高負電位により反射されたビームがまっすぐクライストロン空洞に戻ることを避けるため、等電位面がコレクター入口部に対して常に凸面となるように電極形状を工夫する必要がある。さらに、計算結果では一部のビームが電極間の隙間を通過して外側に向かっているが、この部分には電極を保持する絶縁体があるので電子ビームの侵入が抑制されるよう回収電極形状を工夫する必要がある。

## 6. あとがき

本共同研究で行った「大出力クライストロンの高効率化」に関して、最初クライストロン管設計用シミュレーションコードを利用してコレクター入口における電子ビームの初期条件を求め、専らコレクターの最適化を行おうと試みた。そのため、既存コードの精度や、開放性を詳細に調査・検討したが、その結果、独自に開発する必要性のあることが明らかになった。

さらに、動燃においてはクライストロン管の大幅な性能改善が将来要請されるため、既存のコード取り扱い範囲を越える3次元コードへの拡張容易性を具備したコード開発を行う必要性がある。

これらの目的を達成するため、従来のコードではその実現が困難であった空間分割容易性、高精度性を備えた有限要素法を全般的に採用することとした。さらに、各コードの汎用性を増すため可能な限り物理モデルに忠実なシミュレーションコードの作成、改良を心がけた。

差分法を用いたE gunコードは長年にわたり電子ビーム管における電子錠部の設計で貢献されている。しかし、空間的等間隔分割制約のため複雑形状の電子錠設計には不向きで、本研究では京都大学が開発した有限要素法によるKUADコードの改良でこれを解決した。

電子エネルギーの回収効率に大きな影響を及ぼすクライストロン管における電子ビームと高周波電磁場との相互作用は、本研究では現在最も進んだ差分法によるFCIコードを参考に、より自由度・3次元発展性の高い有限要素法コード開発のための高精度な計算モデル・計算アルゴリズムを完成させた。とくに、計算機能力などを考慮しながら可能な限り物理モデルを忠実に反映させるように努めた。

電子ビーム直接発電基礎実験に関して、電子ビーム直接変換器の予備的設計を行い、70%にも達する高い電気エネルギー回収が可能であることを確かめた。今後さらなる最適化が必要であるが、本技術が「加速器による消滅処理システム」において重要な役割を担うことが強く期待される。

今後の課題として、以上の個別コードを改良し、クライストロン管内における全体的な電子ビーム動特性が求められる総合化されたコード開発があげられよう。

## 7. 謝辞

本報告書のアルゴリズムについて検討して頂いた原子力システムの加藤裕子さんに感謝します。Egunコードのデータの提供及び電子軌道解析の評価検討に協力して頂いた先進技術開発室の山崎良雄氏に感謝します。

引用文献

- [1] W.B. Herrmansfelt, ELECTRON TRAJECTORY PROGRAM: Stanford Linear Accelerator Center, Nov.(1979)
- [2] Y. Yamamoto, K. Yoshikawa, Y. Hattori, DEVELOPMENT OF A TWO-DIMENSIONAL SIMULATION CODE (KUAD) INCLUDING ATOMIC PROCESSES FOR BEAM DIRECT ENERGY CONVERSION: Proc. of 12th Symposium on Fusion Engineering, IEEE, pp.1222-1226(1987)
- [3] G.T. Conrad et al., DEVELOPMENT OF A 150 MW S-BAND KLYSTRON, Progress Report, No.12, pp.21-26(1985)
- [4] T. Shintake, HIGH-POWER KLYSTRON SIMULATIONS USING FCI-FIELD CHARGE INTERACTION CODE: KEK Report(1990)
- [5] A.S. Gilmore, Jr.,, Micro Tubes: Artech House(1986)
- [6] E.W. McCune, A UHF-TV KLYSTRON USING MULTISTAGE DEPRESSED COLLECTOR TECHNOLOGY: Proc. of 1986 IEEE Electron Device Meeting(IEDM), 7.5, 1987
- [7] K. Yoshikawa, Y. Yamamoto, H. Toku, A. Kobayashi, T. Okazaki, DIRECT ENERGY RECOVERY FROM HELIUM ION BEAMS BY A BEAM DIRECT ENERGY CONVERTER WITH SECONDARY ELECTRON SUPPRESSORS: Fusion Technology, vol.15, pp.1541-1559(1989)

表 4. 1 大出力クライストロン管 (E 3718) の特徴と絶対定格

## 特 徵

- ・ L バンドの C W クライストロンは未開発
  - 効率 65% 以上
  - 出力 1 M W 以上 (1. 2 M W)
- ・ R F 取り出し効率の改善 → 出力空洞形状改善
  - 大出力 R F 窓の開発
- ・ パルス 運転可能
  - 高電界発生による高エネルギー時 加速特性

## 定 格 (C W モード)

・ 周波数	1 2 4 9	M H z
・ ヒータ電圧	1 2	V
・ ヒータ・サージ電流	2 4	A
・ ピーム電圧	8 5	k V
・ カソード (C W) 電流	2 2	A
・ 最大コレクタ損失	8 0 0	k W
・ 負荷 S W R	1. 5	
・ 出力窓セラミックス温度上昇	6 0	° C
・ 冷却水流量		
ボディ部	1 0 0	l / m i n
出力窓、出力導波管部	6	l / m i n
コレクタ部 (800 k W 負荷時)	3 0	l / m i n

表 4. 2 E 3 7 1 8 (CW モード) 特性

$P_h$  = ~ 250 W

$P_o$  = 1.87 MW

$P_{int}$  = ~ 170 W

$P_{cir}$  = ~ 14 kW

(この内セラミックス出力窓損失パワー = 2 kW)

$P_{rf}$  < 1 kW

$P_{out}$  = 1.20 MW

$P_{sp}$  = 780 kW

$P_{rec}$  = 0 kW

\* 励磁入力パワー = ~ 12 W

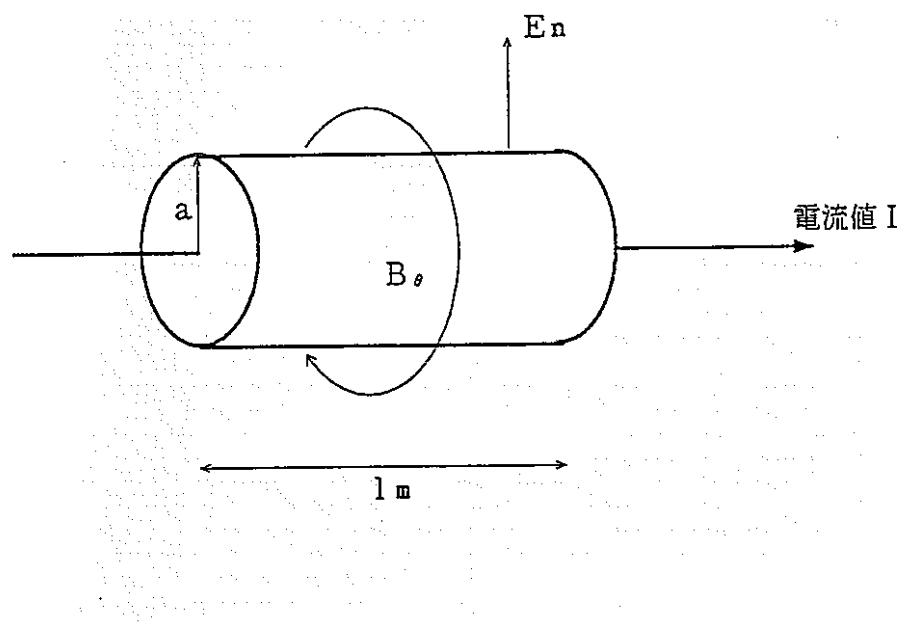


図2.1 円筒状電子ビームによる発生電磁場

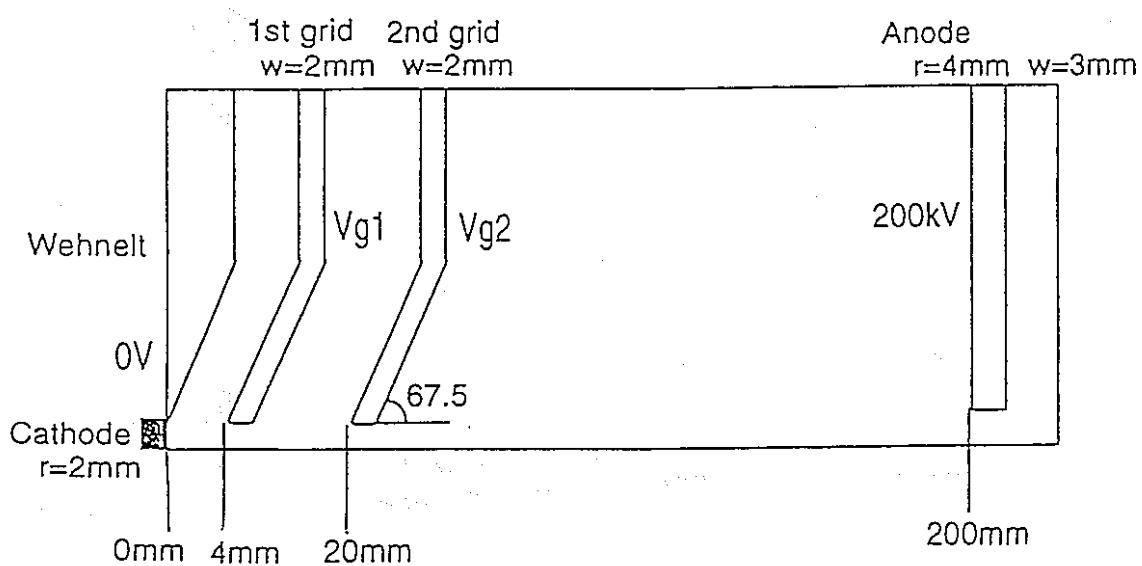


図2.2 動燃電子銃断面図

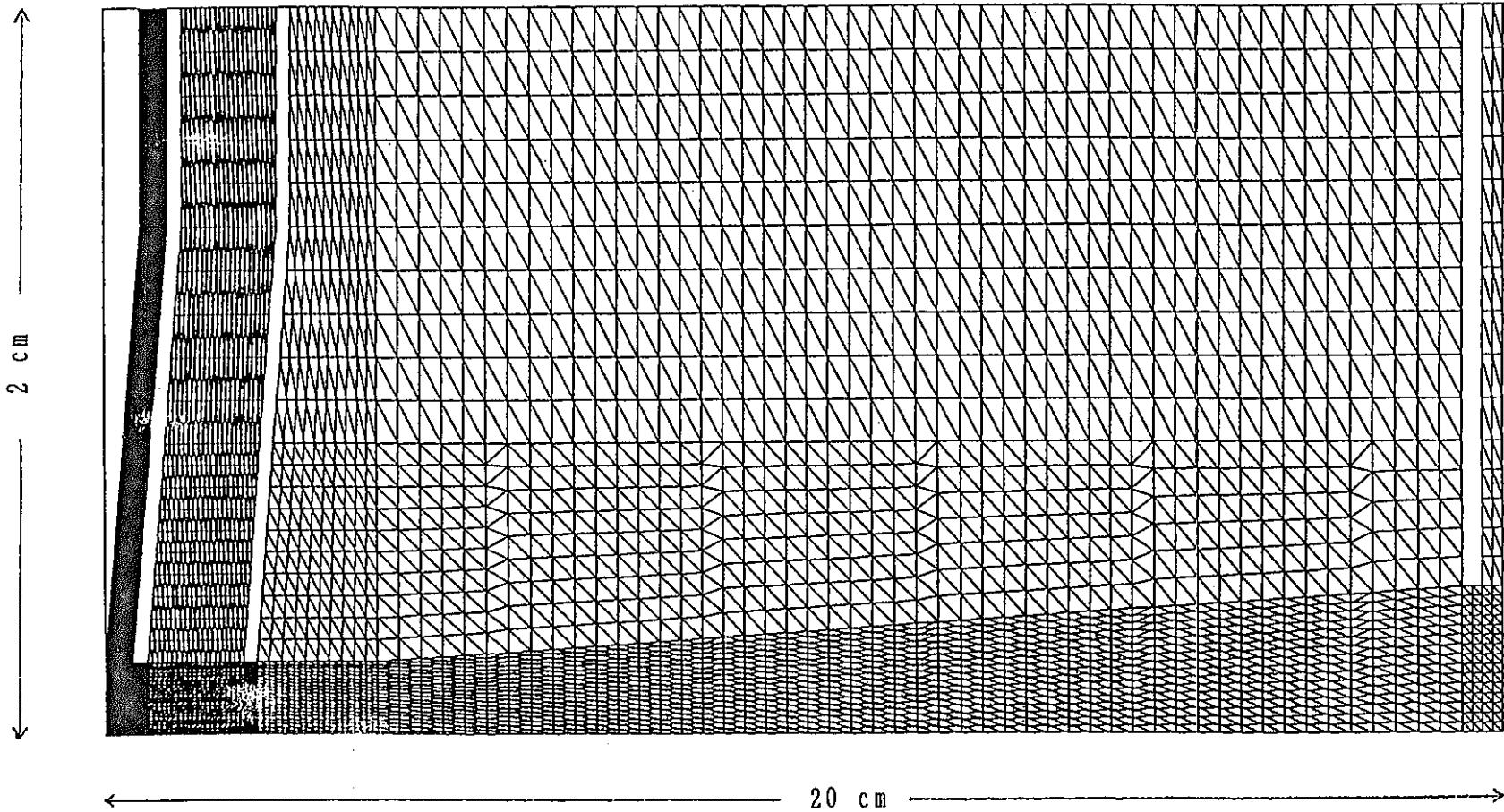


図2.3 動燃電子統領域空間要素分割例

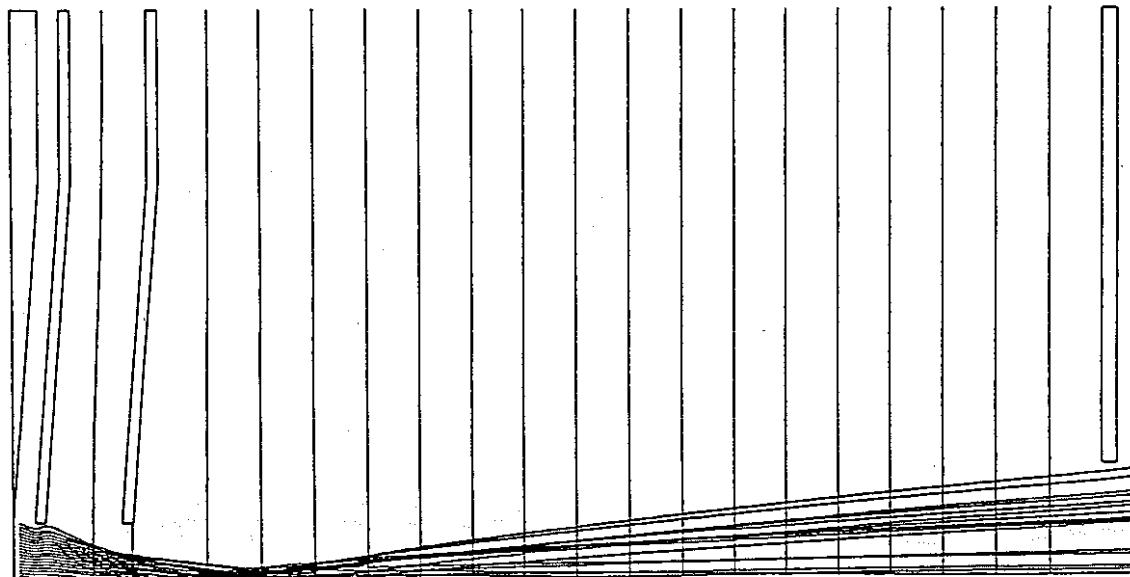


図3.1(a) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=0$ )

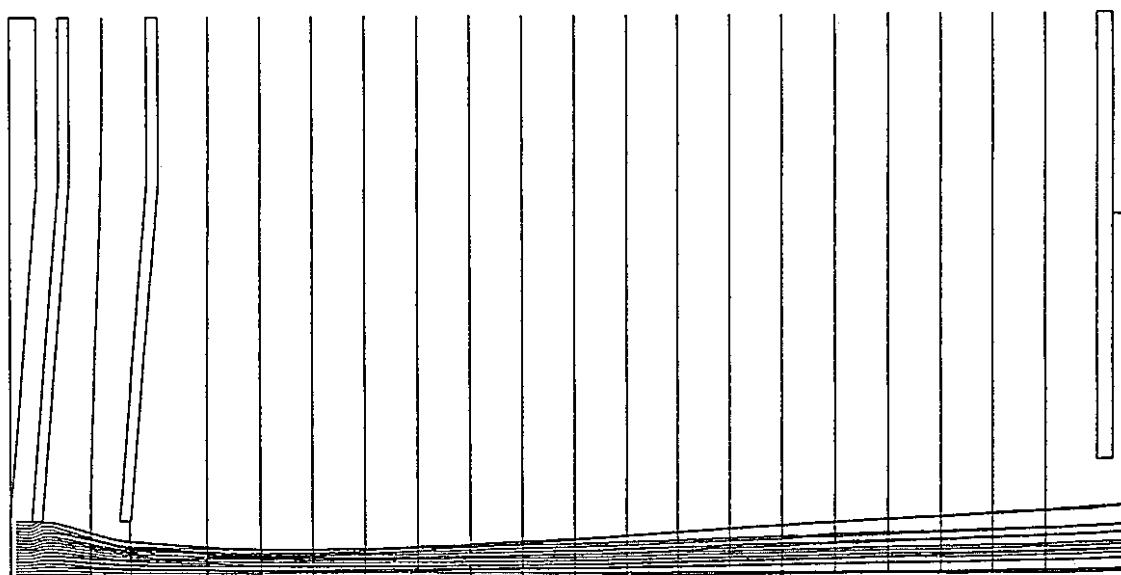


図3.1(b) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=100$  Gauss)

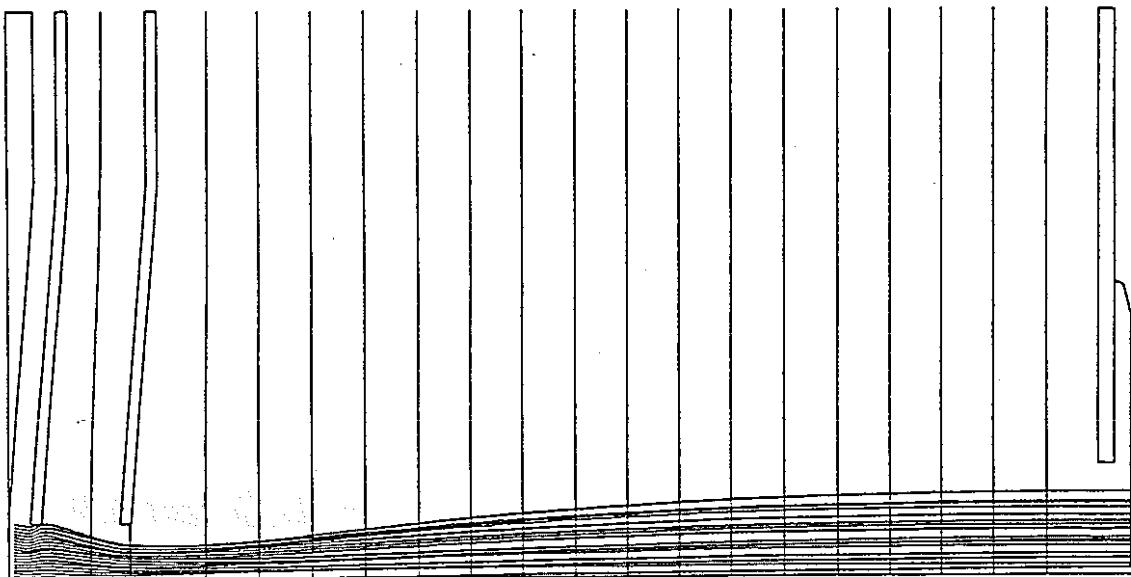


図3.1(c) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=200\text{Gauss}$ )

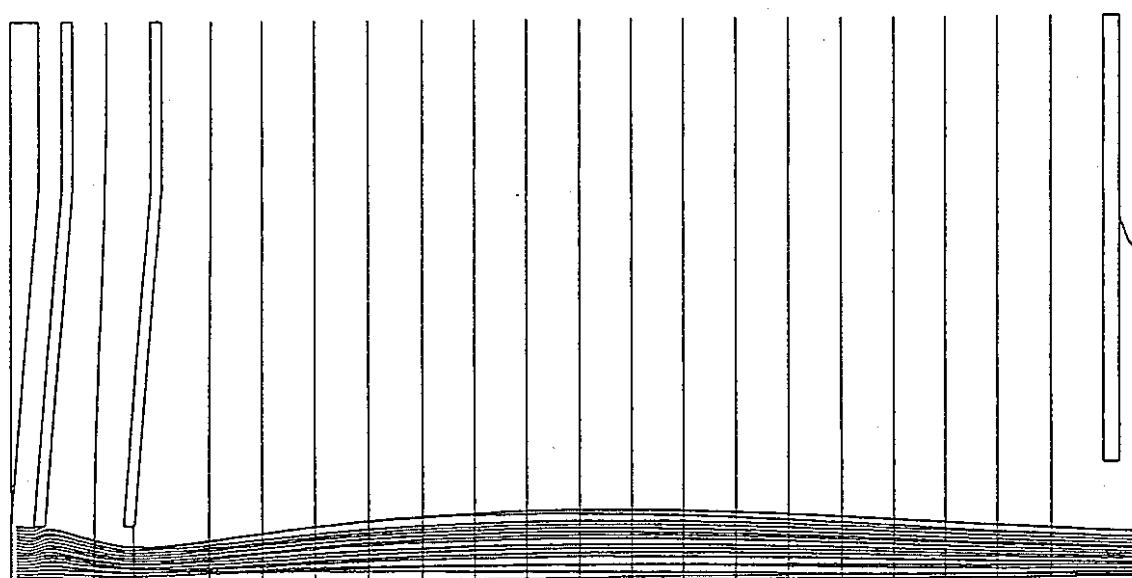


図3.1(d) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z=300\text{Gauss}$ )

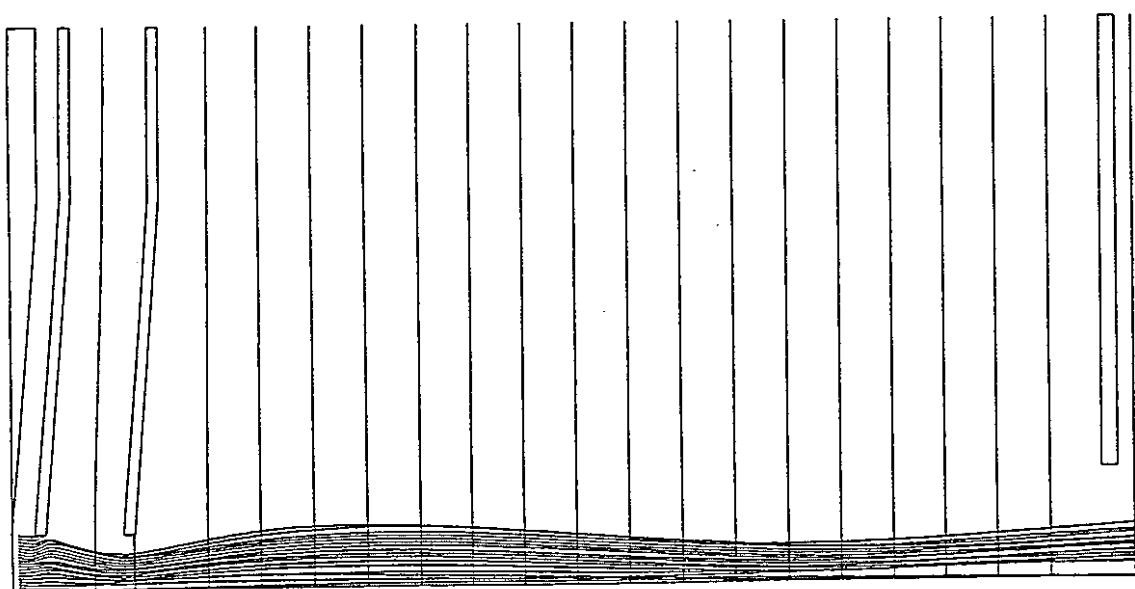


図3.1(e) 動燃電子銃部での電子軌道 ( $B_z = 400\text{Gauss}$ )

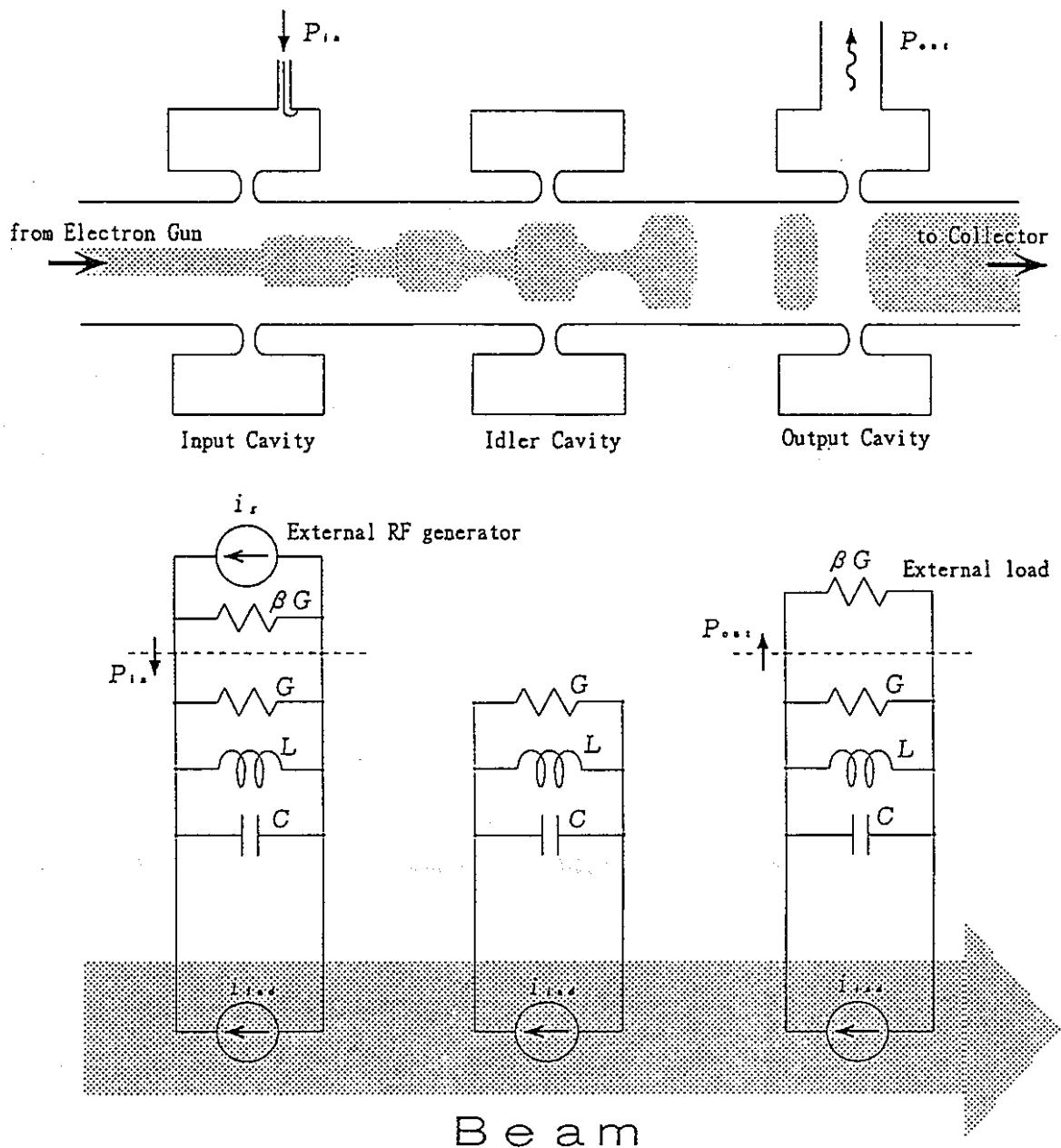
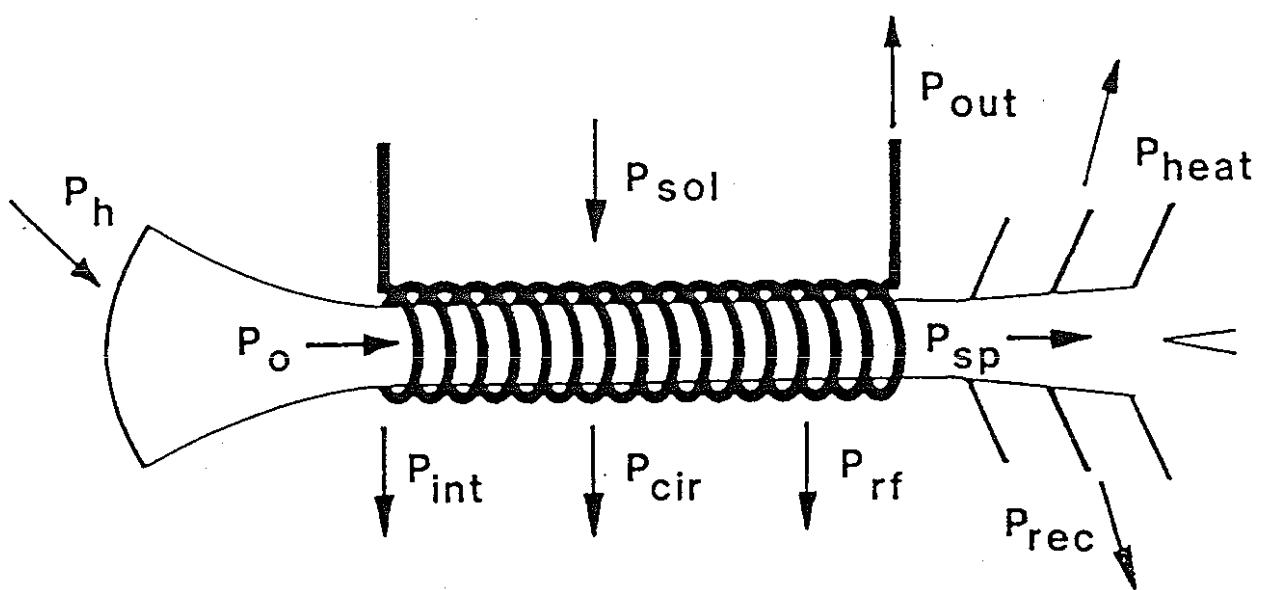


図3.2 RF空洞の等価回路



$P_h$  = heater power

$P_o$  = beam power from gun

$P_{int}$  = interception loss

$P_{cir}$  = circuit losses

$P_{rf}$  = harm's, intermod, etc.

$P_{sol}$  = solenoid power

$P_{out}$  = rf output

$P_{sp}$  = power in spent beam

$P_{heat}$  = heat in coll.

$P_{rec}$  = power rec. by coll.

図4.1 直線状電子ビーム管におけるパワーフロー (A.S. Gilmore<sup>(5)</sup>)

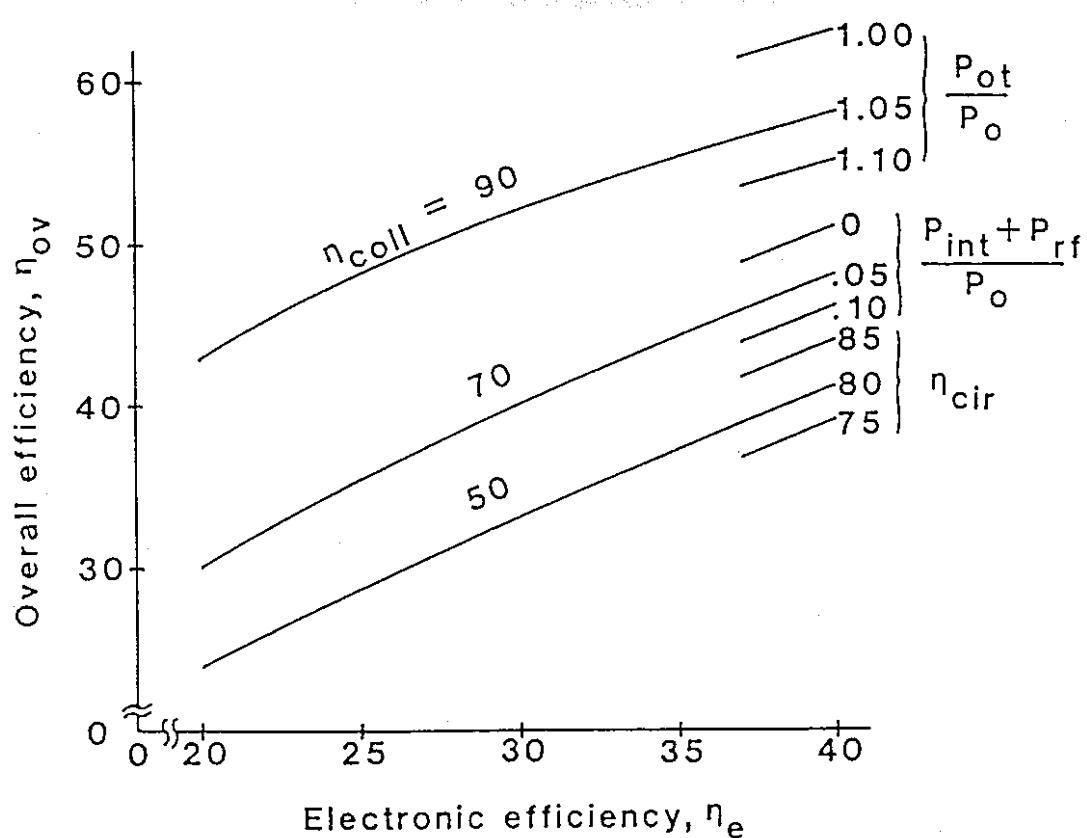


図4.2 総合効率の電子効率依存

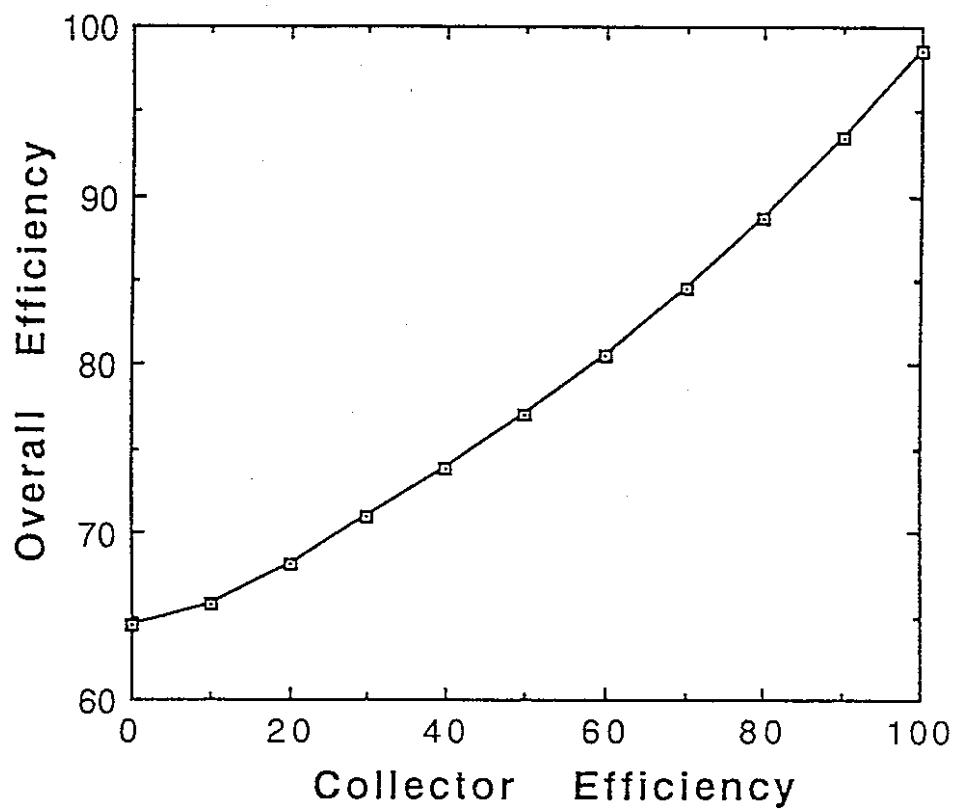


図4.3 E 3 7 1 8 管総合効率のコレクター回収効率依存

-42-

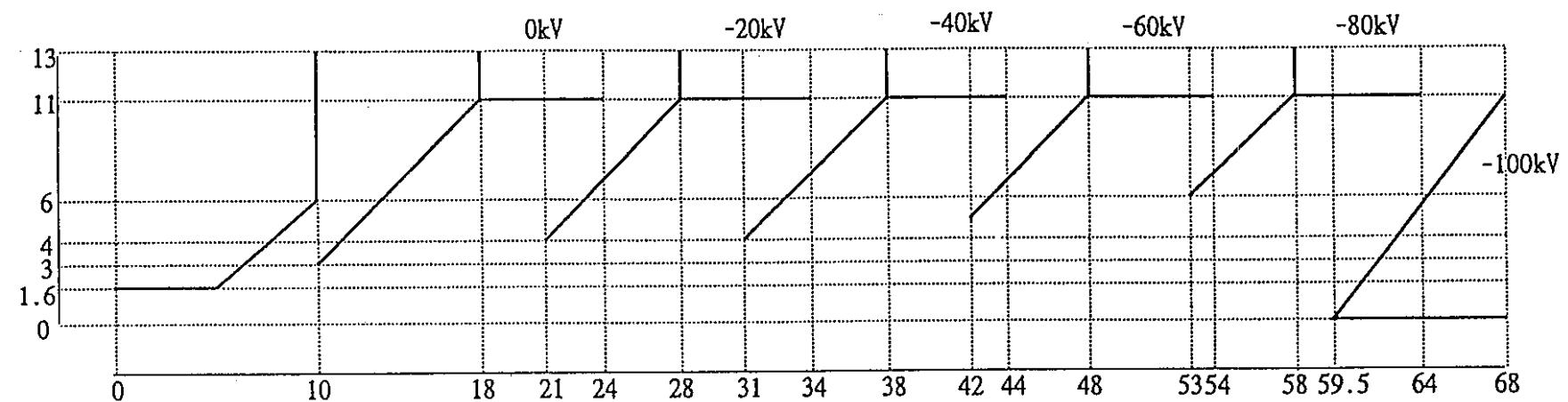


図4.4 E3718管用コレクター形状の一例

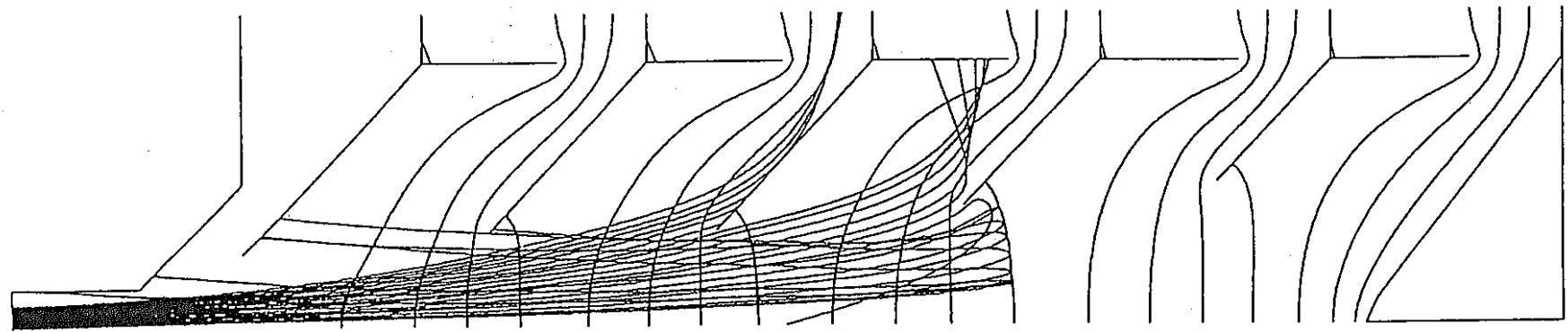


図4.5 コレクター内の単色エネルギー(60keV)電子軌道

- 44 -

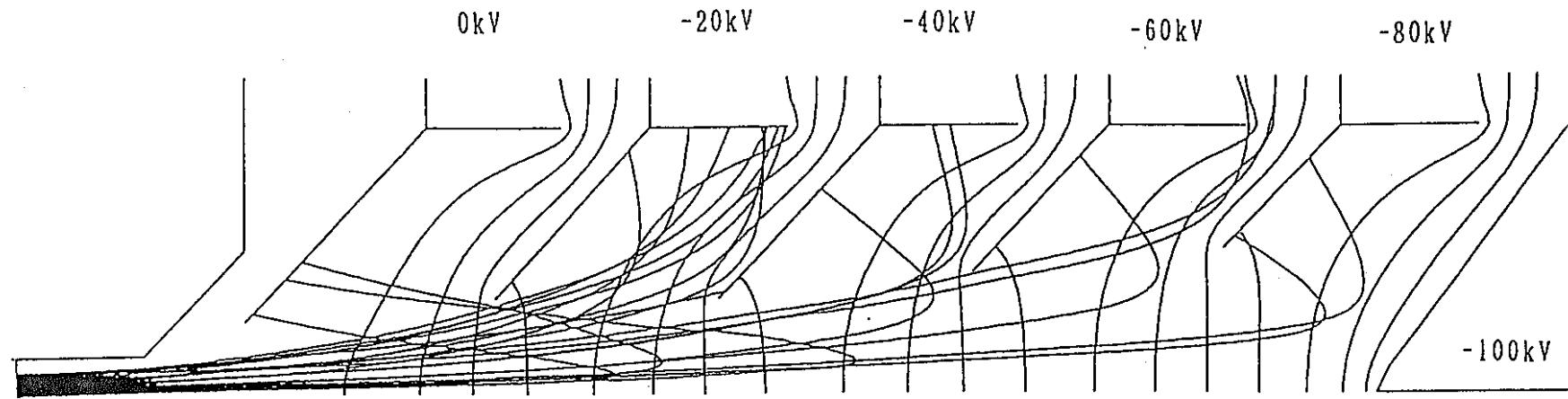


図4.6 コレクター内のトップハット分布エネルギー ( $60 \pm 35\text{keV}$ ) 電子軌道

- 45 -

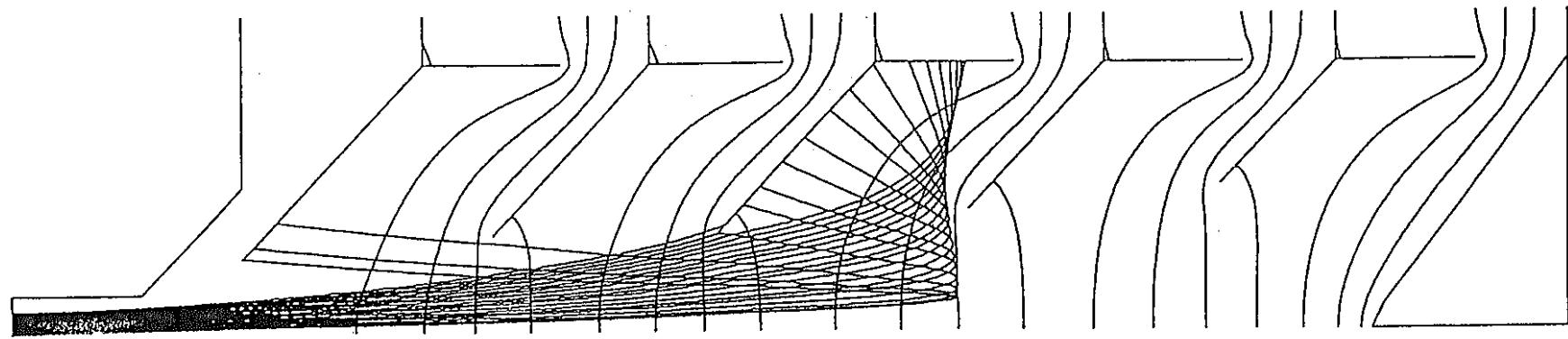


図4.7 コレクター内の単色エネルギー(55keV)電子軌道

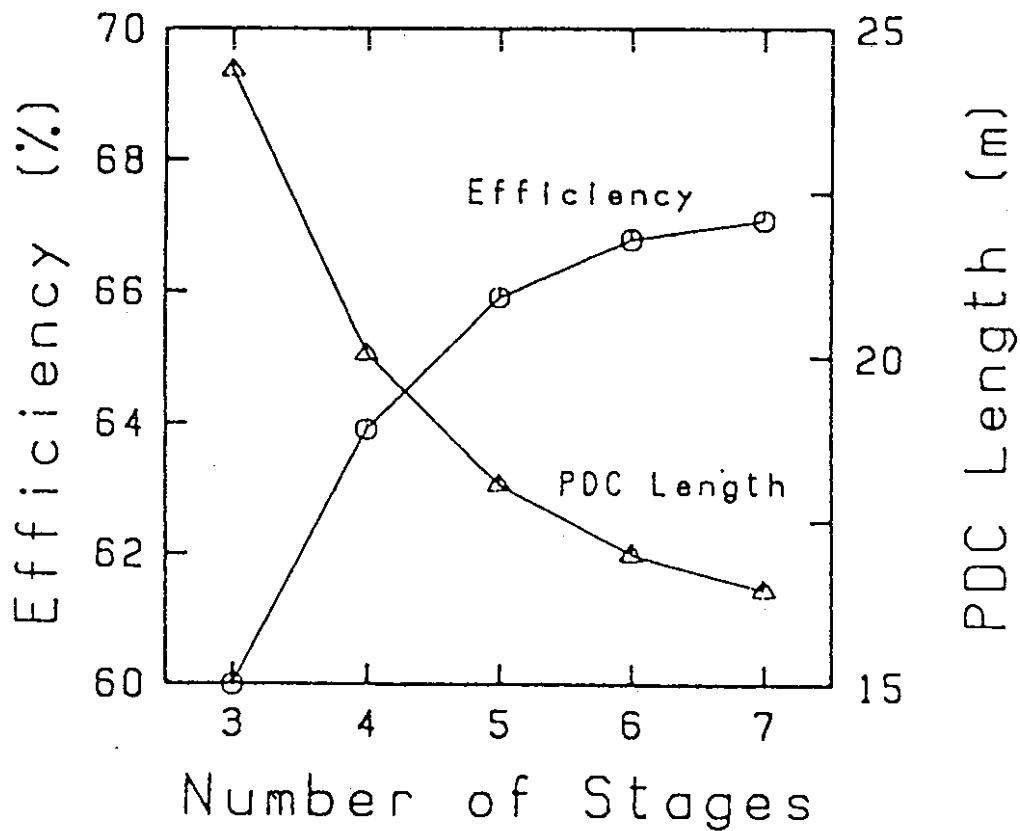


図4.8 D-<sup>3</sup>HeFRC核融合炉用ベネチアンブラインド型プラズマ直接変換器におけるコレクタ一段数右の回収効率、回収器長さへの効果

## 付録 A

## DEVELOPMENT OF A TWO-DIMENSIONAL SIMULATION CODE (KUAD) INCLUDING ATOMIC PROCESSES FOR BEAM DIRECT ENERGY CONVERSION

Yasushi Yamamoto, Kiyoshi Yoshikawa, and Yoshiro Hattori\*  
 Institute of Atomic Energy, Kyoto University  
 Uji, Kyoto 611, Japan

Abstract

A two-dimensional simulation code for the beam direct energy conversion called KUAD (Kyoto University Advanced DART) including various loss mechanisms has been developed, and shown excellent agreement with our experiments using  $\text{He}^+$  beams. The beam direct energy converter (BDC) is the device to recover the kinetic energy of unneutralized ions in the neutral beam injection (NBI) system directly into electricity. The BDC is very important and essential not only to the improvements of NBI system efficiency, but also to the relaxation of high heat flux problems on the beam dump with increase of injection energies. So far no simulation code could have successfully predicted BDC experimental results. The KUAD code applies, an optimized algorithm for vector processing, the finite element method (FEM) for potential calculation, and a semi-automatic method for spatial segmentations. Since particle trajectories in the KUAD code are analytically solved, very high speed tracings of the particle could be achieved by introducing an adjacent element matrix to identify the neighboring triangle elements and electrodes. Ion space charges are also analytically calculated by the Cloud in Cell (CIC) method, as well as electron space charges. Power losses due to atomic processes can be also evaluated in the KUAD code.

Introduction

With increase of beam energies and power in the NBI, efficient disposal of unneutralized particles becomes important to increase the system efficiency, to reduce heat fluxes, fusion reactions on the beam dump, and damages of beam dump materials due to bombardment of energetic particles. For solving these problems, beam direct energy converters of various types have been proposed so far<sup>1,2,3</sup>.

The BDC we treat here was proposed by LLNL<sup>1</sup> which uses negative high potentials for prevention of electrons from flowing out of the neutralizer cell, and the scheme of ion beam blowup by its own space charges for separation from neutral beams (Fig.1). The BDC of this type has advantages of compactness aligned in line with the beam axis, no magnet required, and simple structures.

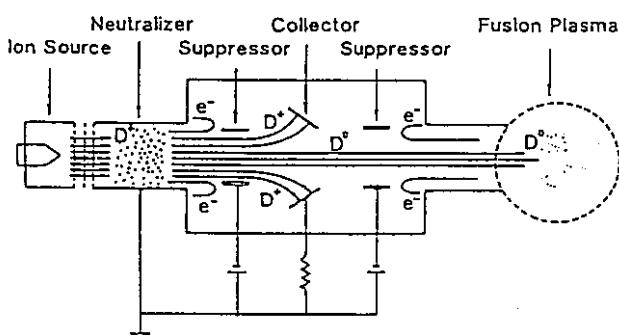


Fig.1 Schematic view of the LLNL-type beam direct energy converter

\* deceased

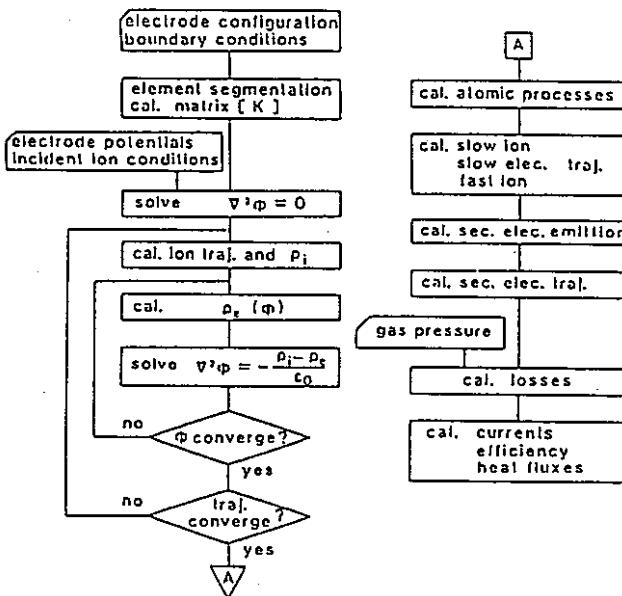


Fig.2 Flow chart of the KUAD code

To make the optimum design of a BDC, computer-aided studies are inevitable as well as experiments. Verification of the simulation code by comparing with experiments is also essential for these studies. So far parametric design studies were made<sup>1,4,5</sup> and losses due to atomic processes were estimated analytically<sup>1,5</sup> and by numerical simulations<sup>6</sup>. However there has been no successful BDC simulations which could predict experiment results quite well.

To analyze experimental results, we have developed the KUAD code, which can evaluate also losses due to various mechanisms, and comparisons are made with the experimental results using 15.6 kV, 100 mA  $\text{He}^+$  beams<sup>7</sup>.

Calculation Methods

The motion of beam ions and the self-consistent potential are described by the equation of motion and Poisson equation,

$$M \frac{d^2r}{dt^2} = -q \nabla \phi \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi = -\rho / \epsilon_0 \quad (2)$$

$$\rho = Z n_i - n_{e0} \exp\{-e(\phi - \phi_0)/kT_e\} \quad (3)$$

where  $M$ ,  $q$ ,  $\phi$ ,  $\rho$ , and  $\epsilon_0$  are the mass of charged particles, the electronic charge, the potential, the charge density, and the permittivity of vacuum, respectively, and  $k$ ,  $T_e$ ,  $n_i$ ,  $n_{e0}$ ,  $\phi_0$  are Boltzmann's constant, the electron temperature, the number density of incident ions, of electrons at the reference potential  $\phi_0$  where charge neutrality is assumed, and the reference potential, respectively. Also parameters are assumed uniform in the azimuthal direction.

The KUAD code can treat BDC's in either slab or axisymmetrical geometries. We have applied the FEM for solving Poisson equation, and analytical expressions

for particle trajectories within the FEM elements. The KUAD code also treats losses due to atomic processes, and in the space charge calculations, those slow particles produced are treated as perturbation and are not taken into account in potential calculations.

The following schemes are adopted in the calculations (see Fig.2);

- [1] apply the finite element method for spatial segmentation.
- [2] calculate vacuum potential distributions,
- [3] calculate ion beam trajectories analytically in the fields, and ion space charges,
- [4] calculate space charges of electrons with Boltzmann distributions assumed, and solve Poisson equation of Eq.(2) until the potential converges.
- [5] judge the consistency of the potential distributions with particle trajectories, otherwise return to [3]
- [6] calculate a number of slow charged particles generated through atomic processes, and their trajectories,
- [7] calculate secondary electron emissions from electrodes or walls by ion bombardments, and their trajectories.
- [8] evaluate recovery efficiencies as a function of gas pressures including various atomic processes.
- [9] calculate heat fluxes to each electrode, and X-ray emissions.

In the followings, details of calculation methods are described.

#### Calculation of Potential Distributions

In solving Poisson equation expressed by Eq.(2), the application of FEM to Eq.(2) reduces to the form expressed by

$$[K] [\Phi] = \{F\} \quad (4)$$

where  $\Phi$ ,  $K$  and  $F$  are, respectively, the potential vector of the element  $\phi_i$  at the node  $i$ , the matrix of the elements  $k_{ij}^e$  determined solely by spatial segmentation, and the vector of the element  $f_i^e$  determined by the space charges and boundary conditions. They are expressed, respectively, in terms of the cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$ , by

$$k_{ij}^e = \int_V \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) r dr d\theta dz \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_i^e &= \int_V (\rho/\epsilon_0) N_i r dr d\theta dz + \int_{S_e} (D_n/\epsilon_0) N_i dS \\ &= (q_{ion,i} + q_{ele,i})/\epsilon_0 + \int_{S_e} (D_n/\epsilon_0) N_i dS \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\rho$ ,  $q_{ion,i}$ ,  $q_{ele,i}$ ,  $D_n$ , and  $N_i$  are the local charge density at  $r$  ( $r, z$ ) in the element, the allocated ion, the electron space charges at the node  $i$ , the electric displacement normal to the boundary of the element of a volume  $V^e$ , and of a surface  $S^e$ , and the interpolation functions of potentials in the element, respectively.

Using the triangle linear element shown in Fig.3, the potential is expressed by

$$\begin{aligned} \Phi &= a r + b z + c \\ &= N_1 \phi_1 + N_m \phi_m + N_n \phi_n \end{aligned} \quad (7)$$

$$N_1(r, z) = [(r_m - r_n)z + (z_n - z_m) + (z_m r_n - z_n r_m)]/D \quad (8)$$

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & r_1 & 1 \\ z_m & r_m & 1 \\ z_n & r_n & 1 \end{vmatrix} \quad (9)$$

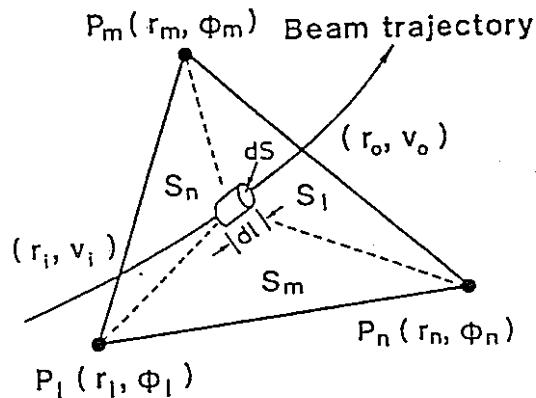


Fig.3 Particle trajectory in the triangle element

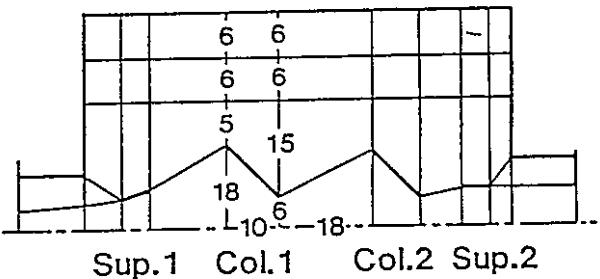


Fig.4 Schematic of semi-automatic segmentation of the LLNL-type BDC

With these notations, the matrix  $[K]$  becomes a large sparse matrix with only 8 non-zero values in the row at most. The ICCG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient) method has been adopted to solve Eq.(4).

For the segmentation of calculation areas to a number of triangle elements, we have developed a semi-automatic segmentation scheme inherent in a LLNL-type BDC, which is made by giving just basic line data and the number of divisions between the lines as shown in Fig.4. In each block the number of divisions in the radial( $r$ ) direction can be changed as  $2^{n-1}$ , where  $n$  is the number of divisions in the axial( $z$ ) direction. Although elements close to regular triangle are preferable from view points of computation errors, the variation of the division number in the  $z$  direction according to the variation of the division number in the  $r$  direction tends to increase the band width of matrix  $[K]$  to great extent, and thus the division number  $n$  is fixed in this version.

Using this scheme, the regions where parameter variations are large can be divided to a number of increased smaller elements, and also a variety of BDC configurations can be calculated easily.

#### Analytical Expression of Beam Trajectories

To shorten the computation time, particle trajectories are calculated analytically in the triangle elements of the FEM. Since the potential,  $\phi$ , is assumed to be a linear function of the space coordinates,  $r$  and  $z$ , and thus the electric fields are constant, trajectories and velocities of the particles can be immediately expressed analytically as a function of time,  $t$ , by

$$r = (-a/2M)t^2 + v_{rt}t + r_i \quad (10)$$

$$z = (-b/2M)t^2 + v_{zt}t + z_i \quad (11)$$

$$v_x = (-a/M)t + v_{xi} \quad (12)$$

$$v_z = (-b/M)t + v_{zi} \quad (13)$$

where  $P_i(r_i, z_i)$  and  $v_i(v_{xi}, v_{zi})$  are the entrance point, and the incident velocity of the particle in the element, respectively. With three equations specifying three sides of a triangle element together with the above equations, six solutions with respect to the residence time of a particle in the element are obtained, and among which the smallest positive solution  $t_r$  is the real residence time. With this residence time, the exit point  $P_o$  and the velocity at that point  $v_o$  can be immediately obtained from Eqs.(10)-(13).

For the identification of the next element which the particle enter, we have introduced an adjacent matrix  $R$  which traces in which element the particle exists, and also identifies particle's a bombardment at the electrodes and the walls. The  $R$  matrix is a two-dimensional matrix with elements of 3 by the total triangle element number. With introduction of the matrix  $R$ , together with analytical trajectory calculations, a drastic reduction of the computation time could be achieved.

#### Calculation of Space Charges

Ion Space Charges : The CIC method is applied to distribute space charges of the ions in the element to each node. Since ions carry specific values of the current given, and also trajectories ( $r_j, z_j$ ) and the residence time  $t_{rj}$  are analytically known in the element, the ion space charge,  $q_{ion,i}$ , at the nodal point  $P_i$  is analytically expressed as the summation of contributes from ions carrying specific currents of  $I_j$  in the adjacent elements including the common node  $P_i$  as

$$q_{ion,i} = \sum_j \int_0^{t_{rj}} I_j N_i(r_j, z_j) dt \quad (14)$$

Electron Space Charges : The electrons in the BDC are assumed to be in Boltzmann's distribution with a temperature of  $T_e$ . Since the BDC has potential minimum in the beam(z) direction created by negative-high electron suppressors, low energy electrons are trapped by the potential barriers, resulting in the existence of a number of electron groups having different number densities and temperatures. They are written by

$$n_e(\phi) = n_{e0} \exp[-e(\phi - \phi_0)/kT_e] \quad (15)$$

With Eq.(15),  $q_{ele,i}$  in Eq.(6) is expressed as the summation of contributions from electrons in the adjacent elements having the common node  $P_i$  as

$$q_{ele,i} = V_i e n_e(\phi_i) \quad (16)$$

where  $V_i$  is volume assigned to the node  $i$ , which is one third of the total volume of the elements having the common node  $P_i$ .

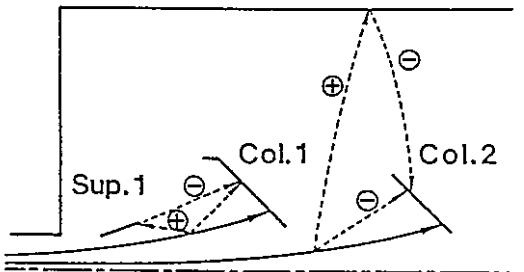


Fig.5 Diagram of loss current due to atomic processes

#### Power Losses by Atomic Processes

##### Loss Mechanisms

There exist two kinds of major mechanisms which reduce the recovery power, thus eventually, the recovery efficiency of a BDC. The one is the losses inherent in a BDC consisting of the following three terms;

- [a] residual kinetic energy of the ions recovered by the collectors,
- [b] kinetic energy of the unrecovered ions,
- [c] acceleration of the emitted secondary electrons from the electrodes or walls at lower potential caused by bombardments of unrecovered primary ions.

The above first two are evaluated from the trajectory calculations of the primary incident ions, and [c] from the data of the secondary electron emission coefficients together with the trajectory calculations of secondary electrons to specify the destination in similar manner to those of primary ions.

The second is due to the presence of residual gases in a BDC<sup>1</sup>. Since incident ion beams and neutral beams undergo atomic processes with residual gases, the resultant produced low energy ions and electrons are accelerated, and particularly, those ions tend to multiply the losses due to secondary electron emission similar to the above [c] (Fig.5). The major atomic processes between the primaries( $X_b^+$ ,  $X_b^0$ ) and the gases(Y) in a BDC are;

- [1] charge exchange :  $X_b^+ + Y \rightarrow X_b^0 + Y^+$
- [2] ionization :  $X_b^+ + Y \rightarrow X_b^+ + Y^+ + e^-$   
 $X_b^0 + Y \rightarrow X_b^0 + Y^+ + e^-$
- [3] reionization :  $X_b^0 + Y \rightarrow X_b^+ + Y + e^-$

where the superscripts +, 0 and the subscript b denote ions, neutrals, and energetic particles, respectively.

##### Loss Calculation

The reaction rates of these processes are calculated in each element used for potential calculations. The rate in the m-th triangle element  $R_k(m)$  is calculated in terms of the beam current of the incident ions  $I_j$ , the charge of  $Z_{je}$ , the gas density  $n_g$  and the cross section of the specific k-th atomic process  $\sigma_k$  by,

$$R_k(m) = \int_{V_e} n_b n_g \sigma_k v r dr d\theta dz \\ = \sum_j (I_j / Z_{je}) n_g \sigma_k \ell_{j,m} \quad (17)$$

where  $\ell_{j,m}$  is the trajectory length of the j-th particle in the m-th element.

Using above notations, following calculation schemes are adopted for the power loss evaluations,

- [1] calculate  $R_k(m)$  from beam trajectories,
- [2] calculate the trajectory of a newly produced particle per element having a current  $Z_s e R_k(m)$  starting from the center of gravity of the element, where  $Z_s e$  is the charge of the newly produced particle
- [3] from potential difference between starting ( $\phi_s$ ) and arriving ( $\phi_a$ ) points of trajectories, calculate losses expressed by

$$P_k(m) = Z_s e R_k(m) (\phi_s - \phi_a) \quad (18)$$

- [4] calculate the emission rate of secondary electrons on the solid surfaces.
- [5] calculate trajectory of one secondary electron per surface element, and losses similarly as ions.

Initial energies of low-energy ions and electrons are taken to be typically 1 eV, and their directions are determined by random numbers. Secondary electrons are assumed, on the other hand, to emit in the direction normal to the electrode surface with the energy of typically 1 eV.

#### Calculation of Heat fluxes on Electrodes

From trajectories of ions, neutrals, and electrons of any kinds, heat deposition on the electrode surfaces are calculated by assuming that all the kinetic energies of particles become heat.

#### Experimental Setup and Results of the BDC<sup>7</sup>

To examine the validity of the simulation code KUAD, beam direct energy recovery experiments were made. The schematic view of the BDC and measurement points are shown in Fig.6. This BDC of LLNL-type consists of two collectors, set up in a cubic of a size of 46 cm. The electrode materials are all stainless steel, except for the molybdenum entrance aperture of a 4 cm diameter. The BDC is surrounded by the stainless steel mesh made of 0.29 mm wires with a 0.81 mm pitch mainly for the purposes of shielding to prevent atmospheric electrons from flowing into the BDC, and of providing good conductance for pumping at the same time. The BDC is set in a 3 m<sup>3</sup> vacuum chamber (1.2m dia. x 2.5m length) with a 5,000 l/s TMP.

Other specific features of the BDC are,

- [1] to make further reductions of the loss due to secondary electrons, secondary electron suppression grids (S.G.) are installed all over the walls, inside the BDC, which is found to occupy almost half of the total losses due to atomic processes through the analyses by the KUAD code,
- [2] collector potentials are sustained by zinc-oxide varistors by their own collected currents. Compared with conventional resistor loads, collector potentials could be kept almost constant independent of collector currents.

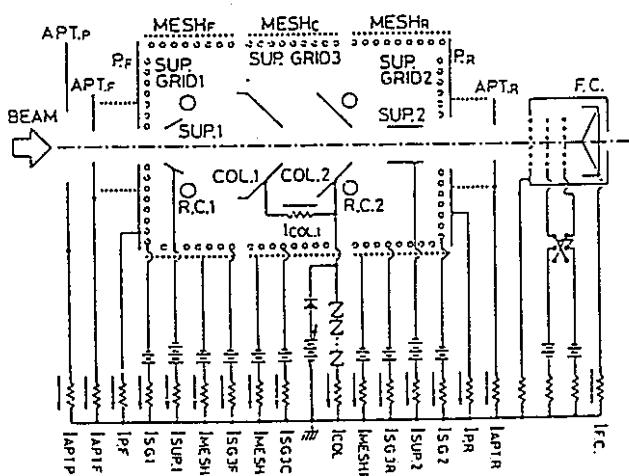


Fig.6 Beam direct energy converter with Rogowski-Coil sensor and secondary electron suppression grids

Experiments have been made using a He<sup>+</sup>, 15.6 keV, 100 ms beam. The incident ion currents were measured by three different methods, i.e., by a in-situ Rogowski-coil sensor<sup>8</sup>, by a micro-Paraday-cup, and by the method utilizing the space charge effect of the incident ion beam on the minimum potential required for the electron suppression. They gave the ion current of 86±6 mA when the drain current of a Duo-PIGatron ion source was 920 mA.

From BDC experiments, the maximum recovery efficiency of 85±6 % was evaluated at the collector potential V<sub>col</sub> of 14.9 kV when the potential of the S.G. was kept at -90 V.

#### Simulation Results

Comparisons of simulation results with the above experimental results were made for the case of the S.G. potential of -90 V, to avoid unfavorable unknown effects of the electron influx to the BDC as described above.

The conditions used for simulations are

beam :	species	He
	energy	15.6 keV
	ion and neutral current 90 mA each with the same Gaussian distribution ( $\sigma = 3.05$ cm)	
	gas pressure	$1.0 \times 10^{-4}$ Torr (He)
	potential	: first suppressor -5.0 kV second suppressor -1.8 kV S.G. -90 V first collector = second collector

Simulation was executed including losses due to atomic processes. In the loss calculations due to secondary electrons, since there is no suitable data on the secondary electron emission coefficients for stainless steel, and furthermore the characteristics of  $\gamma$  vs. ion energies are less dependent on the materials in the energy ranges of present interest, the data for molybdenum were adopted. The effective value  $\gamma_{eff}$  were virtually used in the calculations to take into account the effects of incident angles and of the surface conditions.

Figures 7 to 10 show typical examples of simulation results. They are, incident ion trajectories and equi-potential lines, some trajectories of low energy ions, of subsequent secondary electron trajectories in case of V<sub>S.G.</sub>=0V (Fig.9) and V<sub>S.G.</sub>=-90V (Fig.10), respectively, for the collector potential V<sub>col</sub> of 10.0 kV. It is clearly seen that secondary electrons are considerably suppressed for V<sub>S.G.</sub> of -90 V without influencing trajectories of incident beams and particles produced through atomic processes.

Figures 11 and 12 show several comparisons of simulation results with experimental with respect to, such as, characteristics of collector currents, I<sub>col</sub> vs. V<sub>col</sub>, and first collector current, I<sub>coll</sub> vs. V<sub>col</sub>, respectively. Figure 11 shows flat characteristics of I<sub>col</sub> both for experiments and simulations with excellent agreements between them. Figure 12 also shows very good agreements.

Comparisons of first suppressor currents I<sub>sup1</sub> with V<sub>col</sub> are further made to result in good agreements (Fig.13). Since incident beams are considered not to hit the first suppressor in the BDC experiments, and I<sub>sup1</sub> will be zero when no atomic processes occur, the figure implies the simulations including atomic processes are indispensable in the BDC analyses. From the simulation results, the values of  $\gamma_{eff}$  are found to lie between  $\gamma$  and  $\gamma'$ , which is quite reasonable.

Conclusions

The KUAD code, a two-dimensional simulation code for particle transport including various atomic processes has been developed, and comparisons with beam direct energy conversion experiments have shown excellent agreements in various characteristics of the BDC.

Acknowledgments

The authors wish to thank Mr. K. Yoshida and Mr. K. Maeda for their preliminary calculations of atomic processes and heat fluxes, and also members of BDC experiments for their discussions and carrying out the experiments, of the Research Section of Corpuscular Engineering, Institute of Atomic Energy, Kyoto University.

References

- [1] W.L. Barr, R.W. Moir, and G.W. Hamilton, "Experimental Results from a Beam Direct Converter at 100 kV", *J. Fusion Energy*, **2**, 131-143 (1982).
- [2] W.L. Stirling, J. Kim, H.H. Haselton, S.G. Barber, R.C. Davis, W.K. Dagenhart, W.L. Gardner, N.S. Ponte, C.C. Tsai, J.H. Wheaton, and R.E. Wright, "Positive-ion recovery scheme based on magnetic blocking of electron", *Appl. Phys. Letter*, **35**, 104-106 (1979).
- [3] M. Fumelli and Ph. Rimbault, "A Scheme for the Energy Recovery of the Charged Beam Fraction in Neutral Injectors", *Proc. of the 9th Symp. on Fusion Technology*, 863 (1976).
- [4] "Design Study of a Neutral Beam Injection System for JAERI Experimental Fusion Reactor", JAERI-M8473, 1980.
- [5] J. Pamela, "Computer Study of an Energy Recovery System for Tore Supra Neutral Beam Injection Lines", EUR-FC-1322 (1987).
- [6] K. Hasimoto, and T. Sugawara, "Power Consumption in Positive Ion Beam Converter with Electrostatic Electron Suppression", *J. Nuclear Science and Technology*, **22**, 38-46 (1985).
- [7] K. Yoshikawa et al., in preparation for submittal to the journal of Fusion Technology.
- [8] K. Yoshikawa, H. Toku, S. Kohda, A. Kobayashi, T. Wada, Y. Hattori, "Application of Rogowski-Coil Sensor to In-Situ Measurement of Incident Ion Beam Current to Beam Direct Energy Converter", to be published in Proc. 12th Symp. on Fusion Engineering, Monterey, 1987, IEEE.

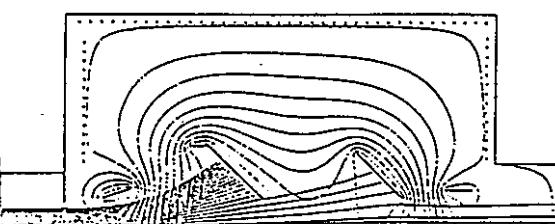


Fig.7 Trajectories of incident ions and equipotential contours

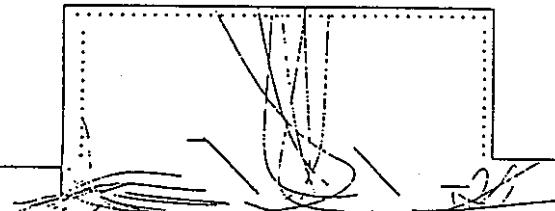


Fig.8 Trajectories of slow ions produced through atomic processes

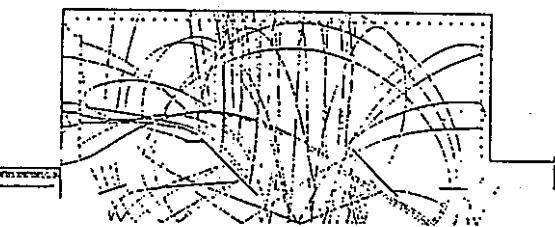


Fig.9 Trajectories of emitted secondary electrons for  $V_{S.G.} = 0$  V

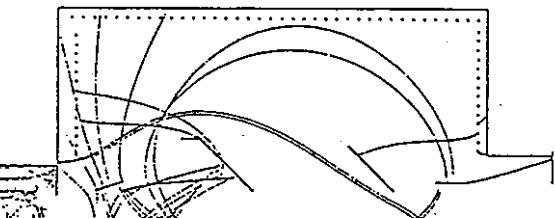


Fig.10 Trajectories of emitted secondary electrons for  $V_{S.G.} = -90$  V

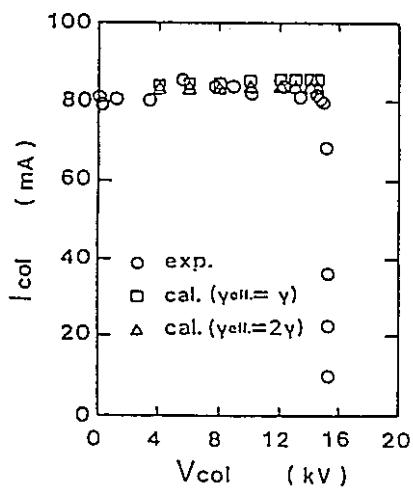


Fig.11 Comparison with respect to  $I_{col}$  vs.  $V_{col}$

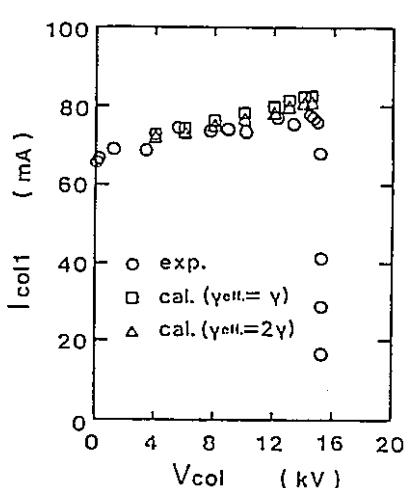


Fig.12 Comparison with respect to  $I_{col}$  vs.  $V_{col}$

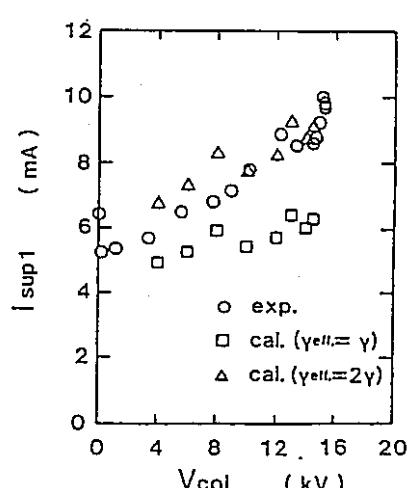


Fig.13 Comparison with respect to  $I_{supl}$  vs.  $V_{col}$

## 付録 B

## クライストロン管における電子・高周波相互作用計算コード（KUF C I）

京都大学原子エネルギー研究所

増田 開

## 目次

1 シミュレーションの概要	53
1.1 RF空洞の固有関数	54
1.2 固有関数によるMaxwell方程式の展開	55
1.3 RF空洞の固有モード	56
1.4 電磁界の分離（ビームの作る電磁界とRF空洞の作る電磁界）	58
2 ビームの作る電磁界	65
2.1 微分方程式	65
2.2 境界条件	66
2.3 ガラーキン有限要素法による空間変数の離散化	66
2.3.1 ガラーキン有限要素法における局所座標と基底関数	67
2.3.2 空間変数の離散化	69
2.3.3 係数行列の計算	76
2.3.4 自由項ベクトル $f$ の計算	88
3 RF空洞の作る電磁界	97
3.1 壁面損失	97
3.2 RF空洞と外部回路との結合	100
3.3 RF空洞の等価回路	102
4 粒子の運動方程式	106
5 時間発展	109

# 1 シミュレーションの概要

クライストロンにおける電子ビームの運動を計算する際には、電子ビームとRF空洞に立つ定在波の相互作用が問題になるため、電子の運動方程式とMaxwell方程式を同時に解かなければならない。すなわち、各時間ステップにおいて、電子ビーム $\rho$ 、 $J$ によって生じる電磁界 $E$ 、 $B$ をMaxwell方程式を解いて求め、次にこの電磁界 $E$ 、 $B$ のもとで運動方程式を解いて次の時間ステップの $\rho$ 、 $J$ を計算し、この繰り返し計算を周期定常解が得られるまで行う。

クライストロン内の電磁界 $E$ 、 $B$ は、三つの要素に分けて考えることができる。

$$E = E_b + E_c \quad (1.0.1)$$

$$B = B_b + B_c + B_f \quad (1.0.2)$$

$E_b$ 、 $B_b$ ：ビームの作る電磁界

$E_c$ 、 $B_c$ ：RF空洞の作る電磁界

$B_f$ ：外部収束磁場

$E_b$ 、 $B_b$ はRF空洞が存在しない時にビームが作る電磁界であり、RF空洞のギャップを導体で閉じた円筒領域でMaxwell方程式を解いて得られる。RF空洞の作る電磁界 $E_c$ 、 $B_c$ については、RF空洞の固有モード $E_n$ 、 $H_n$ を予め求めておいて、その振幅 $e_n$ 、 $h_n$ を各時間ステップで計算し、

$$E_c = \sum_n e_n E_n \quad (1.0.3)$$

$$B_c = \mu_0 H_c = \mu_0 \sum_n h_n H_n \quad (1.0.4)$$

で $E_c$ 、 $B_c$ を与える。振幅 $e_n$ 、 $h_n$ は、図1.1に示すようなRF空洞の等価回路の電圧および電流に相当する。図1.2に基本的なフローチャートを示す。

各時間ステップで $E$ 、 $B$ を計算する代わりに $E_b$ 、 $B_b$ および $e_n$ 、 $h_n$ を計算することにより、Maxwell方程式を解く計算領域が小さくて済むため、計算時間を短縮することができる。さらに、RF空洞のWall lossを等価回路の抵抗分で表すことができ、この抵抗値を $Q$ の測定値から与えることにより、Wall lossの効果を容易に考慮することができる。

本章では、上に述べた方法で電磁界 $E$ 、 $B$ が正しく得られることを数学的に示す。外部収束磁場 $B_f$ については、クライストロン内にはソースが無く、さらに静磁場であるので、(1.0.2)式から $B_f$ を除いたものを改めて $B$ ( $H$ )と書く事にする。

$$B = B_b + B_c = \mu_0 H_b + \mu_0 H_c = \mu_0 H \quad (1.0.5)$$

クライストロン内において電磁界 $E$ 、 $H$ は次のMaxwell方程式を満たす。

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.0.6)$$

$$\nabla \times H = J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.0.7)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.0.8)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (1.0.9)$$

## 1. 1 RF空洞の固有関数

図1.3に示したような体積 $\Omega$ および境界面 $\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ において、次の微分方程式および境界条件を満たすベクトル関数 $E(r)$ を考える。

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 : n \times E = 0 \\ \Gamma_2 : n \cdot E = 0 \end{array} \right. \quad (1.1.2)$$

$$(1.1.3)$$

ここに、 $n$ は $\Gamma$ の外向き法線ベクトルである。この固有値問題の解 $\{E_n\}$ には直交性が成立する。規格化すると、

$$\int_{\Omega} E_n \cdot E_m dV = \delta_{nm} \quad (1.1.4)$$

また、 $\{E_n\}$ には完全性が成立する。すなわち、 $\Omega$ 内で区分的に連続で二乗積分可能な任意のベクトル関数 $X$ を、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left( X - \sum_{n=1}^N E_n \int_{\Omega} X \cdot E_n dV \right)^2 dV = 0 \quad (1.1.5)$$

なる意味で、

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \int_{\Omega} X \cdot E_n dV \quad (1.1.6)$$

と展開できる。また、 $\{E_n\}$ が

$$(i) \quad \nabla \times E_n \neq 0, \nabla \cdot E_n = 0 \quad (1.1.7)$$

$$(ii) \quad \nabla \times E_n = 0 \quad (1.1.8)$$

のいずれかに属するように選べる。

一方、 $\Omega$ 内で次の微分方程式および境界条件を満たすベクトル関数 $H(r)$ を考える。

$$\nabla^2 H + k^2 H = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 : n \cdot H = 0 \\ \Gamma_2 : n \times H = 0 \end{array} \right. \quad (1.1.10)$$

$$(1.1.11)$$

この固有値問題の解 $\{H_n\}$ にも直交性および完全性が成立する。また、 $\{H_n\}$ を

$$(i) \quad \nabla \times H_n \neq 0, \nabla \cdot H_n = 0 \quad (1.1.12)$$

$$(ii) \quad \nabla \times H_n = 0 \quad (1.1.13)$$

のいずれかに属するように選べる。

このようにして得られた $\{E_n\}$ 、 $\{H_n\}$ のうち、(i)に属するものは互いに密接な関係を持っている。(i)に属する $\{E_n\}$ の一つ $E_n$ を使って、

$$k_n H_n = \nabla \times E_n \quad (1.1.14)$$

で与えられる  $H_n$  は(i)に属する固有値  $k_n^2$  の固有解である。逆に、(i)に属する  $H_n$  を使って、

$$k_n E_n = \nabla \times H_n \quad (1.1.15)$$

で与えられる  $E_n$  は(i)に属する固有値  $k_n^2$  の固有解である。そこで、完全性を失うことなく、(i)に属する固有解は互いに(1.1.14)、(1.1.15)式を満たすように選べる。(ii)に属する固有関数にはギリシャ文字の添字をつけて(i)に属するものと区別する。

$$\nabla \times E_\nu = 0 \quad (1.1.16)$$

$$\nabla \times H_\lambda = 0 \quad (1.1.17)$$

このようにして得られた固有関数列  $\{E_n, E_\nu\}$  または  $\{H_n, H_\lambda\}$  で、Maxwell方程式の各量を展開してその係数を求めれば、直接Maxwell方程式を解くことと等価である。

## 1. 2 固有関数によるMaxwell方程式の展開

前節で導いた固有関数  $\{E_n, E_\nu\}$  または  $\{H_n, H_\lambda\}$  でMaxwell方程式の各量を展開し、その展開係数を求めるこことを考える。関数列  $\{E_n, E_\nu\}$  および  $\{H_n, H_\lambda\}$  はいずれもそれぞれ完全であるのでどちらを用いて展開しても良いが、境界条件の似た方で展開する方が収束が良い。 $E$ 、 $H$ をそれぞれ  $\{E_n, E_\nu\}$  、 $\{H_n, H_\lambda\}$  で展開する。

$$\begin{aligned} E &= \sum_n E_n \int_{\Omega} E \cdot E_n \, dV + \sum_\nu E_\nu \int_{\Omega} E \cdot E_\nu \, dV \\ &= \sum_n e_n E_n + \sum_\nu e_\nu E_\nu \\ &= E_1 + E_2 \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

$$\begin{aligned} H &= \sum_n H_n \int_{\Omega} H \cdot H_n \, dV + \sum_\lambda H_\lambda \int_{\Omega} H \cdot H_\lambda \, dV \\ &= \sum_n h_n H_n + \sum_\lambda h_\lambda H_\lambda \\ &= H_1 + H_2 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Maxwellの第二式(1.0.7)式について、 $\nabla \times H$  は  $\{E_n, E_\nu\}$  と似た境界条件を満足するので、 $\{E_n, E_\nu\}$  で展開する。

$$\nabla \times H = \sum_n E_n \int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_n \, dV + \sum_\nu E_\nu \int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_\nu \, dV \quad (1.2.3)$$

(1.2.1)、(1.2.3)式を(1.0.7)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_n E_n \int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_n \, dV + \sum_\nu E_\nu \int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_\nu \, dV \\ = J + \varepsilon_0 \left( \sum_n \frac{d e_n}{dt} E_n + \sum_\nu \frac{d e_\nu}{dt} E_\nu \right) \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$E_n$  を掛けて  $\Omega$  内で体積積分すると、 $\{E_n, E_\nu\}$  の規格化直行性を使って、

$$\int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_n \, dV = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV + \varepsilon_0 \frac{d e_n}{dt} \quad (1.2.5)$$

を得る。ここで、左辺について、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_n \, dV &= \int_{\Omega} H \cdot (\nabla \times E_n) \, dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (H \times E_n) \, dV \\ &= k_n \int_{\Omega} H \cdot H_n \, dV + \int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS \\ &\quad (\because (1.1.14) \text{式}) \\ &= k_n h_n + \int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

よって、

$$k_n h_n - \varepsilon_0 \frac{d e_n}{dt} = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV - \int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS \quad (1.2.7)$$

また、(1.2.4)式に  $E_v$  を掛けて  $\Omega$  内で体積積分すると、

$$\int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_v \, dV = \int_{\Omega} E_v \cdot J \, dV + \varepsilon_0 \frac{d e_v}{dt} \quad (1.2.8)$$

を得る。ここで、左辺について、

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times H) \cdot E_v \, dV &= \int_{\Omega} H \cdot (\nabla \times E_v) \, dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot (H \times E_v) \, dV \\ &= \int_{\Gamma} (H \times E_v) \cdot n \, dS \quad (\because (1.1.16) \text{式}) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

よって、

$$-\varepsilon_0 \frac{d e_v}{dt} = \int_{\Omega} E_v \cdot J \, dV - \int_{\Gamma} (H \times E_v) \cdot n \, dS \quad (1.2.10)$$

Maxwell の第一式を  $\{H_n, H_\lambda\}$  で展開すると、同様にして次式が得られる。

$$k_n e_n + \mu_0 \frac{d h_n}{dt} = - \int_{\Gamma} (E \times H_n) \cdot n \, dS \quad (1.2.11)$$

$$\mu_0 \frac{d h_\lambda}{dt} = - \int_{\Gamma} (E \times H_\lambda) \cdot n \, dS \quad (1.2.12)$$

### 1.3 RF 空洞の固有モード

前節で得られた、 $E$ 、 $H$  の展開係数  $e_n$ 、 $h_n$  に関する微分方程式(1.2.7)、(1.2.11)を改めて書くと、

$$k_n h_n - \varepsilon_0 \frac{d e_n}{dt} = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV - \int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS \quad (1.3.1)$$

$$k_n e_n + \mu_0 \frac{d h_n}{dt} = - \int_{\Gamma} (E \times H_n) \cdot n \, dS \quad (1.3.2)$$

(1.3.1)式の右辺第二項について、

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS &= \int_{\Gamma_1} (H \times E_n) \cdot n \, dS + \int_{\Gamma_2} (H \times E_n) \cdot n \, dS \\ &= \int_{\Gamma_2} (H \times E_n) \cdot n \, dS \quad (1.3.3) \\ &\quad (\because \Gamma_1 \text{ 上で } n \times E_n = 0) \end{aligned}$$

クライストロンではRF空洞の固有モードはドリフトチューブのそれと離調しているので、 $\Gamma_2$ をRF空洞から十分離すことによって $\Gamma_2$ 上で $E_n$ を小さくする事ができる。よって、

$$\int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS = 0 \quad (1.3.4)$$

一方、(1.3.2)式の右辺について、ここでは簡単のため $\Gamma_1$ を完全導体であるとする、 $\Gamma_1$ 上で $n \times E = 0$ 。また $\Gamma_2$ 上で $n \times H_n = 0$ であるから、

$$\int_{\Gamma} (E \times H_n) \cdot n \, dS = 0 \quad (1.3.5)$$

したがって、(1.3.1)、(1.3.2)式より、次式を得る。

$$k_n h_n - \varepsilon_0 \frac{d e_n}{dt} = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV \quad (1.3.6)$$

$$k_n e_n + \mu_0 \frac{d h_n}{dt} = 0 \quad (1.3.7)$$

これらを連立させて解いて展開係数 $e_n$ 、 $h_n$ を求めれば、(1.2.1)、(1.2.2)式によって $E_1$ 、 $H_1$ が得られる。ここで、

$$v = k_n e_n \quad (1.3.8)$$

$$i = -k_n h_n \quad (1.3.9)$$

$$L = \frac{\mu_0}{k_n} \quad (1.3.10)$$

$$C = \frac{\varepsilon_0}{k_n} \quad (1.3.11)$$

$$i_{ind} = - \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV \quad (1.3.12)$$

とおけば、(1.3.6)および(1.3.7)式は

$$i + C \frac{dv}{dt} = i_{ind} \quad (1.3.13)$$

$$v - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (1.3.14)$$

となり、図1.4に示した共振回路の回路方程式になっている。その共振角周波数  $\omega_n$  は、

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = c k_n \quad (1.3.15)$$

さて、固有関数  $E_n$ 、 $H_n$  を使って次式で与えられる電磁界  $E$ 、 $H$  は、 $\rho=0$ 、 $J=0$  における Maxwell 方程式を満たす。

$$E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} E_n \exp(j \omega_n t) \quad (1.3.16)$$

$$H = \frac{1}{-j \sqrt{\mu_0}} H_n \exp(j \omega_n t) \quad (1.3.17)$$

この  $E$ 、 $H$ （または  $E_n$ 、 $H_n$ ）を RF 空洞の固有モードと言う。

ここでは、簡単のため  $\Gamma_1$  を完全導体としたが、実際には導体の導電率は有限の値であるため  $\Gamma_1$  上で  $n \times E = 0$  とはならない。この点については、第3章で詳しく取り扱う。

## 1.4 電磁界の分離（ビームの作る電磁界と RF 空洞の作る電磁界）

前節の議論で、 $E_1$ 、 $H_1$  が  $\rho=0$ 、 $J=0$  における RF 空洞の固有モード  $E_1$ 、 $H_1$  の線形結合で表せ、その結合係数  $e_n$ 、 $h_n$  は共振角周波数  $\omega_n = c k_n$  の共振回路の電圧と電流で表されることがわかった。したがって、クライストロンの動作周波数に近い  $\omega_n = c k_n$  のモードの幾つかで  $E_1$ 、 $H_1$  を与えれば、十分な精度が得られる。

$E_2$ 、 $H_2$  についても、(1.2.10)、(1.2.12)式から  $e_\nu$ 、 $h_\lambda$  を求めれば、(1.2.1)、(1.2.2)式から  $E_2$ 、 $H_2$  が得られる。しかし実際には、 $E_2$ 、 $H_2$  が  $\{E_\nu\}$ 、 $\{H_\lambda\}$  のうちの幾つか（シミュレーションするうえで妥当な個数）のみでは十分な精度で近似できないと思われる所以、この手法で  $E_2$ 、 $H_2$  を計算するのは得策ではない。そこで、Maxwell 方程式を  $(E_1, H_1)$  に関する部分と  $(E_2, H_2)$  に関する部分とに分離して、 $E_2$ 、 $H_2$  の偏微分方程式を求め、これを直接解く。

電流密度  $J$  については、(1.2.7)、(1.2.10)式から分かるとおり、 $J$  を  $\{E_n, E_\nu\}$  で展開した各成分がそれぞれのモードのソース項になっている。そこで、電磁界  $E$ 、 $H$  と同様に、 $J$  を次のように二つの成分に分ける。

$$J = J_1 + J_2 = \sum_n E_n \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV + \sum_\nu E_\nu \int_{\Omega} E_\nu \cdot J \, dV \quad (1.4.1)$$

Maxwell 方程式は、

$$\nabla \times E_1 + \nabla \times E_2 = -\mu_0 \frac{\partial H_1}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad (1.4.2)$$

$$\nabla \times H_1 + \nabla \times H_2 = J_1 + J_2 + \varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} \quad (1.4.3)$$

$$\nabla \cdot E_1 + \nabla \cdot E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.4.4)$$

$$\nabla \cdot H_1 + \nabla \cdot H_2 = 0 \quad (1.4.5)$$

ここで、 $E_1$ 、 $H_1$ がRF空洞の固有モードのうちの有限個で表せると仮定すると次のことが言える。

$$\nabla \cdot E_1 = 0 \quad (1.4.6)$$

$$\nabla \cdot H_1 = 0 \quad (1.4.7)$$

$$n \times E_1 = 0 \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \quad (1.4.8)$$

$$n \times H_1 = 0 \quad (\Gamma_2 \text{ 上}) \quad (1.4.9)$$

まず、(1.4.4)～(1.4.7)式より、

$$\nabla \cdot E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.4.10)$$

$$\nabla \cdot H_2 = 0 \quad (1.4.11)$$

一方、Maxwell方程式を展開した式、(1.2.10)式について、右辺第二項は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (H \times E_{\nu}) \cdot n \, dS &= \int_{\Gamma} (H_2 \times E_{\nu}) \cdot n \, dS \\ &\quad (\because \Gamma_1 \text{ 上で } n \times E_{\nu} = 0, \Gamma_2 \text{ 上で } n \times H_1 = 0) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (H_2 \times E_{\nu}) \, dV \\ &= \int_{\Omega} E_{\nu} \cdot (\nabla \times H_2) \, dV \quad (\because \nabla \times E_{\nu} = 0) \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

これを(1.2.10)式に代入すると、

$$-\varepsilon_0 \frac{d e_{\nu}}{d t} = \int_{\Omega} E_{\nu} \cdot J \, dV - \int_{\Omega} E_{\nu} \cdot (\nabla \times H_2) \, dV \quad (1.4.13)$$

$E_{\nu}$ を掛けて $\nu$ について総和をとると次式を得る。

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} = J_2 - \nabla \times H_2 \quad (1.4.14)$$

この式と(1.4.3)式より、

$$\nabla \times H_1 = J_1 + \varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} \quad (1.4.15)$$

(1.2.12)、(1.4.8)を使うと、同様にして、Maxwellの第一式(1.4.2)式を  $(E_1, H_1)$  に関する部分と  $(E_2, H_2)$  に関する部分とに分けることができる。以上の結果をまとめると、

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times E_1 = -\mu_0 \frac{\partial H_1}{\partial t} \\ \nabla \times H_1 = J_1 + \varepsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot E_1 = 0 \\ \nabla \cdot H_1 = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot E_1 = 0 \\ \nabla \cdot H_1 = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot H_1 = 0 \\ \nabla \cdot J_1 = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot J_1 = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times E_2 = -\mu_0 \frac{\partial H_2}{\partial t} \\ \nabla \times H_2 = J_2 + \varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.4.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H_2 = J_2 + \varepsilon_0 \frac{\partial E_2}{\partial t} \\ \nabla \cdot E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array} \right. \quad (1.4.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot H_2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot H_2 = 0 \\ \nabla \cdot J_2 + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot J_2 + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad (1.4.25)$$

以上で  $E_2, H_2$  の方程式(1.4.21)～(1.4.24)が得られたから、クライストロンの全領域を空間メッシュで切ってこれらの式を有限要素法で解けば  $E_2, H_2$  が得られるが、それでは  $E, H$  の Maxwell 方程式を全領域で解くのと計算量は同じであり、何等メリットはない。しかし、RF空洞のギャップ(図1.3の  $\Sigma$ )における  $E_2, H_2$  の境界条件が何らかの形で与えられれば、計算領域が大幅に削減できる。

クライストロンのRF空洞のギャップは、動作周波数の波長に較べて十分狭いので、 $\Sigma$  上では  $E_n, H_n, E_\nu, H_\lambda$  はほぼ一様であると考えられる。すると、

$$\nabla \times E_\nu = 0 \quad (\Omega \text{ 内}) \quad (1.4.26)$$

$$n \times E_\nu = 0 \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \quad (1.4.27)$$

より、 $\Sigma$  上の法線ベクトルを  $n'$  とすると、

$$n' \times E_2 = 0 \quad (\Sigma \text{ 上}) \quad (1.4.28)$$

また、

$$\nabla \cdot H_\lambda = 0 \quad (\Omega \text{ 内}) \quad (1.4.29)$$

$$n \cdot H_\lambda = 0 \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \quad (1.4.30)$$

より、

$$n' \cdot H_2 = 0 \quad (\Sigma \text{ 上}) \quad (1.4.31)$$

したがって、(1.4.28)、(1.4.31)より、 $E_2$ 、 $H_2$ についてはRF空洞のギャップを導体で塞いだ筒上の領域で(1.4.20)～(1.4.23)式を解けば良いことがわかる。さらに、RF空洞の固有モードの電界 $E_n$ はギャップにおいて軸とほぼ平行である(図1.5)ので、 $J_1$ が誘起する電磁界成分 $E_1$ 、 $H_1$ は導体 $\Sigma$ によって短絡されるため、(1.4.22)式において $J_2$ の代わりに $J$ とおいても差し支えない。したがって、RF空洞のギャップを導体で塞いだ円筒領域でMaxwell方程式を解けば、 $E_2$ 、 $H_2$ が得られることになる。

以上で、本章の冒頭で述べたとおり、クライストロン内の電磁界が $E_1$ 、 $H_1$ (以後、RF空洞の作る電磁界 $E_c$ 、 $H_c$ と呼ぶ)、 $E_2$ 、 $H_2$ (以後、ビームの作る電磁界 $E_b$ 、 $H_b$ と呼ぶ)および外部収束磁場 $B_f$ に分けて考えられることが示された。第2章以降で、それぞれの電磁界成分の計算の方法を詳しく述べる。

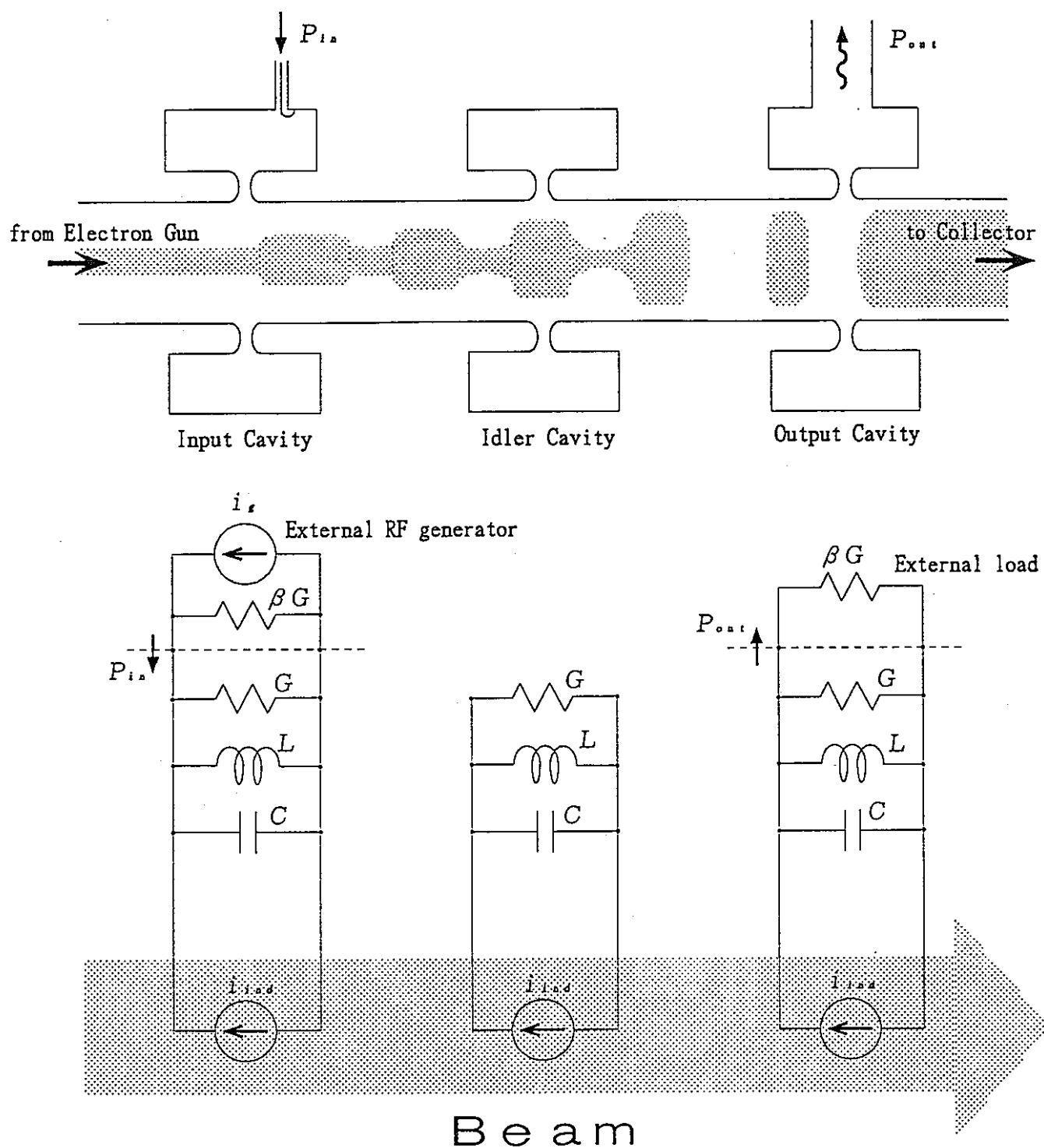


図1.1 RF空洞の等価回路

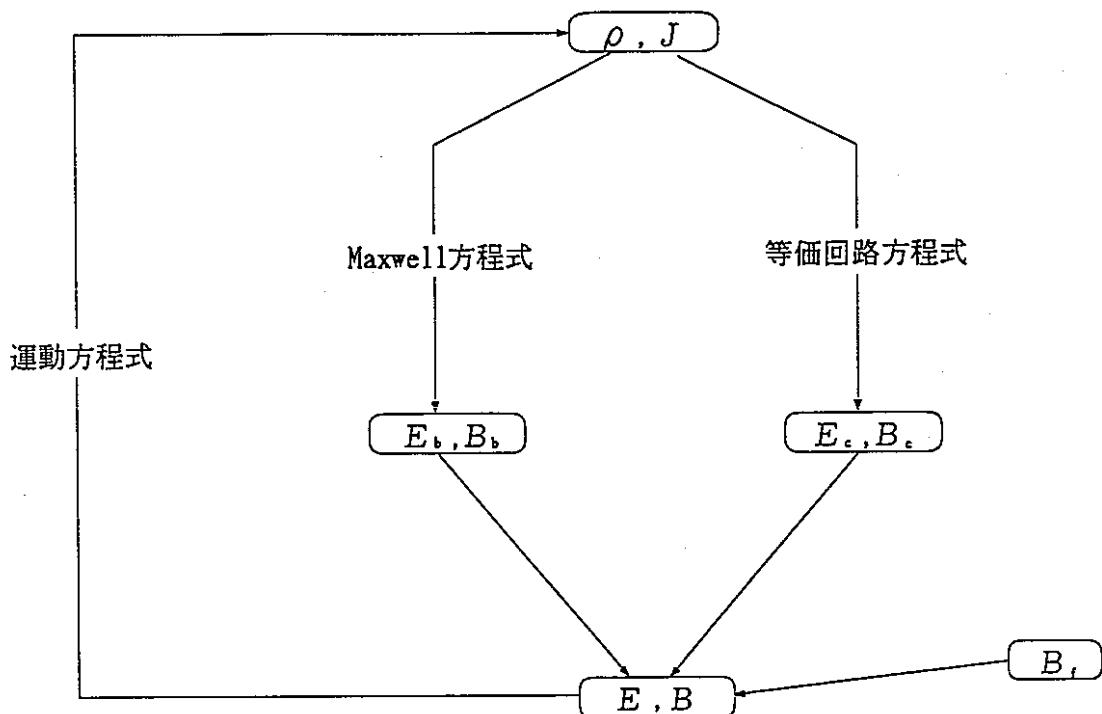


図1.2 基本的なフローチャート

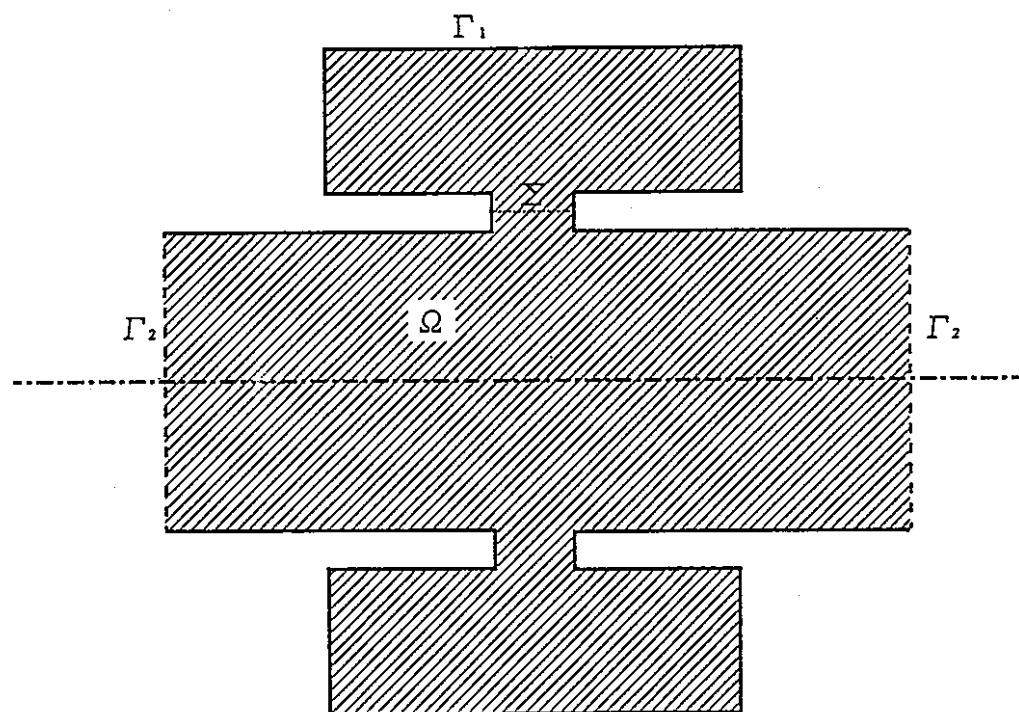


図1.3 RF空洞の固有モードの計算領域

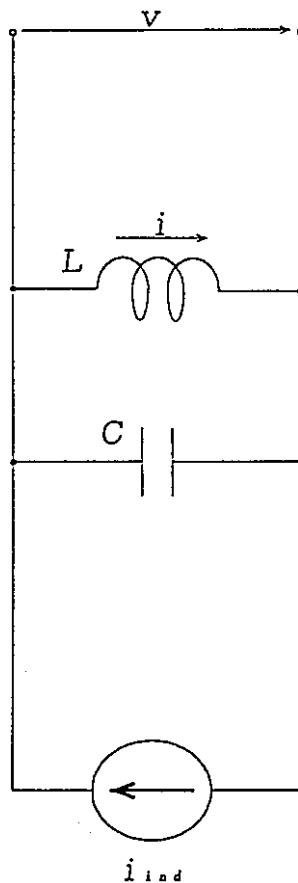


図 1. 4 RF空洞の等価回路

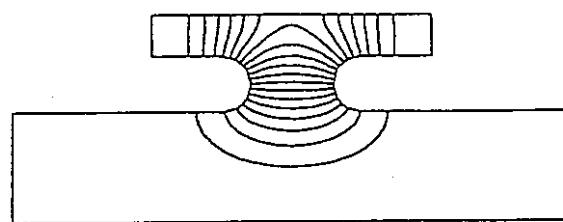


図 1. 5 RF空洞の固有モード

## 2 ビームの作る電磁界

ビーム  $\rho$ 、 $J$  の作る電磁界  $E_b$ 、 $B_b$  を直接 Maxwell 方程式を解いて求める代わりに、スカラおよびベクトルポテンシャル  $\phi_b$ 、 $A_b$  の微分方程式を解き、得られるポテンシャルから  $E_b$ 、 $B_b$  を求める。 $\phi_b$ 、 $A_b$  の微分方程式は空間  $(r, z)$  および時間  $t$  の偏微分方程式になるが、有限要素法を用いて空間変数を離散化すれば、空間メッシュの各節点における  $\phi_b$ 、 $A_b$  の値の時間  $t$  に関する常微分方程式が得られ、 $\rho$ 、 $J$  および前の時間ステップの  $\phi_b$ 、 $A_b$  から次のステップの  $\phi_b$ 、 $A_b$  を求めることができる。

### 2.1 微分方程式

ビームの作る電磁界  $E_b$ 、 $B_b$  は、RF空洞のギャップを導体で塞いだ円筒領域で、次の Maxwell 方程式を満たす（第1章参照）。

$$\nabla \times E_b = -\frac{\partial B_b}{\partial t} \quad (2.1.1)_1$$

$$\nabla \times B_b = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_b}{\partial t} + \mu_0 J \quad (2.1.1)_2$$

$$\nabla \cdot E_b = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.1)_3$$

$$\nabla \cdot B_b = 0 \quad (2.1.1)_4$$

任意のスカラ  $\phi_b$  およびベクトル  $A_b$  を用いて

$$E_b = -\nabla \phi_b - \frac{\partial A_b}{\partial t} \quad (2.1.2)_1$$

$$B_b = \nabla \times A_b \quad (2.1.2)_2$$

で与えられる  $E_b$ 、 $B_b$  は Maxwell 方程式の第一式および第四式を満たす。この  $E_b$ 、 $B_b$  を残る第二、三式 ((2.1.1)<sub>2</sub>、(2.1.1)<sub>3</sub>式) に代入すると次式が得られる。

$$\nabla^2 \phi_b - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot A_b + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.3)_1$$

$$\nabla^2 A_b - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_b}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot A_b + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \right) = -\mu_0 J \quad (2.1.3)_2$$

したがって、(2.1.3)式を満たす  $\phi_b$  および  $A_b$  を用いて (2.1.2)式で与えられる  $E_b$ 、 $B_b$  は Maxwell 方程式を全て満たす。

今、 $\phi_b$ 、 $A_b$  が (2.1.3)式の解であるとすると、任意のスカラ  $\lambda$  に対して

$$\phi_b' = \phi_b - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (2.1.4)_1$$

$$A_b' = A_b + \nabla \lambda \quad (2.1.4)_2$$

で与えられる  $\phi_b'$ 、 $A_b'$  も (2.1.3)式の解であり、(2.1.2)式において同じ  $E_b$ 、 $B_b$  を与える。そこで

$$\nabla^2 \lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = - \left( \nabla \cdot A_b + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_b}{\partial t} \right) \quad (2.1.5)$$

を満たす入を選ぶと  $\phi_b'$ 、 $A_b'$  は次式を満たす。

$$\nabla \cdot A_b' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_b'}{\partial t} = 0 \quad (2.1.6)$$

$\phi_b'$ 、 $A_b'$  を改めて  $\phi_b$ 、 $A_b$  と書くことにすると、(2.1.3)および(2.1.6)式より次式が得られる。

$$\nabla^2 \phi_b - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.7)_1$$

$$\nabla^2 A_b - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_b}{\partial t^2} = - \mu_0 J \quad (2.1.7)_2$$

したがって、(2.1.7)式を解いて得られる  $\phi_b$ 、 $A_b$  を用いて(2.1.2)式で  $E_b$ 、 $B_b$  を求めれば、その  $E_b$ 、 $B_b$  は Maxwell 方程式を満たす。円筒座標系を導入して軸対称を仮定すると、(2.1.7)式は以下のようになる。

$$\nabla^2 \phi_b - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_b}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.8)_1$$

$$\nabla^2 A_{b,r} - \frac{A_{b,r}}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,r}}{\partial t^2} = - \mu_0 J_r \quad (2.1.8)_2$$

$$\nabla^2 A_{b,\theta} - \frac{A_{b,\theta}}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,\theta}}{\partial t^2} = - \mu_0 J_\theta \quad (2.1.8)_3$$

$$\nabla^2 A_{b,z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,z}}{\partial t^2} = - \mu_0 J_z \quad (2.1.8)_4$$

これらをそれぞれの境界条件のもとで別々に解き、得られる  $\phi_b$ 、 $A_b$  を(2.1.2)式に代入すればビームの作る電磁界  $E_b$ 、 $B_b$  が得られる。

## 2.2 境界条件

$\phi_b$ 、 $A_{b,r}$ 、 $A_{b,\theta}$ 、 $A_{b,z}$  の境界条件を、ビームの入射面、ドリフトチューブの導体壁、ビームの出口、および中心軸 ( $z$  軸) について図2.1に示す。中心軸は物理的には境界ではないが、計算上は境界になるのでここでは境界条件として扱う。

## 2.3 ガラーキン有限要素法による空間変数の離散化

2.1節では、 $\phi_b$  および  $A_{b,r}$ 、 $A_{b,\theta}$ 、 $A_{b,z}$  についてそれぞれ別々の偏微分方程式を導いた。これらを2.2節の境界条件のもとでそれぞれ解けば  $\phi_b$ 、 $A_b$  が得られ、ビームの作る電磁界  $E_b$ 、 $B_b$  を得る。

ここでは、これらの偏微分方程式系にガラーキン有限要素法を適用して、空間変数を

離散化する方法を示す。空間変数を離散化することにより方程式は、空間メッシュの各節点における $A_{b,r}$ 、 $A_{b,\theta}$ 、 $A_{b,z}$ の値の時間 $t$ に関する常微分方程式となる。

軸対称を仮定しているので、空間メッシュとしては $r-z$ 面内の三角形要素分割を考える。実際には、 $r-z$ 面内の三角形を $z$ 軸の回りに回転させてできるドーナツ型要素に分割したことになる（図2.2）。

## 2.3.1 ガラーキン有限要素法における局所座標と基底関数

この節では、ガラーキン有限要素法による空間変数離散化の方法の説明の準備として、局所座標および基底関数について説明する。

ガラーキン法では、求める関数がいくつかの既知の基底関数の一次結合で表されると仮定し、その係数をに関する代数方程式を解く問題に置き換える。この基底関数として以下に説明する関数を用いたものが有限要素法であり、最終的に導かれる代数方程式は、汎関数の最小問題として説明される有限要素法と全く同じ方程式になる。

### (1) 局所座標

#### (1-a) 面積座標

$r-z$ 平面上のある三角形要素 $e$ 内で、次式の座標変換を行う。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

$\xi_1$ 、 $\xi_2$ 、 $\xi_3$ について解くと、

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix} \quad (2.3.2)_0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} r_2 z_3 - r_3 z_2 & z_2 - z_3 & r_3 - r_2 \\ r_3 z_1 - r_1 z_3 & z_3 - z_1 & r_1 - r_3 \\ r_1 z_2 - r_2 z_1 & z_1 - z_2 & r_2 - r_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.2)_1$$

$$S \equiv \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} : \text{要素 } e \text{ の面積} \quad (2.3.2)_2$$

この要素 $e$ 内で定義された新たな変数 $\xi_1$ 、 $\xi_2$ 、 $\xi_3$ と、図2.3(a)の各三角形の面積との間には次式の関係が成り立つ。

$$\xi_i = \frac{S_i}{S} \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.3)$$

のことから、この局所座標 $\xi_1$ 、 $\xi_2$ 、 $\xi_3$ は面積座標と呼ばれる。

要素 $e$ 内で定義され、 $(x, y)$ の一次式で表される関数 $u$ は、面積座標を用いて次式で表される。

$$u = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 \quad (2.3.4)_0$$

$$u_i \equiv u(r_i, z_i) \quad (i=1,2,3) \quad (2.3.4)_1$$

また、面積座標で表された関数の要素 e 内での面積積分は、次の積分公式を使って容易に計算できる。

$$\iint_e \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n dr dz = 2S \frac{l! m! n!}{(l+m+n+2)!} \quad (2.3.5)$$

### (1-b) 長さ座標

r 軸上のある線分要素 e 内で、次式の座標変換を行う。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.6)$$

$\xi_1$ 、 $\xi_2$ について解くと、

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \quad (2.3.7)_0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.7)_1$$

$$d \equiv x_2 - x_1 : \text{要素 } e \text{ の長さ} \quad (2.3.7)_2$$

この要素 e 内で定義された新たな変数  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  と、図2.3(b)の各線分の長さとの間には次式の関係が成り立つ。

$$\xi_i = \frac{d_i}{d} \quad (i=1,2) \quad (2.3.8)$$

のことから、この局所座標  $\xi_1$ 、 $\xi_2$  は長さ座標と呼ばれる。

要素 e 内で定義され、x の一次式で表される関数 u は、長さ座標を用いて次式で表される。

$$u = u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 \quad (2.3.9)_0$$

$$u_i \equiv u(r_i) \quad (i=1,2) \quad (2.3.9)_1$$

長さ座標で表された関数の要素 e 内での線積分は、次の積分公式を使って容易に計算できる。

$$\int_e \xi_1^l \xi_2^m dr = d \frac{l! m!}{(l+m+1)!} \quad (2.3.10)$$

### (2) 基底関数

2.3.2節以降の説明で用いる軸対称な m 個の基底関数  $\psi_i(r, z)$  を以下のように

定義する。すなはち

- 節点  $i$  に接する要素以外では  
 $\psi_i = 0$

- 節点  $i$  では  
 $\psi_i(r_i, z_i) = 1$

- 節点  $i$  に接する各要素内では、 $r, z$  の一次式で表される。  
 $\psi_i = a + b r + c z$

このように定義された基底関数  $\psi_i$  の等高線図および透視図を、図2.4(a), (b)に示す。

ここで図2.4における要素  $e$  について、節点  $i, j, k$  に対して局所節点番号①、②、③をつけて要素  $e$  内における局所座標（面積座標）を考える。図2.4における要素  $e$  内では、 $\psi_i$  は面積座標を用いて以下の式で表される。

$$\psi_i = \xi_1 \quad (r, z) \in e \quad (2.3.11)$$

また、図2.4における線分  $l$  について、 $l$  に沿った新たな座標軸を取り長さ座標を考える。線分  $l$  上では、 $\psi_i$  は前述の長さ座標を用いて以下の式で表されることになる。

$$\psi_i = \xi_1 \quad (r, z) \in l \quad (2.3.12)$$

すなわち各要素内においては、基底関数  $\psi_i$  は局所座標で表される。したがって、ある（軸対称な）関数が基底関数  $\psi_i$  の一次結合で表されるとすれば、その体積積分（すなわち、 $r-z$  面内での面積積分）は、局所座標の積分公式 ((2.3.5), (2.3.10)式) を用いて容易に計算できる。

## 2.3.2 空間変数の離散化

スカラポテンシャル  $\phi_b$  およびベクトルポテンシャル  $A_b$  の各成分について、それぞれ空間変数の離散化の方法を示す。 $\phi_b$  と  $A_{b,z}$  については、微分方程式の形と境界条件が共に全く同一のものであるので、 $A_{b,z}$  についてのみ示す。

ここでは、考えている体積を  $\Omega$  としその境界を  $\Gamma$  とする。境界面  $\Gamma$  のうちビームの入射する面を  $\Gamma_1$ 、導体表面を  $\Gamma_2$ 、ビームの出口を  $\Gamma_3$  とする（図2.5(a)）。

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

また  $\theta=0$  における  $\Omega$  の断面 ( $r-z$  面) を  $\Sigma$  とし、 $\Sigma$  の境界線を  $C$  とする。境界  $C$  のうち、 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  上にある部分をそれぞれ  $C_1, C_2, C_3$  とし、 $z$  軸上にある部分を  $C_4$  とする（図2.5(b)）。

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$$

$$C_i \subset \Gamma_i \quad (i=1,2,3)$$

(1)  $A_{b,z}$  ( $\phi_b$ ) $A_{b,z}$  の微分方程式と境界条件を改めて書くと、

$$\nabla^2 A_{b,z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,z}}{\partial t^2} = -\mu_0 J_z \quad (2.3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 (C_1) : \frac{\partial A_{b,z}}{\partial z} = 0 \\ \Gamma_2 (C_2) : A_{b,z} = 0 \\ \Gamma_3 (C_3) : \frac{\partial A_{b,z}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{b,z}}{\partial t} \\ C_4 : \frac{\partial A_{b,z}}{\partial r} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.3.14)_1 \\ (2.3.14)_2 \\ (2.3.14)_3 \\ (2.3.14)_4 \end{array}$$

ここで  $\Omega$  上で定義され、

$$\Gamma_2 (C_2) : v = 0 \quad (2.3.15)$$

を満たす関数  $v(r, z)$  を考える。この  $v$  を  $A_{b,z}$  の微分方程式(2.3.13)式の両辺に掛けて  $\Omega$  上で体積積分する。

$$\int_{\Omega} v \nabla^2 A_{b,z} dV - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} v \ddot{A}_{b,z} dV = -\mu_0 \int_{\Omega} v J_z dV \quad (2.3.16)$$

左辺第一項について、Greenの定理より

$$\begin{aligned} (\text{左辺第一項}) &= \int_{\Omega} v \nabla^2 A_{b,z} dV \\ &= \int_{\Gamma} v \frac{\partial A_{b,z}}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla A_{b,z} dV \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

ここに  $\frac{\partial}{\partial n}$  は  $\Gamma$  の法線方向の微分を表す。さらに、境界条件(2.3.14)<sub>1</sub>、(2.3.14)<sub>3</sub>式および(2.3.15)式を使うと、

$$(\text{左辺第一項}) = -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} v \dot{A}_{b,z} dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla A_{b,z} dV \quad (2.3.18)$$

(2.3.18)式を(2.3.16)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla A_{b,z} dV + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} v \dot{A}_{b,z} dS + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} v \ddot{A}_{b,z} dV \\ = \mu_0 \int_{\Omega} v J_z dV \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

得られた(2.3.19)式について以下のことが言える。すなはち、もとの境界値問題 ((2.3.13), (2.3.14)式) と次の問題とは等価である。

弱形式問題

(2.3.15)式を満たす任意の重み関数  $v(r, z)$  に対して、

(2.3.19)式

(2.3.14)<sub>2</sub>式

を満たす  $A_{b,z}$  を求める。

弱形式問題は元の境界値問題に対して次の点で有利である。

- 求める  $A_{b,z}$  の近似解に要求される微分可能性が、もとの境界値問題では二回であるのに対して、弱形式問題では一回である。
- 境界条件 ((2.3.14)式) のうち Neumann 条件は、弱形式問題においては自動的に満たされる。

ここで、 $A_{b,z}$  および  $v$  が 2.3.1 節で定義した  $m$  個の基底関数  $\psi_i$  の一次結合で表されると仮定する。

$$A_{b,z}(r, z, t) = \sum_i \alpha_{z,i}(t) \psi_i(r, z) \quad (2.3.20)_1$$

$$v(r, z) = \sum_i \beta_i \psi_i(r, z) \quad (2.3.20)_2$$

前述した通り、 $\alpha_{z,i}$  は  $A_{b,z}$  の節点  $i$  での値そのものになる。そこで、(2.3.14)<sub>2</sub>、(2.3.15)式を満たすために節点  $i$  が  $\Gamma_2(C_2)$  上にあるときは

$$\alpha_{z,i} = \beta_i = 0 \quad (r_i, z_i) \in \Gamma_2 \quad (2.3.21)$$

とする。(2.3.20)<sub>2</sub> 式で表される任意の  $v$  に対して (2.3.19) 式が満たされるためには、任意の  $j$  に対して、(2.3.19) 式において

$$v = \psi_j$$

とした式が満たされなければならない。すなわち

for  $\forall j$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \psi_j \cdot \nabla A_{b,z} dV + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} \psi_j \dot{A}_{b,z} dS + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \psi_j \ddot{A}_{b,z} dV \\ = \mu_0 \int_{\Omega} \psi_j J_z dV \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

これに (2.3.20)<sub>1</sub> 式を代入すると、

for  $\forall j$

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_{z,i} \int_{\Omega} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i dV + \frac{1}{c} \sum_i \dot{\alpha}_{z,i} \int_{\Gamma_3} \psi_j \psi_i dS \\ + \sum_i \ddot{\alpha}_{z,i} \int_{\Omega} \psi_j \psi_i dV = \mu_0 \int_{\Omega} \psi_j J_z dV \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

が得られる。 $\alpha_{z,i}$  を縦に並べたベクトルを  $\alpha_z$  として、マトリクスで表すと

$$L_z \alpha_z + M_z \dot{\alpha}_z + N_z \ddot{\alpha}_z = f_z \quad (2.3.24)_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{z,ij} \equiv \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dV \\ m_{z,ij} \equiv \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} \psi_i \psi_j \, dS \end{array} \right. \quad (2.3.24)_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{z,ij} \equiv \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, dV \\ f_{z,i} \equiv \mu_0 \int_{\Omega} \psi_i J_z \, dV \end{array} \right. \quad (2.3.24)_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{z,ij} \equiv \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dV \\ m_{z,ij} \equiv \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} \psi_i \psi_j \, dS \\ n_{z,ij} \equiv \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, dV \\ f_{z,i} \equiv \mu_0 \int_{\Omega} \psi_i J_z \, dV \end{array} \right. \quad (2.3.24)_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{z,ij} \equiv \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j \, dV \\ m_{z,ij} \equiv \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} \psi_i \psi_j \, dS \\ n_{z,ij} \equiv \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \psi_i \psi_j \, dV \\ f_{z,i} \equiv \mu_0 \int_{\Omega} \psi_i J_z \, dV \end{array} \right. \quad (2.3.24)_4$$

ここで、係数行列  $L_z$ 、 $M_z$ 、 $N_z$  は節点の座標のみで定まる対称マトリクスである。さらに基底関数  $\psi_i$  の値が節点  $i$  の周り以外では0であることから、係数行列の各成分  $l_{z,ij}$ 、 $m_{z,ij}$ 、 $n_{z,ij}$  は節点  $i$  と節点  $j$  が隣合うか一致する場合にのみ0以外の値をとり、それ以外の殆どの成分は0である。また、(2.3.24)式の積分計算は2.3.1節で述べた積分公式を用いて容易に計算できる。

## (2) $A_{b,\theta}$

$A_{b,\theta}$  の微分方程式と境界条件は、

$$\nabla^2 A_{b,\theta} - \frac{A_{b,\theta}}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,\theta}}{\partial t^2} = -\mu_0 J_\theta \quad (2.3.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 (C_1) : \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial z} = 0 \\ \Gamma_2 (C_2) : A_{b,\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3.26)_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_3 (C_3) : \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial t} \\ C_4 : A_{b,\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3.26)_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 (C_1) : \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial z} = 0 \\ \Gamma_2 (C_2) : A_{b,\theta} = 0 \\ \Gamma_3 (C_3) : \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial t} \\ C_4 : A_{b,\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3.26)_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 (C_1) : \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial z} = 0 \\ \Gamma_2 (C_2) : A_{b,\theta} = 0 \\ \Gamma_3 (C_3) : \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial t} \\ C_4 : A_{b,\theta} = 0 \end{array} \right. \quad (2.3.26)_4$$

$A_{b,z}$  の場合と同様にすれば、(2.3.24)式と同様の式が導かれる。ただし(2.3.25)式の左辺第二項について、このまま体積積分すると  $z$  軸上 ( $r=0$ ) において被積分関数が発散する。そこで、この式の両辺に  $r$  を掛けて

$$r \nabla^2 A_{b,\theta} - \frac{A_{b,\theta}}{r} - \frac{1}{c^2} r \ddot{A}_{b,\theta} = -\mu_0 r J_\theta \quad (2.3.27)$$

この式の両辺に

$$\Gamma_2 \cup C_4 : v = 0 \quad (2.3.28)$$

なる重み関数  $v$  を掛けて  $\Omega$  上で体積積分すると、

$$\int_{\Omega} r v \nabla^2 A_{b,\theta} dV - \int_{\Omega} \frac{v A_{b,\theta}}{r} dV - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} r v \ddot{A}_{b,\theta} dV = -\mu_0 \int_{\Omega} r v J_\theta dV \quad (2.3.29)$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺第一項}) &= \int_{\Omega} r v \nabla^2 A_{b,\theta} dV \\ &= \int_{\Gamma} r v \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla(r v) \cdot \nabla A_{b,\theta} dV \\ &= -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r v \dot{A}_{b,\theta} dS - \int_{\Omega} r \nabla v \cdot \nabla A_{b,\theta} dV - \int_{\Omega} v \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial r} dV \\ &\therefore \int_{\Omega} r \nabla v \cdot \nabla A_{b,\theta} dV + \int_{\Omega} v \frac{\partial A_{b,\theta}}{\partial r} dV + \int \frac{v A_{b,\theta}}{r} dV \\ &\quad + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r v \dot{A}_{b,\theta} dS + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} r v \ddot{A}_{b,\theta} dV = \mu_0 \int_{\Omega} r v J_\theta dV \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

ここで、 $A_{b,\theta}$  および  $v$  が 2.3.1 節で定義した  $m$  個の基底関数  $\psi_i$  の一次結合で表されると仮定する。

$$A_{b,\theta}(r, z, t) = \sum_i \alpha_{b,i}(t) \psi_i(r, z) \quad (2.3.31)_1$$

$$v(r, z) = \sum_i \beta_i \psi_i(r, z) \quad (2.3.31)_2$$

ただし、 $A_{b,\theta}$  および  $v$  が  $(2.3.26)_2$ 、 $(2.3.26)_4$ 、 $(2.3.28)$  式を満たすために、節点  $i$  が  $\Gamma_2 \cup C_4$  上にあるときは

$$\alpha_{b,i} = \beta_i = 0 \quad (r, z) \in \Gamma_2 \cup C_4 \quad (2.3.32)$$

とする。 $A_{b,z}$  の場合と同様に、任意の  $j$  に対して次式が成り立つ。

for  $\forall j$

$$\begin{aligned} &\sum_i \alpha_{b,i} \int_{\Omega} \left( r \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i + \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\psi_j \psi_i}{r} \right) dV \\ &+ \frac{1}{c} \sum_i \dot{\alpha}_{b,i} \int_{\Gamma_3} r \psi_j \psi_i dS + \frac{1}{c^2} \sum_i \ddot{\alpha}_{b,i} \int_{\Omega} r \psi_j \psi_i dV \\ &= \mu_0 \int_{\Omega} r \psi_j J_\theta dV \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

$\alpha_{b,i}$  を縦に並べたベクトルを  $\alpha_b$  として、マトリクスで表すと

$$L_b \alpha_b + M_b \dot{\alpha}_b + N_b \ddot{\alpha}_b = f_b \quad (2.3.34)_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{b,ij} \equiv \int_{\Omega} \left( r \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\psi_i \psi_j}{r} \right) dV \\ m_{b,ij} \equiv \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r \psi_i \psi_j dS \end{array} \right. \quad (2.3.34)_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{b,ij} \equiv \int_{\Omega} \left( r \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\psi_i \psi_j}{r} \right) dV \\ m_{b,ij} \equiv \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r \psi_i \psi_j dS \end{array} \right. \quad (2.3.34)_2$$

$$\begin{cases} n_{\theta, i} \equiv \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} r \psi_i \psi_j dV \\ f_{\theta, i} \equiv \mu_0 \int_{\Omega} r \psi_i J_{\theta} dV \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.3.34)_3 \\ (2.3.34)_4 \end{array}$$

(3)  $A_{b,r}$ 

$A_{b,r}$  の微分方程式と境界条件は、

$$\nabla^2 A_{b,r} - \frac{A_{b,r}}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{b,r}}{\partial t^2} = -\mu_0 J_r \quad (2.3.35)$$

$$\begin{cases} \Gamma_1 (C_1) : A_{b,r} = 0 \\ \Gamma_2 (C_2) : \frac{\partial (r A_{b,r})}{\partial r} = 0 \\ \Gamma_3 (C_3) : \frac{\partial A_{b,r}}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{b,r}}{\partial t} \\ C_4 : A_{b,r} = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} (2.3.36)_1 \\ (2.3.36)_2 \\ (2.3.36)_3 \\ (2.3.36)_4 \end{array}$$

$A_{b,\theta}$  の場合と同じく、(2.3.35)式の左辺第二項について、このまま体積積分すると  $z$  軸上 ( $r=0$ ) において被積分関数が発散する。そこで、この式の両辺に  $r$  を掛けて

$$r \nabla^2 A_{b,r} - \frac{A_{b,r}}{r} - \frac{1}{c^2} r \ddot{A}_{b,r} = -\mu_0 r J_r \quad (2.3.37)$$

さらに、 $\Gamma_2 (C_2)$  におけるNeumann条件が  $r A_{b,r}$  の法線方向微分で与えられているので以下の式変形を行う。すなわち、

$$\begin{aligned} \nabla^2 (r A_{b,r}) &= \nabla \cdot \nabla (r A_{b,r}) \\ &= \nabla \cdot (r \nabla A_{b,r} + A_{b,r} \nabla r) \\ &= r \nabla^2 A_{b,r} + 2 \nabla r \cdot \nabla A_{b,r} \quad (\because \nabla^2 r = 0) \\ &= r \nabla^2 A_{b,r} + 2 \frac{\partial A_{b,r}}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\therefore r \nabla^2 A_{b,r} = \nabla^2 (r A_{b,r}) - 2 \frac{\partial A_{b,r}}{\partial r}, \quad (2.3.38)$$

これを(2.3.37)式に代入して、

$$\nabla^2 (r A_{b,r}) - 2 \frac{\partial A_{b,r}}{\partial r} - \frac{A_{b,r}}{r} - \frac{1}{c^2} r \ddot{A}_{b,r} = -\mu_0 r J_r \quad (2.3.39)$$

この式の両辺に

$$\Gamma_1 \cup C_4 : v = 0 \quad (2.3.40)$$

なる重み関数  $v$  を掛けて  $\Omega$  上で体積積分すると、

$$\int_{\Omega} v \nabla^2(r A_{b,r}) dV - 2 \int_{\Omega} v \frac{\partial A_{b,r}}{\partial r} dV - \int_{\Omega} \frac{v A_{b,r}}{r} dV - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} r v \ddot{A}_{b,r} dV = -\mu_0 \int_{\Omega} r v J_r dV \quad (2.3.41)$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺第一項}) &= \int_{\Omega} v \nabla^2(r A_{b,r}) dV \\ &= \int_{\Gamma} v \frac{\partial(r A_{b,r})}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(r A_{b,r}) dV \\ &= -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r v \dot{A}_{b,r} dS - \int_{\Omega} \left( r \nabla v \cdot \nabla A_{b,r} + \frac{\partial v}{\partial r} A_{b,r} \right) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{\Omega} \left( r \nabla v \cdot \nabla A_{b,r} + \frac{\partial v}{\partial r} A_{b,r} + 2v \frac{\partial A_{b,r}}{\partial r} + \frac{v A_{b,r}}{r} \right) dV \\ + \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r v \dot{A}_{b,r} dS + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} r v \ddot{A}_{b,r} dV = \mu_0 \int_{\Omega} r v J_r dV \quad (2.3.42) \end{aligned}$$

ここで、 $A_{b,r}$  および  $v$  が 2.3.1 節で定義した  $m$  個の基底関数  $\psi_i$  の一次結合で表されると仮定する。

$$A_{b,r}(r, z) = \sum_i \alpha_{r,i}(t) \psi_i(r, z) \quad (2.3.43)_1$$

$$v(r, z) = \sum_i \beta_i \psi_i(r, z) \quad (2.3.43)_2$$

ただし  $A_{b,r}$  および  $v$  が (2.3.36)<sub>1</sub>、(2.3.36)<sub>4</sub>、(2.3.40) 式を満たすために、節点  $i$  が  $\Gamma_1 \cup C_4$  上にあるときは

$$\alpha_{r,i} = \beta_i = 0 \quad (r, z) \in \Gamma_1 \cup C_4 \quad (2.3.44)$$

とする。任意の  $j$  に対して次式が成り立つ。

for  $\forall j$

$$\begin{aligned} &\sum_i \alpha_{r,i} \int_{\Omega} \left( r \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i + \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \psi_i + 2\psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\psi_j \psi_i}{r} \right) dV \\ &+ \frac{1}{c} \sum_i \dot{\alpha}_{r,i} \int_{\Gamma_3} r \psi_j \psi_i dS + \frac{1}{c^2} \sum_i \ddot{\alpha}_{r,i} \int_{\Omega} r \psi_j \psi_i dV \\ &= \mu_0 \int_{\Omega} r \psi_j J_r dV \quad (2.3.45) \end{aligned}$$

$\alpha_{r,i}$  を縦に並べたベクトルを  $\alpha_r$  として、マトリクスで表すと

$$L_r \alpha_r + M_r \dot{\alpha}_r + N_r \ddot{\alpha}_r = f_r \quad (2.3.46)_0$$

$$\begin{cases} L_{r,i,j} = \int_{\Omega} \left( r \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i + \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \psi_i + 2\psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \frac{\psi_j \psi_i}{r} \right) dV \end{cases} \quad (2.3.46)_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{r, i; j} = \frac{1}{c} \int_{\Gamma_3} r \psi_i \psi_j dS \\ n_{r, i; j} = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} r \psi_i \psi_j dV \\ f_{r, i} = \mu_0 \int_{\Omega} r \psi_i J_r dV \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.3.46)_2 \\ (2.3.46)_3 \\ (2.3.46)_4 \end{array}$$

## 2.3.3 係数行列の計算

前節で導いたマトリクス常微分方程式 ((2.3.24)、(2.3.34)、(2.3.46)式) の係数行列の積分を、2.3.1節で示した局所座標の積分公式を用いて計算する。係数行列は、節点の座標のみで与えられ、時刻  $t$  に依らない。

(1)  $A_{b,z}$  ( $\phi_b$ )

(1-1)  $L_z$  の計算

$L_z$  は (2.3.24)<sub>1</sub> 式で与えられた。すなわち、

$$\begin{aligned} L_{z, i; j} &= \int_{\Omega} \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dV \\ &= \int_{\Omega} r \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dr d\theta dz \\ &= 2\pi \int_{\Sigma} r \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right) dr dz \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が隣合うか一致する場合以外では 0 である。すなわち、

$$L_{z, i; j} = 0 \quad (i \neq j \text{ で、節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が隣合っていない}) \quad (2.3.48)$$

$i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が隣合っている場合は、図 2.6(a) の  $e_1, e_2$  以外では被積分関数は 0 であるから、

$$L_{z, i; j} = 2\pi \sum_{k=1}^2 \int_{e_k} r \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right) dr dz \equiv 2\pi \sum_{k=1}^2 L_{z, i; j}^{(k)} \quad (2.3.49)$$

要素  $e_1$  について図 2.6(a) のように局所節点番号 1, 2, 3 をつけると、 $e_1$  内では面積座標 (2.3.1節参照) を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad \psi_j = \xi_2, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.50)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
l_{z,i}^{(1)} &\equiv \int_{e_1} r \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \right) dr dz \\
&= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial r} \frac{\partial \xi_2}{\partial r} + \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \right) dr dz \\
&= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) (b_1 b_2 + c_1 c_2) dr dz \quad (\because (2.3.2) \text{式}) \\
&= (b_1 b_2 + c_1 c_2) \sum_{k=1}^3 r_k \int_{e_1} \xi_k dr dz \\
&= (b_1 b_2 + c_1 c_2) (r_1 + r_2 + r_3) \frac{S}{3} \quad (\because (2.3.5) \text{式}) \\
&= \frac{1}{12S} \{(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) + (r_2 - r_3)(r_3 - r_1)\} (r_1 + r_2 + r_3) \\
&= \frac{(r_i + r_j + r_k) \{(r_i - r_j)(r_j - r_k) + (z_i - z_j)(z_j - z_k)\}}{6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}} \quad (2.3.51)
\end{aligned}$$

要素  $e_2$  についても同様にして、

$$l_{z,j}^{(2)} = \frac{(r_i + r_j + r_k) \{(r_i - r_k)(r_k - r_j) + (z_i - z_k)(z_k - z_j)\}}{6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}} \quad (2.3.52)$$

次に、節点  $i$  と節点  $j$  が一致する場合は、図2.6(b)の  $e_1 \sim e_6$  以外では被積分関数は0であるから、

$$l_{z,i} = 2\pi \sum_{k=1}^6 \int_{e_k} r \left\{ \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right)^2 \right\} dr dz \equiv 2\pi \sum_{k=1}^6 l_{z,k}^{(k)} \quad (2.3.53)$$

例えば、要素  $e_1$  について図2.6(b)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.54)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
l_{z,i}^{(1)} &\equiv \int_{e_1} r \left\{ \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right)^2 \right\} dr dz \\
&= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \left\{ \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dr dz \\
&= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) (b_1^2 + c_1^2) dr dz \\
&= (b_1^2 + c_1^2) \sum_{k=1}^3 r_k \int_{e_1} \xi_k dr dz \\
&= (b_1^2 + c_1^2) (r_1 + r_2 + r_3) \frac{S}{3} \\
&= \frac{1}{12S} \{(z_2 - z_3)^2 + (r_2 - r_3)^2\} (r_1 + r_2 + r_3)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(r_i + r_1 + r_0) \{ (r_i - r_0)^2 + (z_i - z_0)^2 \}}{6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_1 & r_0 \\ z_i & z_1 & z_0 \end{vmatrix}} \quad (2.3.55)$$

(1-2)  $M_z$  の計算

$M_z$  は (2.3.24)<sub>2</sub> 式で与えられた。すなわち、

$$\begin{aligned} m_{z,ij} &= \frac{1}{c} \int_{C_3} \psi_i \psi_j dS \\ &= \frac{1}{c} \int_{C_3} r \psi_i \psi_j dr d\theta \\ &= \frac{2\pi}{c} \int_{C_3} r \psi_i \psi_j dr \end{aligned} \quad (2.3.56)$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が共に  $C_3$  上で隣合うか一致する場合以外では0である。すなわち、

$$m_{z,ij}=0 \quad (\text{節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が共に } C_3 \text{ 上で隣合うか一致する場合以外}) \quad (2.3.57)$$

$i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が共に  $C_3$  上で隣合っている場合は、図2.7(a)の線分  $l$  上以外では被積分関数は0であるから、

$$m_{z,ij} = \frac{2\pi}{c} \int_l r \psi_i \psi_j dr \quad (2.3.58)$$

線分  $l$  について図2.7(a)のように局所節点番号1、2をつけると、 $l$  上では長さ座標 (2.3.1節参照) を用いて、

$$\psi_i = \zeta_1, \quad \psi_j = \zeta_2, \quad r = r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 \quad (2.3.59)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} m_{z,ij} &= \frac{2\pi}{c} \int_l (r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2) \zeta_1 \zeta_2 dr \\ &= \frac{2\pi}{c} \left( r_1 \int_l \zeta_1^2 \zeta_2 dr + r_2 \int_l \zeta_1 \zeta_2^2 dr \right) \\ &= \frac{2\pi}{c} (r_1 + r_2) \frac{d}{12} \\ &= \frac{2\pi}{c} \frac{1}{12} (r_1 + r_2)(r_2 - r_1) \\ &= \frac{2\pi}{c} \frac{1}{12} (r_i + r_j)(r_j - r_i) \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

次に、 $i=j$  で  $C_3$  上にある場合は、図2.7(b)の線分  $l_1$ 、 $l_2$  以外では被積分関数は0であるから、

$$m_{z,i} = \frac{2\pi}{C} \sum_{k=1}^2 \int_{l_k} r \psi_i^2 dr \equiv \frac{2\pi}{C} \sum_{k=1}^2 m_{z,i}^{(k)} \quad (2.3.61)$$

線分  $l_1$  について図2.7(b)のように局所節点番号1、2をつけると、 $l_1$  上では長さ座標を用いて、

$$\psi_i = \zeta_1, \quad r = r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 \quad (2.3.62)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} m_{z,i}^{(1)} &\equiv \int_{l_1} r \psi_i^2 dr \\ &= \int_{l_1} (r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2) \zeta_1^2 dr \\ &= r_1 \int_{l_1} \zeta_1^3 dr + r_2 \int_{l_1} \zeta_1^2 \zeta_2 dr \\ &= r_1 \frac{d}{4} + r_2 \frac{d}{12} \\ &= \frac{1}{12} (3r_1 + r_2)(r_2 - r_1) \\ &= \frac{1}{12} (3r_i + r_1)(r_1 - r_i) \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

線分  $l_2$  についても同様にして、

$$m_{z,i}^{(2)} = \frac{1}{12} (3r_i + r_0)(r_i - r_0) \quad (2.3.64)$$

### (1-3) $N_z$ の計算

$N_z$  は(2.3.24)s式で与えられた。すなわち、

$$\begin{aligned} n_{z,ij} &= \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dV \\ &= \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} r \psi_i \psi_j dr d\theta dz \\ &= \frac{2\pi}{C^2} \int_{\Sigma} r \psi_i \psi_j dr dz \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が隣合うか一致する場合以外では0である。すなわち、

$$n_{z,ij} = 0 \quad (i \neq j \text{ で、節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が隣合っていない}) \quad (2.3.66)$$

$i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が隣合っている場合は、図2.6(a)の  $e_1, e_2$  以外では被積分関

数は0であるから、

$$n_{z,i,j} = \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^2 \int_{e_k} r \psi_i \psi_j dr dz \equiv \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^2 n_{z,k,i,j} \quad (2.3.67)$$

要素  $e_1$  について図2.6(a)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad \psi_j = \xi_2, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.68)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} n_{z,i,j} &\equiv \int_{e_1} r \psi_i \psi_j dr dz \\ &= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \xi_1 \xi_2 dr dz \\ &= r_1 \int_{e_1} \xi_1^2 \xi_2 dr dz + r_2 \int_{e_1} \xi_1 \xi_2^2 dr dz + r_3 \int_{e_1} \xi_1 \xi_2 \xi_3 dr dz \\ &= r_1 \frac{S}{30} + r_2 \frac{S}{30} + r_3 \frac{S}{60} \\ &= \frac{1}{120} (2r_i + 2r_j + r_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_1 \\ z_i & z_j & z_1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

要素  $e_2$  についても同様にして、

$$n_{z,i,j} = \frac{1}{120} (2r_i + 2r_j + r_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_j & r_i & r_1 \\ z_j & z_i & z_1 \end{vmatrix} \quad (2.3.70)$$

次に、節点  $i$  と節点  $j$  が一致する場合は、図2.6(b)の  $e_1 \sim e_6$  以外では被積分関数は0であるから、

$$n_{z,i,i} = \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^6 \int_{e_k} r \psi_i^2 dr dz \equiv \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^6 n_{z,k,i,i} \quad (2.3.71)$$

例えば、要素  $e_1$  について図2.6(b)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.72)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} n_{z,i,i} &\equiv \int_{e_1} r \psi_i^2 dr dz \\ &= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \xi_1^2 dr dz \\ &= r_1 \int_{e_1} \xi_1^3 dr dz + r_2 \int_{e_1} \xi_1^2 \xi_2 dr dz + r_3 \int_{e_1} \xi_1^2 \xi_3 dr dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_1 \frac{S}{10} + r_2 \frac{S}{30} + r_3 \frac{S}{30} \\
&= \frac{1}{60} (3r_1 + r_2 + r_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{2.3.73}$$

(2)  $A_{b,\theta}$ (2-1)  $L_\theta$  の計算 $L_\theta$  は(2.3.34)式で与えられた。すなわち、

$$\begin{aligned}
l_{\theta,ij} &= \int_{\Omega} \left( r \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \psi_i \psi_j \right) dV \\
&= \int_{\Omega} \left( r^2 \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + r \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \psi_i \psi_j \right) dr d\theta dz \\
&= 2\pi \int_{\Sigma} \left( r^2 \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + r \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \psi_i \psi_j \right) dr dz
\end{aligned} \tag{2.3.74}$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が隣合うか一致する場合以外では0である。すなわち、

$$l_{\theta,ij} = 0 \quad (i \neq j \text{ で、節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が隣合っていない}) \tag{2.3.75}$$

 $i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が隣合っている場合は、図2.6(a)の  $e_1, e_2$  以外では被積分関数は0であるから、

$$\begin{aligned}
l_{\theta,ij} &= 2\pi \sum_{k=1}^2 \int_{e_k} \left( r^2 \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + r \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \psi_i \psi_j \right) dr dz \\
&\equiv 2\pi \sum_{k=1}^2 l_{\theta,k}^{(k)}_{ij}
\end{aligned} \tag{2.3.76}$$

要素  $e_1$  について図2.6(a)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標(2.3.1節参照)を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad \psi_j = \xi_2, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \tag{2.3.77}$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
l_{\theta,k}^{(1)}_{ij} &\equiv \int_{e_1} \left( r^2 \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j + r \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} + \psi_i \psi_j \right) dr dz \\
&= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3)^2 (b_1 b_2 + c_1 c_2) dr dz \\
&\quad + \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \xi_1 b_2 dr dz + \int_{e_1} \xi_1 \xi_2 dr dz
\end{aligned} \tag{2.3.78}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(第一項)} &= (b_1 b_2 + c_1 c_2) \left\{ 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \frac{S}{12} + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \frac{S}{6} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} S (b_1 b_2 + c_1 c_2) (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \\
 &= \frac{(r_2 - r_3)(r_3 - r_1) + (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)}{12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix}} \\
 &\quad \times (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \tag{2.3.78}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(第二項)} &= b_2 \left( r_1 \frac{S}{6} + r_2 \frac{S}{12} + r_3 \frac{S}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{12} b_2 S (2r_1 + r_2 + r_3) \\
 &= \frac{1}{24} (2r_i + r_j + r_k) (z_i - z_j) \tag{2.3.78}_2
 \end{aligned}$$

$$\text{(第三項)} = \frac{S}{12} = \frac{1}{24} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix} \tag{2.3.78}_3$$

要素  $e_2$  について同様にすれば、 $L_{\delta_{ij}}^{(2)}$  は (2.3.78)<sub>1</sub> ~ (2.3.78)<sub>3</sub> 式において  $i \rightarrow j$  、  
 $j \rightarrow i$  、  $I \rightarrow II$  とした式で与えられる。

次に、節点  $i$  と節点  $j$  が一致する場合は、図 2.6(b) の  $e_1$  ~  $e_6$  以外では被積分関数は 0 であるから、

$$\begin{aligned}
 L_{\delta_{ii}} &= 2\pi \sum_{k=1}^6 \int_{e_k} \left( r^2 \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_i + r \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \psi_i^2 \right) dr dz \\
 &\equiv 2\pi \sum_{k=1}^6 L_{\delta_{ii}^k} \tag{2.3.79}
 \end{aligned}$$

例えば、要素  $e_1$  について図 2.6(b) のように局所節点番号 1, 2, 3 をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \tag{2.3.80}$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
 L_{\delta_{ii}^1} &\equiv \int_{e_1} \left( r^2 \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_i + r \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r} + \psi_i^2 \right) dr dz \\
 &= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3)^2 (b_1^2 + c_1^2) dr dz \\
 &\quad + \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \xi_1 b_1 dr dz + \int_{e_1} \xi_1^2 dr dz \tag{2.3.81}_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(第一項)} &= (b_1^2 + c_1^2) \left\{ 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \frac{S}{12} + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \frac{S}{6} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} S (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \\
 &= \frac{(r_1 - r_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}{12 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_1 & r_0 \\ z_i & z_1 & z_0 \end{vmatrix}} \\
 &\times (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1) \tag{2.3.81}_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(第二項)} &= b_1 \left( r_1 \frac{S}{6} + r_2 \frac{S}{12} + r_3 \frac{S}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{12} b_1 S (2r_1 + r_2 + r_3) \\
 &= \frac{1}{24} (2r_1 + r_2 + r_3) (z_1 - z_0) \tag{2.3.81}_2
 \end{aligned}$$

$$\text{(第三項)} = \frac{S}{6} = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_1 & r_0 \\ z_i & z_1 & z_0 \end{vmatrix} \tag{2.3.81}_3$$

## (2-2) $M_\theta$ の計算

$M_\theta$  は (2.3.34)<sub>2</sub> 式で与えられた。すなわち、

$$\begin{aligned}
 m_{\theta, ij} &= \frac{1}{c} \int_{C_3} r \psi_i \psi_j dS \\
 &= \frac{1}{c} \int_{C_3} r^2 \psi_i \psi_j dr dz \\
 &= \frac{2\pi}{c} \int_{C_3} r^2 \psi_i \psi_j dr \tag{2.3.82}
 \end{aligned}$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が共に  $C_3$  上で隣合うか一致する場合以外では 0 である。すなわち、

$$m_{\theta, ij} = 0 \quad (\text{節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が共に } C_3 \text{ 上で隣合うか一致する場合以外}) \tag{2.3.83}$$

$i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が共に  $C_3$  上で隣合っている場合は、図 2.7(a) の線分  $l$  上以外では被積分関数は 0 であるから、

$$m_{\theta, ij} = \frac{2\pi}{c} \int_l r^2 \psi_i \psi_j dr \tag{2.3.84}$$

線分  $l$  について図 2.7(a) のように局所節点番号 1, 2 をつけると、 $l$  上では長さ座標を用いて、

$$\psi_i = \zeta_1, \quad \psi_j = \zeta_2, \quad r = r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 \quad (2.3.85)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} m_{\theta, ii} &= \frac{2\pi}{c} \int_C (r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2)^2 \zeta_1 \zeta_2 dr \\ &= \frac{2\pi}{c} \left( r_1^2 \frac{d}{20} + 2r_1 r_2 \frac{d}{30} + r_2^2 \frac{d}{20} \right) \\ &= \frac{2\pi}{c} \frac{d}{60} (3r_1^2 + 4r_1 r_2 + 3r_2^2) \\ &= \frac{2\pi}{c} \frac{1}{60} (3r_i^2 + 4r_i r_j + 3r_j^2) (r_i - r_j) \end{aligned} \quad (2.3.86)$$

次に、 $i = j$  で  $C_3$  上にある場合は、図2.7(b)の線分  $l_1$ 、 $l_2$  以外では被積分関数は0であるから、

$$m_{\theta, ii} = \frac{2\pi}{c} \sum_{k=1}^2 \int_{l_k} r^2 \psi_i^2 dr \equiv \frac{2\pi}{c} \sum_{k=1}^2 m_{\theta, ik}^{(k)} \quad (2.3.87)$$

線分  $l_1$  について図2.7(b)のように局所節点番号1, 2をつけると、 $l_1$  上では長さ座標を用いて、

$$\psi_i = \zeta_1, \quad r = r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2 \quad (2.3.88)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} m_{\theta, ik}^{(1)} &\equiv \int_{l_1} r^2 \psi_i^2 dr \\ &= \int_{l_1} (r_1 \zeta_1 + r_2 \zeta_2)^2 \zeta_1^2 dr \\ &= r_1^2 \frac{d}{5} + 2r_1 r_2 \frac{d}{20} + r_2^2 \frac{d}{30} \\ &= \frac{1}{30} (6r_1^2 + 3r_1 r_2 + r_2^2) d \\ &= \frac{1}{30} (6r_i^2 + 3r_i r_j + r_j^2) (r_i - r_j) \end{aligned} \quad (2.3.89)$$

線分  $l_2$  についても同様にして、

$$m_{\theta, ik}^{(2)} = \frac{1}{30} (6r_i^2 + 3r_i r_j + r_j^2) (r_i - r_j) \quad (2.3.90)$$

### (2-3) $N_\theta$ の計算

$N_\theta$  は(2.3.34)<sub>3</sub>式で与えられた。すなわち、

$$\begin{aligned}
 n_{\theta, ij} &\equiv \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} r \psi_i \psi_j dV \\
 &= \frac{1}{C^2} \int_{\Omega} r^2 \psi_i \psi_j dr d\theta dz \\
 &= \frac{2\pi}{C^2} \int_{\Sigma} r^2 \psi_i \psi_j dr dz
 \end{aligned} \tag{2.3.91}$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が隣合うか一致する場合以外では0である。すなわち、

$$n_{\theta, ij} = 0 \quad (i \neq j \text{ で、節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が隣合っていない}) \tag{2.3.92}$$

$i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が隣合っている場合は、図2.6(a)の  $e_1, e_2$  以外では被積分関数は0であるから、

$$n_{\theta, ij} = \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^2 \int_{e_k} r^2 \psi_i \psi_j dr dz \equiv \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^2 n_{\theta, ij}^{(k)} \tag{2.3.93}$$

要素  $e_1$  について図2.6(a)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad \psi_j = \xi_2, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \tag{2.3.94}$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
 n_{\theta, ij}^{(1)} &\equiv \int_{e_1} r^2 \psi_i \psi_j dr dz \\
 &= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3)^2 \xi_1 \xi_2 dr dz \\
 &= \frac{S}{180} (3r_1^2 + 3r_2^2 + r_3^2 + 4r_1 r_2 + 2r_2 r_3 + 2r_3 r_1) \\
 &= \frac{1}{360} (3r_1^2 + 3r_2^2 + r_3^2 + 4r_1 r_2 + 2r_2 r_3 + 2r_3 r_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_1 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.3.95}$$

要素  $e_2$  についても同様にして、

$$n_{\theta, ij}^{(2)} = \frac{1}{360} (3r_2^2 + 3r_3^2 + r_1^2 + 4r_2 r_3 + 2r_3 r_1 + 2r_1 r_2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_2 & r_3 & r_1 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} \tag{2.3.96}$$

次に、節点  $i$  と節点  $j$  が一致する場合は、図2.6(b)の  $e_1 \sim e_6$  以外では被積分関数は0であるから、

$$n_{\theta, ii} = \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^6 \int_{e_k} r^2 \psi_i^2 dr dz \equiv \frac{2\pi}{C^2} \sum_{k=1}^6 n_{\theta, ii}^{(k)} \tag{2.3.97}$$

例えば、要素  $e_1$  について図2.6(b)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.98)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} n_{\theta, i}^{(1)} &\equiv \int_{e_1} r^2 \psi_i^2 dr dz \\ &= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3)^2 \xi_1^2 dr dz \\ &= \frac{1}{90} S (6r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 3r_1 r_2 + r_2 r_3 + 3r_3 r_1) \\ &= \frac{1}{180} (6r_i^2 + r_1^2 + r_2^2 + 3r_i r_1 + r_1 r_2 + 3r_1 r_2) \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ z_i & z_1 & z_2 \end{array} \right| \quad (2.3.99) \end{aligned}$$

(3)  $A_{b,r}$

(3-1)  $L_r$  の計算

(2.3.34), および(2.3.46), 式より、

$$l_{r, ij} = l_{\theta, ij} + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) dV \equiv l_{\theta, ij} + \tilde{l}_{r, ij} \quad (2.3.100)$$

$$\begin{aligned} \tilde{l}_{r, ij} &\equiv \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) dV \\ &= 2\pi \int_{\Sigma} r \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) dr dz \quad (2.3.101) \end{aligned}$$

被積分関数は、節点  $i$  と節点  $j$  が隣合うか一致する場合以外では0である。すなわち、

$$\tilde{l}_{r, ij} = 0 \quad (i \neq j \text{ で、節点 } i \text{ と節点 } j \text{ が隣合っていない}) \quad (2.3.102)$$

$i \neq j$  で節点  $i$  と節点  $j$  が隣合っている場合は、図2.6(a)の  $e_1, e_2$  以外では被積分関数は0であるから、

$$\tilde{l}_{r, ij} = 2\pi \sum_{k=1}^2 \int_{e_k} r \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) dr dz \equiv 2\pi \sum_{k=1}^2 \tilde{l}_{r, ik}^{(k)}, \quad (2.3.103)$$

要素  $e_1$  について図2.6(a)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad \psi_j = \xi_2, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.103)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{I}}_{r,i}^{(1)} &\equiv \int_{e_1} r \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \psi_j + \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \right) dr dz \\
&= \int_{e_1} (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) (b_1 \xi_2 + b_2 \xi_1) dr dz \\
&= \frac{1}{12} S \{(b_1 + 2b_2)r_1 + (2b_1 + b_2)r_2 + (b_1 + b_2)r_3\} \\
&= \frac{1}{24} \{r_i(-2z_i + z_j + z_1) + r_j(-z_i + 2z_j - z_1) + r_1(-z_i + z_j)\}
\end{aligned} \tag{2.3.104}$$

要素  $e_2$  についても同様にして、

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{r,i}^{(2)} = \frac{1}{24} \{r_i(-2z_i + z_j + z_1) + r_j(-z_i + 2z_j - z_1) + r_1(-z_i + z_j)\} \tag{2.3.105}$$

次に、節点  $i$  と節点  $j$  が一致する場合は、図2.6(b)の  $e_1 \sim e_6$  以外では被積分関数は0であるから、

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{r,i} = 2\pi \sum_{k=1}^6 \int_{e_k} 2r \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r} dr dz \equiv 2\pi \sum_{k=1}^6 \widetilde{\mathcal{I}}_{r,i}^{(k)} \tag{2.3.106}$$

例えば、要素  $e_1$  について図2.6(b)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \tag{2.3.107}$$

と表されるから、

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{I}}_{r,i}^{(1)} &\equiv \int_{e_1} 2r \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial r} dr dz \\
&= \int_{e_1} 2(r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) \xi_1 b_1 dr dz \\
&= \frac{1}{6} b_1 S (2r_1 + r_2 + r_3) \\
&= \frac{1}{12} (2r_i + r_1 + r_2) (z_1 - z_1)
\end{aligned} \tag{2.3.108}$$

### (3-2) $M_r$ の計算

(2.3.34)<sub>2</sub> および (2.3.46)<sub>2</sub> 式より、

$$M_r = M_\theta \tag{2.3.109}$$

(3-3)  $N_r$  の計算(2.3.34)<sub>3</sub> および (2.3.46)<sub>3</sub> 式より、

$$N_r = N_s \quad (2.3.110)$$

2.3.4 自由項ベクトル  $f$  の計算(2.3.24)、(2.3.34)、(2.3.46)式の自由項ベクトル  $f_z$  ( $f_\phi$ )、 $f_\theta$ 、 $f_r$  は、時刻  $t$  における  $\rho$ 、 $J$  で与えられる。 $f_z$  について、(2.3.24)<sub>4</sub> 式より

$$\begin{aligned} f_{z,i} &\equiv \mu_0 \int_{\Omega} \psi_i J_z dV \\ &= 2\pi \mu_0 \int_{\Sigma} r \psi_i J_z dr dz \end{aligned}$$

図2.6(b)の  $e_1 \sim e_6$  以外では被積分関数は0であるから、

$$f_{z,i} = 2\pi \mu_0 \sum_{k=1}^6 \int_{e_k} r \psi_i J_z dr dz \equiv 2\pi \mu_0 \sum_{k=1}^6 f_{z,k} \quad (2.3.111)$$

例えば、要素  $e_1$  について図2.6(b)のように局所節点番号1、2、3をつけると、 $e_1$  内では面積座標を用いて、

$$\psi_i = \xi_1, \quad r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3 \quad (2.3.112)$$

と表されるから、

$$\begin{aligned} f_{z,k} &\equiv \int_{e_1} r \psi_k J_z dr dz \\ &= \int_{e_1} r \xi_1 J_z dr dz \end{aligned} \quad (2.3.113)$$

ここで、要素  $e_1$  内に粒子  $v$  (電荷  $q$ 、位置  $(r_v, z_v)$ 、速度  $(v_{v,r}, v_{v,\theta}, v_{v,z})$ ) があるとすると、 $e_1$  内においては、

$$J_z = q \sum_v v_{v,z} \delta(r - r_v) \delta(z - z_v)$$

よって、

$$\begin{aligned} f_{z,k} &= q \sum_v r_v \xi_k (r_v, z_v) v_{v,z} \\ &= q \sum_v r_v v_{v,z} \{(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r_v (z_1 - z_2) + z_v (r_2 - r_1)\} \end{aligned} \quad (2.3.114)$$

同様に、

$$f_{\phi, i} = \frac{2\pi}{\varepsilon_0} \sum_{k=1}^6 f_{\phi_i}^{(k)}$$

$$f_{\phi_i}^{(1)} = q \sum_{\nu} r_{\nu} \{(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r_{\nu} (z_1 - z_2) + z_{\nu} (r_2 - r_1)\} \quad (2.3.115)$$

$$f_{\theta, i} = 2\pi \mu_0 \sum_{k=1}^6 f_{\theta_i}^{(k)}$$

$$f_{\theta_i}^{(1)} = q \sum_{\nu} r_{\nu} v_{\nu, \theta} \{(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r_{\nu} (z_1 - z_2) + z_{\nu} (r_2 - r_1)\} \quad (2.3.116)$$

$$f_{\tau, i} = 2\pi \mu_0 \sum_{k=1}^6 f_{\tau_i}^{(k)}$$

$$f_{\tau_i}^{(1)} = q \sum_{\nu} r_{\nu} v_{\nu, \tau} \{(r_1 z_2 - r_2 z_1) + r_{\nu} (z_1 - z_2) + z_{\nu} (r_2 - r_1)\} \quad (2.3.117)$$

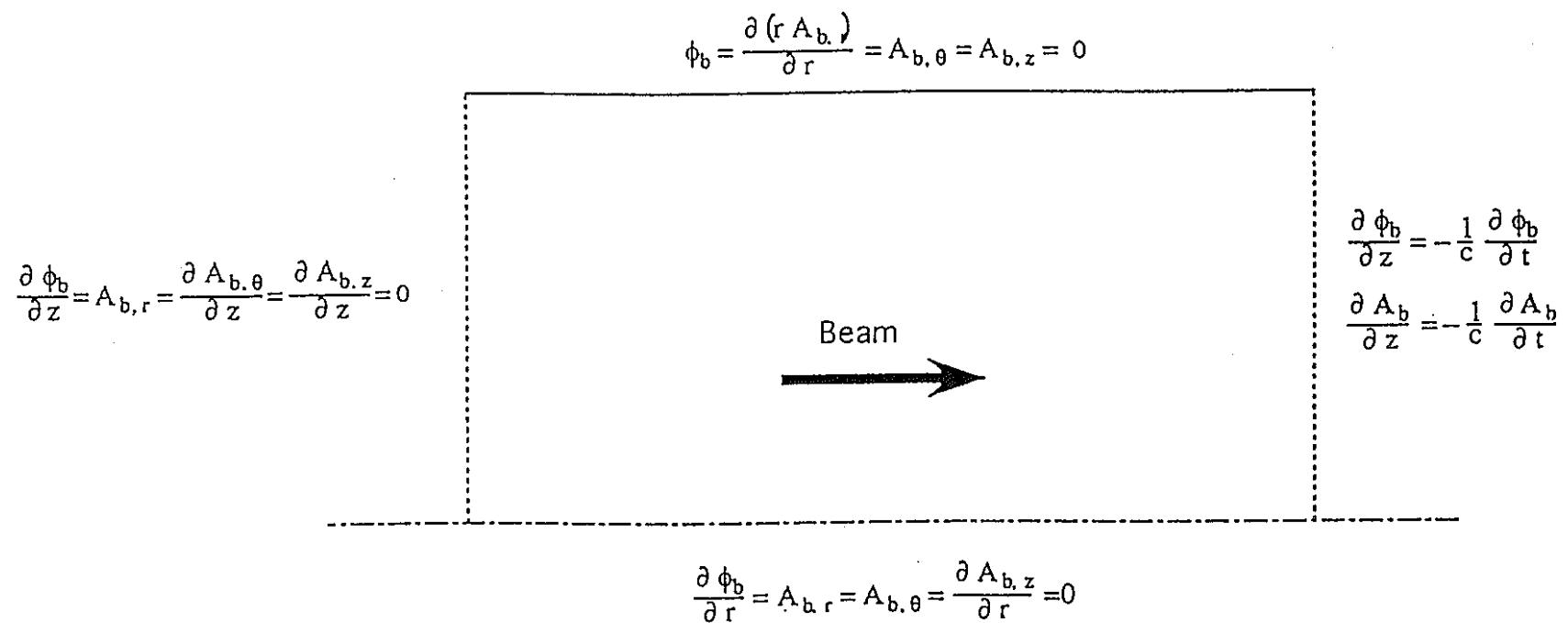


図2.1 境界条件

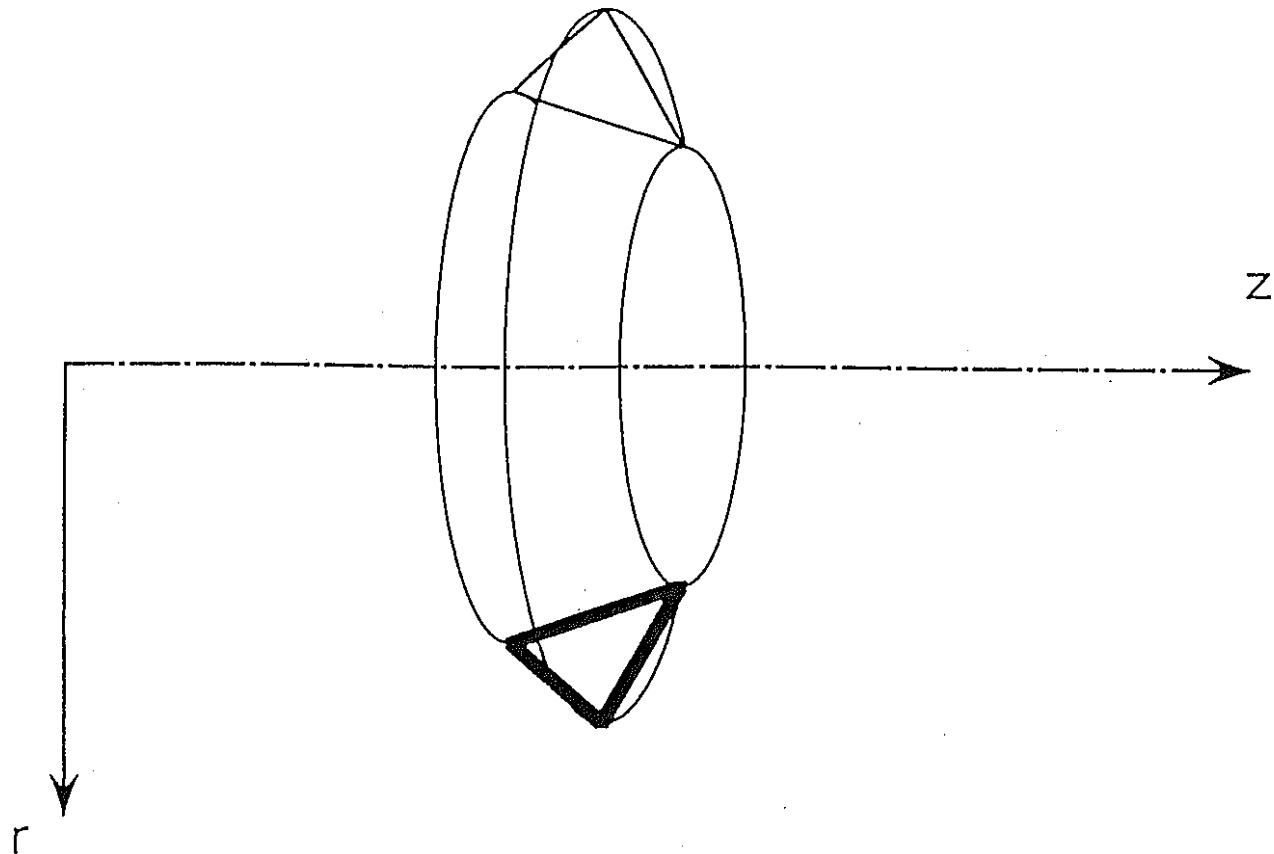
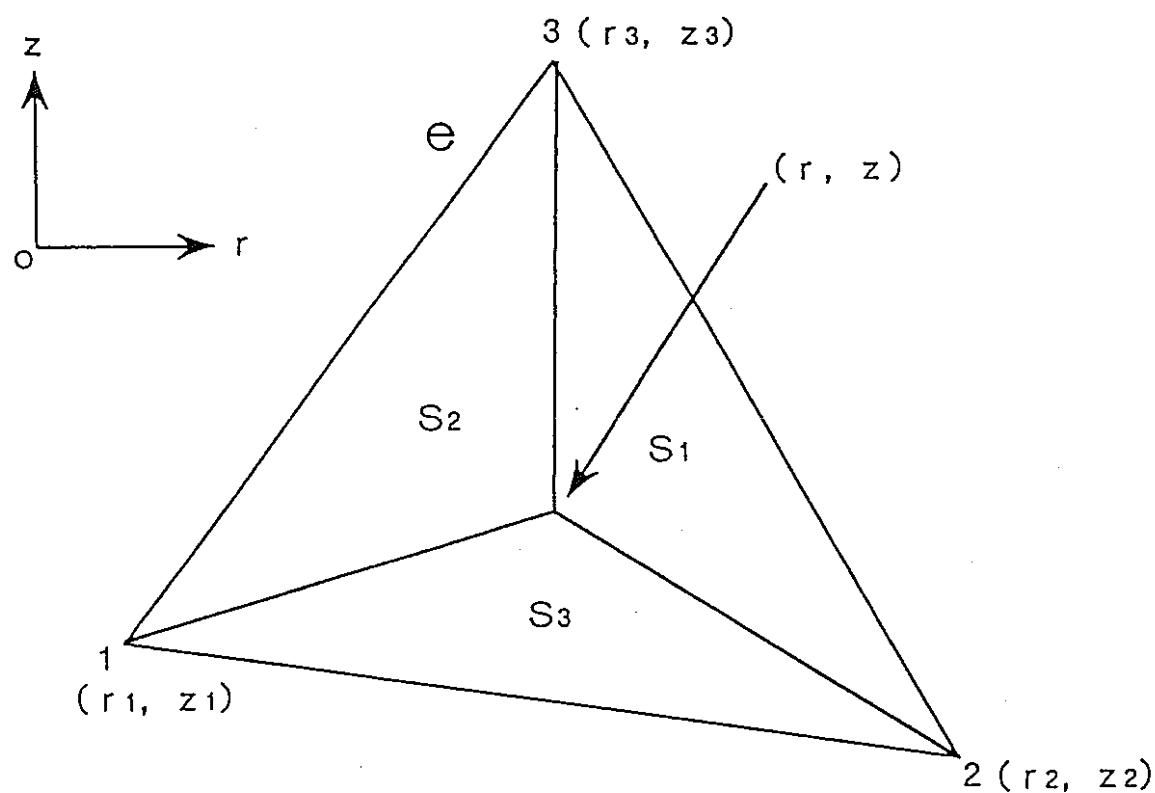
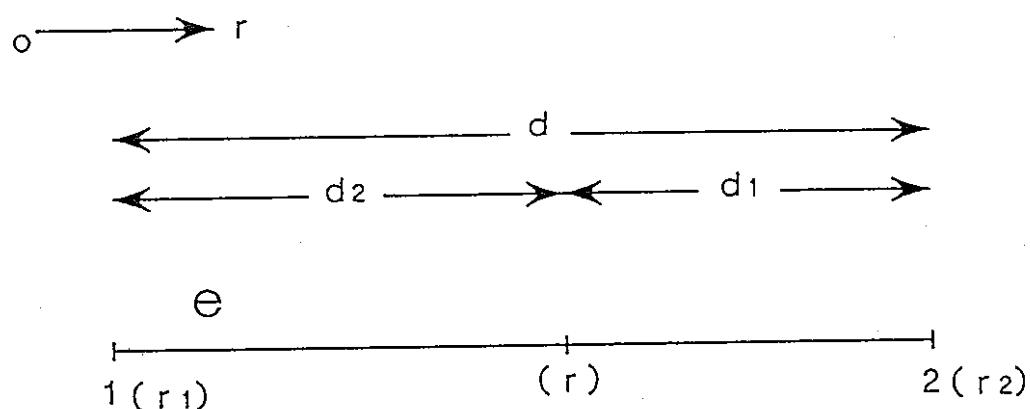


図2.2 要素分割

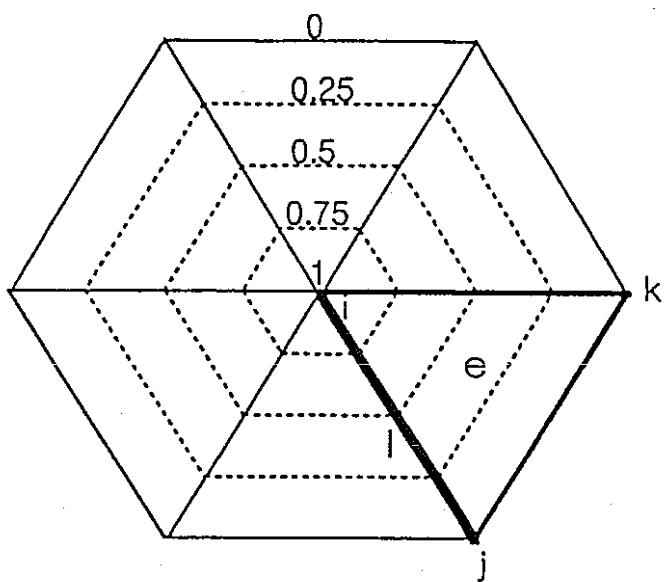


(a) 面積座標

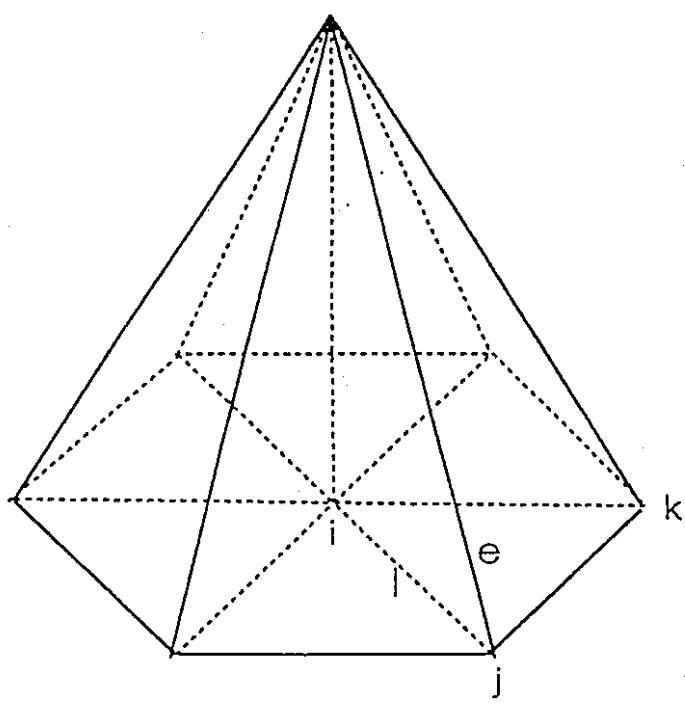


(b) 長さ座標

図2.3 局所座標



(a) 等高線図



(b) 透視図

図2.4 基底関数 $\psi_i$

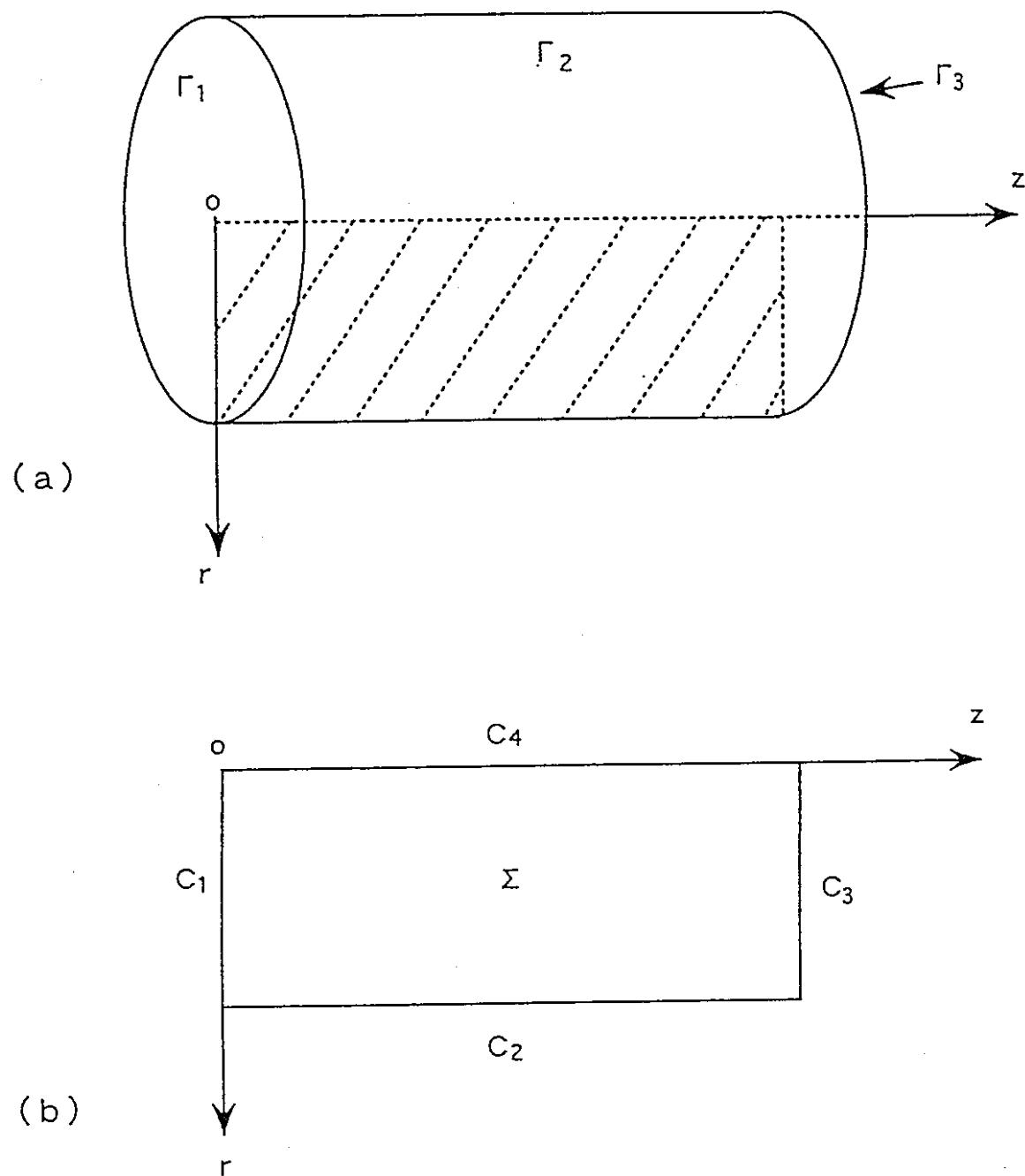
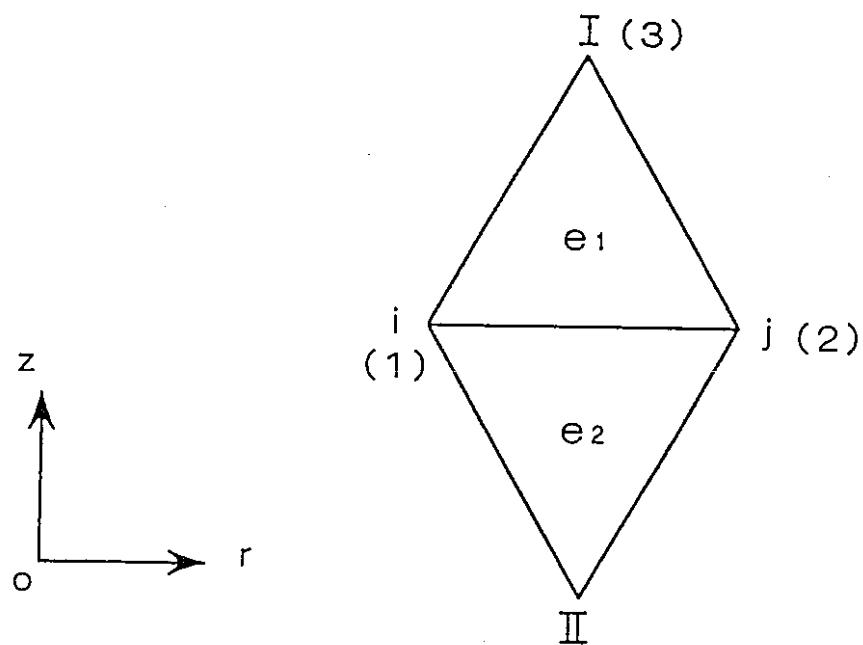
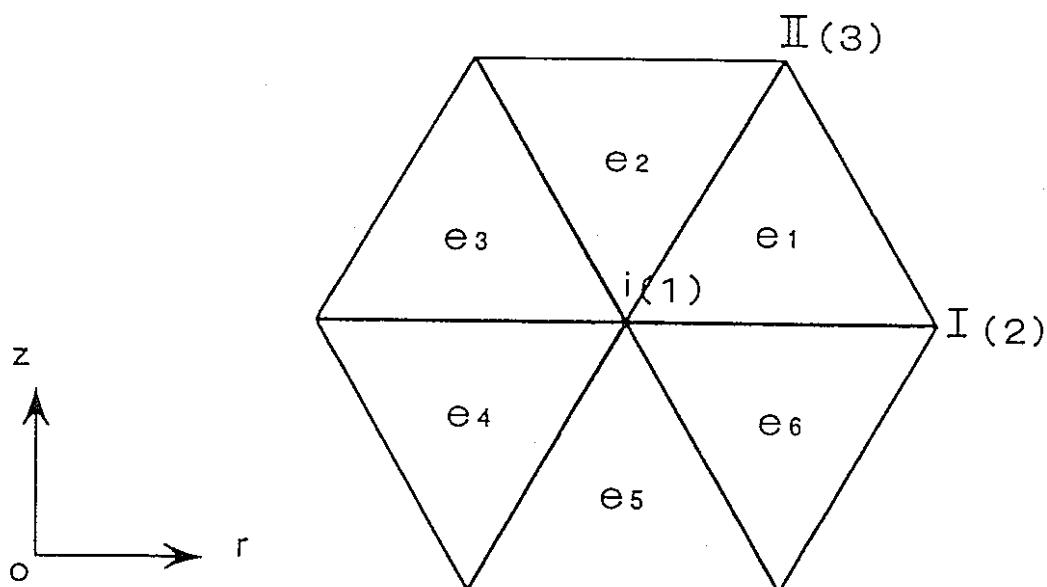


図2.5 計算領域

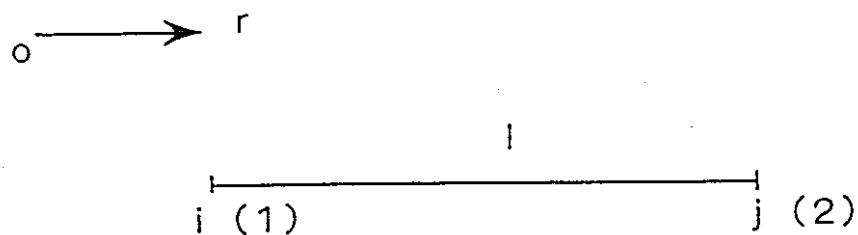


(a) 節点  $i$  と節点  $j$  が隣り合う場合

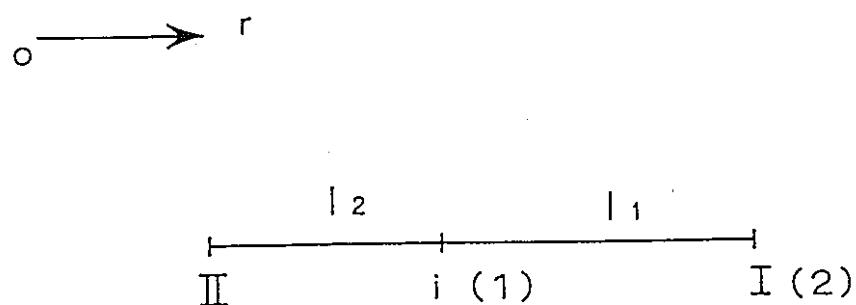


(b) 節点  $i$  と  $j$  が一致する場合

図2.6



(a) 節点  $i$  と節点  $j$  が隣り合う場合



(b) 節点  $i$  と  $j$  が一致する場合

図2.7

### 3 RF空洞の作る電磁界

RF空洞が作る電磁界  $E_c$ 、 $B_c$  は RF 空洞の固有モード  $E_n$ 、 $H_n$  の線形結合で表すことができる。その振幅は RF 空洞の等価回路の電圧および電流で表され、等価回路方程式を解いてその電圧および電流を求めれば RF 空洞の作る電磁界が得られる（以下の記述については第 1 章参照）。

固有モード  $E_n(r)$ 、 $H_n(r)$  は次の固有値問題の固有値  $k_n^2$  の解である。

$$\begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= 0 \quad (\Omega \text{ 内}) \\ n \times E &= 0 \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \\ n \cdot E &= 0 \quad (\Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 H + k^2 H &= 0 \quad (\Omega \text{ 内}) \\ n \cdot H &= 0 \quad (\Gamma_1 \text{ 上}) \\ n \times H &= 0 \quad (\Gamma_2 \text{ 上}) \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

ただし、 $\Omega$  および  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  は図 3.1 に示した体積およびその境界面である。この固有関数を使って、RF 空洞の作る電磁界  $E_c$ 、 $H_c$  は次式で与えられる。

$$E_c(r, t) = \sum_n e_n(t) E_n(r) \tag{3.0.3}$$

$$H_c(r, t) = \sum_n h_n(t) H_n(r) \tag{3.0.4}$$

しかし実際には、 $\omega_n = c k_n$  がクライストロンの動作周波数  $\omega$  に最も近い固有モードのみで  $E_c$ 、 $H_c$  を与えれば十分であるので、(3.0.3) および (3.0.4) 式の代わりに、

$$E_c(r, t) = e_n(t) E_n(r) \tag{3.0.5}$$

$$H_c(r, t) = h_n(t) H_n(r) \tag{3.0.6}$$

で  $E_c$ 、 $H_c$  を与える。係数  $e_n(t)$ 、 $h_n(t)$  は、次の微分方程式を満たす。

$$k_n h_n - \varepsilon_0 \frac{d e_n}{d t} = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV - \int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS \tag{3.0.7}$$

$$k_n e_n + \mu_0 \frac{d h_n}{d t} = - \int_{\Gamma} (E \times H_n) \cdot n \, dS \tag{3.0.8}$$

本章では、(3.0.7) および (3.0.8) 式の各量に時間因子  $e^{j\omega t}$  を仮定して、RF 空洞の等価回路を導く。実際のシミュレーションの際には、等価回路の各量 ( $L$ 、 $C$  等) は  $Q$  値等の実測値から与える。

#### 3.1 壁面損失

(3.0.7) および (3.0.8) 式の右辺の境界上での面積積分について、

$$\int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS = \int_{\Gamma_2} (H \times E_n) \cdot n \, dS \quad (3.1.1)$$

$$\int_{\Gamma} (E \times H_n) \cdot n \, dS = \int_{\Gamma_1} (E \times H_n) \cdot n \, dS \quad (3.1.2)$$

第1章でも述べた通り、(3.1.1)式において $\Gamma_2$ をRF空洞から十分に離すことによって、 $\Gamma_2$ 上で $E_n=0$ とできるので、(3.0.7)式の右辺第二項は無視できる。すなわち

$$k_n h_n - \varepsilon_0 \frac{d e_n}{d t} = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV \quad (3.1.3)$$

時間因子 $e^{j\omega t}$ ( $\omega$ は動作周波数)を仮定すると

$$k_n h_n - j \omega \varepsilon_0 e_n = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV \quad (3.1.4)$$

一方、(3.1.2)式について時間因子 $e^{j\omega t}$ を仮定すると、金属の電波インピーダンス $\zeta_n$ は

$$\zeta_n = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad (3.1.5)$$

(ただし、 $\mu$ および $\sigma$ は金属の透磁率および導電率)で表されるので、 $\Gamma_1$ 上で次式が成立する。

$$n \times E = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} H_{tan} \quad (3.1.6)$$

ここに、 $H_{tan}$ は磁界 $H$ の接線成分であるが、Wall lossが少ないと磁界の法線成分は小さいので、

$$H_{tan} \approx H = h_n H_n \quad (3.1.7)$$

と書ける。(3.1.6)および(3.1.7)式を使うと、(3.1.2)式は

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (E \times H_n) \cdot n \, dS &= \int_{\Gamma_1} (n \times E) \cdot H_n \, dS \\ &= (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} h_n \int_{\Gamma_1} H_n^2 \, dS \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

となるので、(3.0.8)式は次のようになる。

$$k_n e_n + j \omega \mu_0 h_n = -(1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} h_n \int_{\Gamma_1} H_n^2 \, dS \quad (3.1.9)$$

ここで、電磁界の強さが導体表面の $\frac{1}{e}=0.368$ に減衰する距離(表皮の厚さ)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (3.1.10)$$

をつかって、

$$\eta = \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_1} H_n^2 dS \quad (3.1.11)$$

とおくと、(3.1.9)式は

$$\begin{aligned} k_n e_n + j \omega \mu_0 h_n &= -(1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} h_n \int_{\Gamma_1} H_n^2 dS \\ &= -(1+j) \omega \mu h_n \frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_1} H_n^2 dS \\ &= -(1+j) \omega \mu \eta h_n \\ &\doteq - (1+j) \omega \mu_0 \eta h_n \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

と書ける。(3.1.4)および(3.1.12)式において、

$$v = V e^{j \omega t} = k_n e_n \quad (3.1.13)$$

$$i = I e^{j \omega t} = -k_n h_n \quad (3.1.14)$$

$$L' = \frac{\mu_0}{k_n} (1 + \eta) \quad (3.1.15)$$

$$C = \frac{\epsilon_0}{k_n} \quad (3.1.16)$$

$$R' = \frac{\mu_0}{k_n} \omega \eta \quad (3.1.17)$$

$$i_{ind} = I_{ind} e^{j \omega t} = - \int_{\Omega} E_n \cdot J dV \quad (3.1.18)$$

とおけば、

$$I + j \omega C V = I_{ind} \quad (3.1.19)$$

$$V - (R' + j \omega L') I = 0 \quad (3.1.20)$$

となり、これらの式は図3.2(a)に示した回路の回路方程式になっている。図3.2(a)の回路は、等価変換すると図3.2(b)のようになる。ここに、

$$L = \frac{\mu_0}{k_n} (1 + \eta) \left\{ 1 + \left( \frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \right\} \quad (3.1.21)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{\mu_0}{k_n} \omega \eta \left\{ 1 + \left( \frac{1 + \eta}{\eta} \right)^2 \right\} \quad (3.1.22)$$

である。すなはち、導波管との接続が無いアイドラ空洞の等価回路は図3.2(b)の共振回

路になる。この共振回路の固有角周波数  $\omega_0$  は、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega_n}{\sqrt{(1+\eta)\left\{1 + \left(\frac{1}{1+\eta}\right)^2\right\}}} \quad (3.1.23)$$

となり、Wall lossを考慮しない場合に比べて小さくなる。また、 $Q_0$  (unloaded Q) は

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1+\eta}{\eta} \quad (3.1.24)$$

となる。 $Q_0$ についておおよその目安をつけると

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1+\eta}{\eta} \\ &\approx \frac{1+\eta}{\eta} \\ &= \frac{\frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_1} H_n^2 dS + \int_{\Omega} H_n^2 dV}{\frac{\delta}{2} \int_{\Gamma_1} H_n^2 dS} \\ &\approx \frac{\int_{\Omega \cup \Delta} H_n^2 dV}{\int_{\Delta} H_n^2 dV} \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

( $\Delta$ は $\delta$ の厚さの空洞壁の表皮層の体積)となる。つまり、 $Q_0$ は空洞全体での $H_n^2$ の積分と、表皮層での $H_n^2$ の積分との比に大体等しい。

### 3.2 RF空洞と外部回路との結合

RF空洞に同軸線路、導波管などの伝送線路が接続されている場合を考える(図3.3)。この場合、RF空洞の固有モード  $E_n$ 、 $B_n$  は、線路の断面  $\Gamma_3$  において

$$n \cdot E_n = 0 \quad (\Gamma_3 \text{ 上}) \quad (3.2.1)$$

$$n \times H_n = 0 \quad (\Gamma_3 \text{ 上}) \quad (3.2.2)$$

なる境界条件を与えて求める。固有モードは線路との接続が無い場合と多少異なるが、(3.0.7)および(3.0.8)式の形は変わらない。(3.0.8)式からは、線路との接続が無い場合(3.1節)と同様にして、(3.1.12)式と同じ式が得られる。すなわち

$$k_n e_n + j \omega \mu_0 h_n = -(1+j) \omega \mu_0 \eta h_n \quad (3.2.3)$$

一方、(3.0.7)式の右辺第二項について

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS &= \int_{\Gamma_3} (H \times E_n) \cdot n \, dS \\ &= \int_{\Gamma_3} (n \times H_{tan}) \cdot E_n \, dS\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

ここで、 $\Gamma_3$ 上の電磁解の接線方向成分を線路の伝送モード $E_{tm}$ 、 $H_{tm}$ で展開する。

$$E_{tan} = e_n E_n = \sum_m V_m E_{tm} e^{j\omega_m t} \quad (3.2.5)$$

$$H_{tan} = \sum_m I_m Z_{0m} H_{tm} e^{j\omega_m t} = \sum_m I_m k \times E_{tm} e^{j\omega_m t} \quad (3.2.6)$$

ここに、 $V_m$ および $I_m$ は線路の伝送モードの等価電圧および電流、 $Z_{0m}$ は伝送モードの特性インピーダンスである。また、 $k$ は線路の電磁波の進行方向の単位ベクトルで、入力空洞では $k=-n$ である（出力空洞では $k=n$ ）。さらに、RF空洞の固有モード $E_n$ を線路のモード $E_{tm}$ で展開する。

$$E_n = \sum_m l_{nm} E_{tm} \quad (3.2.7)$$

$l_{nm}$ は $E_n$ と $E_{tm}$ の結合の度合いを表す。 $(3.2.6)$ および $(3.2.7)$ 式を $(3.2.4)$ 式に代入すると、

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} (H \times E_n) \cdot n \, dS &= \int_{\Gamma_3} (n \times \sum_m I_m k \times E_{tm}) \cdot \sum_m l_{nm} E_{tm} \, dS \, e^{j\omega_m t} \\ &= \sum_m l_{nm} I_m e^{j\omega_m t}\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

これを $(3.0.7)$ 式に代入して次式を得る。

$$k_n h_n - j \omega \varepsilon_0 e_n = \int_{\Omega} E_n \cdot J \, dV - \sum_m l_{nm} I_m e^{j\omega_m t} \quad (3.2.9)$$

また、 $(3.2.5)$ および $(3.2.7)$ 式より

$$e_n l_{nm} = V_m e^{j\omega_m t} \quad (3.2.10)$$

が得られる。

伝送線路には一つの伝送モード $m$  ( $\omega_m \approx \omega$ ) のみが伝搬しているとして、 $(3.2.3)$ 、 $(3.2.9)$ 、 $(3.2.10)$ 式において、 $(3.1.13) \sim (3.1.18)$ のようにおくと

$$I + j \omega C V + l_{nm} I_m = I_{ind} \quad (3.2.11)$$

$$V - (R' + j \omega L') I = 0 \quad (3.2.12)$$

$$V = \frac{1}{l_{nm}} V_m \quad (3.2.13)$$

となる。したがって、等価回路において、伝送線路との結合は図3.4(a)のような理想変圧器で表される。さらに、3.1節と同様に図3.4(a)を等価変換すると図3.4(b)のようになる。

### 3.3 RF空洞の等価回路

3.1節および3.2節の結論より、各RF空洞の等価回路は図3.5のようになる。入力空洞の $\beta G$ はRF電源の内部アドミタンスと伝送線路の特性アドミタンスの和、出力空洞の $\beta G$ は、負荷と伝送線路の特性アドミタンスの和である。また、 $\beta G$ および $i_s$ には図3.4の理想変圧器の結合定数 $L_{nm}$ が既に施してある。

等価回路の各量 $L$ 、 $C$ 、 $G$ 、 $\beta$ は、RF空洞の $Q_l$ （loaded  $Q$ ）、 $Q_0$ 、 $\omega_0$ 、 $R/Q$ の実測値を用いて次の式から求めることができる。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.3.1)$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} \quad (3.3.2)$$

$$Q_l = \frac{\omega_0 C}{(1+\beta)G} \quad (3.3.3)$$

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (3.3.4)$$

また、RF電源の電力 $P_{in}$ は、 $\beta G$ と等しい負荷につないだときに負荷で消費される平均電力によって定義される。よって、

$$P_{in} = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta G} \left( \frac{I_g}{2} \right)^2 \quad (3.3.5)$$

したがってこの式から、 $P_{in}$ の測定値を用いて等価回路の $i_s$ を求めることができる。

RF空洞の作る電磁界 $E_c$ 、 $B_c$ の計算方法についてまとめると以下のようになる。

先ず、(3.0.1)、(3.0.2)式の固有値問題を解いて固有モード $E_n$ 、 $B_n$ を予め求めておく。各時間ステップにおいては、ビーム $\rho$ 、 $J$ から $i_{ind}$ を求める、それを使って図3.5の等価回路の電圧 $v$  ( $= k_n e_n$ ) および電流 $i$  ( $= -k_n h_n$ ) を求めて各時間における $e_n$ 、 $h_n$ を求める。さらに、固有モード $E_n$ 、 $B_n$ を $e_n$ 、 $h_n$ 倍して $E_c$ 、 $B_c$ を得る。

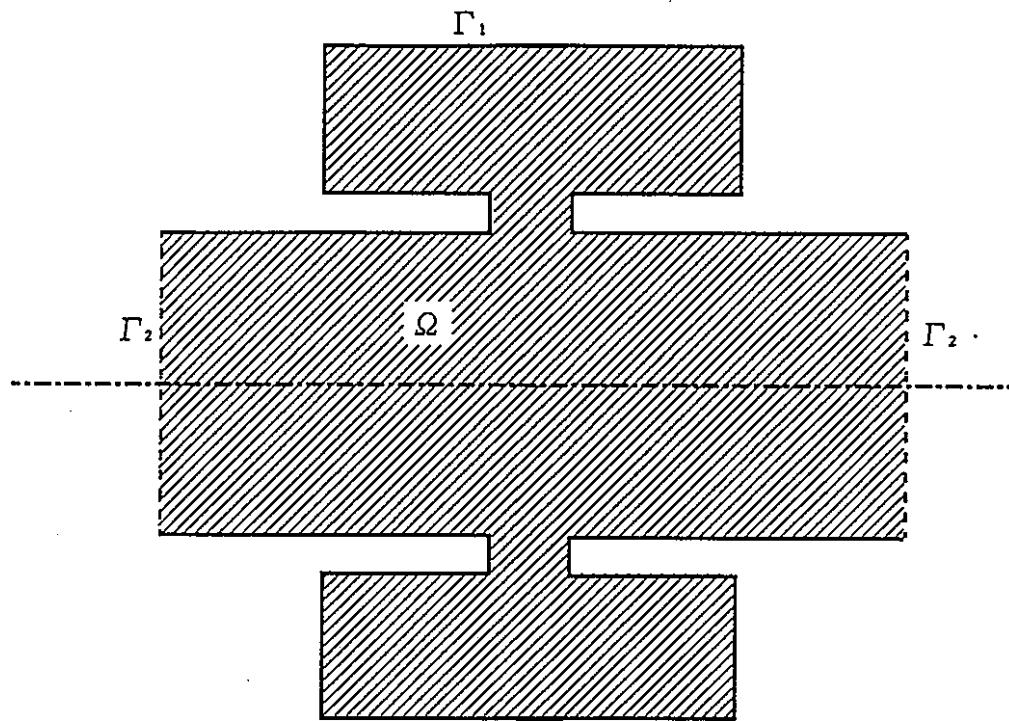


図3. 1 RF空洞の固有モードの計算領域

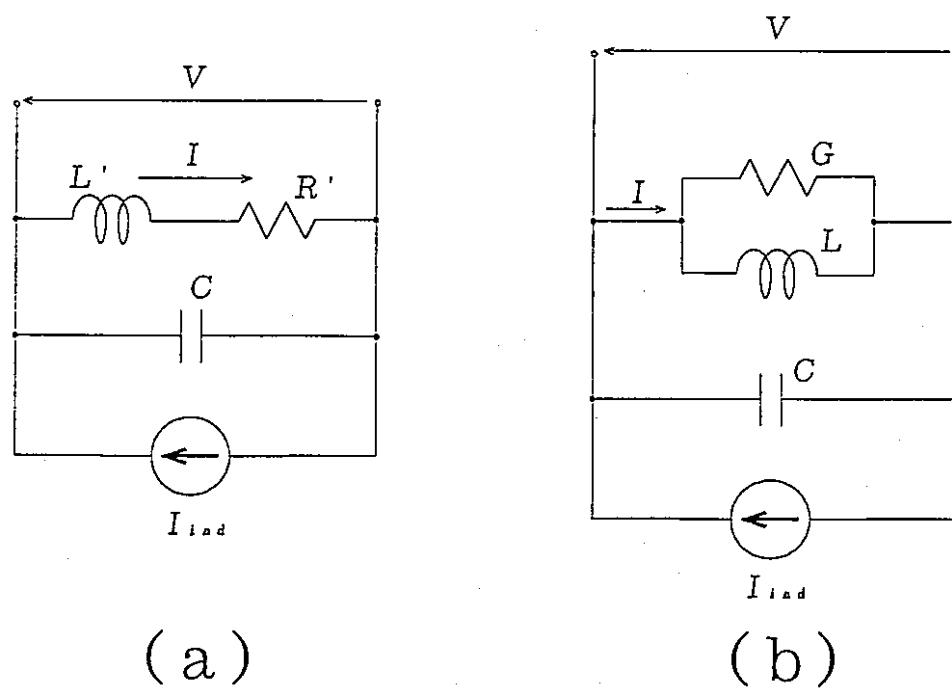


図3. 2 RF空洞の等価回路

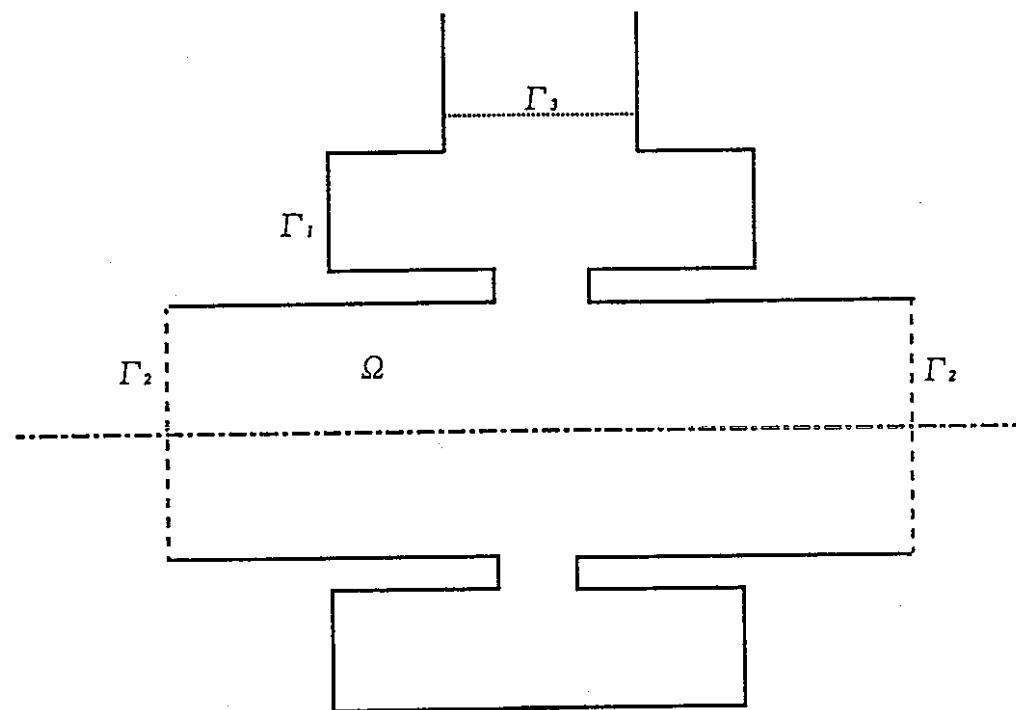


図3.3 RF空洞の固有モードの計算領域  
(伝送線路との接続がある場合)

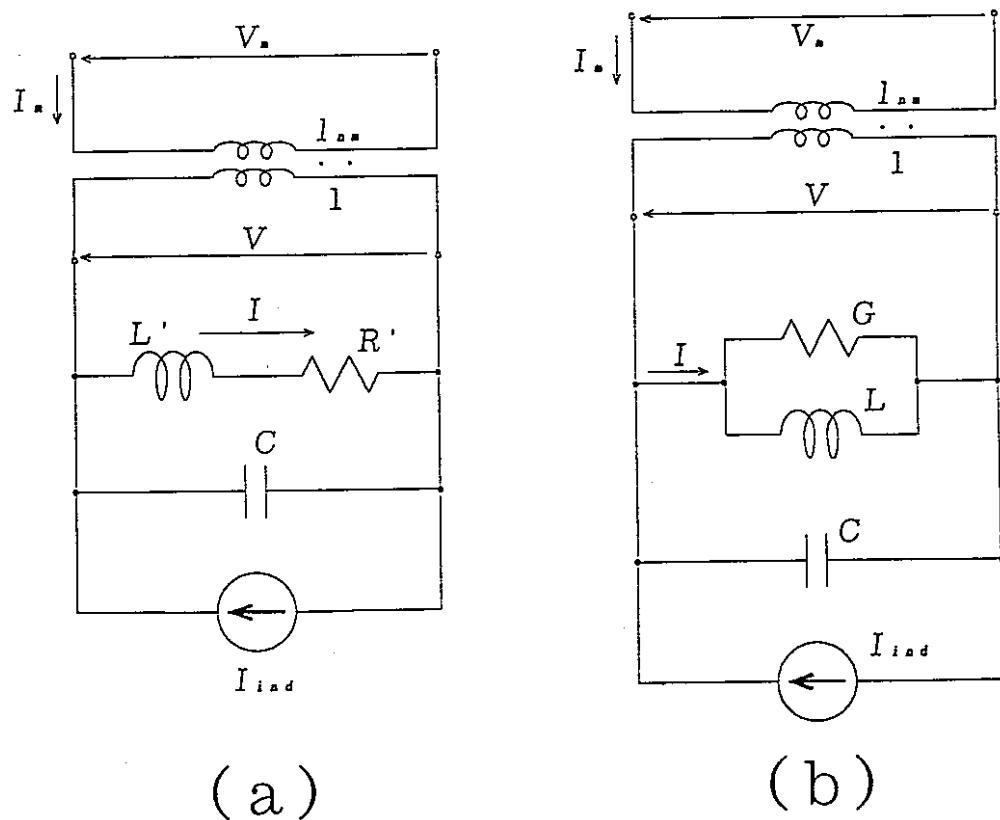


図3.4 伝送線路との接続のあるRF空洞の等価回路

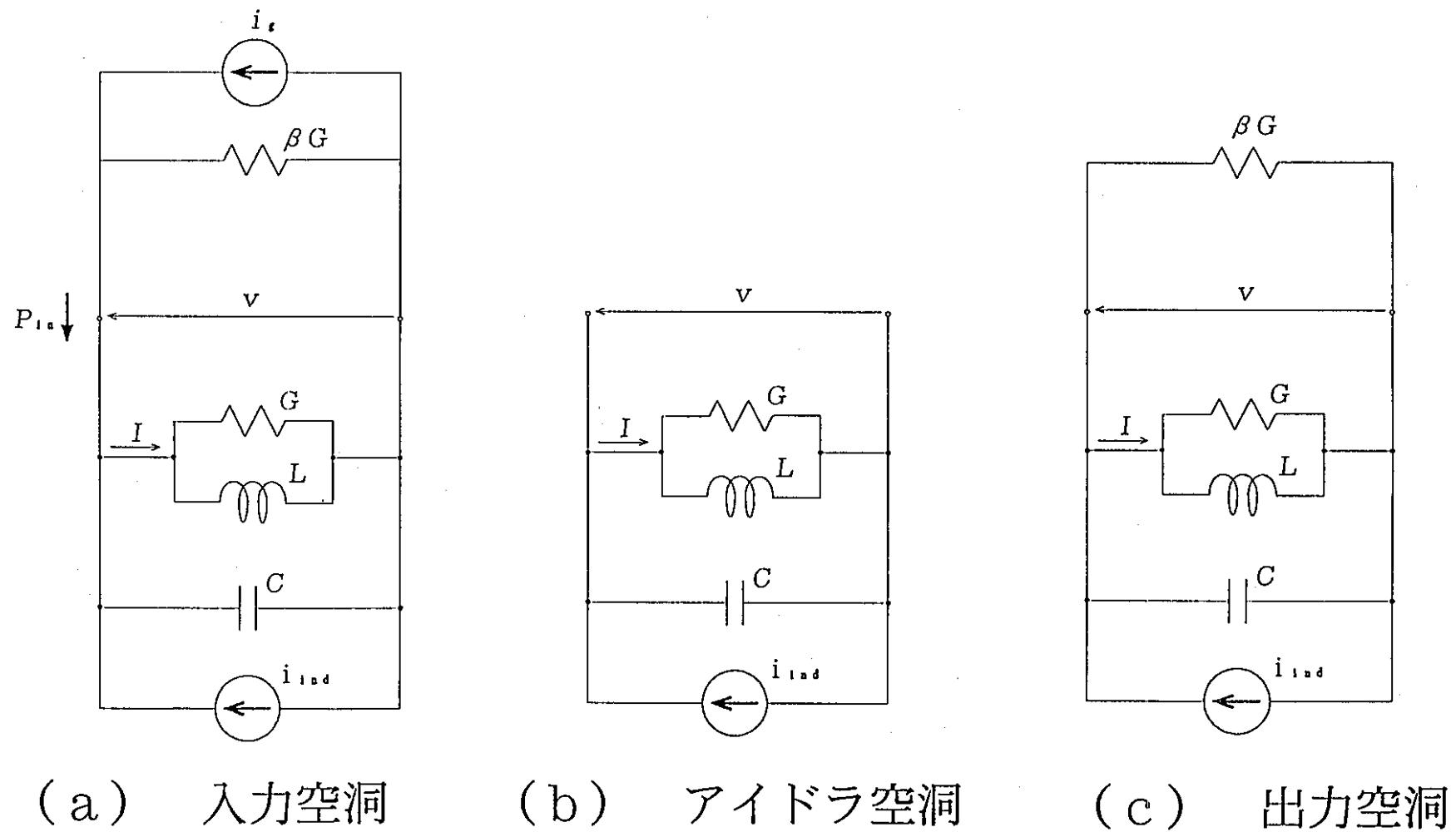


図3.5 RF空洞の等価回路

## 4 粒子の運動方程式

粒子（位置  $r$ 、速度  $v$ ）の相対論的な運動方程式は

$$\frac{d r}{d t} = v \quad (4.1)_1$$

$$\frac{d(r v)}{d t} = \frac{q}{m} (E(r, t) + v \times B(r, t)) \quad (4.1)_2$$

である。ここに、

$m$  : 粒子の静止質量

$q$  : 粒子の電荷

$E = E_b + E_c$ 、 $B = B_b + B_c + B_f$  : 電磁界

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta^2 = \beta_r^2 + \beta_\theta^2 + \beta_z^2 = \left(\frac{v_r}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_\theta}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{c}\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (4.2)$$

$c$  : 光速

である。 $(4.1)_1$ 式の左辺

$$\frac{d(r v)}{d t} = \frac{d r}{d t} v + r \frac{d v}{d t} \quad (4.3)$$

について、粒子の運動エネルギーを  $K$  とおくと

$$m \gamma c^2 = m c^2 + K \quad (4.4)$$

であることから

$$\begin{aligned} \frac{d \gamma}{d t} &= \frac{1}{m c^2} \frac{d(m c^2 + K)}{d t} \\ &= \frac{1}{m c^2} \frac{d K}{d t} \\ &= \frac{q}{m c^2} E \cdot v \end{aligned} \quad (4.5)$$

である。したがって、運動方程式 $(4.1)$ 式は次のようになる。

$$\frac{d r}{d t} = v \quad (4.6)_1$$

$$\frac{d v}{d t} = \frac{q}{m \gamma} \left( E + v \times B - \frac{E \cdot v}{c^2} v \right) \quad (4.6)_2$$

次に、 $(4.6)$ 式の各成分について考える。先ず、 $(4.6)_1$ 式について

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_r &= \left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_x \cos \theta + \left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_y \sin \theta \\
 &= \frac{dx}{dt} \cos \theta + \frac{dy}{dt} \sin \theta \\
 &= \frac{d(r \cos \theta)}{dt} \cos \theta + \frac{d(r \sin \theta)}{dt} \sin \theta \\
 &= \left( \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \cos \theta + \left( \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \sin \theta \\
 &= \frac{dr}{dt}
 \end{aligned} \tag{4.7}_1$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_\theta &= - \left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_x \sin \theta + \left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_y \cos \theta \\
 &= - \left( \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta + \left( \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta \\
 &= r \frac{d\theta}{dt}
 \end{aligned} \tag{4.7}_2$$

$$\left( \frac{d \mathbf{r}}{dt} \right)_z = \frac{dz}{dt} \tag{4.7}_3$$

より、

$$\frac{dr}{dt} = v_r \tag{4.8}_1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r} \tag{4.8}_2$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \tag{4.8}_3$$

となる。また、(4.6)<sub>2</sub>式について

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_r &= \left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_x \cos \theta + \left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_y \sin \theta \\
 &= \frac{dv_x}{dt} \cos \theta + \frac{dv_y}{dt} \sin \theta \\
 &= \frac{d(v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta)}{dt} \cos \theta + \frac{d(v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta)}{dt} \sin \theta \\
 &= \left( \frac{dv_r}{dt} \cos \theta - v_r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta - \frac{dv_\theta}{dt} \sin \theta - v_\theta \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \cos \theta \\
 &\quad + \left( \frac{dv_r}{dt} \sin \theta + v_r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + \frac{dv_\theta}{dt} \cos \theta - v_\theta \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \sin \theta \\
 &= \frac{dv_r}{dt} - v_\theta \frac{d\theta}{dt} \\
 &= \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \quad (\because (4.8)_2 \text{式})
 \end{aligned} \tag{4.9}_1$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_\theta &= - \left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_x \sin \theta + \left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_y \cos \theta \\
&= - \left( \frac{dv_r}{dt} \cos \theta - v_r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta - \frac{dv_\theta}{dt} \sin \theta - v_\theta \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \right) \sin \theta \\
&\quad + \left( \frac{dv_r}{dt} \sin \theta + v_r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + \frac{dv_\theta}{dt} \cos \theta - v_\theta \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \right) \cos \theta \\
&= \frac{dv_\theta}{dt} + v_r \frac{d\theta}{dt} \\
&= \frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \quad (\because (4.8)_2 \text{式}) \tag{4.9}_2
\end{aligned}$$

$$\left( \frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{4.9}_3$$

より、

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \{ E_r + v_\theta B_z - v_z B_\theta - (E_r \beta_r + E_\theta \beta_\theta + E_z \beta_z) \beta_r \} + \frac{v_\theta^2}{r} \tag{4.10}_1$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \{ E_\theta + v_z B_r - v_r B_z - (E_r \beta_r + E_\theta \beta_\theta + E_z \beta_z) \beta_\theta \} - \frac{v_r v_\theta}{r} \tag{4.10}_2$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \{ E_z + v_r B_\theta - v_\theta B_r - (E_r \beta_r + E_\theta \beta_\theta + E_z \beta_z) \beta_z \} \tag{4.10}_3$$

となる。軸対称を仮定しているため、 $\theta$  を求める必要はないので、解くべき運動方程式は

$$\frac{dr}{dt} = v_r \tag{4.11}_1$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z \tag{4.11}_2$$

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \{ E_r + v_\theta B_z - v_z B_\theta - (E_r \beta_r + E_\theta \beta_\theta + E_z \beta_z) \beta_r \} + \frac{v_\theta^2}{r} \tag{4.11}_3$$

$$\frac{dv_\theta}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \{ E_\theta + v_z B_r - v_r B_z - (E_r \beta_r + E_\theta \beta_\theta + E_z \beta_z) \beta_\theta \} - \frac{v_r v_\theta}{r} \tag{4.11}_4$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \{ E_z + v_r B_\theta - v_\theta B_r - (E_r \beta_r + E_\theta \beta_\theta + E_z \beta_z) \beta_z \} \tag{4.11}_5$$

である。

## 5 時間発展

第2章では、ビームの作る電磁界  $E_b$ 、 $B_b$  のスカラおよびベクトルポテンシャル  $\phi_b$ 、 $A_{b,r}$ 、 $A_{b,\theta}$ 、 $A_{b,z}$  の偏微分方程式 ((2.1.8)式) の空間変数をガラーキン有限要素法を用いて離散化して、空間メッシュの節点における  $\phi_b$ 、 $A_{b,r}$ 、 $A_{b,\theta}$ 、 $A_{b,z}$  の値のマトリクス常微分方程式を得た。すなわち、

$$L\dot{\alpha} + M\ddot{\alpha} + N\ddot{\ddot{\alpha}} = f \quad (5.1)$$

ここで、

$$\eta \equiv \dot{\alpha} \quad (5.2)$$

とおくと、

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \eta \\ \dot{\eta} = N^{-1}f - N^{-1}L\dot{\alpha} - N^{-1}M\eta \end{cases} \quad (5.3)_1 \quad (5.3)_2$$

となり、時間に関する一階の多変数常微分方程式に帰着される。ここで、 $L$ 、 $M$ 、 $N$  は時間に依存しない行列であり、 $f$  は時間依存のベクトルである。 $f$  は個々の粒子の位置  $r_v$ 、速度  $v_v$  を使って

$$J = q \sum_v v_v \delta(r - r_v) \delta(z - z_v) \quad (5.4)$$

$$\rho = q \sum_v \delta(r - r_v) \delta(z - z_v) \quad (5.5)$$

を計算することにより求められる (2.3.4節参照)。

(5.3)式、粒子の運動方程式(4.11)式、およびRF空洞の等価回路方程式 (第3章参照) をルンゲークッタ法により解く。

打ち切り誤差が時間刻み幅  $h$  の5乗以下のルンゲークッタ法のアルゴリズムは、以下のように与えられる。

$$M\text{元連立常微分方程式} \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(y) \quad (5.6)$$

$$\text{初期条件} \quad y_i(t_0) = y_{i0} \quad (5.7)$$

$y_i^{t+1}$  まで解が求められたとして、 $y_i^{t+1}$  を

$$y_i^{t+1} = y_i^t + \Delta y_i^t \quad (5.8)$$

としたとき、増分  $\Delta y_i^t$  は

$$\Delta y_i^t = \frac{1}{6}(k_{i0} + 2k_{i1} + 2k_{i2} + k_{i3}) \quad (5.9)$$

で与えられる。ここに、 $k_{i0}$ 、 $k_{i1}$ 、 $k_{i2}$ 、 $k_{i3}$  は

$$k_{i0} = h f_i(y^i) \quad (5.10)_1$$

$$k_{i1} = h f_i\left(y^i + \frac{k_0}{2}\right) \quad (5.10)_2$$

$$k_{i2} = h f_i\left(y^i + \frac{k_1}{2}\right) \quad (5.10)_3$$

$$k_{i3} = h f_i(y^i + k_2) \quad (5.10)_4$$

で計算される。

## 付録 C

京都大学原子エネルギー研究所彙報 第79輯 (1991)

## 粒子線工学研究部門

## 多段ベネチアンブラインド型プラズマ直接発電機における最適回収電圧評価

吉川 潔

Table 1 Fraction of Energy Carrier  
(Total fusion power 1.4 GW)

proton (14.67 MeV)	260 MW
other products ( $\alpha$ , $^3\text{He}$ , T, p)	30 MW
thermalized plasma	725 MW
neutron	65 MW
radiation	320 MW

## 1. 序

D- $^3\text{He}$  FRC 先進核融合炉では、約50%の核融合エネルギーが熱化したプラズマの運動エネルギーとして炉心部から漏洩する(表1)。またそのエネルギー分布は図1のようになる。この炉の特徴は中性子発生が少ない(5%以下)ので中性子に起因する放射化の問題が大幅に低減でき、かつ荷電粒子の占める割合が大きいため電磁場を介した高効率直接発電が潜在的に可能であることである。そこで、後者の直接発電特性を調べるために、多段ベネチアンブラインド型プラズマ直接発電機(PDC)設計に必要な最適回収電極電位の評価を行った。

## 2. 最適回収電極電位

熱化プラズマは多成分( $j=D, p, T, ^3\text{He}, ^4\text{He}$ )からなり、またその温度 $\theta_j$ 、ならびに両極性電位による加速のため生ずる最小エネルギー $E_{min}$ も成分によって一般には異なる。いま、 $j$ 種成分の電流成分( $dI_j$ )を shifted Maxwellian 分布と仮定すれば、

$$\frac{dI_j}{dE} = f_j(E) = \frac{I_{0j}}{\theta_j} \exp\left(-\frac{E-E_{0j}}{\theta_j}\right) \quad (1)$$

と表される。これを用いてN段の回収電極(電位 $V_m$ ,  $m=1, 2, \dots, N$ )を持つPDCの回収電力 $P$ は次のように表される。ただし、プラズマイオンは電極に対して垂直に運動し、かつ電極有限幅による透過率の減少はないと仮定した。

$$P = \sum_{j=1}^5 \sum_{m=1}^N V_m \int_{V_m}^{V_{m+1}} f_j(E^*) dE^*, \quad E^* = E/(Ze), \\ V_1 = E_{min}^*, \quad V_{N+1} = \infty \quad (2)$$

これより、 $P$ を最大にする $V_k(k=1, 2, \dots, N)$ は

$$\partial P / \partial V_k = 0, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

からなる方程式より求まる。

D- $^3\text{He}$ FRC 先進核融合炉設計によれば、熱化漏洩プラズマは2種類の異なる温度( $\theta, \Theta$ )を持つグループに分かれる<sup>1)</sup>。すなわち、

$$D+p+T: I_{01}=661 \text{ A}, e\theta=265 \text{ keV}, E_{01}=90 \text{ keV}$$

$^3\text{He}+^4\text{He}$ :  $I_{02}=731 \text{ A}, 2e\Theta=175 \text{ keV}, E_{02}=180 \text{ keV}$   
これより、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , および $x_k$ を、 $\phi_0=E_{01}/e=90 \text{ kV}$ として、

$$\alpha = \frac{I_{01}}{e\theta} \exp\left(\frac{\phi_0}{\theta}\right) \quad (3)$$

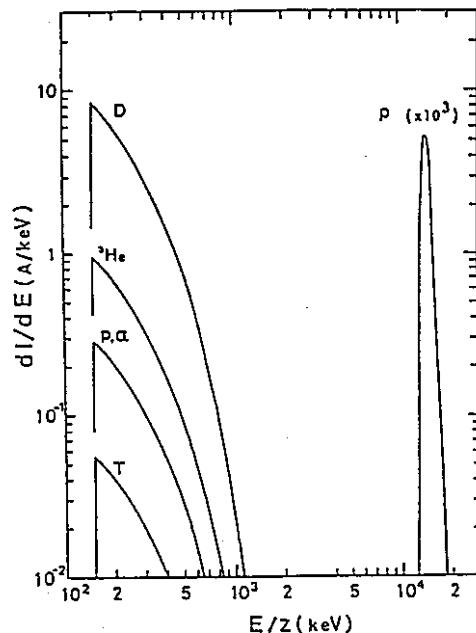
$$\beta = \frac{I_{02}}{2e\Theta} \exp\left(\frac{\phi_0}{\Theta}\right) \quad (4)$$

$$\gamma = \theta/\Theta \quad (5)$$

$$x_k = V_k/\theta \quad (6)$$

で表すと、 $V_k(k=1, 2, \dots, N)$ は次式より求まる。

Kiyoshi YOSHIKAWA: Estimation of Optimal Potential of Multi-Stage Collectors in a Venetian-Blind-Type Plasma Direct Energy Converter

図1 D- $^3\text{He}$  FRC 先進核融合炉からの漏洩プラズマのエネルギー分布

$$\begin{aligned} & \alpha \exp(-x_k)(1+x_{k-1}-x_k) \\ & + \beta \exp(-\gamma x_k)(1+\gamma x_{k-1}-\gamma x_k) \\ & - \alpha \exp(-x_{k+1}) - \beta \exp(-x_{k+1}) = 0, \\ & (k=2, 3, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \exp(-x_N)(1+x_{N-1}-x_N) \\ & + \beta \exp(-\gamma x_N)(1+\gamma x_{N-1}-\gamma x_N) = 0, \\ & (V_{N+1}=\infty) \end{aligned} \quad (9)$$

5段ベネチアンブラインド型プラズマ直接発電機に、(8)

(9)式を適用して得られた結果を以下に示す。

$$V_1 = 90.0 \text{ kV}, \quad V_2 = 152.9 \text{ kV}, \quad V_3 = 243.2 \text{ kV},$$

$$V_4 = 386.7 \text{ kV}, \quad V_5 = 643.5 \text{ kV}$$

ただし、実際のPDCに適用する場合はプラズマビームの入射角や電極の勾配等を考慮する必要がある<sup>2)</sup>。

## 参考文献

- 未来工学研究所「月面基地と月資源開発」中間報告書(1989).
- 山本 他; 京大原研彙報, 79, 36 (1991).

## 付録 D

京都大学原子エネルギー研究所集報 第79輯 (1991)

D-<sup>3</sup>He FRC 核融合炉用ベネチアンブラインド型プラズマ直接発電機の設計 (I)

山本 靖, 吉川 淩

## 1. 序

D-<sup>3</sup>He FRC 核融合炉では、端部漏洩プラズマは、核融合反応生成物の 14.7 MeV 陽子と、熱化漏洩プラズマからなり、後者は 2 種類の異なる温度を持つグループに分かれる<sup>1</sup>。このうち熱化漏洩プラズマのエネルギー回収を行う多段ベネチアンブラインド型 PDC の設計計算を行ったので報告する。

## 2. 設計手法

本 PDC は、従来設計してきた D-T タンデムミラー型核融合炉 PDC と比較すると、以下の特徴を持つ。

- (1) 両極性拡散による電位 (90 kV) が、イオンの温度 (265 keV 及び 175 keV) に比べて小さいため、回収効率を上げるために、多段化する必要がある。
- (2) MeV クラスの核融合生成物については、PDC 内を通過させた後に、電磁場との相互作用を用いてエネルギー回収を行うため、最終段の電極もベネチアンブラインドとする必要があり、熱化漏洩プラズマを回収するためには十分な長さが必要となる (図 1)。

そこで、回収電極段数に対する効率・PDC 長の変化を調べて、段数を決定した。

計算には、PDC 特性評価 0 次元コード<sup>2</sup> を用い、最適電位計算<sup>3</sup>、電極長計算プログラムを組み合わせて段数に対する最適設計を行い、回収電極段数に対する効率・PDC 長を評価した。

計算において N 段 PDC の各電極の長さ  $L_i$  は、  
1~N-1段 : 次段により反射される粒子に対する後  
方透過率  $T_{Bi}=0$

N段 : 3 MeV 以下の粒子に対する前方透過率  
 $T_{FN}=0$

の条件により求め、電極間隔は、耐圧を 5 kV/cm として電極間電位より求めて、PDC の長さを評価した。計算に用いた他の条件は以下の通りである。

漏洩プラズマの入射角  $\alpha_0=8.0^\circ$

回収電極 厚さ  $D=0.25 \text{ cm}$

間隔  $H=24.75 \text{ cm}$

傾き  $\beta_i=0.0^\circ$

電子抑制電極電位  $V_{so}=-10 \text{ kV}$

二次電子抑制電極電位  $V_{si}=V_{ci}-20 \text{ kV}$

## 3. 計算結果

図 2 に回収電極段数を 3 ~ 7 段の範囲で効率・全長を

Yasushi YAMAMOTO, Kiyoshi YOSHIKAWA: Design of a Multi-Stage Venetian-Blind-type Plasma Direct Energy Converter for D-<sup>3</sup>He FRC Fusion Reactor (I)

表 1 5 段ベネチアンブラインド型 PDC の電極パラメータ (自動設計)

i	$V_{ci}$ (kV)	$L_i$ (cm)	$d_i$ (cm)
1	88.2	68.8	19.7
2	149.9	66.7	16.3
3	238.5	66.7	21.7
4	379.2	68.2	32.1
5	631.0	1371.8	54.4

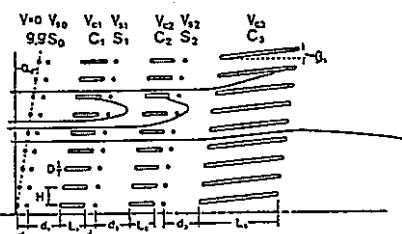


図 1 D-<sup>3</sup>He FRC 核融合炉用ベネチアンブラインド型 PDC の概要

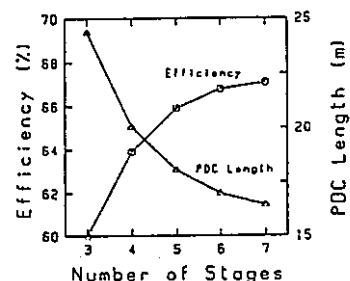


図 2 回収電極段数に対する効率・PDC 長さ

計算した結果を示す。図より、回収電極段数の増加による効率・全長の改善は、5 段以上では小さいことがわかる。回収電極段数の增加は、PDC 構造の複雑化、回収電力の交流変換設備の増加などを伴うことから、5 段 PDC を選択する。5 段 PDC のパラメータを表 1 に示す。回収効率は、65.9% である。

PDC の入射断面積は入口の接地電極の許容熱負荷で制限され、1 MW/m<sup>2</sup> とすると半径 10.8 m が必要となる。

電極厚み・許容熱負荷については、冷却方式・エロジションとの兼ね合いを含めてさらに検討する必要がある。

## 参考文献

- 1) 未来工学研究所「月面基地と月資源開発」中間報告書 (1989).
- 2) 香田：京都大学工学研究科修士論文 (1986).
- 3) 吉川：京大原研集報, 79, 22 (1991).